

Uma abordagem geométrica ao problema da braquistócrona

(*A geometric approach to the brachistochrone problem*)

M.A. De Andrade, L.G. Ferreira Filho¹

Faculdade de Tecnologia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Resende, RJ Brasil

Recebido em 9/1/2015; Aceito em 16/2/2015; Publicado em 30/6/2015

Apresentamos uma abordagem essencialmente geométrica do problema da braquistócrona. Utilizamos conceitos de trigonometria básica, acessíveis a estudantes de Física Geral e Experimental I e II, de modo a permitir que o problema já seja apresentado num primeiro momento ainda no primeiro ano de um curso de física ou engenharia. Mostramos que a aceleração resultante sobre uma partícula descrevendo uma braquistócrona tem módulo g da aceleração gravitacional e aponta na direção do centro do círculo que gera a cicloide. Apresentamos um método geométrico que permite deduzir a equação diferencial da cicloide sem lançar mão do cálculo variacional. Mostramos que o tempo de descida ao longo desta trajetória é sempre o mesmo, independentemente da posição inicial.

Palavras-chave: braquistócrona, cicloide, geometria.

We present an essentially geometric approach to the brachistochrone problem. We apply basic knowledge of trigonometry, accessible to the students in a one or two semester basic physics program, in such a way to allow the problem to be introduced at the beginning of an undergraduate course of Physics or Engineering. We show that the resulting acceleration on a particle describing a brachistochrone has gravitational acceleration of magnitude g and points towards the center of the circle that generates the cycloid. We present a geometrical method to deduce the differential equation for the cycloid, without using variational calculus. We show that the descending time along this trajectory is always the same, independently of the starting point.

Keywords: brachistochrone, cycloid, geometry.

1. Introdução

Em Junho de 1696, na revista *Acta Eruditorum*, fundada por Gottfried Wilhelm Leibniz [1], o matemático suíço Jean Bernoulli publicou um problema que chamou a atenção dos maiores matemáticos e físicos da época. O problema consistia em encontrar a forma que deveria ter uma trajetória sobre a qual uma partícula deslizaria, partindo do repouso e sob ação apenas da gravidade, levando o menor tempo possível para atingir um outro ponto mais abaixo nessa trajetória. Nas palavras de Bernoulli: “Dados dois pontos A e B em níveis diferentes e não sobre a mesma vertical, determinar o caminho em que uma partícula móvel vai de A até B em tempo mínimo, assumindo que sua aceleração é apenas devida à gravidade” (Jean Bernoulli, 1696) [2]. Leibniz enviou o problema por carta aos maiores matemáticos da época. A solução foi rapidamente encontrada por vários deles, inclusive o próprio Leibniz, além de Isaac Newton e os irmãos Jacques e Jean Bernoulli. Nesta solução, todos indicaram que a curva mais rápida

era uma cicloide, também denominada braquistócrona. A palavra Braquistócrona é composta por dois radicais gregos, *brakhisto*, que significa o menor e *chronus* que significa tempo, e se refere à curva que une dois pontos A e B , que pertencem ao mesmo plano vertical, onde o ponto A está acima do ponto B , sobre a qual uma partícula partindo do repouso desliza apenas sob a ação da gravidade, com o menor tempo. Para além de apenas solucionar este problema, no processo, o trabalho desses matemáticos redundou também na criação do cálculo de variações ou cálculo variacional. Esta ferramenta matemática poderosa está no fundamento da formulação Lagrangiana da mecânica clássica, também denominada mecânica analítica [3,4], e consequentemente fundamenta toda a revolução científica ocorrida na virada do Século. XIX para o Século. XX, com a formulação da mecânica quântica e da mecânica relativística. Nós revisitamos o problema da braquistócrona utilizando uma abordagem essencialmente geométrica. Mostramos que o vetor aceleração resultante sobre uma partícula descrevendo esta trajetória, tem módulo igual a aceleração

¹E-mail: kph120@gmail.com.

da gravidade g e aponta na direção do centro da circunferência que gera a cicloide. Deduzimos a equação diferencial da cicloide utilizando conceitos básicos de trigonometria, acessíveis a estudantes em um curso de Física Geral e Experimental I. Apresentamos também um método, acessível a estudantes do ciclo básico de um curso de física ou engenharia, para demonstrar que o tempo transcorrido ao longo da cicloide independe do ponto de partida.

2. Solução geométrica da braquistócrona

A palavra braquistócrona nos remete à época em que Galileu investigou qual era curva que corresponde à mais rápida descida de um corpo sob ação da gravidade entre dois pontos horizontalmente separados e situados em níveis com alturas diferentes. Galileu erroneamente achava que um quadrante de circunferência ligando os dois pontos era a solução [5]. A história esperou até Bernoulli encontrar que a solução correta era uma semicicloide ligando os dois pontos.

A *cicloide* pode ser delineada por um ponto fixado à borda de um círculo, enquanto o círculo rola sem deslizar em uma linha reta. Tomando a linha reta como sendo o eixo- x , considerando que o raio do círculo tenha valor a e escolhendo como parâmetro θ o ângulo (em radianos, medido no centro do círculo) formado pela vertical (orientada para cima) com a linha que se dirige ao ponto P que delinea a cicloide (Fig. 1), podemos inferir desta figura as conhecidas equações paramétricas

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta). \quad (1)$$

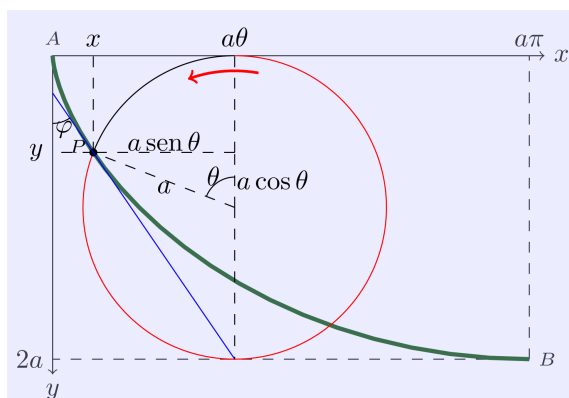


Figura 1 - A braquistócrona é a cicloide.

Para prosseguir com o tratamento geométrico do problema da cicloide, é mandatório encontrar qual o ponto em que a reta tangente à cicloide corta a horizontal sobre a qual está localizado o ponto mais baixo da cicloide, $y = 2a$, que de agora em diante chamaremos B . Logo, o próximo passo a ser dado será o cálculo da equação da reta tangente à cicloide no ponto P . Considerando o ângulo φ que a tangente à curva faz com

a *vertical*, a equação da reta tangente vai ser expressa por

$$y - y_0 = \cotg \varphi \cdot (x - x_0), \quad (2)$$

onde $P(x_0, y_0)$ é um ponto que pertence à reta. O único ponto da reta tangente que está em princípio disponível é justamente o ponto que ela comunga com a cicloide, que com o emprego dos resultados dados na Eq (1), pode ser expresso em termos do parâmetro θ como $P(a(\theta - \sin \theta), a(1 - \cos \theta))$. Podemos verificar diretamente da Fig. 2 que $\theta = 2\varphi$. Considerando a fórmula do arco metade da cotangente

$$\cotg \varphi = \cotg(\theta/2) = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}}, \quad (3)$$

a equação da reta tangente expressa completamente em termos do parâmetro θ fica

$$y - a + a \cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}} (x - a\theta + a \sin \theta). \quad (4)$$

A partir desta última equação, após um pouco de álgebra, obtemos que o ponto da reta tangente com ordenada $2a$ é dado por $Q(a\theta, 2a)$, que é diametralmente oposto ao ponto de contato do círculo rolante, que chamaremos $R(a\theta, 0)$. (É importante enfatizar que as posições dos pontos P , Q e R variam a medida em que o círculo gerador da cicloide rola). Estes últimos resultados nos remetem a um dos conhecidos teoremas cuja autoria foi atribuída a Tales [6], que pode ser enunciado como:

O ângulo formado por duas retas que se originam em um ponto da circunferência e atingem pontos do círculo diametralmente separados é reto.

Este teorema pode ser facilmente verificado a partir da Fig. 2, onde destacamos o triângulo PQR com P sendo um ponto da circunferência e QR o diâmetro, e além disto observamos dois triângulos isósceles; o primeiro com vértice em C , e tendo como base o segmento de reta s e seus dois ângulos congruentes iguais a φ ; o segundo também com vértice em C , porém tendo como base o segmento de reta r e seus dois ângulos congruentes iguais a α . Assim, a soma dos ângulos internos do triângulo PQR é $2\varphi + 2\alpha$, o que demonstra que o ângulo $\varphi + \alpha$ é reto e, em consequência, o triângulo PQR é retângulo.

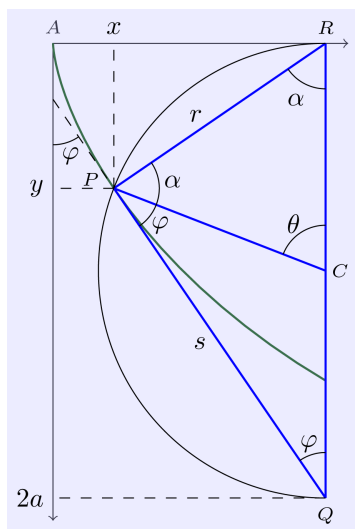


Figura 2 - O centro do círculo rolante é o vértice comum aos dois triângulos isósceles, um com base dada pelo segmento de reta r , outro com base dada pelo segmento de reta s .

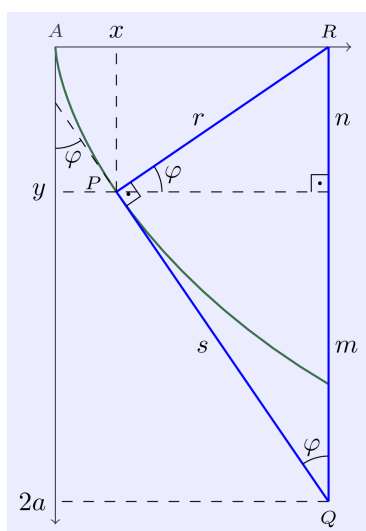


Figura 3 - No triângulo PQR , os catetos de comprimentos r e s são respectivamente normal e tangente à cicloide no ponto P e a hipotenusa de comprimento $2a$ é o diâmetro vertical do círculo rolante.

Para procurar por alguma relação trigonométrica que resulte na equação diferencial da cicloide, vamos destacar na Fig. 3 o triângulo retângulo inscrito no círculo rolante, com hipotenusa coincidente com o diâmetro vertical e com seus catetos coincidentes com os segmentos de reta r e s respectivamente normal e tangente à cicloide no ponto P . Com os símbolos indicados no triângulo, podemos obter as relações

$$\sin \varphi = \frac{r}{2a} = \frac{n}{r} \Rightarrow r^2 = 2an, \quad (5)$$

$$\cos \varphi = \frac{s}{2a} = \frac{m}{s} \Rightarrow s^2 = 2am, \quad (6)$$

$$\cotg \varphi = \frac{s}{r} = \sqrt{\frac{m}{n}}. \quad (7)$$

Com as identificações $\cotg \varphi = dy/dx$, $m = 2a - y$ e

$n = y$, podemos prontamente ler na Eq. (7) a seguinte equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a-y}{y}}. \quad (8)$$

que pode ser reexpressa em um formato mais convencional como

$$y(1 + (y')^2) = 2a. \quad (9)$$

A Eq. (8), ou Eq. (9), vale para valores de x no intervalo, com os valores extremos excluídos, $0 < x < 2a\pi$, onde a derivada y' não toma valores infinitos. Portanto, podemos verificar diretamente, através das figuras, tanto a equação diferencial da cicloide quanto sua solução paramétrica. A Eq. (9) pode ser também obtida na investigação da curva braquistócrona que pode ser conduzida por meio do princípio de Fermat [5] ou a partir de métodos baseados no cálculo variacional [4]. Esta equação diferencial é separável, porém é mais conveniente substituir a variável x por φ . Temos que $dy/dx = \cotg \varphi$, logo

$$\frac{2a-y}{y} = \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}, \quad (10)$$

ou

$$y = y \cos^2 \varphi + y \sin^2 \varphi = 2a \sin^2 \varphi. \quad (11)$$

Diferenciando em relação a φ , encontramos que

$$\frac{dy}{d\varphi} = 4a \sin \varphi \cos \varphi, \quad (12)$$

e consequentemente

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{dx}{dy} \frac{dy}{d\varphi} = 4a \sin^2 \varphi = 2a(1 - \cos 2\varphi), \quad (13)$$

onde foi considerado que $dx/dy = \sin \varphi / \cos \varphi$ e foi empregada a fórmula do seno do arco metade. (A derivada dx/dy não é definida no ponto mais baixo da cicloide, B , pois neste ponto $\cos \varphi$ se anula. Entretanto, dx/dy não aparece sozinho, e sim no produto $\frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{d\varphi}$. Assim, o problemático $\cos \varphi$ é eliminado e no final das contas a Eq. (13) como um todo mantém-se bem definida no ponto B). A Eq. (13) pode ser integrada como

$$x = 2a \int (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = a(2\varphi - \sin 2\varphi). \quad (14)$$

(Para anular a constante de integração utilizamos o fato de que $x = 0$ corresponde a $y = 0$, e portanto a $\varphi = 0$, incidentalmente mostrando que a tangente à curva é vertical no ponto inicial.) Para organizar nossa análise vamos reunir a Eq. (11) modificada com o emprego da fórmula do seno do arco metade e a Eq. (14) como

$$x = a(2\varphi - \sin 2\varphi), \quad y = a(1 - \cos 2\varphi), \quad (15)$$

que podem ser interpretadas como o conjunto de equações paramétricas para a curva $y(x)$, com φ sendo evidentemente o parâmetro. Estas equações coincidem

com aquelas previamente dispostas na Eq. (1) após a óbvia identificação de parâmetros $\theta = 2\varphi$.

Qual a velocidade angular que o círculo rolante deve possuir para que o ponto fixado na sua borda tenha movimento equivalente ao da descida sob a gravidade? A resposta desta pergunta pode ser facilmente obtida com o seguinte procedimento: a velocidade angular é definida pela diferencial em relação ao tempo $\omega = d\theta/dt$. Então, podemos diferenciar as equações paramétricas em θ no tempo para encontrar as equações paramétricas da velocidade, que podem ser lidas como

$$v_x = a\omega(1 - \cos \theta), \quad v_y = a\omega \sin \theta. \quad (16)$$

No ponto mais baixo da trajetória, onde $\theta = \pi$, obtemos que

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2a\omega. \quad (17)$$

Por outro lado, uma vez que a energia total de um corpo de massa m no ponto mais baixo e no ponto mais alto da trajetória têm o mesmo valor, ou seja

$$\frac{mv^2}{2} = mg(2a), \quad (18)$$

segue que

$$v = 2\sqrt{ag}. \quad (19)$$

Comparando as velocidades na Eq. (17) e na Eq. (19), que devem ser idênticas, obtém-se o seguinte valor para a velocidade angular do círculo

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{a}}. \quad (20)$$

Usamos que a força gravitacional é conservativa e está associada a energia potencial $U = mgh$, sendo h a distância vertical entre os dois pontos. Podemos então calcular o tempo de descida T como a metade do período correspondente a uma volta completa do círculo

$$T = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}. \quad (21)$$

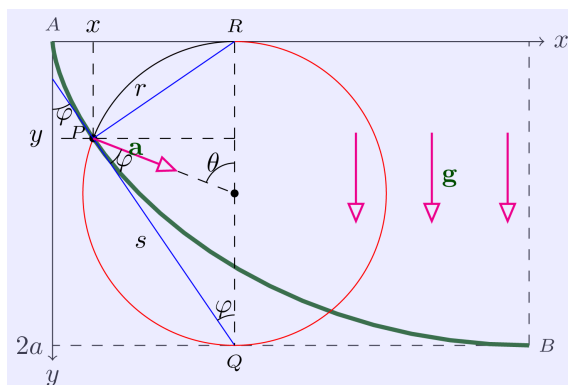


Figura 4 - As projeções da aceleração do corpo na braquistóclona são lidas como $v^2/\rho = g \sin \varphi$ e $dv/dt = g \cos \varphi$. O raio de curvatura ρ no ponto P da cicloide tem a direção do segmento de reta r e pode ser facilmente visualizado pois seu comprimento

tem valor $2r$. A aceleração do corpo $\mathbf{a}$ e a aceleração do campo gravitacional $\mathbf{g}$ possuem o mesmo módulo.

Qual a velocidade do corpo que desce? Sem particularizar θ , encontramos das equações paramétricas da velocidade que

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2a\omega \sin(\theta/2). \quad (22)$$

Considerando o valor de ω encontrado, a velocidade pode ser lida como

$$v = 2\sqrt{ag} \sin(\theta/2). \quad (23)$$

Convém observar na Fig. 4 que

$$r = 2a \sin(\theta/2) \quad , \quad s = 2a \cos(\theta/2); \quad (24)$$

o cateto de comprimento r coincide com o raio vetor no círculo rolante que liga o eixo instantâneo de rotação (situado no ponto de contato R) ao ponto P que traça a cicloide. Com base no estudo da rotação de um corpo rígido, sabemos que a partir do eixo instantâneo de rotação o movimento deve ser tratado como uma rotação pura e segue que a velocidade do ponto P deve ser perpendicular a este raio vetor, ou seja, coincidente com a direção do outro cateto que é tangente à cicloide, e deve ter módulo igual a ωr , onde r é dado na Eq. (24), o que confirma o valor da velocidade dado na Eq. (22).

Qual a aceleração do corpo que desce? Qualquer movimento no plano pode ser representado de uma maneira que independe do sistema de referência. A velocidade vai ser sempre tangente à trajetória e a aceleração pode ser decomposta nas componentes tangencial $a_s = \frac{dv}{dt}$ e normal $a_r = v^2/\rho$, onde ρ é o raio de curvatura local (ou instantâneo) definido por $\rho = \left| \frac{ds}{d\varphi} \right|$ [7, 8]. Podemos interpretar $d\varphi$ como o ângulo infinitesimal em radianos subtendido pelo elemento de arco ds da trajetória, enfatizando que ds não tem relação aparente com o segmento de reta s definido na Eq. (24). Em coordenadas cartesianas o raio de curvatura fica expresso como

$$\rho = \left| \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \right|, \quad (25)$$

o que pode ser verificado em [9, 10]. Da equação diferencial expressa pela Eq. (9) obtemos os seguintes resultados

$$1 + (y')^2 = \frac{2a}{y} \quad \text{e} \quad y'' = -\frac{a}{y^2}. \quad (26)$$

Assim, podemos facilmente calcular o raio de curvatura da cicloide como

$$\rho = 2\sqrt{2ay} = 2a\sqrt{2 - 2\cos \theta} = 4a \sin(\theta/2), \quad (27)$$

onde foram empregadas a equação paramétrica de y dada na Eq. (1), e na última igualdade a fórmula do arco metade do seno. Com o uso de $a_r = v^2/\rho$,

logo

$$\sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2g(y - y_0)}} dx = \sqrt{\frac{a}{g}} \sqrt{\frac{y}{y - y_0}} d\theta. \quad (40)$$

Com o emprego das equações paramétricas em θ , encontramos que

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta_0 - \cos \theta}} d\theta. \quad (41)$$

Então podemos empregar a fórmula do arco metade, $\cos \theta = 2\cos^2(\theta/2) - 1$, no numerador e denominador e prosseguir com a mudança de variável: $\cos \beta = \cos(\theta/2)/\cos(\theta_0/2)$ e a diferencial desta, $\sin \beta d\beta = \sin(\theta/2) d\theta/2\cos(\theta_0/2)$, para reexpressar a integral como

$$T = 2\sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{\pi/2} d\beta. \quad (42)$$

Portanto, o tempo de descida a partir do repouso e de qualquer ponto (ou de qualquer θ_0) é $\pi\sqrt{a/g}$.

3. Conclusão e comentários finais

Nós apresentamos uma alternativa à tradicional forma analítica de introduzir o problema da braquistócrona, contornando assim a necessidade de utilização de ferramentas do cálculo variacional, em geral muito avançado e ainda desconhecido por estudantes de primeiro ano de um curso de física ou engenharias. Certamente não é possível prescindir do cálculo variacional para demonstrar que a cicloide é a braquistócrona, vale dizer, que a cicloide é a solução do problema como originalmente enunciado por Bernoulli. Nós assumimos essa solução sem demonstra-la. A partir desta suposição e usando apenas conceitos básicos de trigonometria, provavelmente já dominados por estes estudantes, introduzimos uma dedução para a equação diferencial da cicloide. Apresentamos a solução desta equação diferencial em duas formas distintas, a padrão baseada em inferências gráficas e a algébrica voltada para os estudantes de primeiro ano já mencionados. Estudamos em detalhes a cinemática de uma partícula descendo a braquistócrona sob a ação da gravidade e desta análise destacamos o resultado bastante interessante, que é a demonstração,

utilizando-se apenas de conceitos geométricos, que a aceleração resultante sobre uma partícula descrevendo a braquistócrona tem magnitude igual a g e aponta na direção do centro da circunferência geratriz da cicloide.

O nosso desejo é que com esta nova apresentação, o problema clássico da braquistócrona possa ser absorvido por uma maior audiência e como trata-se de um problema inspirador, este conhecimento apresentado em um primeiro momento, possa motivar o estudante a prosseguir no estudo das ciências físicas que tem como base o cálculo integral e diferencial e também no estudo do cálculo variacional e mecânica analítica, para que ele possa contar com estas ferramentas tão poderosas em seus futuros projetos.

Referências

- [1] <http://www-math.ucdenver.edu/~wcherow/courses/m4010/s08/csbernoulli.pdf>
- [2] J.D Struik (ed.), *A Source Book in Mathematics 1200-1800* (Harvard University Press, Cambridge, 1969) [Versão inglesa do enunciado publicado em latim na Acta Eruditorum, Leipzig, June, 1696, p. 269.]
- [3] C. Lanczos, *The Variational Principles Of Mechanics* (Dover Publications Inc., New York, 1986), 4th. ed.
- [4] J. Barcelos Neto, *Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2004), 1ª. ed.
- [5] P.J. Nahin, *When Least is Best* (Princeton U.P., Princeton, 2004), 1st. ed.
- [6] D.E. Smith, *History of Mathematics, Vol. I* (Dover Publications, INC. New York, 1958), 1st. ed.
- [7] M. Alonso e E.J. Finn, *Física* (Editora Addison-Wesley, São Paulo, 1999), 1ª. ed.
- [8] A.P. Arya *Introduction to Classical Mechanics* (Allyn and Bacon, Massachusetts, 1990), 1st. ed.
- [9] L. Leithold, *O Cálculo com Geometria Analítica, Vol. 2*, (Editora HARBRA Ltda. São Paulo, 1994), 3ª. ed.
- [10] Eric W. Weisstein, "Curvature" From MathWorld - A Wolfram Web Resource. Disponível em <http://mathworld.wolfram.com/Curvature.html>.
- [11] S.T. Thornton e J.B. Marion, *Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas* (CENGAGE, São Paulo, 2011), 5ª. ed.