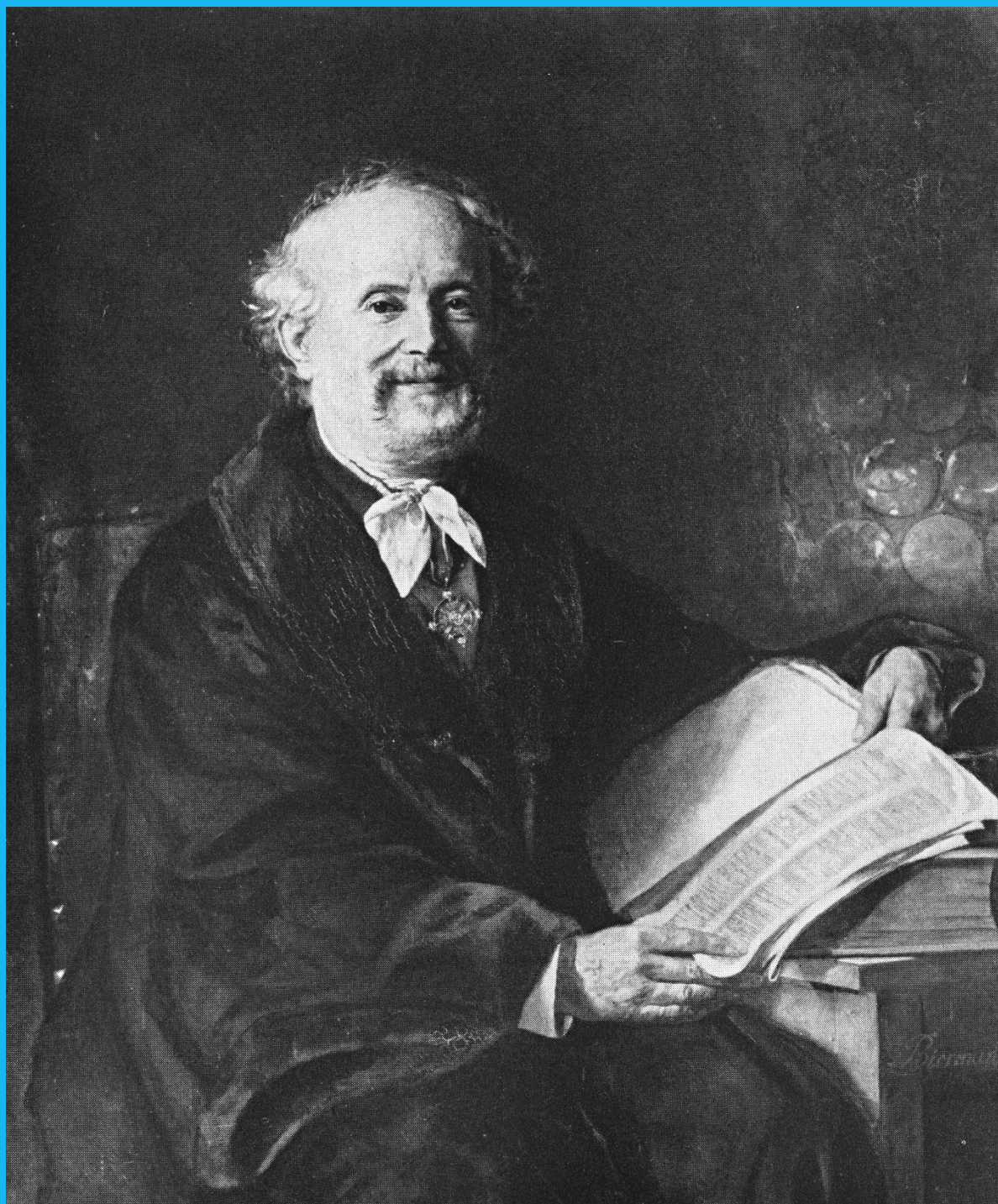


Obras de Weber sobre Eletrodinâmica Traduzidas e Comentadas

**Volume IV: Conservação da Energia,
o Modelo Planetário de Weber para o Átomo,
a Unificação do Eletromagnetismo com a Gravitação, e
a Eletrodinâmica de Weber Contra as Teorias de Campo**



André Koch Torres Assis

Obras de Weber sobre Eletrodinâmica Traduzidas e Comentadas

*Volume IV: Conservação da Energia,
o Modelo Planetário de Weber para o Átomo,
a Unificação do Eletromagnetismo com
a Gravitação, e a Eletrodinâmica de Weber
Contra as Teorias de Campo*

André Koch Torres Assis



Apeiron
Montreal

Published by C. Roy Keys Inc.
4405, rue St-Dominique
Montreal, Quebec H2W 2B2 Canada

© André Koch Torres Assis, 2025

First Published 2025

Library and Archives Canada Cataloguing in Publication

Title: Obras de Weber sobre eletrodinâmica traduzidas e comentadas / André Koch Torres Assis.

Other titles: Weber's works on electrodynamics translated and commented. Portuguese

Names: Assis, André Koch Torres, 1962- author, translator

Description: Includes bibliographical references. | Contents: Volume IV: Conservação da energia, o modelo planetário de Weber para o átomo, a unificação do eletromagnetismo com a gravitação, e a eletrodinâmica de Weber contra as teorias de campo.

Identifiers: Canadiana (print) 20250223821 | Canadiana (ebook) 20250223864 | ISBN 9781987980431 (v. 4 ; softcover) | ISBN 9781987980448 (v. 4 ; ebook)

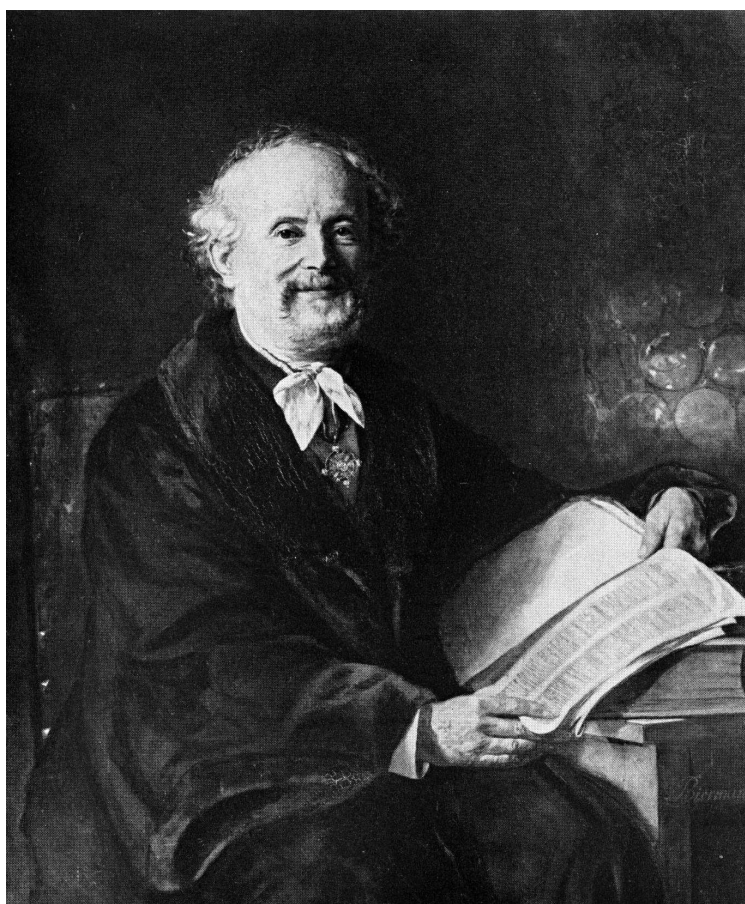
Subjects: LCSH: Weber, Wilhelm Eduard, 1804-1891. | LCSH: Electrodynamics.

Classification: LCC QC631 .A8713 2025 | DDC 537.6—dc23

A imagem na capa do Volume 4 vem de uma pintura de 1885 feita pelo artista alemão Gottlieb Biermann (1824-1908). Ela aparece, por exemplo, em K. H. Wiederkehr, *Wilhelm Eduard Weber – Erforscher der Wellenbewegung und der Elektrizität* (1804-1891), Volume 32 de *Grosse Naturforscher*, H. Degen (editor), (Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1967, pág. 5). Weber havia recebido em 1864 a Orden Pour le Mérite der Friedensklasse für die Verdienste um die Wissenschaften und die Künste (homenagem concedida pelos feitos nas ciências e artes). Vinte anos depois o ministro da cultura prussiano propôs ao imperador que deveria ser feita uma pintura dele como Ritter der Friedensklasse (Cavaleiro da Classe da Paz) para a Galeria Nacional. Ele aparece na pintura com a roupa tradicional da Universidade de Göttingen e usando a medalha de Honra ao Mérito da Orden Pour le Mérite. A pintura em cores original pertence à Alte Nationalgalerie dos Staatliche Museen de Berlim. Uma réplica dessa pintura, juntamente com uma pintura de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), foi doada pela Prússia em 1887 para o jubileu da Universidade de Göttingen. Elas se encontram atualmente no Auditório dessa Universidade.

Obras de Weber sobre Eletrodinâmica Traduzidas e Comentadas

Volume IV: Conservação da Energia,
o Modelo Planetário de Weber para o Átomo,
a Unificação do Eletromagnetismo com a Gravitação, e
a Eletrodinâmica de Weber Contra as Teorias de Campo



André Koch Torres Assis

Homepage: www.ifi.unicamp.br/~assis

© A. K. T. Assis

Sumário

I	Traduções Comentadas	11
1	Introdução ao Volume IV	13
2	Introdução ao Trabalho de Gauss sobre a Lei Fundamental para Todas as Interações das Correntes Galvânicas	15
3	[Gauss, 1867] Lei Fundamental para Todas as Interações das Correntes Galvânicas	19
4	Introdução ao Artigo de 1868 de Carl Neumann	21
4.1	Criação das Formulações Lagrangiana e Hamiltoniana da Eletrodinâmica de Weber	21
4.2	Concepções Dualista e Unitária da Corrente Elétrica	23
5	[Carl Neumann, 1868] Os Princípios da Eletrodinâmica	25
5.1	Visão Geral Preliminar	28
5.1.1	Base da Pesquisa	28
5.1.2	Lei de Weber	29
5.1.3	As Leis de Repulsão e Indução Elétrica	31
5.1.4	O Princípio da Força Viva	33
5.2	Os Coeficientes de Variação	34
5.2.1	Observação Preliminar	34
5.2.2	Definição dos Coeficientes de Variação	35
5.2.3	Um Teorema sobre os Coeficientes de Variação	38
5.3	Os Potenciais Emissivo e Receptivo	40
5.4	Lei de Weber	43
5.4.1	Dedução da Lei	43
5.4.2	Adendos	48
5.5	O Princípio da Força Viva	49
5.5.1	Consideração de Dois Pontos	49
5.5.2	Consideração de um Sistema Arbitrário de Pontos	51
5.5.3	Pós-escrito	54
5.6	Observações Suplementares de Carl Neumann em 1880	55
6	[Carl Neumann, 1869] Notas Relativas a um Trabalho Publicado Recentemente sobre os Princípios da Eletrodinâmica	57
6.1	A Primeira Parte do Artigo Citado	57
6.2	A Segunda Parte do Artigo Citado	59

6.3	Potencial e Luz	62
7	[Weber, 1869] Sobre uma Formulação Simples da Lei Fundamental Geral da Ação Elétrica	65
8	Introdução à Sexta Memória de Weber sobre Medições Eletrodinâmicas	69
9	[Weber, 1871, ME6] Medições Eletrodinâmicas, Sexta Memória, Relacionada Especialmente com o Princípio de Conservação da Energia	79
	I - Introdução	79
	II - Relação entre as Leis da Eletricidade e o Princípio de Conservação da Energia	81
	9.1 Partículas Elétricas e Massas Elétricas	81
	9.2 A Lei da Força Elétrica	82
	9.3 A Lei do Potencial Elétrico	85
	9.4 Leis Elétricas Fundamentais	86
	9.5 Princípio de Conservação da Energia para Duas Partículas que Formam um Sistema Isolado	88
	9.6 Extensão do Princípio de Conservação da Energia a Duas Partículas Elétricas que Não Formam um Sistema Isolado	92
	9.7 Aplicação a Outros Corpos	95
	III - Movimento de Duas Partículas Elétricas Devido à Interação entre Elas	98
	9.8 Sobre a Validade das Leis para Movimentos Moleculares	98
	9.9 Movimento de Duas Partículas Elétricas na Direção da Linha Reta que As Conecta	99
	9.10 Dois Estados de Agregação de um Sistema de Duas Partículas do Mesmo Tipo	101
	9.11 Movimentos de Duas Partículas Elétricas que Possuem Velocidades Desiguais no Espaço em uma Direção Perpendicular à Linha Reta que As Conecta	102
	9.12 Estados de Agregação Dessas Duas Partículas	103
	9.13 Não Há Movimento Circular Dessas Duas Partículas Uma em Torno da Outra	104
	9.14 Período de Oscilação de um Par Atômico Elétrico	105
	9.15 Aplicabilidade a Grupos Atômicos Químicos	107
	9.16 Estado de Agregação e Oscilação de Duas Partículas Elétricas de Tipos Diferentes	108
	9.17 Sobre as Correntes Moleculares de Ampère	109
	9.18 Movimentos no Espaço de Duas Partículas Elétricas de Tipos Diferentes, sob a Influência de uma Força de Separação Elétrica	114
	9.19 Correntes Elétricas em Condutores	120
	9.20 Sobre o Termomagnetismo	122
	9.21 Helmholtz, <i>Sobre a Contradição entre a Lei da Força Elétrica e a Lei de Conservação da Força</i>	124
10	Introdução ao Artigo de 1872 de Tisserand	127
11	[Tisserand, 1872] Sobre o Movimento dos Planetas ao Redor do Sol de Acordo com a Lei Eletrodinâmica de Weber	129

12 [Weber, 1874] Sobre o Equivalente da Força Viva	135
12.1 Princípio de Conservação da Energia	136
12.2 Distinção entre as Propriedades de um Corpo Individual ou Partícula, e as Propriedades de um Par de Partículas	137
12.3 Características de uma Lei Fundamental de Interação	137
12.4 Dois Tipos de Equivalentes de uma Força Viva	138
12.5 Equivalente do Segundo Tipo	139
12.6 Lei da Capacidade de Trabalho com a Condição de que seja Equivalente à Força Viva	141
12.7 Dedução do Potencial a partir da Capacidade de Trabalho	142
12.8 Aplicação Geral	143
13 [Weber, 1875] Sobre o Movimento da Eletricidade em Corpos de Constituição Molecular	145
13.1 Observações sobre as Leis Fundamentais da Eletricidade que foram Exibidas na Seção 4 do Tratado de 1871 sobre Medições Eletrodinâmicas	146
13.2 Comentários sobre o Ensaio no Volume do Jubileu destes <i>Annalen</i> , página 199	149
13.3 Sobre as Objeções que foram Levantadas Contra a Lei Fundamental da Ação Elétrica	158
13.4 Identidade das Partes Móveis Contidas em Todos os Corpos, Cujo Movimento é Calor, Magnetismo ou Galvanismo	163
13.5 Identidade da Força Viva Gerada pela Força Eletromotriz na Corrente com o Calor Gerado pela Corrente no Condutor	164
13.6 Movimento da Eletricidade nos Condutores	166
13.7 Dois Tipos de Propagação de Calor em Corpos Ponderáveis	169
13.8 Sobre a Concepção da Termoeletricidade Desenvolvida por Kohlrausch . . .	170
13.9 Resistência à Condução e Máxima Intensidade de Corrente	173
13.10 Distribuição da Eletricidade em Condutores	178
14 [Weber, 1876] Observações sobre a Resposta de Edlund a Duas Objeções Feitas Contra a Teoria Unitária da Eletricidade	181
15 [Weber, 1878a, ME7] Medições Eletrodinâmicas, Sétima Memória, Relacionada Especialmente à Energia de Interação	185
Introdução	186
15.1 Diretrizes para a Pesquisa Experimental em Eletrodinâmica	187
15.2 A Energia de Interação Reduzida às Unidades Absolutas	193
15.3 Dedução da Lei do Potencial Eletrodinâmico a partir da Lei do Potencial Eletrostático Usando o Princípio da Energia	196
15.4 Dedução do Princípio Comum da Energia a partir do Princípio de Conservação da Energia	199
15.5 A Lei Geral da Força Elétrica	201
15.6 Leis do Movimento de Duas Partículas Elétricas Impulsionadas apenas pela Interação	204
15.7 Feixes Elétricos, Especialmente Reflexão e Espalhamento de Feixes	208
15.8 Aplicação da Teoria da Reflexão e Espalhamento dos Feixes Elétricos ao Éter Luminífero e aos Gases de acordo com a Teoria das Colisões Moleculares Devida a Krönig e Clausius	212

15.9	Leis do Movimento de Duas Partículas Elétricas Impelidas pela Interação Mútua e Influência <i>Externa</i>	214
15.10	Leis do Movimento de uma Partícula Elétrica Dentro de uma <i>Casca Esférica Elettrizada</i> e Impulsionada pela Interação Elétrica e Influência <i>Externa</i>	217
15.10.1	Dificuldades Decorrentes dos Limites Impostos às Forças de Separação Elétricas pela Natureza dos Corpos	219
15.10.2	Dificuldades Associadas com a Suposição de um Valor Constante de L	220
15.11	Conclusão	222
16	[Weber, 1878b] Sobre a Energia de Interação	231
16.6.	Uma Partícula Contida em uma Casca Esférica Elettrizada e Impulsionada por uma Força Elétrica e por uma Força Não-Elétrica	232
17	Prefácios de 1892 a 1894 dos Seis Volumes das Obras Coletadas de Wilhelm Weber	239
17.1	[Voigt, 1892] Prefácio do Primeiro Volume	239
17.2	[Riecke, 1892] Prefácio do Segundo Volume	240
17.3	[Heinrich Weber, 1893] Prefácio do Terceiro Volume	243
17.4	[Heinrich Weber, 1894] Prefácio do Quarto Volume	245
17.5	[Eduard Riecke, 1893] Prefácio do Quinto Volume	249
17.6	[Merkel e Fischer, 1894] Prefácio do Sexto Volume	250
II	Espólio Manuscrito	253
18	[Weber, 1894a, ME8] Medições Eletrodinâmicas, Oitava Memória, Relacionada Especialmente com a Conexão entre a Lei Fundamental da Eletricidade e a Lei da Gravitação	255
18.1	Redução das Diferenças Qualitativas dos Corpos a Diferenças Quantitativas, de Acordo com a Suposição de que Todas as Moléculas Ponderáveis São Compostas de Moléculas Elétricas Positivas e Negativas	256
18.2	Dedução da Lei da Gravitação a partir da Lei Fundamental da Eletricidade de acordo com Zöllner	258
18.3	Sobre a Inadequação de Experimentos Diretos para Decidir Se, Dadas as Mesmas Quantidades de Eletricidade, a Força Atrativa entre Duas Moléculas Elétricas de Tipos Diferentes É Realmente Maior do que a Força Repulsiva entre Duas Moléculas Elétricas de Mesmo Tipo	263
18.4	Preenchimento Elétrico do Espaço, Especialmente Através da Existência de um Éter Constituído Apenas por Moléculas Elétricas de Mesmo Tipo, o Éter Luminífero, em Todos os Espaços Não Ocupados por Corpos Ponderáveis. Diversidade dos Corpos Ponderáveis	266
18.5	Classificação das Moléculas Materiais de Acordo com a Composição e a Capacidade de Separação	267
18.6	Eletricidade em Condutores Metálicos	273
18.7	Teoria da Resistência Galvânica dos Condutores Metálicos	279
18.8	Algumas Tarefas que ainda Precisam ser Resolvidas de Acordo com a Lei Fundamental da Ação Elétrica em Conexão com a Suposição da Composição das Moléculas Ponderáveis a Partir de Moléculas Elétricas Positivas e Negativas	285

18.9	Continuação	287
18.10	Sobre Vários Movimentos em Moléculas de Corpos Ponderáveis Formadas a partir de Moléculas Elétricas Positivas e Negativas e as Propriedades Térmicas Dependentes Deles	289
18.11	Gelo, Água, Vapor	290
18.11.1	Ponto de Fusão do Gelo e Ponto de Ebulição da Água	291
18.11.2	Formações Cristalinas de Corpos Sólidos	292
18.12	O Éter Luminífero é um Meio Estático Formado por Moléculas Elétricas Positivas	292
18.13	Nota [de Heinrich Weber, o Editor do Vol. 4 das <i>Obras</i> de Weber]	293
19	[Weber, 1894b] Sobre a Galvanometria (Resumo)	295
19.1	Primeira Parte	295
19.2	Segunda Parte	301
20	[Weber, 1894c] Comentários sobre o Artigo: “Investigação sobre o Arco Elétrico” do Prof. E. Edlund	305
21	Introdução ao Artigo de Weber sobre as Ações Eletroscópicas e Eletrodinâmicas da Eletricidade Livre em Circuitos Fechados	311
22	[Weber, 1894d] Ações Eletroscópicas e Eletrodinâmicas da Eletricidade Livre em Circuitos Fechados	315
23	[Weber, 1894e] Sobre o Eletrotermismo. (Sobre a Eletricidade e o Calor)	321
24	[Weber, 1894f] Aforismos	327
III	A Eletrodinâmica de Weber Contra as Diferentes Teorias de Campo	331
25	A Velocidade na Eletrodinâmica de Weber Contra as Velocidades nas Diferentes Teorias de Campo	333
25.1	Teorias Diferentes Descritas pela Mesma Fórmula Matemática	333
25.2	Força Atuando em um Corpo Eletrizado de Acordo com a Teoria dos Campos Eletromagnéticos	334
25.3	Origens e Diferentes Significados da Velocidade $\vec{v}$ que Aparece na Lei de Força do Eletromagnetismo Clássico $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$	335
25.3.1	Significado para Maxwell: Velocidade em Relação ao Campo Magnético	337
25.3.2	Significado para Thomson: Velocidade em Relação ao Meio de Permeabilidade Magnética μ	343
25.3.3	Significado para Heaviside: Velocidade em Relação ao Dielétrico	343
25.3.4	Significado para Lorentz: Velocidade em Relação ao Éter	343
25.3.5	Significado para Einstein: Velocidade em Relação ao Observador ou Sistema de Referência	349
25.4	Esses Vários Significados Atribuídos à Velocidade que Aparece na Lei de Força do Eletromagnetismo Clássico Implicam em <i>Diferentes</i> Teorias de Campo	351
25.5	Forças que Dependem da Velocidade na Mecânica Newtoniana	352

25.6	A Velocidade na Força de Weber	353
26	Comparação entre as Deduções de Lorentz e Weber de Suas Leis de Força	355
26.1	Lorentz Não Realizou Qualquer Experiência para Justificar a Dedução de Sua Força. Weber, ao Contrário, Antes de Sua Dedução Apresentou uma Prova Experimental da Força de Ampère entre Elementos de Corrente	355
26.2	Em Sua Dedução Lorentz Utilizou a Força Exercida por um Circuito Fechado Conduzindo uma Corrente Constante ao Atuar sobre um Elemento de Corrente. Já Weber Utilizou a Força entre Dois Elementos de Corrente	356
26.3	Lorentz Substituiu um Elemento de Corrente Neutro por uma Partícula Elettrizada. Weber, ao Contrário, Substituiu um Elemento de Corrente Neutro por Partículas Elettrizadas com Cargas Opostas	357
26.4	De Acordo com Lorentz e Weber as Velocidades das Partículas Elettrizadas que Compõem um Elemento de Corrente Possuem Significados Diferentes . .	358
26.5	As Diferentes Velocidades Finais Aparecendo nas Leis de Força de Lorentz e Weber	360
26.6	Após Obter Sua Força das Leis de Coulomb, Ampère e Faraday, Weber Inverteu o Procedimento. Ou seja, Deduziu as Leis de Coulomb, Ampère e Faraday de Sua Força, além de Deduzir Outros Resultados (Análise e Síntese no Tratado de 1846 de Weber)	361
26.7	Comparação entre as Leis de Força de Lorentz e Weber	363
27	As Várias Definições do Conceito de Campo e as Contradições entre Essas Diferentes Definições	365
27.1	Múltiplas Definições do Conceito de Campo	365
27.1.1	O Campo Definido como uma Região do Espaço ao Redor de Massas Gravitacionais, Partículas Elettrizadas, Ímãs e Fios Conduzindo Correntes Elétricas	366
27.1.2	O Campo Definido como uma Entidade Física Real Localizada no Espaço	368
27.1.3	O Campo Definido como uma Grandeza Vetorial com Módulo, Direção e Sentido	369
27.1.4	O Campo Eletromagnético Propaga-se em um Meio Material de Acordo com Maxwell	370
27.1.5	O Campo Eletromagnético Propaga-se no Espaço Vazio de Acordo com Einstein	370
27.1.6	O Campo Definido como um Reservatório de Energia, Momento Linear e Momento Angular	371
27.1.7	O Campo Definido como o Agente Intermediário para a Ação entre Massas Gravitacionais, entre Partículas Elettrizadas, entre Ímãs, e entre Fios Conduzindo Correntes Elétricas	373
27.1.8	O Campo Definido como uma Grandeza que Possui Dimensões	373
27.1.9	O Campo Definido como as Linhas de Força Consideradas em Conjunto	373
27.1.10	O Campo Definido como um Estado do Espaço	374
27.1.11	O Campo como sendo Gerado ou Produzido por Corpos Fontes tais como Massas Gravitacionais, Partículas Elettrizadas, Ímãs e Fios Conduzindo Correntes Elétricas	375

27.1.12	O Campo Devido a Corpos Fontes Gera ou Produz Forças sobre Outros Corpos de Teste tais como Massas Gravitacionais, Partículas Eletizadas, Ímãs e Fios Conduzindo Correntes Elétricas	375
27.1.13	Condensações do Campo Eletromagnético Definidas como sendo as Partículas Elementares de Matéria	376
27.1.14	Etc.	378
27.2	Essas Diferentes Definições de Campo São Contraditórias Entre Si	378
27.2.1	Uma Entidade Física Real Preenchendo o Espaço Não Pode Ser Identificada com o Próprio Espaço	378
27.2.2	Como Pode uma Região do Espaço ter Módulo, Direção e Sentido?	378
27.2.3	Como Pode uma Região do Espaço se Propagar no Próprio Espaço?	379
27.2.4	Como Pode uma Região do Espaço, ou seja, Algo Imaterial, Interagir com um Corpo Material?	379
27.2.5	Como Pode uma Região do Espaço Ter Dimensões Diferentes de Comprimento, Área ou Volume?	380
27.2.6	Um Campo que Não É uma Região do Espaço Não Está em Conformidade com as Teorias de Faraday e Maxwell	380
27.2.7	Maxwell Afirmou que uma Onda Eletromagnética se Propaga em um Meio Material que Preenche Todo o Espaço, o Éter. Einstein, por outro lado, Afirmou que uma Onda Eletromagnética se Propaga no Espaço Vazio	381
27.2.8	Qual é a Relação do Éter com o Campo Elétrico e com o Campo Magnético?	382
27.2.9	As Dimensões de $\vec{g}$, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ São Diferentes Entre Si. Isso Significa que Não São Grandezas de Mesmo Tipo. Portanto, Elas Não Podem Receber a Mesma Denominação como a de “Campo”. Elas São Grandezas de Natureza Diferente e Precisam Ser Classificadas em Categorias Diferentes	383
27.2.10	Como é Possível Haver Ação e Reação entre um Campo e um Corpo Material?	384
27.2.11	A Condensação de um Campo Não Pode Ser uma Partícula Elementar de Matéria	385
27.2.12	Etc.	385
28	Newton, Coulomb, Ampère e Weber Nunca Trabalharam com o Conceito de Campo	387
28.1	Newton Lutou Contra os Vórtices de René Descartes e Propôs Sua Lei da Gravitação Universal	387
28.2	Coulomb Também Lutou Contra os Vórtices Cartesianos e Propôs Leis de Força Newtonianas na Eletricidade e no Magnetismo	388
28.3	Ampère Nunca Trabalhou com o Conceito de Campo Magnético, Lutou Contra a Ideia de Qualquer Coisa Circulando ao Redor de um Fio com Corrente e Propôs uma Força Central entre Dois Elementos de Corrente Inversamente Proporcional ao Quadrado da Distância entre Eles	389
28.3.1	A Chamada “Lei Circuital de Ampère” Não é Devida a Ampère. Logo essa Denominação é Inapropriada	389
28.3.2	A Diretriz de Ampère Contra o Campo Magnético	390

28.3.3	A Diretriz de Ampère	390
28.3.4	A Diretriz é Simplesmente uma Direção ao Longo da Qual um Fio Conduzindo uma Corrente Não Exerce Força sobre um Elemento de Corrente. O Campo Magnético, ao Contrário, é “Algo” que é Produzido pelo Fio com Corrente	392
28.3.5	De acordo com Ampère, a Força Magnética Não é Mediada por um Campo Magnético	393
28.3.6	A Diretriz é uma Linha Reta Não Direcionada. Já o Campo Magnético é uma Grandeza Direcionada	393
28.3.7	O Campo Magnético Não Existe na Natureza, mas Apenas na Mente das Pessoas que Acreditam Nele	394
28.4	Weber Nunca Trabalhou com o Conceito de Campo e Propôs uma Força entre Partículas Elettrizadas que Depende da Distância, Velocidade e Aceleração entre Elas	397
29	Visão Geral e Desenvolvimentos Futuros da Lei de Weber Aplicada ao Eletromagnetismo e à Gravitação	401
29.1	A Unificação de Ampère entre Magnetismo, Eletrodinâmica e Eletromagnetismo	402
29.2	A Unificação de Weber das Leis de Coulomb, Ampère e Faraday	409
29.3	Algumas Possíveis Áreas de Desenvolvimento Futuro da Lei de Weber	411
29.3.1	Interação entre Dois ou Mais Corpos	411
29.3.2	Teoria de Circuitos	412
29.3.3	Física de Plasmas e Aceleradores de Partículas	413
29.3.4	Supercondutividade	413
29.4	A Unificação da Óptica com a Eletrodinâmica através da Força de Weber	414
29.5	A Unificação da Física Nuclear com a Eletrodinâmica Através da Força de Weber	419
29.6	Lei de Weber e a Tabela Periódica dos Elementos	420
29.7	Aplicações da Lei de Weber para a Gravitação	421
29.8	Unificação da Gravitação com a Eletrodinâmica Através da Força de Weber	424
29.9	Unificação da Inércia com a Gravitação e Implementação do Princípio de Mach: Dedução da Segunda Lei do Movimento de Newton a partir da Força de Weber	426
29.10	Conclusão	428
	Referências Bibliográficas	431

Parte I

Traduções Comentadas

Capítulo 1

Introdução ao Volume IV

A. K. T. Assis¹

A imagem na capa do Volume 4 vem de uma pintura de 1885 feita pelo artista alemão Gottlieb Biermann (1824-1908).² Weber havia recebido em 1864 a *Orden Pour le Mérite der Friedensklasse für die Verdienste um die Wissenschaften und die Künste* (homenagem concedida pelos feitos nas ciências e artes). Vinte anos depois o ministro da cultura prussiano propôs ao imperador que deveria ser feita uma pintura dele como *Ritter der Friedensklasse* (Cavaleiro da Classe da Paz) para a Galeria Nacional. Ele aparece na pintura com a roupa tradicional da Universidade de Göttingen e usando a medalha de Honra ao Mérito da *Orden Pour le Mérite*. A pintura em cores original pertence à *Alte Nationalgalerie* dos *Staatliche Museen* de Berlim. Uma réplica dessa pintura, juntamente com uma pintura de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), foi doada pela Prússia em 1887 para o jubileu da Universidade de Göttingen. Elas se encontram atualmente no Auditório dessa Universidade.

Esse quarto Volume contém a tradução de um artigo de Gauss publicado postumamente em 1867. Ele chegou a uma lei de força que depende das posições e velocidades das partículas eletrizadas que estão interagindo. A partir dessa força podia deduzir não apenas a eletrostática, mas também a força entre elementos de corrente. Esse Volume inclui também o artigo de 1868 de Carl Neumann sobre os princípios da eletrodinâmica. Nesse trabalho Neumann introduziu as formulações Lagrangiana e Hamiltoniana para a eletrodinâmica de Weber. Além disso, também mostrou que a lei de Weber era compatível com o princípio de conservação da energia. Naquela época Neumann ainda não estava ciente da energia potencial de Weber de 1848, como reconheceu em 1880.

Incluo a Sexta Memória principal de Weber de 1871 sobre Medições Eletrodinâmicas. Ele mostrou mais uma vez detalhadamente que sua lei de força era compatível com o princípio de conservação da energia. Além disso, estudou o problema de dois corpos de acordo com sua eletrodinâmica. Mostrou que em algumas situações duas partículas eletrizadas com cargas de mesmo sinal podem se atrair em vez de se repelir. Essa descoberta é uma das origens de seu modelo planetário para o átomo.

Esse Volume contém a tradução do artigo de 1872 de Tisserand sobre o movimento dos planetas ao redor do Sol de acordo com a lei de Weber. Ele calculou, por exemplo, a precessão

¹Homepage: www.ifi.unicamp.br/~assis

²Ela aparece, por exemplo, em [Wie67, pág. 5] e https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wilhelm_Eduard_Weber.jpg.

do periélio dos planetas.

A Sétima Memória principal de Weber sobre Medições Eletrodinâmicas foi publicada em 1878. Ela lida com a energia de interação. Sua Oitava Memória principal, embora tendo sido escrita na década de 1880, foi publicada apenas postumamente em 1894 em suas obras completas. Ela trata da conexão entre a lei fundamental de Weber para a eletrodinâmica e a lei da gravitação. Além disso, contém um desenvolvimento mais amadurecido do seu modelo planetário para o átomo. Nesse modelo melhorado o núcleo carregado eletricamente é mantido coeso por forças puramente eletrodinâmicas seguindo a lei de Weber. Os aforismos de Weber também estão contidos nesse quarto Volume.

Concluo esse trabalho com uma visão geral da lei de Weber aplicada ao eletromagnetismo e gravitação, juntamente com alguns possíveis desenvolvimentos futuros da teoria. Os principais tópicos discutidos estão relacionados com as unificações da física: (a) a unificação de Ampère entre o magnetismo, eletrodinâmica e eletromagnetismo; (b) a unificação de Weber das leis de Coulomb, Ampère e Faraday; (c) a unificação da óptica com a eletrodinâmica; (d) a unificação da física nuclear com a eletrodinâmica; (e) a unificação da gravitação com a eletrodinâmica; (f) a unificação da inércia com a gravitação. Discuto, em particular, a implementação do princípio de Mach e a dedução da segunda lei do movimento de Newton a partir da força de Weber para a gravitação.

Inseri as palavras entre colchetes, [], no meio de algumas sentenças para clarificar o significado dessas frases.

Escrevi todas as Notas de rodapé nas quais não aparece o nome do autor. Em todos os outros casos indiquei o nome da pessoa que escreveu aquela Nota de rodapé.

Capítulo 2

Introdução ao Trabalho de Gauss sobre a Lei Fundamental para Todas as Interações das Correntes Galvânicas

A. K. T. Assis³

Em 1835 Carl Friedrich Gauss (1777-1855) descobriu uma força entre duas partículas pontuais que dependia de suas posições e velocidades. Esse trabalho só foi publicado postumamente em 1867 em suas obras completas. Essa é a data em que a lei de força de Gauss ficou conhecida para a comunidade científica.⁴

Gauss considerou duas partículas eletrizadas com cargas e e e' localizadas nos pontos (x, y, z) e (x', y', z') em relação à origem de um sistema de coordenadas retangulares. Essas partículas estavam separadas por uma distância $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$. Sua lei de força:

$$\frac{ee'}{r^2} \left\{ 1 + k \left[\left(\frac{d(x' - x)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d(y' - y)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d(z' - z)}{dt} \right)^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] \right\}. \quad (2.1)$$

Gauss afirmou que nessa expressão a constante $\sqrt{1/k}$ representa uma certa velocidade. Contudo, ele não especificou o significado dessa constante e também não apresentou seu valor.

Como indica o trabalho de Gauss, ele estava estudando as interações entre as correntes galvânicas. Sua força (2.1) depende do quadrado da velocidade *relativa*, dr/dt , entre as partículas eletrizadas com cargas e e e' , ou seja, ela depende de $(dr/dt)^2$. Porém, sua força também depende da grandeza $(d(x' - x)/dt)^2 + (d(y' - y)/dt)^2 + (d(z' - z)/dt)^2$. A velocidade relativa dr/dt é dada por:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}$$

³Homepage: www.ifi.unicamp.br/~assis

⁴[Gau67] com tradução para o inglês em [Gau21a].

$$= \frac{(x - x')(dx/dt - dx'/dt) + (y - y')(dy/dt - dy'/dt) + (z - z')(dz/dt - dz'/dt)}{r}. \quad (2.2)$$

Já a outra grandeza com dimensão de velocidade na força de Gauss é dada por:

$$\sqrt{\left(\frac{d(x - x')}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d(y - y')}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d(z - z')}{dt}\right)^2}. \quad (2.3)$$

A comparação entre as Equações (2.2) e (2.3) mostra que em geral essas duas grandezas são diferentes entre si:

$$\frac{dr}{dt} \neq \sqrt{\left(\frac{d(x - x')}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d(y - y')}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d(z - z')}{dt}\right)^2}. \quad (2.4)$$

É relevante comparar nesse aspecto as leis de força de Gauss e Weber. Assumindo que a constante c de Weber possa ser escrita como $\sqrt{2} \cdot v_L$, onde v_L é a velocidade da luz no vácuo, a força de Weber entre duas partículas eletrizadas com cargas e e e' é dada por:

$$\frac{ee'}{r^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2r}{c^2} \frac{d^2r}{dt^2} \right] = \frac{ee'}{r^2} \left[1 - \frac{1}{2v_L^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{r}{v_L^2} \frac{d^2r}{dt^2} \right]. \quad (2.5)$$

A força de Weber depende da distância r entre as partículas eletrizadas com cargas e e e' , da velocidade *relativa* dr/dt entre elas, assim como da aceleração *relativa* d^2r/dt^2 entre elas. Essas são grandezas intrínsecas ao sistema de partículas que estão interagindo entre si. Além disso, essas grandezas possuem o mesmo valor em todos os sistemas de referência, até mesmo para sistema de referência não inerciais. Eu as denomino de *grandezas relacionais*. A força de Gauss, ao contrário, não depende das acelerações de e e e' . Além disso, a força de Gauss depende não apenas da velocidade relativa dr/dt , mas também da grandeza $(d(x' - x)/dt)^2 + (d(y' - y)/dt)^2 + (d(z' - z)/dt)^2$. Essa última grandeza não é relacional. Em particular, seu valor em um sistema de referência inercial pode ser diferente do valor dessa mesma grandeza em um outro sistema de referência não inercial. Uma discussão detalhada desse tópico pode ser encontrada no Apêndice A do livro *Relational Mechanics and Implementation of Mach's Principle with Weber's Gravitational Force*.⁵

James Clerk Maxwell (1831-1879) criticou a força de Gauss no último Capítulo de seu livro *Tratado sobre Eletricidade e Magnetismo* de 1873.⁶ Maxwell afirmou que a força de Gauss leva à força de Ampère entre elementos de corrente.⁷ Contudo, Maxwell também

⁵[Ass14b].

⁶[Max73a] e [Max54a]. Tradução para o alemão em [Max83a]. Tradução para o português em [Ass92c].

⁷André-Marie Ampère (1775-1836). Sua obra-prima foi publicada em 1826, *Teoria dos Fenômenos Eletrodinâmicos, Deduzida Unicamente da Experiência*, [Amp26] e [Amp23]. Há uma tradução completa em português desse trabalho, *Eletrodinâmica de Ampère: Análise do Significado e da Evolução da Força de Ampère, Juntamente com a Tradução Comentada de Sua Principal Obra sobre Eletrodinâmica*, [Cha09] e [AC11]. Traduções parciais para o inglês podem ser encontradas em [Amp65] e [Amp69]. Traduções completas e comentadas em inglês podem ser encontradas em [Amp12] e [AC15]. Uma quantidade imensa de material sobre Ampère e sobre sua força entre elementos de corrente pode ser encontrada na homepage *Ampère e a História da Eletricidade*, <http://www.ampere.cnrs.fr> e [Blo05], na homepage da Sociedade dos Amigos de André-Marie Ampère, <https://saama.fr>, e na homepage do Museu Ampère, <https://amperemusee.fr/en>.

mencionou que a força de Gauss é inconsistente com o princípio de conservação da energia e que, portanto, tem de ser abandonada. Ele também observou que a força de Gauss não explica a lei da indução de Faraday.⁸

Discuto no Apêndice B (Formulações Alternativas da Eletrodinâmica) do livro *Eletrodinâmica de Weber* as forças de Gauss, Bernhard Riemann (1826-1866), Rudolf Clausius (1822-1888) e Walter Ritz (1878-1909).⁹

⁸Michael Faraday (1791-1867). Ver [Far32a] com tradução para o português em [Far11] e tradução para o alemão em [Far32b] e [Far89].

⁹Em português: [Ass92a] e [Ass15a]. Em inglês: [Ass94].

Capítulo 3

[Gauss, 1867] Lei Fundamental para Todas as Interações das Correntes Galvânicas

Carl Friedrich Gauss¹⁰

(Descoberta em julho de 1835.)

Dois elementos de eletricidade em movimento relativo se atraem ou se repelem, porém não da mesma maneira como se estivessem em repouso relativo.

e, x, y, z Elemento e coordenadas¹¹

e', x', y', z'

$$(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 = rr$$

Ação mútua (repulsão)

$$= \frac{ee'}{rr} \left\{ 1 + k \left(\left(\frac{d(x' - x)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d(y' - y)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d(z' - z)}{dt} \right)^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right) \right\}$$

onde $\sqrt{\frac{1}{k}}$ representa uma certa velocidade.

¹⁰[Gau67] com tradução para o inglês em [Gau21a].

¹¹Ou seja, e é a carga do elemento ou partícula de eletricidade localizada no ponto (x, y, z) .

Capítulo 4

Introdução ao Artigo de 1868 de Carl Neumann

A. K. T. Assis¹²

4.1 Criação das Formulações Lagrangiana e Hamiltoniana da Eletrodinâmica de Weber

Apresento aqui a tradução do artigo de 1868 de Carl Gottfried Neumann (1832-1925), “Die Principien der Elektrodynamik”.¹³ Carl Neumann foi um físico e matemático alemão, filho do mineralogista, físico e matemático alemão Franz Ernst Neumann (1798-1895).

Um aspecto importante do trabalho de Neumann foi a introdução das formulações Lagrangiana e Hamiltoniana da eletrodinâmica de Weber.¹⁴ Além disso, ele também mostrou que a teoria de Weber era compatível com o princípio de conservação da energia.

Weber apresentou em 1846 sua força F entre duas partículas eletrizadas com cargas e e e' separadas por uma distância r , deslocando-se com uma velocidade radial relativa dr/dt e com uma aceleração radial relativa d^2r/dt^2 .¹⁵ Em 1852 ele expressou sua força da seguinte forma:¹⁶

$$F = \frac{ee'}{r^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2r}{c^2} \frac{d^2r}{dt^2} \right]. \quad (4.1)$$

A constante c de Weber só foi medida entre 1854 e 1856 por Weber e Rudolf Kohlrausch (1809-1858). O valor medido como publicado em 1857 foi $4,39 \times 10^8 \text{ m/s}$.¹⁷

Weber também introduziu em 1848 uma energia potencial a partir da qual podia deduzir sua lei de força.¹⁸ Representando essa energia potencial por V , ela pode ser escrita em termos da constante c de Weber como:

¹²Homepage: www.ifi.unicamp.br/~assis

¹³[Neu68a] com tradução para o inglês em [Neu21b].

¹⁴[Hol70] com tradução para o inglês em [Hol17], [Sch97], [Arc86], [Ass92a, Apêndice B], [Ass94, Seção 3.5], [Sch04] e [Ass15a, Seção 2.5].

¹⁵[Web46] com tradução parcial para o francês em [Web87] e traduções completas em inglês em [Web07] e [Web21d].

¹⁶[Web52b] com tradução para o inglês em [Web21e].

¹⁷[KW57] com tradução para o inglês em [KW21]. Ver também [Ass21e].

¹⁸[Web48a] com traduções para o inglês em [Web52c], [Web66], [Web19] e [Web21o].

$$V = \frac{ee'}{r} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right]. \quad (4.2)$$

Em 1857 Weber e Gustav Kirchhoff (1824-1887), trabalhando independentemente entre si, mostraram que a eletrodinâmica de Weber leva à completa equação do telégrafo para um sinal propagando-se ao longo de um fio condutor.¹⁹ Na terminologia atual pode-se dizer que eles levaram em consideração não apenas a capacitância e resistência do fio, mas também sua auto-indutância. Os dois trabalharam com a lei de força de Weber. Eles mostraram, em particular, que quando a resistência do fio era desprezível, a equação do telégrafo reduz-se à equação de onda. Concluíram então que uma onda elétrica propaga-se ao longo do fio com uma velocidade dada por $c/\sqrt{2} = 3,1 \times 10^8 \text{ m/s}$. Ou seja, com o mesmo valor que a conhecida velocidade da luz no vácuo, v_L , isto é, $c/\sqrt{2} = v_L = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$. A força e a energia potencial de Weber podem então ser escritas em termos da velocidade da luz no vácuo, v_L , das seguintes formas:

$$F = \frac{ee'}{r^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2r}{c^2} \frac{d^2r}{dt^2} \right] = \frac{ee'}{r^2} \left[1 - \frac{1}{2v_L^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{r}{v_L^2} \frac{d^2r}{dt^2} \right], \quad (4.3)$$

e

$$V = \frac{ee'}{r} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] = \frac{ee'}{r} \left[1 - \frac{1}{2v_L^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right]. \quad (4.4)$$

Quando Carl Neumann publicou esse artigo de 1868 ele não estava ciente da energia potencial V que Weber havia introduzido em 1848. Essa informação foi dada pelo próprio Neumann em uma observação suplementar de 1880 quando esse artigo de 1868 foi reimpresso, ver a Seção 5.6 dessa tradução em português. De qualquer forma, em 1868 Carl Neumann chegou a uma expressão para a energia Lagrangiana W de Weber. Vou apresentá-la aqui como uma função da constante c de Weber e também como uma função da velocidade da luz no vácuo v_L :

$$W = \frac{ee'}{r} \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] = \frac{ee'}{r} \left[1 + \frac{1}{2v_L^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right]. \quad (4.5)$$

As funções V e W diferem no sinal na frente do quadrado da velocidade relativa dr/dt . Neumann mostrou que para um sistema de partículas interagindo através da força de Weber a energia total E , dada pela soma de V com a energia cinética T das partículas, é uma constante no tempo:

$$E = T + V = \text{constante no tempo}. \quad (4.6)$$

Denominado por L à Lagrangiana do sistema e por H à sua Hamiltoniana, temos então:

$$L = T - W, \quad (4.7)$$

e

$$H = E = T + V = \text{constante no tempo}. \quad (4.8)$$

¹⁹[Kir57b] com traduções para o inglês em [Kir57a] e [Kir21b], [Pog57] com tradução para o inglês em [Pog21], e [Web64] com tradução para o inglês em [Web21c]. Ver ainda [Ass21a] e [Ass21e].

4.2 Concepções Dualista e Unitária da Corrente Elétrica

Antes de apresentar a tradução do artigo de Carl Neumann, gostaria de discutir brevemente um outro tópico.

Em seu trabalho Neumann apresentou duas concepções principais sobre como ocorre uma corrente elétrica em um condutor metálico, a saber, as concepções dualista e unitária. O que ele denominou como sendo a teoria dualista é a suposição de que os dois fluidos elétricos, positivo e negativo, deslocam-se em relação ao corpo material do condutor com velocidades de deriva opostas (ou com velocidades de arraste opostas). Em vez de falar de fluidos elétricos positivos e negativos, também se pode falar de partículas eletrizadas positivamente e negativamente. Nessa concepção as partículas eletrizadas positivamente se deslocariam em um sentido em relação ao condutor, enquanto que as partículas eletrizadas negativamente se deslocariam no sentido oposto.

Por outro lado, a teoria unitária assume que apenas um desses fluidos desloca-se em relação ao condutor, enquanto que o outro fluido permanece fixo à matéria do condutor. Essa última suposição é análoga à moderna teoria da condução metálica na qual apenas os elétrons livres deslocam-se em relação ao condutor, enquanto que os íons positivos permanecem fixos na rede cristalina do metal.

Wilhelm Weber adotou inicialmente a teoria dualista da corrente elétrica. Contudo, mais tarde ele mudou seu ponto de vista e adotou a concepção unitária da corrente elétrica.²⁰ Nesse aspecto ele estava muito à frente de seu tempo, já que os elétrons só foram descobertos em 1897, após a sua morte em 1891.

²⁰Ver o Capítulo 5 (A Evolução da Concepção de Weber sobre uma Corrente Elétrica — Começando com uma Corrente Dupla até Chegar em uma Corrente Simples) do livro *O Modelo Planetário de Weber para o Átomo*, disponível em português, [AWW14], inglês, [AWW11] e alemão, [AWW18].

Capítulo 5

[Carl Neumann, 1868] Os Princípios da Eletrodinâmica

Carl Neumann^{21,22}

As áreas individuais das ciências físicas podem ser adequadamente subdivididas em *duas* partes de acordo com a natureza das forças elementares assumidas para explicar os fenômenos relevantes. De um lado estão a *mecânica celeste*, *elasticidade*, *capilaridade*, em geral aquelas áreas para as quais a direção e a intensidade da força é determinada completamente pela posição relativa das partes materiais; de outro lado são para ser consideradas as pesquisas do *atrito*, *eletricidade* e *magnetismo*, e talvez também a *óptica*, em geral aquelas áreas da física nas quais as forças conhecidas dependem de outras condições além de suas posições relativas — por exemplo, suas velocidades e acelerações.

Agora, se a *lei (ou princípio) da força viva*²³ governa todos os fenômenos naturais (e

²¹[[Neu68a](#)] com tradução para o inglês em [[Neu21b](#)].

²²As Notas de Carl Neumann são representadas por [Nota de Carl Neumann:]; as Notas de Laurence Hecht, um dos tradutores da versão em inglês desse artigo, são representadas por [Nota de Hecht:]; as Notas de Urs Frauenfelder, o outro tradutor da versão em inglês desse artigo, são representadas por [Nota de Frauenfelder:]; todas as outras Notas são de minha autoria.

²³Em alemão: *das Gesetz (oder Princip) der lebendigen Kraft*. Ou seja, a lei (ou princípio) da força viva. A expressão em latim *vis viva* (plural *vires vivae*) é traduzida em português, inglês e alemão por, respectivamente, *força viva*, *living force* e *lebendige Kraft*. Ela foi cunhada por G. W. Leibniz (1646-1716). Originalmente a força viva de um corpo de massa m deslocando-se com velocidade v em relação a um sistema de referência inercial era definida por mv^2 , isto é, o dobro da energia cinética como definida hoje em dia. Contudo, durante o século XIX muitos autores como Wilhelm Weber e Hermann von Helmholtz (1821-1894) definiram a força viva como $mv^2/2$, isto é, com o mesmo valor da energia cinética atual. Em 1847 Helmholtz expressou-se como segue, [[Hel47](#), pág. 9] com tradução para o inglês em [[Hel53](#), pág. 119]:

Para haver uma melhor concordância com a maneira usual de medir a intensidade das forças, proponho denominar a grandeza $\frac{1}{2}mv^2$ como sendo a quantidade de *força viva*, por meio da qual ela fica idêntica à quantidade de trabalho.

Em 1872 ele fez uma definição análoga, [[Hel72a](#), pág. 640 das *Obras* de Helmholtz] com tradução para o inglês em [[Hel72b](#), pág. 533]:

Se denominarmos, como sempre foi feito até agora, a *força viva* ou a *energia atual* como sendo a soma das massas inerciais móveis multiplicadas cada uma pela metade do quadrado de sua velocidade, então, [...]

todas as experiências anteriores falam a favor disso), então para as áreas do primeiro tipo isto aparece como uma consequência direta das ideias em que se baseiam, para as áreas do segundo tipo, entretanto, como algo *do acaso*. Pois as forças elementares do primeiro tipo submetem-se ao domínio dessa lei, enquanto as do segundo tipo não o fazem. Fechner diz o seguinte em seu [livro] *Psychophysik — Psicofísica* (1860), Vol. I, página 34:²⁴

Parece que essas (últimas) forças elementares trabalham conjuntamente de tal maneira que a lei²⁵ permanece válida para todas as ações da natureza. No caso das ações magnéticas (e, portanto, também para as correntes elétricas que as substituem) isto é auto-evidente, desde que elas possam de fato ser representadas como sendo as ações de forças centrais que são independentes da velocidade e aceleração. Além disso, o Prof. W. Weber respondeu oralmente ao meu questionamento, de que em todos os casos aos quais suas pesquisas levaram, até mesmo além do limite dessas últimas forças, observa-se que a lei é válida, mesmo se a aplicabilidade total para a região dessas forças ainda necessite de uma prova rigorosa.

Mas isso de fato não é uma prova e sim uma descoberta. Pois essa lei [de conservação da energia] representa uma relação entre a força viva e o potencial, e assim uma relação entre duas grandezas, sendo que a última é conhecida para as forças elementares do primeiro tipo, *mas é completamente desconhecida para as [forças] do segundo tipo*. Portanto, no que diz respeito a estas últimas forças, não se trata de provar a lei, mas de *descobrir o seu conteúdo*, de encontrar aquela grandeza que seria considerada o potencial dessas forças.

Três anos atrás, estimulado por essas palavras de Fechner, comecei a me interessar nessa questão e assim dirigi minha atenção para *aquelas* forças elementares do segundo tipo que Weber assumiu entre duas partículas elétricas e logo encontrei que o potencial de tal força pode ser considerado com certa autoridade como dado pela seguinte expressão:

$$W = \frac{mm_1}{r} + G \frac{mm_1}{r} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2,$$

onde m, m_1 indicam as massas das duas partículas, r a distância entre elas, t o instante de tempo que está sendo considerado, e G uma constante.²⁶ Pois pode ser visto que a força assumida por Weber pode ser deduzida dessa expressão pela *variação* das coordenadas exatamente da mesma maneira em que uma força elementar do *primeiro* tipo é obtida de seu potencial a partir de uma *diferenciação* de suas coordenadas.

Simultaneamente resultou que durante o movimento das duas partículas vale uma relação muito simples entre a força viva e as duas partes da expressão W que está sendo adotada como potencial, a saber:

$$(\text{força viva}) + \frac{mm_1}{r} - G \frac{mm_1}{r} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \text{constante}.$$

Weber também utilizou a expressão *força viva* como sendo dada por $mv^2/2$. Isso pode ser visto, por exemplo, em seu trabalho de 1871, [Web71, Nota de rodapé número 1, págs. 256-257 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web72, Nota de rodapé nas págs. 9-10] e [Web21g, Nota de rodapé 140, págs. 74-75]. Ver a Nota de rodapé 170 na página 87 dessa tradução em português.

²⁴Gustav Theodor Fechner (1801-1887) foi um físico, filósofo e psicólogo experimental alemão. Ver [Fec60, pág. 34].

²⁵Fechner está se referindo à lei de conservação da energia.

²⁶Por massas das partículas elétricas devemos entender aqui as cargas dessas partículas, [Arc86, pág. 787].

Difícilmente poderia haver qualquer dúvida de que esta relação representa a lei a ser descoberta para a força assumida por Weber.

Também naquela época, de acordo com a expressão para W , já formulei o potencial para *dois elementos de corrente elétrica*, e encontrei que a partir do potencial assim obtido, tanto a ação repulsiva quanto a indutiva de dois elementos entre si podiam ser deduzidas de uma maneira muito simples, a saber, a primeira [ação] podia ser deduzida pela variação em relação à distância, a última [ação] pela variação em relação à direção de um elemento.

Embora possa parecer surpreendente à primeira vista, e em certo contraste em relação à visão prevalecente até o momento, a variação tem de substituir a diferenciação. Mas, como gostaria de salientar desde já, este contraste é até certo ponto mitigado se considerarmos que algo semelhante já emerge na área das forças elementares do *primeiro* tipo, por exemplo, nos estudos da elasticidade. A saber, sejam u, v, w aquelas funções das coordenadas através das quais são representados o deslocamento interno de um dado corpo elástico, e seja Φ o potencial que as partículas do corpo exercem coletivamente sobre qualquer *uma* delas, então a força atuando sobre a última [partícula] é encontrada através da *variação* de Φ em relação a u, v, w (como desenvolvi detalhadamente em um trabalho sobre elasticidade, *Journal de Borchardt*, Vol. 57, página 304).²⁷

Algum tempo atrás fui levado a retomar e continuar minhas pesquisas sobre esse assunto por um artigo póstumo de Riemann, publicado nos *Annalen* de Poggendorff (Vol. 131, página 237),²⁸ no qual foi feita a tentativa (que, contudo, não foi muito bem sucedida e, talvez, não deva ser julgada devida a uma apresentação muito breve) para explicar a ação repulsiva entre dois elementos de corrente por meio de forças elementares do *primeiro* tipo, com a suposição de que o potencial dessa força — semelhante à luz — se propaga através do espaço com uma certa velocidade constante. Para minha surpresa encontrei que essa suposição leva diretamente à minha conjectura, a saber, ao assumir uma tal propagação progressiva, o potencial comum $\frac{mm_1}{r}$ (correspondendo à força gravitacional Newtoniana),²⁹ é transformado em uma grandeza cuja componente efetiva é completamente idêntica à expressão W anteriormente mencionada.

Já em maio desse ano fiz uma curta comunicação à Sociedade Científica de Göttingen sobre o ponto inicial e os resultados da pesquisa em questão (*Nachrichten der Gesellschaft*, 16 de junho de 1868).³⁰ Se agora pretendo mostrar essas investigações, ou ao menos uma parte delas, em detalhe e tão cuidadosamente quanto possível, não é porque considere essas pesquisas como estando completas, mas apenas devido à *importância extraordinária do assunto que está sendo tratado*, e porque sou de opinião que as minhas investigações são necessárias para um aprofundamento neste assunto, ou pelo menos não sem utilidade.

²⁷[Neu60, pág. 304]. O chamado *Journal* de Borchardt é o *Journal für die reine und angewandte Mathematik* que foi editado durante alguns anos por Carl Wilhelm Borchardt (1817-1880).

²⁸Bernhard Riemann (1826-1866) foi um matemático alemão que estudou com Gauss e foi assistente de Weber. Ver [Rie67b] com tradução para o inglês em [Rie67a] e [Rie77a].

²⁹Isaac Newton (1642-1727). Ver [New34], [New52] e [New99]. Tradução para o português em [New90], [New08] e [New10].

³⁰[Neu68b].

5.1 Visão Geral Preliminar

5.1.1 Base da Pesquisa

Na investigação atual vou compartilhar a nomenclatura daqueles autores que consideram a força viva como a soma das massas multiplicadas pela *metade* do quadrado de suas velocidades e que, além disso, consideram o potencial como sendo aquela função das coordenadas cujo coeficiente diferencial *negativo* representa a força.^{31,32} Ao utilizar essa nomenclatura (o que parece particularmente útil no que diz respeito à teoria mecânica do calor) o *princípio da força viva* assume a seguinte forma:

$$(\text{força viva}) + (\text{potencial}) = \text{constante}.$$

Ao mesmo tempo um outro princípio geral da mecânica, o *princípio de Hamilton*,³³ encontra sua expressão na fórmula

$$\delta \int [(\text{força viva}) - (\text{potencial})] dt = 0,$$

onde a integração é realizada ao longo de qualquer intervalo de tempo escolhido, e onde δ representa a *variação interna*, isto é, uma variação que não afeta os limites mas apenas o interior desse intervalo de tempo.

Se agora observo que, para forças dadas, o potencial é conhecido, mas que, inversamente, as forças também são determinadas pela especificação do potencial, e se, conseqüentemente, me permito considerar o potencial como primário, como o verdadeiro *impulso para o movimento*,³⁴ e considerar as forças, por outro lado, como secundárias, como a *forma* na qual esse impulso se expressa, então isso não é uma inovação real, mas, no máximo, formal. Por outro lado, o que é essencialmente novo (embora relacionado à conjectura já feita por Riemann) é minha suposição de que *o impulso para o movimento representado pelo potencial não passa de uma massa pontual para outra instantaneamente, mas sim progressivamente, que ele se propaga no espaço com uma certa velocidade extremamente grande*. Essa velocidade é considerada constante e será designada por c .³⁵

A ideia que acabou de ser mencionada, e a suposição de que o *princípio de Hamilton* é aplicável sem restrições, formam a base de minha investigação; elas formam a fonte de onde as leis dos fenômenos elétricos (descobertos por Ampère, Weber, e meu pai) surgem por si mesmas, sem o envolvimento de quaisquer outros pré-requisitos.³⁶

³¹[Nota de Carl Neumann:] Com essa definição a *força viva* e o *potencial* serão idênticos às grandezas que os ingleses denominam de *energia atual* e *energia potencial*. O potencial é também idêntico à grandeza que Helmholtz denominou por *Spannkraft*.

³²Aquilo que os ingleses denominaram originalmente de energia atual ou real passou a ser chamado de energia cinética. Helmholtz introduziu o conceito de *Spannkraft* em 1847, [Hel47, pág. 14]. Ele foi traduzido em inglês como *tension* (tensão), [Hel66, pág. 122]. De acordo com Elkana, Helmholtz cunhou o termo “Spannkraft” para a entidade mecânica definida claramente que denominamos como sendo a “energia potencial”, [Elk70, pág. 280]. Caneva traduziu essa expressão em inglês como “tensional force” (força tensional), [Can19].

³³William Rowan Hamilton (1805-1865) foi um matemático, físico e astrônomo irlandês.

³⁴Em alemão: *als den eigentlichen Bewegungsantrieb*.

³⁵[Nota de Hecht:] A constante c de Weber não é a velocidade da luz, sendo igual a $\sqrt{2}$ vezes a velocidade da luz.

³⁶Carl Neumann está se referindo a André-Marie Ampère (1775-1836), Wilhelm Eduard Weber (1804-1891) e Franz Ernst Neumann (1798-1895), o pai de Carl Neumann. Os trabalhos principais de Ampère

Difícilmente será necessário notar que a concepção *comum* de uma propagação instantânea do potencial está contida como um caso especial da concepção *apresentada aqui* de uma propagação progressiva, a saber, que essa concepção transforma-se na concepção comum ao colocarmos a constante $c = \infty$.

5.1.2 Lei de Weber

Considere inicialmente apenas *dois* pontos m e m_1 que se deslocam sob influência mútua. Então, procedendo da concepção de uma propagação progressiva do potencial, para cada instante de tempo t , dois potenciais devem ser diferenciados, o emissivo e o receptivo.

O *potencial emissivo* é aquele que é *enviado no tempo t* de cada um dos dois pontos e que, portanto, alcança o outro ponto um pouco mais tarde. Seja r a distância entre os dois pontos no tempo t , e seja $\tilde{\omega}$ o potencial emissivo correspondendo ao mesmo tempo, então de acordo com a lei de Newton: $\tilde{\omega} = \frac{mm_1}{r}$, ou geralmente:³⁷

$$\tilde{\omega} = mm_1\varphi , \quad (5.1)$$

onde $\varphi = \varphi(r)$ representa qualquer função de r .

Por outro lado, o *potencial receptivo* é aquele que é *recebido no tempo t* por qualquer um dos dois pontos e que, portanto, foi enviado um pouco antes pelo outro ponto. De acordo com isso o potencial receptivo pertencendo ao tempo *dado* é idêntico ao potencial emissivo de um tempo *anterior*. A distância no tempo t é novamente designada por r , e o potencial receptivo correspondendo a esse tempo é ω , de tal forma que após alguns cálculos:

$$\omega = w + \frac{d\mathfrak{w}}{dt} , \quad (5.2)$$

onde

$$\left. \begin{aligned} w &= mm_1 \left[\varphi + \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right] , \\ \mathfrak{w} &= mm_1 \left[\chi + \frac{d\Phi}{dt} \right] . \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Aqui φ é a função contida no potencial emissivo; e no mesmo instante representam ψ , χ , Φ outras funções que também dependem apenas de r , que podem ser deduzidas da função dada φ usando operações bastante simples. Assim, por exemplo

$$\psi = \frac{1}{c} \int \sqrt{-r} \frac{d\varphi}{dr} dr . \quad (5.4)$$

A função φ , como vem diretamente de sua definição, é independente da velocidade c de propagação; já φ e χ são afetadas pelo fator $1/c$, e Φ pelo fator $1/c^2$.

são mencionados na Nota de rodapé 7 na página 16. A força de Weber entre duas partículas eletrizadas foi publicada em 1846, [Web46], com tradução parcial para o francês em [Web87] e com traduções completas para o inglês em [Web07] e [Web21d]. Os trabalhos de Franz Neumann sobre a indução de correntes elétricas podem ser encontrados em [Neu46] e [Neu47], com tradução para o francês em [Neu48a]; [Neu48b] e [Neu49].

³⁷Neumann numerou as equações de cada Seção desse artigo começando com (1). Isso cria um certo mal entendido relacionado a qual equação específica ele poderia estar se referindo nas partes posteriores de seu artigo. Nessa tradução numerei sequencialmente as equações em todo o artigo.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ainda deve ser observado que para o caso da} \\ \text{lei de emissão Newtoniana, a saber, para } \varphi = \frac{1}{r}, \text{ a função} \\ \psi \text{ assume o valor: } \psi = \frac{2\sqrt{r}}{c} . \end{array} \right\} \quad (5.5)$$

Entre as duas partes do potencial receptivo, para abreviação e no que diz respeito aos resultados de investigações adicionais, denominamos w como sendo o *potencial efetivo* e a outra parte $\frac{dw}{dt}$ como sendo o *potencial inefetivo*.³⁸

Dado que o princípio de Hamilton é agora considerado absolutamente válido, no presente caso o movimento dos dois pontos m e m_1 deve ocorrer de uma maneira caracterizada pela fórmula

$$\delta \int (\tau - \omega) dt = 0 ,$$

onde τ é a força viva dos dois pontos e ω é o potencial receptivo já mencionado.

Se substituirmos no lugar de ω seu valor [dado pela Equação] (5.2), a fórmula fica reduzida a:

$$\delta \int (\tau - w) dt = 0 .$$

Se fizermos a variação dessa expressão, obteremos as seis equações diferenciais necessárias para determinar o movimento. E essas equações dão conta da *maneira* pela qual o impulso de movimento representado pelo potencial se manifesta, isto é, da *força* que atua entre os dois pontos. O resultado obtido dessa forma é o seguinte:

- I. *Durante seu movimento, uma força R está ativa entre os dois pontos, que coincide constantemente com a linha de conexão r .*
- II. *Se considerarmos essa força como uma força repulsiva e se w for o potencial efetivo (já mencionado) entre os dois pontos, então R será igual ao coeficiente de variação negativo de w com relação a r .*³⁹

Uma consequência imediata disso é

$$R = mm_1 \left[-\frac{d\varphi}{dr} + 2\frac{d\psi}{dr} \frac{d^2\psi}{dt^2} \right] . \quad (5.6)$$

No caso especial mencionado [na Equação] (5.5), a saber, $\varphi = \frac{1}{r}$ e $\psi = \frac{2\sqrt{r}}{c}$, essa fórmula transforma-se em:

$$R = mm_1 \left[\frac{1}{r^2} + \frac{4}{c^2\sqrt{r}} \frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2} \right] . \quad (5.7)$$

³⁸Em alemão: *das effective und ineffective Potential*. Essas expressões podem ser traduzidas como potenciais eficazes, efetivos ou eficientes; e potenciais ineficazes, inefetivos ou ineficientes.

³⁹[Nota de Frauenfelder:] Em alemão: *dem negativen Variationscoefficienten von w nach r* . Neumann inventou o termo alemão “Variationskoeffizient”. Esse termo não parece ser mais usado nesse contexto. Ele surge na estatística, mas lá ele possui um significado bem diferente do significado atribuído por Neumann para ele. O termo estatístico é traduzido como “coeficiente de variação”.

A fórmula (5.6) coincide precisamente com a lei na qual foi baseado meu estudo de dez anos atrás lidando com a rotação magnética do plano de polarização da luz.⁴⁰ E a fórmula (5.7) é literalmente *idêntica à lei de Weber*.⁴¹

Um exame mais detalhado leva aos seguintes resultados adicionais:

- III. *Se W for o potencial efetivo de um sistema arbitrário de pontos e se x, y, z forem as coordenadas do ponto que possui a massa m , as componentes da força atuando em m serão iguais ao coeficiente de variação negativo de W com relação a x, y, z .*
- IV. *Se P for a componente daquela força em uma dada direção arbitrária p , então P será igual ao coeficiente de variação negativo de W com relação a p .*

A expressão “coeficiente de variação” usada várias vezes necessita de uma pequena explicação. Suponha que $u, v, \dots w$ sejam funções *indeterminadas* de uma variável de base (por exemplo do tempo), ou funções *indeterminadas* de um número qualquer de variáveis de base $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, e G seja uma expressão *dada* das variáveis $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, das funções $u, v, \dots w$ e de algumas derivadas dessas funções com relação a essas variáveis. É então bem conhecido que a *variação interna* originando-se de uma mudança de $u, v, \dots w$

$$\delta \int^{(n)} G d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n$$

sempre pode ser colocada no formato

$$\delta \int^{(n)} G d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n = \int^{(n)} (a\delta u + b\delta v + \dots + c\delta w) d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n ,$$

na qual os coeficientes $a, b, \dots c$ dependem apenas de $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, u, v, \dots w$, sendo independentes das variações $\delta u, \delta v, \dots \delta w$. Denomino esses coeficientes $a, b, \dots c$ de *coeficientes de variação com relação a $u, v, \dots w$* .

5.1.3 As Leis de Repulsão e Indução Elétrica

Como as hipóteses utilizadas levaram à lei universal de Weber da ação elétrica, elas obviamente também têm de nos guiar àquelas leis especiais ligadas à repulsão e indução de

⁴⁰Ver [Neu58] e [Neu63].

⁴¹Isto é:

$$\begin{aligned} R &= mm_1 \left[\frac{1}{r^2} + \frac{4}{c^2 \sqrt{r}} \frac{d^2 \sqrt{r}}{dt^2} \right] = mm_1 \left[\frac{1}{r^2} + \frac{2}{c^2 \sqrt{r}} \frac{d(\dot{r} r^{-1/2})}{dt} \right] \\ &= mm_1 \left[\frac{1}{r^2} + \frac{2}{c^2 \sqrt{r}} \left(\ddot{r} r^{-1/2} - \frac{1}{2} \dot{r} r^{-3/2} \dot{r}^2 \right) \right] = \frac{mm'}{r^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2r}{c^2} \frac{d^2 r}{dt^2} \right] . \end{aligned}$$

Lembrando que as “massas elétricas” m e m_1 de Neumann representam as cargas das partículas que Weber havia designado por e e e' , então essa expressão é equivalente à equação de Weber de 1852, [Web52b, pág. 366 das *Obras de Weber*] com tradução para o inglês em [Web21e, pág. 346], a saber:

$$\frac{ee'}{r^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{c^2} \frac{d^2 r}{dt^2} \right) = \frac{ee'}{r^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2r}{c^2} \frac{d^2 r}{dt^2} \right] .$$

correntes elétricas que haviam sido descobertas anteriormente e que mais tarde foram unificadas pela lei de Weber. Contudo, examinei esse assunto mais detalhadamente e encontrei,⁴² que para a dedução das leis especiais mencionadas, é quase completamente irrelevante se a pessoa parte da concepção *dualista* ou *unitária*.⁴³ Uma diferença nesta relação só ocorre com as leis da indução, e aqui apenas nos casos (provavelmente ainda não suficientemente investigados) lidando com a indução de correntes *abertas*.

Seja ds um elemento de uma corrente elétrica. Além disso, sejam $+eds$ e $-eds$ as quantidades de fluidos elétricos positivos e negativos contidos nele. Finalmente, sejam $s' = \frac{\partial s}{\partial t}$ e S' as velocidades dessas quantidades [de fluidos elétricos] com relação a *uma mesma* direção s .

Se colocarmos $S' = -s'$, então os dois fluidos vão se deslocar com a mesma velocidade em direções opostas, em total concordância com a concepção dualista geralmente tomada como base.

Contudo, se colocarmos $S' = 0$, o fluido negativo será considerado como estando ligado à matéria ponderável⁴⁴ ou como até mesmo sendo idêntico com essa matéria. Nesse caso apenas *um* fluido estará em movimento. Denotei anteriormente esse ponto de vista como unitário.

Se seguirmos simultaneamente as *duas* concepções e mantivermos indeterminada a função φ no potencial emissivo, obteremos os seguintes resultados. Aqui ds , eds , $s' = \frac{\partial s}{\partial t}$ possuem os significados já mencionados e $d\sigma$, $\eta d\sigma$, $\sigma' = \frac{\partial \sigma}{\partial t}$ possuem significados análogos com relação a um segundo elemento de corrente.

I. *Assuma que W é o potencial efetivo dos dois elementos de corrente e r a distância entre eles, então*

$$W = \frac{(2n)^2 ds d\sigma \cdot es' \eta \sigma' \frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}}{2}, \quad (5.8)$$

onde ψ representa a função mencionada [na Equação] (5.4) e n é um inteiro que é $= 2$ ou $= 1$ dependendo se assumimos a concepção dualista ou unitária.

Como mencionado [na Equação] (5.5), para o caso especial $\varphi = \frac{1}{r}$ temos $\psi = \frac{2\sqrt{r}}{c}$. Nesse caso o valor do potencial torna-se

$$W = \left(\frac{2n}{c}\right)^2 \frac{ds d\sigma \cdot es' \eta \sigma' \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial \sigma}}{2r}. \quad (5.9)$$

II. *A força repulsiva $\Re$ pela qual dois elementos de corrente atuam um sobre o outro é igual ao coeficiente de variação negativo do potencial W com relação a r .*

⁴²[Nota de Carl Neumann:] O que afirmo relacionado à repulsão e indução elétrica como um resultado de meus estudos não será justificado e desenvolvido no presente artigo. Pretendo fazer isso em um trabalho posterior.

⁴³Ou seja, é quase irrelevante se partimos da concepção de que a corrente elétrica em um condutor é composta por fluidos elétricos positivos e negativos deslocando-se em relação ao condutor com velocidades opostas, ou da concepção de que a corrente é devida apenas ao movimento dos fluidos eletrizados com cargas de um único tipo, enquanto que os fluidos com cargas opostas permanecem em repouso em relação ao condutor. Ver a Seção 4.2 na página 23.

⁴⁴Em alemão: *der ponderablen Materie*. Ou seja, matéria com peso. Essa expressão pode ser traduzida como matéria ponderável, matéria pesada ou matéria com peso.

Disso segue a fórmula

$$\mathfrak{R} = (2n)^2 ds d\sigma \cdot es' \eta \sigma' \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s \partial \sigma}, \quad (5.10)$$

que no caso em que $\varphi = \frac{1}{r}$ e $\psi = \frac{2\sqrt{r}}{c}$ assume o seguinte formato:

$$\mathfrak{R} = \left(\frac{2n}{c}\right)^2 \frac{2 ds d\sigma \cdot es' \eta \sigma' \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s \partial \sigma}}{\sqrt{r}}. \quad (5.11)$$

Contudo, essa última fórmula é *idêntica à lei de Ampère*, como é facilmente visto.

III. *Se $d\sigma$ e ds são dois elementos de correntes fechadas, e se $\mathfrak{E}$ denota a força eletromotriz exercida por $d\sigma$ sobre ds ao longo da direção s , então $\mathfrak{E}$ é igual ao coeficiente de variação negativo de W com relação a s .*

Essa fórmula, que é válida em geral, quer a indução seja devida a uma mudança da posição relativa ou a uma variação da intensidade de corrente, leva imediatamente à fórmula

$$\mathfrak{E} = \frac{d\overline{W}}{dt}, \quad (5.12)$$

se entendermos por $\overline{W}$ como sendo o valor do potencial W para $s' = 1$. Essa fórmula representa precisamente *a lei de indução como apresentada por meu pai*.

IV. Até aqui há uma correspondência completa entre os resultados obtidos entre as concepções dualista e unitária. Contudo, também examinei o caso da indução entre correntes *abertas* e encontrei que nesse caso há uma *diferença* significativa entre os resultados obtidos por essas duas concepções.

5.1.4 O Princípio da Força Viva

Nossa suposição é que o princípio de Hamilton é válido sem restrições. Uma consequência imediata dessa suposição é que o princípio da força viva também é sempre válido, mas nem sempre mantém sua forma usual.

Se forem dados apenas *dois* pontos m e m_1 , e se w for o potencial efetivo dos dois pontos, então de acordo [com a Equação] (5.3) teremos

$$w = mm_1 \left[\varphi + \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right], \quad (5.13)$$

ou equivalentemente

$$w = u + v, \quad (5.14)$$

onde u e v são dadas por

$$\left. \begin{aligned} u &= mm_1 \varphi, \\ v &= mm_1 \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

A partir do significado de φ e ψ (compare [as Equações] (5.1) e (5.4)) segue que u é independente da velocidade de propagação c , enquanto que v é afetado pelo valor $1/c^2$. Por outro lado vemos imediatamente de (5.15), que v desaparece tão logo os dois pontos sejam mantidos em *repouso* e que nesse caso o potencial w transforma-se em u . Por esse motivo denomino u como sendo o *potencial estático* e v o *potencial motor*.⁴⁵ É relevante observar que o potencial estático coincide com o potencial emissivo, o que segue não apenas das fórmulas, mas também diretamente da definição desses potenciais.

Consideramos agora o movimento de um sistema arbitrário de pontos, e seja W seu potencial efetivo. Decompomos W (assim como foi feito para w) em dois termos

$$W = U + V . \quad (5.16)$$

O termo U é independente de c e representa o potencial estático, enquanto que o termo V afetado pelo fator $1/c^2$ representa o potencial motor. Usando essas noções vamos mostrar a validade do seguinte teorema para a força viva:

Durante o movimento de um sistema arbitrário de pontos a força viva, aumentada pelo potencial estático e diminuída pelo potencial motor, tem sempre o mesmo valor. Temos matematicamente

$$T + U - V = \text{constante}, \quad (5.17)$$

onde T é a força viva do sistema. No caso de propagação instantânea, isto é, para $c = \infty$, desaparece a expressão V afetada pelo fator $1/c^2$. Nesse caso a fórmula (5.17) é simplificada para a fórmula bem conhecida $T + U = \text{constante}$.

No que diz respeito às expressões T , U , V , observamos que a primeira só depende das velocidades dos pontos, a segunda apenas de suas posições relativas, e a terceira depende simultaneamente *tanto* das velocidades *quanto* das posições relativas.

5.2 Os Coeficientes de Variação

5.2.1 Observação Preliminar

Se f e φ são funções de três variáveis α , β , γ , então valem as seguintes equações

$$\begin{aligned} f \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta \partial \gamma} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(f \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta \partial \gamma} \right) - \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta \partial \gamma} , \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta \partial \gamma} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \right) - \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} , \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} &= \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} \varphi \right) - \frac{\partial^3 f}{\partial \alpha \partial \beta \partial \gamma} \varphi . \end{aligned}$$

Se essas equações forem multiplicadas por $(-1)^0$, $(-1)^1$, $(-1)^2$, respectivamente, e então adicionadas em conjunto, obteremos

⁴⁵Em alemão: *Das motorische Potential*. Essa expressão pode ser traduzida por potencial motor, potencial motriz ou potencial do movimento.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta \partial \gamma} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left((-1)^0 f \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta \partial \gamma} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left((-1)^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \gamma} \left((-1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} \varphi \right) + (-1)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial \alpha \partial \beta \partial \gamma} \varphi . \end{aligned} \quad (5.18)$$

Analogamente, se f e φ forem funções de arbitrariamente muitas (por exemplo, p) variáveis $\alpha, \beta, \dots \pi$, obteremos então uma fórmula com o seguinte formato:

$$f \frac{\partial^p \varphi}{\partial \alpha \partial \beta \dots \partial \pi} = \frac{\partial A}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \beta} + \dots + \frac{\partial P}{\partial \pi} + (-1)^p \frac{\partial^p f}{\partial \alpha \partial \beta \dots \partial \pi} \varphi . \quad (5.19)$$

Se f e φ dependerem de n variáveis $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, e se $\alpha, \beta, \dots \pi$ representarem um número qualquer dessas n variáveis cada uma com muitas repetições arbitrárias, então a fórmula (5.19) ainda será válida. Se multiplicarmos essa fórmula por $d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n$ e integrarmos sobre um domínio arbitrário, teremos

$$\begin{aligned} &\int^{(n)} f \frac{\partial^p \varphi}{\partial \alpha \partial \beta \dots \partial \pi} d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n \\ &= \Sigma + (-1)^p \int^{(n)} \frac{\partial^p f}{\partial \alpha \partial \beta \dots \partial \pi} \varphi d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n , \end{aligned} \quad (5.20)$$

onde Σ representa uma soma de $(n - 1)$ integrais que se estendem sobre a *fronteira* do domínio de integração dado. Além disso, segue do significado de $A, B, \dots P$ que *essas integrais desaparecem quando a função φ e suas derivadas desaparecem nessa fronteira*.

5.2.2 Definição dos Coeficientes de Variação

Seja u uma função *indeterminada* das variáveis $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$. Seja como antes $\alpha, \beta, \dots \pi$ uma seleção arbitrária dessas variáveis, cada uma com muitas repetições arbitrárias. Abreviamos

$$\frac{\partial^p u}{\partial \alpha \partial \beta \dots \partial \pi} = u' . \quad (5.21)$$

Além disso,

$$G = G(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, u, u') \quad (5.22)$$

é uma expressão *dada* dessas variáveis, assim como de u e u' . Temos de examinar a variação da integral

$$\int^{(n)} G d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n \quad (5.23)$$

ao longo de um domínio dado arbitrário devida a uma mudança de u , com a suposição simplificadora de que a função u e suas derivadas permanecem inalteradas no limite do

domínio dado. No futuro vamos nos referir a isso como sendo a *variação interna* dessa integral. A partir disso obtemos imediatamente

$$\begin{aligned}\delta \int^{(n)} G d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n &= \int^{(n)} \delta G \cdot d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n \\ &= \int^{(n)} \left(\frac{\partial G}{\partial u} \delta u + \frac{\partial G}{\partial u'} \delta u' \right) d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n .\end{aligned}\quad (5.24)$$

Temos por (5.21):

$$\frac{\partial G}{\partial u'} \delta u' = \frac{\partial G}{\partial u'} \frac{\partial^p \delta u}{\partial \alpha \partial \beta \dots \partial \pi} , \quad (5.25)$$

portanto, de acordo com (5.20):

$$\begin{aligned}& \int^{(n)} \frac{\partial G}{\partial u'} \delta u' d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n \\ &= \Sigma + (-1)^p \int^{(n)} \frac{\partial^p}{\partial \alpha \partial \beta \dots \partial \pi} \frac{\partial G}{\partial u'} \cdot \delta u d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n .\end{aligned}\quad (5.26)$$

Acontece aqui o caso mencionado anteriormente onde Σ desaparece. De fato a função δu desaparece com todas as suas derivadas na *fronteira* do domínio de integração, já que a variação é *interna*. Consequentemente, ao substituir (5.26) em (5.24) obtemos

$$\delta \int^{(n)} G d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n = \int^{(n)} a \delta u d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n , \quad (5.27)$$

onde a é dado por

$$a = \frac{\partial G}{\partial u} + (-1)^p \frac{\partial^p}{\partial \alpha \partial \beta \dots \partial \pi} \frac{\partial G}{\partial u'} , \quad (5.28)$$

isto é,

$$a = \frac{\partial G}{\partial u} + (-1)^p \frac{\partial^p}{\partial \alpha \partial \beta \dots \partial \pi} \frac{\partial G}{\partial \frac{\partial^p u}{\partial \alpha \partial \beta \dots \partial \pi}} . \quad (5.29)$$

Abreviamos essa grandeza por

$$a = \frac{\partial G}{\partial u} + \varepsilon_{u'} D_{u'} \frac{\partial G}{\partial u'} , \quad (5.30)$$

onde $D_{u'}$ indica a diferenciação com relação a todas as variáveis usadas para obter a derivada u' . O símbolo $\varepsilon_{u'}$ denota um número que é igual a $+1$ ou -1 dependendo se u' é uma derivada de ordem par ou ímpar.

Analogamente pode ser desenvolvida uma tarefa mais geral. Suponha que u seja uma função *indeterminada* das variáveis $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, e sejam além disso $u', u'', \dots$ um número qualquer de derivadas arbitrariamente altas dessa função de acordo com essas variáveis. Seja, além disso,

$$G = G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, u, u', u'' \dots) \quad (5.31)$$

Parece apropriado chamar as grandezas $a, b, \dots c$ usadas para representar a variação da integral de G como sendo os *coeficientes de variação de G* com relação a $u, v, \dots w$ (conferir a página 31). Eles são descritos de maneira análoga aos coeficientes diferenciais com a única diferença que usamos Δ inclinado no lugar de ∂ redondo.⁴⁶ Temos com essa convenção

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\Delta G}{\Delta u} , \\ b &= \frac{\Delta G}{\Delta v} , \\ &\dots\dots\dots \\ c &= \frac{\Delta G}{\Delta w} . \end{aligned} \right\} \quad (5.38)$$

A letra minúscula δ é reservada para denotar a própria variação.

Como pode ser visto [da Equação] (5.37), os coeficientes de variação de G com relação a $u, v, \dots w$ são transformados nos coeficientes diferenciais $\frac{\partial G}{\partial u}, \frac{\partial G}{\partial v}, \dots \frac{\partial G}{\partial w}$ tão logo a expressão de G contenha apenas as próprias funções $u, v, \dots w$, mas não suas derivadas.

5.2.3 Um Teorema sobre os Coeficientes de Variação

Para a discussão que vai seguir iremos precisar de um teorema que em muitos casos simplifica os cálculos envolvendo os coeficientes de variação. Já havia observado anteriormente esse resultado [no trabalho] “Untersuchungen über Elasticität — Pesquisas sobre Elasticidade” que apareceu no *Journal* de Crelle, Vol. 57, pág. 299.⁴⁷

Além das variáveis $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ e as m funções indeterminadas $u, v, \dots w$, podemos ter adicionalmente M novas funções indeterminadas $U, V, \dots W$, que também só dependem de $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, mas que são conectadas às funções anteriores $u, v, \dots w$ por certas relações prescritas:

$$\left. \begin{aligned} U &= \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, u, v, \dots w) , \\ V &= \psi(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, u, v, \dots w) , \\ &\dots\dots\dots \\ W &= \chi(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, u, v, \dots w) . \end{aligned} \right\} \quad (5.39)$$

M pode ser maior ou menor do que m , ou os dois números podem ser iguais.

Assumimos que G é uma expressão *dada* das variáveis $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, das funções $U, V, \dots W$, e de quaisquer derivadas (arbitrariamente altas) dessas funções em relação a essas variáveis. Queremos determinar a *variação interna* da integral

$$\int^{(n)} G d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n \quad (5.40)$$

⁴⁶[Nota de Carl Neumann:] A expressão *coeficiente diferencial* raramente é usada, mas até onde sei é sempre utilizada como sinônimo de *derivada* ou *quociente diferencial*. A expressão *coeficiente de variação* é introduzida aqui correspondendo a essa expressão *coeficiente diferencial*. (No texto original de 1868, um ρ invertido foi usado em vez do Δ oblíquo).

⁴⁷[Neu60, pág. 299].

Essas fórmulas são o teorema que queríamos provar. Ele pode ser visto como uma generalização de um teorema conhecido no cálculo diferencial. No caso em que a expressão para G depende apenas de $U, V, \dots W$, mas não de suas derivadas, então após a eliminação por meio das relações (5.39) vem que ela também depende apenas de $u, v, \dots w$, mas não das derivadas dessas funções. Em um tal caso os coeficientes de variação aparecendo em (5.44) tornam-se os coeficientes diferenciais correspondentes e as próprias fórmulas transformam-se nas fórmulas bem conhecidas do cálculo diferencial.

Para clarificar o teorema geral contido em (5.44), observamos que se houver apenas uma função $u, v, \dots w$ e também apenas uma função $U, V, \dots W$, então ele pode ser pronunciado da seguinte maneira:

Se G depender de uma função indeterminada U e de sua derivada, e se a função U , por sua vez, depender de uma função u indeterminada diferente, então o coeficiente de variação de G com relação a u será obtido ao obter o coeficiente de variação de G com relação a U e ao multiplicá-lo pelo coeficiente diferencial de U com relação a u . Ou seja, ocorrerá a fórmula

$$\frac{\Delta G}{\Delta u} = \frac{\Delta G}{\Delta U} \frac{\partial U}{\partial u} . \quad (5.45)$$

Aqui u e U são funções de qualquer número de variáveis $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, e as derivadas dessas funções são derivadas com relação a $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$, sendo que a diferenciação com relação a cada uma dessas variáveis pode ser repetida quantas vezes quisermos.

5.3 Os Potenciais Emissivo e Receptivo

Consideramos^{48,49} dois pontos m e m_1 deslocando-se sob a interação mútua entre eles. Denotamos por r à distância entre eles para um instante *dado* de tempo t , e por $r - \Delta r$ [à distância] para um instante *anterior* de tempo $t - \Delta t$. Colocando

$$r = f(t) , \quad (5.46)$$

então a função f é para ser entendida como sendo *desconhecida*, assim como é desconhecido o movimento dos pontos. De qualquer forma também temos de colocar

$$r - \Delta r = f(t - \Delta t) , \quad (5.47)$$

ou, equivalentemente,

$$r - \Delta r = f(t) - \frac{\Delta t}{1} f'(t) + \frac{\Delta t^2}{1 \cdot 2} f''(t) - \dots . \quad (5.48)$$

A partir de (5.46) obtemos as equações

$$\frac{dr}{dt} = f'(t) , \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = f''(t) , \quad \text{etc.}$$

Assim a última fórmula fica no seguinte formato:

⁴⁸[Nota de Carl Neumann:] *Mais detalhes* sobre essa Seção (que talvez seja um pouco curta) podem ser encontrados nesses *Annalen*, Vol. 1, págs. 317-324.

⁴⁹[Neu69a] com tradução para o inglês em [Neu21a] e tradução para o português no Capítulo 6.

$$r - \Delta r = r - \frac{\Delta t}{1} \frac{dr}{dt} + \frac{\Delta t^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2 r}{dt^2} - \dots \quad (5.49)$$

Usando as denominações introduzidas anteriormente (ver a página 29), chamamos de $\tilde{\omega}$ ao *potencial emissivo* entre os dois pontos no tempo t . Temos

$$\tilde{\omega} = mm_1 \varphi(r) \quad , \quad (5.50)$$

onde $\varphi(r)$ é uma função *dada* que, no caso da lei de Newton, seria $\frac{1}{r}$.

Por outro lado, chamamos de ω ao *potencial receptivo* entre os dois pontos no tempo t . Para fixar as ideias, m pode ser considerado o receptor e m_1 o emissor. Nesse caso ω é o potencial que m recebe no tempo t e que, portanto, foi emitido por m_1 em um *tempo anterior* $t - \Delta t$. Nesse caso ω coincide com o potencial emissivo nesse tempo anterior e, portanto, tem o seguinte valor

$$\omega = mm_1 \varphi(r - \Delta r) \quad . \quad (5.51)$$

Usando [a Equação] (5.49) esse valor torna-se igual a

$$\omega = mm_1 \varphi \left(r - \frac{\Delta t}{1} \frac{dr}{dt} + \frac{\Delta t^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2 r}{dt^2} - \dots \right) \quad . \quad (5.52)$$

A expressão Δt representa aqui aquele [intervalo de] tempo que o potencial necessita para atravessar a trajetória r . Como denominamos por c à velocidade de propagação do potencial (página 28), isto é, entendemos c como sendo a distância através da qual o potencial viaja no tempo 1, temos $\Delta t : r = 1 : c$, ou seja,

$$\Delta t = \frac{r}{c} \quad . \quad (5.53)$$

Na sequência assumimos que a velocidade c é enorme e, portanto, a fração $\frac{r}{c}$ é minúscula, de tal forma que podemos desprezar sua *terceira* potência. Substituindo o valor (5.53) em (5.52) obtemos

$$\omega = mm_1 \varphi \left(r - \frac{r}{c} \frac{dr}{dt} + \frac{r^2}{2c^2} \frac{d^2 r}{dt^2} \right) \quad , \quad (5.54)$$

e a partir disso através de um maior desenvolvimento:

$$\omega = mm_1 \left[\varphi - \frac{r}{c} \frac{dr}{dt} \varphi' + \frac{r^2}{2c^2} \frac{d^2 r}{dt^2} \varphi' + \frac{r^2}{2c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \varphi'' \right] \quad , \quad (5.55)$$

ou após rearranjar os termos:

$$\omega = mm_1 \left[\varphi + \frac{r^2}{2c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{r^2 \varphi'}{2c^2} \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{r \varphi'}{c} \frac{dr}{dt} \right] \quad , \quad (5.56)$$

onde para abreviar colocamos $\varphi(r) = \varphi$, $\frac{d\varphi(r)}{dr} = \varphi'$, $\frac{d^2 \varphi(r)}{dr^2} = \varphi''$. Se Φ for uma função arbitrária de r , teremos as seguintes fórmulas gerais:

$$\begin{aligned}\Phi \frac{d^2 r}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\Phi \frac{dr}{dt} \right) - \frac{d\Phi}{dr} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2, \\ \Phi \frac{dr}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\int \Phi dr \right).\end{aligned}$$

Aplicando essas fórmulas para os dois últimos termos na expressão (5.56) para ω obtemos:

$$\begin{aligned}\omega = mm_1 \left[\varphi + \frac{r^2 \varphi''}{2c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{(r^2 \varphi')'}{2c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] \\ + mm_1 \frac{d}{dt} \left[\frac{r^2 \varphi' dr}{2c^2 dt} - \frac{\int r \varphi' dr}{c} \right],\end{aligned}\quad (5.57)$$

onde colocamos $(r^2 \varphi')'$ no lugar de $\frac{d(r^2 \varphi')}{dr}$, de tal forma que [essa expressão] é igual a $r^2 \varphi'' + 2r \varphi'$. Substituindo esse valor e observando além disso que $\int r \varphi' dr = r \varphi - \int \varphi dr$, então a expressão para ω assume a seguinte forma

$$\omega = mm_1 \left[\varphi - \frac{r \varphi'}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] + mm_1 \frac{d}{dt} \left[\frac{(\int \varphi dr) - r \varphi}{c} + \frac{r^2 \varphi' dr}{2c^2 dt} \right]. \quad (5.58)$$

Até o momento consideramos m_1 como emissor e m como receptor do potencial. Como pode ser facilmente visto, a *mesma* consideração envolvendo as *mesmas* fórmulas pode ser desenvolvida no caso oposto onde m é o emissor e m_1 o receptor do potencial.

Segue disso que o valor ω do potencial encontrado em (5.58) é não apenas aquele que *alcança* m no instante t *emitido por* m_1 , mas simultaneamente é aquele que *alcança* m_1 nesse instante, [tendo sido] *emitido por* m .

Chegamos então ao seguinte resultado:

Se dois pontos m e m_1 estão se deslocando sob a interação mútua entre eles, com r denotando sua distância no tempo t e, além disso, com ω representando o potencial receptivo entre os dois pontos correspondendo ao mesmo tempo, então

$$\omega = w + \frac{d\mathfrak{w}}{dt}, \quad (5.59)$$

onde w e $\mathfrak{w}$ representam as seguintes expressões:

$$\left. \begin{aligned}w &= mm_1 \left[\varphi - \frac{r}{c^2} \frac{d\varphi}{dr} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right], \\ \mathfrak{w} &= mm_1 \left[\frac{(\int \varphi dr) - r \varphi}{c} + \frac{r^2}{2c^2} \frac{d\varphi}{dr} \frac{dr}{dt} \right].\end{aligned} \right\} \quad (5.60)$$

Aqui a abreviação φ é definida como $\varphi(r)$ e além disso c é uma enorme velocidade constante com a qual o potencial viaja através do espaço.

Observamos também que o valor da expressão w pode ser representado mais facilmente por

$$w = mm_1 \left[\varphi + \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right], \quad (5.61)$$

onde ψ é a função

$$\psi = \int \sqrt{-r \frac{d\varphi}{dr}} \cdot \frac{dr}{c}. \quad (5.62)$$

De acordo com (5.59) o potencial receptivo consiste nos dois termos w e $\frac{d\mathfrak{w}}{dt}$. Denominamos o primeiro termo, a saber, w , como o potencial efetivo, e o outro termo, a saber, $\frac{d\mathfrak{w}}{dt}$, como o potencial inefetivo.

As denominações introduzidas aqui parecem bem necessárias para evitar que a próxima discussão fique demasiado prolongada. A maneira *como* os nomes foram escolhidos vai ficar mais clara durante a exposição.

Para o caso da lei de Newton, a saber, $\varphi = \frac{1}{r}$, obtemos $\psi = \frac{2\sqrt{r}}{c}$. Nesse caso as fórmulas (5.59), (5.60), e (5.61) ficam nas seguintes formas:

$$\omega = w + \frac{d\mathfrak{w}}{dt}, \quad (5.63)$$

$$w = mm_1 \left[\frac{1}{r} + \frac{4}{c^2} \left(\frac{d\sqrt{r}}{dt} \right)^2 \right] = \frac{mm_1}{r} \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right], \quad (5.64)$$

$$\mathfrak{w} = mm_1 \left[\frac{\log r}{c} - \frac{1}{2c^2} \frac{dr}{dt} \right]. \quad (5.65)$$

5.4 Lei de Weber

5.4.1 Dedução da Lei

A tarefa em questão é determinar o movimento de dois pontos m e m_1 com a hipótese de que o potencial emitido por um ponto alcança o outro ponto em um tempo posterior.

Para um tempo t as coordenadas dos pontos são denominadas por x, y, z, x_1, y_1, z_1 e a distância entre eles [é representada] por r . Além disso, para esse instante, ω é o potencial receptivo dos dois pontos deduzido de (5.59) até (5.61):

$$\omega = w + \frac{d\mathfrak{w}}{dt}, \quad (5.66)$$

e τ é a força viva deles:

$$\begin{aligned} \tau = & \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] \\ & + \frac{m_1}{2} \left[\left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Como mencionado na página 28, consideramos o princípio de Hamilton aplicável sem restrições. Portanto, o movimento dos pontos m e m_1 é caracterizado pela fórmula

$$\delta \int (\tau - \omega) dt = 0 . \quad (5.68)$$

De acordo com a página 28, a integração é realizada ao longo de um intervalo de tempo arbitrário. Entendemos por δ como sendo a *variação interna*, isto é, a variação que lida apenas com o interior do intervalo de tempo, mas não com suas fronteiras.

Através da substituição de (5.66) a fórmula (5.68) assume o seguinte formato:

$$\delta \int \tau dt = \delta \int \left(w + \frac{d\mathfrak{w}}{dt} \right) dt = \delta \left(\mathfrak{w}'' - \mathfrak{w}' + \int w dt \right) , \quad (5.69)$$

ou, como δ é uma variação *interna* e, portanto, $\delta \mathfrak{w}'' = \delta \mathfrak{w}' = 0$, obtemos

$$\delta \int \tau dt = \delta \int w dt . \quad (5.70)$$

Levando em consideração que as funções indeterminadas contidas em τ e w são representadas por x, y, z e x_1, y_1, z_1 , obtemos as seguintes seis equações utilizando nossa notação prévia introduzida na página 38:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta \tau}{\Delta x} &= \frac{\Delta w}{\Delta x} , & \frac{\Delta \tau}{\Delta x_1} &= \frac{\Delta w}{\Delta x_1} , \\ \frac{\Delta \tau}{\Delta y} &= \frac{\Delta w}{\Delta y} , & \frac{\Delta \tau}{\Delta y_1} &= \frac{\Delta w}{\Delta y_1} , \\ \frac{\Delta \tau}{\Delta z} &= \frac{\Delta w}{\Delta z} , & \frac{\Delta \tau}{\Delta z_1} &= \frac{\Delta w}{\Delta z_1} . \end{aligned} \right\} \quad (5.71)$$

Se calcularmos os coeficientes de variação no lado esquerdo usando o valor de τ dado em (5.67), então as seis equações ficarão no seguinte formato:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{\Delta w}{\Delta x} , & m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -\frac{\Delta w}{\Delta x_1} , \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\frac{\Delta w}{\Delta y} , & m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= -\frac{\Delta w}{\Delta y_1} , \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= -\frac{\Delta w}{\Delta z} , & m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= -\frac{\Delta w}{\Delta z_1} . \end{aligned} \right\} \quad (5.72)$$

Essas equações mostram *que os coeficientes de variação negativos do lado direito representam as componentes dessas forças que atuam nos pontos durante seus deslocamentos*. Para determinar explicitamente esses coeficientes de variação, observamos que pela [Equação] (5.61) o potencial efetivo w possui o seguinte valor:

$$w = mm_1 \left[\varphi + \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right] = mm_1 \left[\varphi + \left(\frac{d\psi}{dr} \frac{dr}{dt} \right)^2 \right] . \quad (5.73)$$

Em particular, ele depende de r e $\frac{dr}{dt}$, onde o próprio r depende das funções indeterminadas x, y, z, x_1, y_1, z_1 através da equação

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 . \quad (5.74)$$

Portanto, os coeficientes de variação podem ser calculados pelo teorema apresentado na página 40, a saber, usando as fórmulas

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta w}{\Delta x} &= \frac{\Delta w}{\Delta r} \frac{\partial r}{\partial x} , & \frac{\Delta w}{\Delta x_1} &= \frac{\Delta w}{\Delta r} \frac{\partial r}{\partial x_1} , \\ \frac{\Delta w}{\Delta y} &= \frac{\Delta w}{\Delta r} \frac{\partial r}{\partial y} , & \frac{\Delta w}{\Delta y_1} &= \frac{\Delta w}{\Delta r} \frac{\partial r}{\partial y_1} , \\ \frac{\Delta w}{\Delta z} &= \frac{\Delta w}{\Delta r} \frac{\partial r}{\partial z} , & \frac{\Delta w}{\Delta z_1} &= \frac{\Delta w}{\Delta r} \frac{\partial r}{\partial z_1} . \end{aligned} \right\} \quad (5.75)$$

Substituindo essas expressões em (5.72) e usando os valores de $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\dots$, que seguem de (5.74), obtemos as seguintes equações:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{\Delta w}{\Delta r} \frac{x-x_1}{r} , & m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -\frac{\Delta w}{\Delta r} \frac{x_1-x}{r} , \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\frac{\Delta w}{\Delta r} \frac{y-y_1}{r} , & m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= -\frac{\Delta w}{\Delta r} \frac{y_1-y}{r} , \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= -\frac{\Delta w}{\Delta r} \frac{z-z_1}{r} , & m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= -\frac{\Delta w}{\Delta r} \frac{z_1-z}{r} . \end{aligned} \right\} \quad (5.76)$$

Falta calcular o coeficiente de variação $\frac{\Delta w}{\Delta r}$. Abreviando $\frac{dr}{dt}$ por r' , e $\frac{d^2 r}{dt^2}$ por r'' , segue de (5.73) que

$$w = mm_1 \left[\varphi + \left(\frac{d\psi}{dr} r' \right)^2 \right] . \quad (5.77)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= mm_1 \left[\frac{d\varphi}{dr} + 2 \frac{d\psi}{dr} \frac{d^2 \psi}{dr^2} (r')^2 \right] , \\ \frac{\partial w}{\partial r'} &= mm_1 \cdot 2 \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 r' , \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\partial w}{\partial r} = mm_1 \left[\frac{d\varphi}{dr} + 2 \frac{d\psi}{dt} \frac{d \frac{d\psi}{dr}}{dt} \right] , \quad (5.78)$$

$$\frac{\partial w}{\partial r'} = mm_1 \cdot 2 \frac{d\psi}{dr} \frac{d\psi}{dt} . \quad (5.79)$$

Diferenciando a última fórmula obtemos:

$$\frac{d \frac{\partial w}{\partial r'}}{dt} = mm_1 \left[2 \frac{d\psi}{dr} \frac{d^2 \psi}{dt^2} + 2 \frac{d\psi}{dt} \frac{d \frac{d\psi}{dr}}{dt} \right] . \quad (5.80)$$

Como w só depende de r e r' por (5.77), obtemos

$$\frac{\Delta w}{\Delta r} = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{d \frac{\partial w}{\partial r'}}{dt} . \quad (5.81)$$

Portanto, por (5.78) e (5.80):

$$\frac{\Delta w}{\Delta r} = mm_1 \left[\frac{d\varphi}{dr} - 2 \frac{d\psi}{dr} \frac{d^2 \psi}{dt^2} \right] . \quad (5.82)$$

Os seguintes teoremas seguem de (5.76) e (5.82):

Entre dois pontos m e m_1 está atuando uma força R durante seus movimentos que em cada instante coincide com a linha r que os conecta.

Se considerarmos essa força R como uma força repulsiva e se w for o potencial efetivo dos dois pontos entre si, então R será igual em cada instante ao coeficiente de variação negativo de w com relação a r , de tal forma que ela terá o seguinte valor:

$$R = -\frac{\Delta w}{\Delta r} . \quad (5.83)$$

No caso em que a lei de emissão do potencial for arbitrária, isto é, quando o potencial emissivo for igual a $mm_1\varphi(r)$, onde φ é uma função arbitrária, então, usando as abreviações

$$\left. \begin{aligned} \varphi(r) &= \varphi , \\ \frac{1}{c} \int \sqrt{-r \frac{d\varphi}{dr}} dr &= \psi(r) = \psi , \end{aligned} \right\} \quad (5.84)$$

os valores do potencial efetivo w e da força R serão os seguintes:

$$\left. \begin{aligned} w &= mm_1 \left[\varphi + \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right] , \\ R &= -\frac{\Delta w}{\Delta r} = mm_1 \left[-\frac{d\varphi}{dr} + 2 \frac{d\psi}{dr} \frac{d^2\psi}{dt^2} \right] . \end{aligned} \right\} \quad (5.85)$$

No caso especial da lei de emissão de Newton temos

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{r} , \\ \psi &= \frac{2\sqrt{r}}{c} , \end{aligned} \right\} \quad (5.86)$$

e, portanto,

$$\left. \begin{aligned} w &= mm_1 \left[\frac{1}{r} + \frac{4}{c^2} \left(\frac{d\sqrt{r}}{dt} \right)^2 \right] , \\ R &= -\frac{\Delta w}{\Delta r} = mm_1 \left[\frac{1}{r^2} + \frac{4}{c^2\sqrt{r}} \frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2} \right] , \end{aligned} \right\} \quad (5.87)$$

isto é,

$$R = \frac{mm_1}{r^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2r}{c^2} \frac{d^2r}{dt^2} \right] .$$

Aqui c sempre representa a velocidade constante mas imensa com a qual o potencial se desloca no espaço.⁵⁰

⁵⁰[Nota de Carl Neumann:] O valor de R em (5.85) também pode ser deduzido da fórmula

$$w = mm_1 \left[\varphi + \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right]$$

a partir do seguinte raciocínio. De acordo com o teorema sobre os coeficientes de variação na página 40 temos

A fórmula geral (5.85) coincide completamente com a lei que assumi em minha tese de doutorado “*Explicare tentatur quomodo fiat, ut lucis planum polarisationis per vires electricas vel magneticas declinetur. Halis Saxonum 1858,*”⁵¹ que discutiu a interação mútua entre uma *partícula elétrica* e uma *partícula do éter*. De fato, a fórmula (5.85) pode ser escrita como segue

$$R = mm_1 \left[-\frac{d\varphi}{dr} + 2\frac{d\psi}{dr} \frac{d^2\psi}{dr^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + 2 \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 \frac{d^2r}{dt^2} \right]. \quad (5.88)$$

Colocando

$$-\frac{d\varphi}{dr} = F, \quad 2 \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 = \Phi, \quad (5.89)$$

ela fica no formato

$$R = mm_1 \left[F + \frac{1}{2} \frac{d\Phi}{dr} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \Phi \frac{d^2r}{dt^2} \right]. \quad (5.90)$$

Contudo, essa é a lei assumida naquela tese na página 3.^{52,53}

Contudo, o aspecto mais importante é o fato que [a Equação] (5.87) coincide literalmente com a bem conhecida *lei de Weber*.

$$\frac{\Delta w}{\Delta r} = \frac{\Delta w}{\Delta \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\Delta w}{\Delta \psi} \frac{\partial \psi}{\partial r} = mm_1 \frac{\partial \varphi}{\partial r} - mm_1 \cdot 2 \frac{d^2\psi}{dt^2} \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

portanto

$$R = mm_1 \left[-\frac{\partial \varphi}{\partial r} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{d^2\psi}{dt^2} \right].$$

⁵¹[Neu58]. Ver também [Neu63].

⁵²[Nota de Carl Neumann:] De acordo com (5.84), as fórmulas (5.89) também podem ser escritas como

$$-\frac{d\varphi}{dr} = F, \quad -\frac{2r}{c^2} \frac{d\varphi}{dr} = \Phi. \quad (5.91)$$

Portanto, temos a seguinte relação entre F e Φ :

$$\frac{2F}{c^2} = \frac{\Phi}{r}. \quad (5.92)$$

Na tese mencionada mantive indeterminada a relação entre F e Φ , de tal forma que não há a menor contradição entre essa tese e a teoria desenvolvida nesse artigo. O fenômeno óptico mencionado foi tratado posteriormente com mais detalhes em meu trabalho “Ueber die Magnetische Drehung der Polarisationssebene des Lichtes (Sobre a rotação magnética do plano de polarização da luz). Halle. 1863.” Infelizmente assumi aqui para tornar a exposição mais simples uma certa relação entre F e G , a saber,

$$\frac{2F}{c^2} = -\frac{d\Phi}{dr}. \quad (5.93)$$

Para o *caso especial* no qual $\varphi = \frac{1}{r}$, isto é, $F = \frac{1}{r^2}$, isso é idêntico à relação (5.92) e também leva ao valor $\Phi = \frac{2}{c^2 r}$. Porém, em geral, ela contradiz [a Equação] (5.92). Observo que a suposição da relação (5.93) no artigo mencionado anteriormente não foi motivada por questões internas, mas apenas para dar mais simplicidade à forma exterior. De fato, a função F não tem qualquer papel na minha investigação da rotação do plano de polarização. Ela desaparece dos cálculos bem no início. Portanto, os resultados naquela investigação são os mesmos qualquer que seja a relação assumida entre F e Φ .

⁵³[Neu63].

5.4.2 Adendos

Denotamos por R à força que atua sobre m durante o deslocamento dos dois pontos m e m_1 . Suas componentes são abreviadas por X , Y e Z . De acordo com (5.72) temos as seguintes equações

$$\left. \begin{aligned} X &= -\frac{\Delta w}{\Delta x} , \\ Y &= -\frac{\Delta w}{\Delta y} , \\ Z &= -\frac{\Delta w}{\Delta z} . \end{aligned} \right\} \quad (5.94)$$

Se imaginarmos que há uma linha traçada através de m cuja direção é determinada pelos cossenos diretores⁵⁴ α , β , γ e se designarmos por P à componente da força R nessa direção, então:

$$P = X\alpha + Y\beta + Z\gamma = -\left[\frac{\Delta w}{\Delta x}\alpha + \frac{\Delta w}{\Delta y}\beta + \frac{\Delta w}{\Delta z}\gamma \right] . \quad (5.95)$$

Se pensarmos que a mobilidade do ponto m ou x , y , z está limitada por enquanto a essa linha, ou seja, colocando assim

$$x = a + p\alpha , \quad y = b + p\beta , \quad z = c + p\gamma ,$$

onde a , b , c é um ponto fixo da linha e p é a distância entre esse ponto e o ponto x , y , z , teremos então

$$\alpha = \frac{\partial x}{\partial p} , \quad \beta = \frac{\partial y}{\partial p} , \quad \gamma = \frac{\partial z}{\partial p} .$$

Consequentemente, a fórmula (5.95) transforma-se em

$$P = -\left[\frac{\Delta w}{\Delta x} \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\Delta w}{\Delta y} \frac{\partial y}{\partial p} + \frac{\Delta w}{\Delta z} \frac{\partial z}{\partial p} \right] . \quad (5.96)$$

No que diz respeito à dependência entre w e p , observamos inicialmente que w depende de x , y , z , $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, por outro lado, x , y , z dependem de p . Logo a expressão entre colchetes em (5.96) nada mais é do que o coeficiente de variação de w com relação a p , como segue do teorema na página 31. Segue que

$$P = -\frac{\Delta w}{\Delta p} , \quad (5.97)$$

que é análogo às fórmulas (5.94) e contém essas fórmulas como um caso especial.

No caso em que temos arbitrariamente muitos pontos m , m_1 , m_2 , m_3 , $\dots$, então denotando por w_1 , w_2 , w_3 , $\dots$ aos potenciais efetivos para cada par de pontos (m, m_1) , (m, m_2) , (m, m_3) , $\dots$, obtemos então de (5.97) que a expressão

$$-\left(\frac{\Delta w_1}{\Delta p} + \frac{\Delta w_2}{\Delta p} + \frac{\Delta w_3}{\Delta p} + \dots \right) \quad (5.98)$$

⁵⁴Em alemão: *Richtungscosinus*.

representa essa força através da qual o ponto m é impelido ao longo da direção p por todos os outros pontos conjuntamente. Essa expressão pode ser escrita de forma mais compacta utilizando o potencial efetivo de todo o sistema de pontos, W , na seguinte forma:

$$- \frac{\Delta W}{\Delta p} . \quad (5.99)$$

Segue, portanto, o seguinte teorema:

Se W for o potencial efetivo de um sistema arbitrário de pontos, a força com que qualquer desses pontos é impelido ao longo de uma dada direção, é sempre igual ao coeficiente de variação negativo de W em relação a essa direção.

5.5 O Princípio da Força Viva

5.5.1 Consideração de Dois Pontos

Começamos com um caso bem simples, a saber, aquele onde existem apenas *dois* pontos m e m_1 . Além disso, assumimos que m é *móvel*, enquanto que m_1 está *fixo*.

Sejam x, y, z e x_1, y_1, z_1 as coordenadas desses dois pontos, r a distância entre eles e, além disso, seja ω o *potencial receptivo* entre os dois pontos. Finalmente, seja τ a força viva deles.

De acordo com a página 42, o potencial receptivo consiste em duas partes:

$$\omega = w + \frac{d\omega}{dt} . \quad (5.100)$$

Nos referimos ao primeiro termo como o *potencial efetivo* e ao último termo como o potencial *inefetivo*. Além disso, de acordo com a página 42, o pontecial efetivo w tem o seguinte valor:

$$w = mm_1 \left[\varphi(r) + \left(\frac{d\psi(r)}{dt} \right)^2 \right] , \quad (5.101)$$

onde $\varphi(r)$ e $\psi(r)$ são funções dadas de r . No caso da lei de emissão de Newton elas são representadas por $\frac{1}{r}$ e $\frac{2\sqrt{r}}{c}$, onde c é a velocidade de propagação que foi mencionada várias vezes. Denotamos as duas partes de w por u e v , a saber,

$$\begin{aligned} w &= u + v , \\ u &= mm_1 \varphi(r) = mm_1 \varphi , \\ v &= mm_1 \left(\frac{d\psi(r)}{dt} \right)^2 = mm_1 \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 . \end{aligned} \quad (5.102)$$

No estado de repouso, isto é, quando r é constante, v desaparece e w transforma-se em u . Denominamos a primeira parte u do *potencial efetivo* w como o *potencial estático*, e a segunda parte v como o *potencial motor*.

Como m_1 está *fixo*, a força viva é dada por

$$\tau = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] . \quad (5.103)$$

Se denotarmos com acento às derivadas com relação ao tempo e observarmos que x_1, y_1, z_1 são *constantes*, também poderemos escrever as fórmulas (5.102) e (5.103) da seguinte forma:

$$w = u + v , \quad (5.104)$$

$$u = mm_1\varphi ,$$

$$v = mm_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} x' + \frac{\partial \psi}{\partial y} y' + \frac{\partial \psi}{\partial z} z' \right)^2 ,$$

$$\tau = \frac{m}{2} ((x')^2 + (y')^2 + (z')^2) . \quad (5.105)$$

De acordo com o princípio de Hamilton para o movimento dos pontos, vale a fórmula

$$\delta \int (\tau - \omega) dt = 0 , \quad (5.106)$$

isto é, de acordo com (5.100):

$$\delta \int \tau dt = \delta \int \left(w + \frac{d\mathfrak{w}}{dt} \right) dt = \delta \mathfrak{w}'' - \delta \mathfrak{w}' + \delta \int w dt , \quad (5.107)$$

ou, como as fronteiras das integrais são consideradas como estando fixas com relação à posição e velocidade:

$$\delta \int \tau dt = \delta \int w dt . \quad (5.108)$$

Como x_1, y_1, z_1 são constantes e apenas x, y, z são variáveis, obtemos três equações após realizar a variação δ . Essas equações são:

$$\left. \begin{aligned} -mx'' &= \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial w}{\partial x'} , \\ -my'' &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial w}{\partial y'} , \\ -mz'' &= \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{d}{dt} \frac{\partial w}{\partial z'} , \end{aligned} \right\} \quad (5.109)$$

onde os acentos indicam diferenciação com relação ao tempo. Multiplicando essas equações (5.109) por $-x', -y', -z'$ e adicionando-as em conjunto obtemos, considerando (5.106):

$$\frac{d\tau}{dt} = - \left(x' \frac{\partial w}{\partial x} + y' \frac{\partial w}{\partial y} + z' \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \left(x' \frac{d}{dt} \frac{\partial w}{\partial x'} + y' \frac{d}{dt} \frac{\partial w}{\partial y'} + z' \frac{d}{dt} \frac{\partial w}{\partial z'} \right) , \quad (5.110)$$

ou, em forma abreviada,

$$\frac{d\tau}{dt} = - \left(x' \frac{\partial w}{\partial x} + \dots \right) + \left(x' \frac{d}{dt} \frac{\partial w}{\partial x'} + \dots \right) . \quad (5.111)$$

Diferenciando o potencial efetivo w , (5.104), com relação ao tempo e observando que esse w depende não apenas de x, y, z , mas também de x', y', z' , obtemos a fórmula:

$$\frac{dw}{dt} = \left(x' \frac{\partial w}{\partial x} + \dots \right) + \left(x'' \frac{\partial w}{\partial x'} + \dots \right) , \quad (5.112)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{dw}{dt} = \left(x' \frac{\partial w}{\partial x} + \cdots \right) + \frac{d}{dt} \left(x' \frac{\partial w}{\partial x'} + \cdots \right) - \left(x' \frac{d}{dt} \frac{\partial w}{\partial x'} + \cdots \right). \quad (5.113)$$

Adicionando (5.111) e (5.113) segue que:

$$\frac{d(\tau + w)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(x' \frac{\partial w}{\partial x'} + y' \frac{\partial w}{\partial y'} + z' \frac{\partial w}{\partial z'} \right). \quad (5.114)$$

Por (5.104) temos $w = u + v$, além disso, v é independente de x', y', z' e, por outro lado, v é uma expressão homogênea de grau dois em relação a x', y', z' , de tal forma que:

$$x' \frac{\partial w}{\partial x'} + y' \frac{\partial w}{\partial y'} + z' \frac{\partial w}{\partial z'} = x' \frac{\partial v}{\partial x'} + y' \frac{\partial v}{\partial y'} + z' \frac{\partial v}{\partial z'} = 2v.$$

Portanto, a Equação (5.114) fica no seguinte formato:

$$\frac{d(\tau + w)}{dt} = \frac{d(2v)}{dt}. \quad (5.115)$$

Isso implica que

$$\tau + w - 2v = \text{constante}, \quad (5.116)$$

ou, usando $w = u + v$:

$$\tau + u - v = \text{constante}. \quad (5.117)$$

Isso significa que se adicionarmos o potencial estático e subtrairmos o potencial motor da força viva, obteremos uma constante do movimento.

5.5.2 Consideração de um Sistema Arbitrário de Pontos

Um procedimento completamente análogo pode agora ser realizado para um sistema com qualquer número de pontos, digamos n , independentemente de a mobilidade do sistema ser livre ou limitada por quaisquer condições dadas. Entretanto, se houver restrições, assumimos que elas podem ser expressas por equações envolvendo *apenas as coordenadas* dos pontos, mas não suas velocidades. Denotamos essas equações por

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = 0, \quad \text{etc.} \quad (5.118)$$

Denotamos a força viva do sistema por T e o potencial receptivo por Ω . Nesse caso T é uma soma de n termos, cada um tendo o seguinte formato:

$$\tau = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] = \frac{m}{2} ((x')^2 + (y')^2 + (z')^2). \quad (5.119)$$

Por outro lado, Ω é uma soma de $\frac{n(n-1)}{2}$ termos, sendo que cada um deles, pertencendo a dois pontos, tem o seguinte formato:

$$\omega = w + \frac{d\mathfrak{w}}{dt} = u + v + \frac{d\mathfrak{w}}{dt}. \quad (5.120)$$

Nesse caso o próprio Ω tem um formato análogo, a saber:

$$\Omega = W + \frac{d\mathfrak{W}}{dt} = U + V + \frac{d\mathfrak{W}}{dt} , \quad (5.121)$$

onde W representa o potencial efetivo e $\frac{d\mathfrak{W}}{dt}$ o potencial inefetivo do sistema. No que diz respeito às duas partes de W , denominamos U como o potencial estático e V como o potencial motor do sistema.

O potencial efetivo $W = U + V$ do sistema consiste em $\frac{n(n-1)}{2}$ termos da forma $w = u + v$. Se m e m_1 forem dois pontos quaisquer do sistema, r a distância entre eles e se, além disso, x, y, z e x_1, y_1, z_1 forem suas coordenadas, o termo $w = u + v$ pertencendo a esses dois pontos terá o seguinte valor (conferir a fórmula (5.102)):

$$\left. \begin{aligned} w &= u + v , \\ u &= mm_1\varphi(r) = mm_1\varphi , \\ v &= mm_1\left(\frac{d\psi(r)}{dt}\right)^2 = mm_1\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 , \end{aligned} \right\}$$

ou, escrito mais detalhadamente:

$$\left. \begin{aligned} w &= u + v , \\ u &= mm_1\varphi , \\ v &= mm_1\left(\frac{\partial\psi(r)}{\partial x}(x' - x'_1) + \frac{\partial\psi}{\partial y}(y' - y'_1) + \frac{\partial\psi}{\partial z}(z' - z'_1)\right)^2 . \end{aligned} \right\} \quad (5.122)$$

Para o movimento do sistema, se a sua mobilidade fosse totalmente livre, aplicar-se-ia a fórmula:

$$\delta \int T dt = \delta \int \Omega dt .$$

Contudo, se o sistema for restringido pelas condições (5.118), a fórmula anterior terá de ser substituída por:

$$\delta \int T dt = \delta \int (\Omega + \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \dots) dt , \quad (5.123)$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ são funções desconhecidas do tempo. Colocando $\Omega = W + \frac{d\mathfrak{W}}{dt}$ essa fórmula fica no seguinte formato:

$$\delta \int T dt = \delta \int (W + \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \dots) dt . \quad (5.124)$$

Se efetuarmos a variação δ , obteremos $3n$ equações diferenciais, a saber, o mesmo número de equações que temos de variáveis x, y, z . As equações que pertencem ao ponto m com coordenadas x, y, z ficam como:

$$\left. \begin{aligned} -mx'' &= \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial x'} + \lambda_1 \frac{\partial B_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial B_2}{\partial x} + \dots, \\ -my'' &= \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial y'} + \lambda_1 \frac{\partial B_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial B_2}{\partial y} + \dots, \\ -mz'' &= \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial z'} + \lambda_1 \frac{\partial B_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial B_2}{\partial z} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.125)$$

Após multiplicar por $-x', -y', -z'$ e somá-las obtemos, tendo em vista (5.119), a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} &= - \left(x' \frac{\partial W}{\partial x} + y' \frac{\partial W}{\partial y} + z' \frac{\partial W}{\partial z} \right) \\ &\quad + \left(x' \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial x'} + y' \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial y'} + z' \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial z'} \right) \\ &\quad - \lambda_1 \left(x' \frac{\partial B_1}{\partial x} + \dots \right) - \lambda_2 \left(x' \frac{\partial B_2}{\partial x} + \dots \right) - \dots \end{aligned} \quad (5.126)$$

Podem ser formadas tantas equações desse tipo quantos forem os pontos. Adicionando todas essas equações obtemos, tendo em vista (5.118), a seguinte fórmula:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = - \sum \left(x' \frac{\partial W}{\partial x} + \dots \right) + \sum \left(x' \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial x'} + \dots \right). \quad (5.127)$$

O potencial efetivo W depende das coordenadas e das velocidades. Se o diferenciarmos com relação ao tempo obteremos

$$\frac{dW}{dt} = \sum \left(x' \frac{\partial W}{\partial x} + \dots \right) + \sum \left(x'' \frac{\partial W}{\partial x'} + \dots \right),$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \sum \left(x' \frac{\partial W}{\partial x} + \dots \right) + \frac{d}{dt} \sum \left(x' \frac{\partial W}{\partial x'} + \dots \right) \\ &\quad - \sum \left(x' \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial x'} + \dots \right). \end{aligned} \quad (5.128)$$

Somando (5.127) e (5.128) obtemos

$$\frac{d(T + W)}{dt} = \frac{d}{dt} \sum \left(x' \frac{\partial W}{\partial x'} + y' \frac{\partial W}{\partial y'} + z' \frac{\partial W}{\partial z'} \right). \quad (5.129)$$

Com o auxílio de (5.122) vemos que U é independente das $3n$ grandezas x', y', z' e, por outro lado, V é uma expressão homogênea de grau dois dessas $3n$ grandezas. Como $W = U + V$ segue que:

$$\sum \left(x' \frac{\partial W}{\partial x'} + y' \frac{\partial W}{\partial y'} + z' \frac{\partial W}{\partial z'} \right) = 2V.$$

Portanto, a Equação (5.129) transforma-se em:

$$\frac{d(T + W)}{dt} = \frac{d(2V)}{dt} . \quad (5.130)$$

Isso implica que

$$T + W - 2V = \text{constante}, \quad (5.131)$$

ou, como $W = U + V$:

$$T + U - V = \text{constante}. \quad (5.132)$$

Essa fórmula reduz-se no caso de uma propagação *instantânea* do potencial, isto é, quando $c = \infty$, à fórmula bem conhecida $T + U = \text{constante}$ (conferir a página 28). A fórmula geral (5.132) contém o seguinte teorema:

A força viva aumentada pelo potencial estático e diminuída pelo potencial motor é uma constante do movimento para um sistema arbitrário de pontos. Isso vale não importando se a mobilidade do sistema é livre ou se é limitada por alguma condição (referente às coordenadas dos pontos).

Esse teorema foi deduzido com a suposição de que no sistema de pontos atuam apenas forças *internas*. No caso em que um sistema consistindo nos pontos $m_1, m_2, \dots m_n$ está sujeito não apenas a suas forças *internas*, mas também a forças *externas*, podemos sempre encontrar *pontos fixos* $M_1, M_2, \dots M_p$ que são os centros dessas últimas forças. O sistema consistindo em todos esses $n + p$ pontos estará então sujeito apenas a forças *internas* e, portanto, o teorema anterior vai se aplicar a ele. O fato de alguns desses pontos $n + p$ serem limitados por determinadas condições até a imobilidade absoluta é completamente irrelevante para a aplicabilidade do teorema.

5.5.3 Pós-escrito

Se assumirmos (como tem acontecido quase sempre desde Newton) que corpos separados *espacialmente* atuam diretamente entre si, então deve ser igualmente permissível supor uma ação mútua entre dois corpos que estão separados *temporalmente* entre si; naturalmente desde que tal suposição leve a consequências igualmente felizes como a primeira [suposição]. Assim, o Prof. Weber, a quem estou profundamente grato pela sua gentil comunicação, observa que a hipótese que apresentei (para o caso $\varphi = \frac{1}{r}$) pode ser formulada da seguinte maneira:

Os valores potenciais resultantes de uma partícula de matéria são inversamente proporcionais às distâncias, e são válidos para instantes posteriores de tempo proporcionalmente à distância. O motivo pelo qual eles são válidos para instantes posteriores de tempo, pode estar em uma propagação, sobre a qual só é possível falar com a suposição de uma mecânica superior (como, por exemplo, a propagação de ondas no ar só pode ser tratada com o conhecimento da mecânica de fluidos), de onde seguiria que a propagação pode ser perturbada e interrompida em todo ponto do meio.

Se a questão levantada aqui, [a saber,] se a suposta influência entre corpos separados *temporalmente* deve ser considerada como algo primário (não explicável) ou como algo secundário (reduzível a processos mais simples), tivesse que ser decidida *imediatamente*, então

eu daria sem hesitação preferência ao primeiro ponto de vista. Mas mesmo neste caso, a expressão que escolhi provavelmente não é inadequada, pelo menos como *figurativa*, e é, portanto, *justificada*.

Tübingen, maio de 1868.

5.6 Observações Suplementares de Carl Neumann em 1880

As *últimas palavras* desse artigo (página 54) deveriam *por si mesmas* mostrar claramente quão imprecisas eram as objeções levantadas por *Clausius* em 1869 (nos *Annalen* de Poggendorff, Vol. 135, página 606)⁵⁵ contra o conteúdo dessa obra. A propósito, compare meu ensaio sobre isso nos *Math. Ann.*, Vol. 1, páginas 317–324.⁵⁶

Uma olhada rápida nas *primeiras poucas páginas* desse artigo (páginas 400–402)⁵⁷ mostra que em 1868, quando o escrevi, não estava ciente de duas considerações importantes de *Weber* e *Riemann*.

Um *argumento de Weber* (que apareceu como um artigo curto nos *Annalen* de Poggendorff, Vol. 73, página 229, 1848)⁵⁸ *mostra de maneira elementar que o princípio da força viva continua a ser válido para a lei fundamental de Weber*. — Lamento que naquela época não tivesse conhecimento desse artigo.⁵⁹ Aliás, em minhas publicações posteriores (como, por exemplo, nos *Abhandlungen der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss.*, Vol. 11, 1874, página 115)⁶⁰ fiz todos os esforços para colocar as considerações de Weber sob a luz apropriada.

Por outro lado, as considerações de Riemann (compare o trabalho de Hattendorff sobre peso, eletricidade e magnetismo, Hannover, Rümpler, 1876, págs. 316–336)⁶¹ *já contém a ideia de introduzir um potencial eletrodinâmico e de deduzir a partir dele por variação as forças elétricas*. Essa ideia é crucial nesse artigo e está desenvolvida em grande detalhe. Não há necessidade de me desculpar que *eu não conhecia* as considerações de Riemann quando escrevi o artigo em 1868. Embora parte dessas considerações já estivessem contidas em uma palestra proferida por Riemann em Göttingen em 1861, como mencionado por Hattendorff, elas só foram publicadas em 1876 (no trabalho de Hattendorff já mencionado).

Outras pessoas podem decidir se sob essas circunstâncias devemos considerar *Riemann* como o autor dessas ideias, ou se não seria mais apropriado dar crédito também *à pessoa* que, independentemente de Riemann, teve a mesma ideia e a publicou *primeiro* (e com maiores

⁵⁵[Cla68] com tradução para o inglês em [Cla69].

⁵⁶[Neu69a] com tradução para o inglês em [Neu21a] e tradução para o português no Capítulo 6.

⁵⁷Págs. 400–402 da reimpressão de 1880 do artigo de Neumann de 1868, [Neu68a] com tradução para o inglês em [Neu21b].

⁵⁸[Web48a] com traduções para o inglês em [Web52c], [Web66], [Web19] e [Web21o].

⁵⁹Ou seja, em 1868 Carl Neumann ainda não sabia do artigo de Weber de 1848. Nesse artigo Weber introduziu sua energia potencial dependente da velocidade a partir da qual podia deduzir sua lei de força.

⁶⁰[Neu74].

⁶¹Carl Neumann está se referindo a Karl Hattendorff (1834–1882), um matemático alemão que editou as palestras de Bernhard Riemann (1826–1866) sobre peso, eletricidade e magnetismo que foram publicadas em 1876 em Hannover pela editora Rümpler. Ver [Rie76] com tradução parcial para o inglês em [Rie77b]. Ver também [Rie67b] com tradução para o inglês em [Rie67a] e [Rie77a].

detalhes). Por outro lado, *Clausius* em um artigo recente usou a ideia de introduzir um potencial eletrodinâmico e de deduzir as forças a partir dele por variação, *sem mencionar meu trabalho*. Penso que aqueles que não conhecem bem a literatura podem obter uma impressão bem errada a partir disso.

Leipzig, novembro de 1880.

Capítulo 6

[Carl Neumann, 1869] Notas Relativas a um Trabalho Publicado Recentemente sobre os Princípios da Eletrodinâmica

Carl Neumann em Leipzig^{62,63}

Meu artigo escrito para o Jubileu da Universidade de Bonn (*Die Principien der Elektrodynamik* — Os Princípios da Eletrodinâmica, Tübingen, 1868),⁶⁴ sendo que um anúncio preliminar dele já havia aparecido nas *Nachrichten der Göttinger Societät der Wissenschaften* — *Notícias da Sociedade de Ciências de Göttingen* (Junho de 1868),⁶⁵ recebeu de Clausius no último volume dos *Annalen* de Poggendorff (Vol. 135, pág. 606)⁶⁶ um julgamento com o qual não concordo e que me fez escrever esses breves comentários.

Examinando novamente esse artigo, ele pode ser considerado como composto de duas partes diferentes, uma das quais é precedida pela outra tanto no que diz respeito à natureza do assunto quanto à força de seu raciocínio. Assim, parece-me apropriado abordar primeiro a parte mais importante, depois a parte mais subordinada, e desta forma criar uma separação que não existe no meu texto.

6.1 A Primeira Parte do Artigo Citado

Como ponto de partida dessa parte, duas ideias devem ser consideradas. Uma ideia é que para toda força elétrica tem de existir um potencial que, contudo, depende não apenas da posição relativa entre as massas elétricas, mas também de suas velocidades. A outra ideia é que o bem conhecido princípio Hamiltoniano⁶⁷ (que governa toda a mecânica) também é

⁶²[Neu69a] com tradução para o inglês em [Neu21a].

⁶³As Notas de Carl Neumann são representadas por [Nota de Carl Neumann:]; todas as outras Notas são de minha autoria.

⁶⁴[Neu68a] com tradução para o inglês em [Neu21b] e tradução para o português no Capítulo 5.

⁶⁵[Neu68b].

⁶⁶[Cla68] com tradução para o inglês em [Cla69].

⁶⁷Ver a Nota de rodapé 33 na página 28.

aplicável a potenciais desse tipo, assim como ao potencial comum que depende apenas da posição relativa. Minha pesquisa procede de acordo com isso a partir de uma certa fórmula hipotética para o potencial das massas elétricas:

$$w = \frac{mm_1}{r} \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right]. \quad (1)$$

Aqui m e m_1 são as duas massas,⁶⁸ r a distância entre elas no tempo t , enquanto que c é a constante contida na lei de Weber.^{69,70}

Minha pesquisa mostra então como, pela aplicação do princípio de Hamilton, somos levados diretamente da hipótese (1) às leis conhecidas da repulsão e indução elétrica, e também simultaneamente a uma forma eletrodinâmica compreensiva do princípio da força viva.⁷¹ — Uma investigação que realizei recentemente sobre a descarga oscilatória de uma placa de Franklin⁷² baseia-se diretamente neste último resultado, (conferir *Nachrichten der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften*, 13 de janeiro de 1869),⁷³ na qual é mostrado que além da equação diferencial de Kirchhoff para esse fenômeno,⁷⁴ também podemos ser bem sucedidos de uma maneira completamente diferente já indicada por W. Thomson,⁷⁵ a saber, pela aplicação direta do princípio da força viva. — Deve ser observado nessa ocasião, que ao julgar o valor de uma dada massa, não é feita distinção em meu artigo entre a ação que a massa produz e sua massa inercial. Contudo, tal distinção tem de ser feita quando estamos lidando simultaneamente com massas de matéria diferente (por exemplo, massas elétricas e massas ponderáveis). Portanto, se considerarmos o valor da massa, como medida por sua ação, como sendo igual a m (como é usualmente o caso com massas elétricas), então o valor medido da massa inercial desse mesmo corpo não é de forma alguma igual a m , mas tem de ser designado por fm , onde f representa um fator constante cujo valor depende apenas da natureza da matéria que está sendo considerada. Esse fator constante foi negligenciado em algumas passagens de meu texto. Esse lapso pode ser facilmente corrigido; os resultados obtidos permanecem completamente intactos.

⁶⁸Ver a Nota de rodapé 26 na página 26.

⁶⁹[Nota de Carl Neumann:] Essa expressão é identificada logo no início do meu artigo (página 2) como o ponto de partida apropriado para as minhas observações; lá a constante $1/c^2$ é denominada por G . Em relação a isso, permita-me observar que devido a um erro de impressão perturbador essa mesma expressão aparece em outro lugar de meu artigo (página 24) como $1/ccr$ em vez de $1/cc$.

⁷⁰Neumann está se referindo a Wilhelm Eduard Weber (1804-1891). Weber apresentou sua lei de força em várias publicações. Por exemplo, [Web46] com tradução parcial para o francês em [Web87] e traduções completas para o inglês em [Web07] e [Web21d]; [Web52b] com tradução para o inglês em [Web21e]; [Web52a] com tradução para o inglês em [Web21h]; [KW57] com tradução para o inglês em [KW21]; e [Web64] com tradução para o inglês em [Web21c]. Ver também [Ass21e].

⁷¹Ou seja, ao princípio de conservação da energia.

⁷²Em alemão: *einer Franklin'schen Tafel*. As chamadas placas de Franklin eram compostas por uma placa de vidro tendo uma chapa metálica de cada lado, sendo um antigo capacitor de placas paralelas. Receberam esse nome em homenagem a Benjamin Franklin (1705-1790). As principais obras de Franklin sobre eletricidade, assim como discussões detalhadas sobre elas, podem ser encontradas em [Fra69], [Fra04], [Fra41], [Coh66], [Coh96], [Hei99, Capítulo XIV], [Mor04b], [Mor04a], [SP06], [SP08], [BW13], [MB17], [Mou18], [Mou19], [Mou20] e [Mou23]. Ver ainda [AB23, pág. 481] e os dois Volumes do livro *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade*, que estão disponíveis em português, inglês, italiano e russo: [Ass10a], [Ass10b], [Ass15b], [Ass17a], [Ass18a], [Ass18b] e [Ass19b].

⁷³[Neu69b].

⁷⁴[Kir64].

⁷⁵William Thomson (1824-1907), também conhecido como Lorde Kelvin. Ver [Tho53b]. Ver também [Llo80] com tradução para o português em [Llo07].

Aliás, no meu artigo, no que diz respeito ao potencial de duas massas entre si, além da fórmula (1), também é usada a fórmula mais geral

$$w = mm_1 \left[\varphi(r) - \frac{r}{c^2} \frac{d\varphi(r)}{dr} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right], \quad (1a)$$

onde $\varphi(r)$ representa uma certa função de r . Assim como chegamos com base na hipótese (1) às leis da repulsão e indução elétrica, também podemos chegar com base na hipótese (1a), como mostra meu artigo, naquela lei que supus (em 1858) para a força existente entre a eletricidade e o éter a partir de minha investigação da rotação magnética do plano de polarização da luz.⁷⁶

Clausius não levantou objeções contra a parte do meu artigo discutida até esse ponto. Suas preocupações foram direcionadas contra a parte que denominei aqui como estando em segundo lugar.⁷⁷ Portanto, vou discutir detalhadamente essa última parte.

6.2 A Segunda Parte do Artigo Citado

Clausius está preocupado com a fórmula hipotética (1) já identificada e que é assumida para o potencial. Ele tenta dar a essa fórmula uma base adicional; ele tenta substituir a fórmula por conceitos.

Considero o potencial Newtoniano (o produto das massas dividido pela distância) de dois corpos ou massas, m e m_1 , como um impulso para o movimento,⁷⁸ ou (melhor expresso) como uma ordem,⁷⁹ que é dada e emitida por um corpo, sendo recebida e seguida pelo outro [corpo]. Assume-se ao mesmo tempo que a ordem requer um certo tempo para ir do local de emissão para o local de recepção, em outras palavras, que ela necessita de um certo tempo para atravessar o espaço entre os dois corpos.

Pode ser designada por r_0 à distância entre os dois corpos no tempo t_0 . No instante t_0 um determinado comando é dado por um corpo, sendo dado em relação às condições atuais, ou seja, em relação à distância atual r_0 ; conseqüentemente o comando é: mm_1/r_0 . A ordem dada e emitida no tempo t_0 atravessa o espaço entre os dois corpos sem sofrer qualquer modificação durante a trajetória. Como é necessário um certo tempo para percorrer esse espaço, a ordem não é recebida e obedecida pelo corpo obediente no tempo t_0 , mas em um tempo posterior t , um tempo no qual a distância entre os dois corpos não é mais r_0 , mas uma outra grandeza r .

De acordo com isso, o comando (o valor do potencial mm_1/r_0) pode ser designado por um lado como o potencial emissivo correspondendo ao tempo t_0 e, por outro lado, ele também pode ser denominado como o potencial receptivo correspondendo ao tempo t . No tempo t_0

⁷⁶[Neu58] e [Neu63].

⁷⁷Ou seja, a parte subordinada do primeiro artigo.

⁷⁸Ver a Nota de rodapé 34 na página 28.

⁷⁹Em alemão: *Befehl*. Essa palavra pode ser traduzida como uma ordem ou comando.

a ordem é dada; ela entra em vigor no tempo t .^{80,81}

O intervalo de tempo $t - t_0$ é aquele que o comando necessita para atravessar o espaço entre os dois corpos. Em relação a essa passagem, meu artigo é baseado no que me parece ser a representação *mais simples*, a saber, supor que o comando prossegue na velocidade constante c ao longo do raio vetor que se origina no corpo dando a ordem e que termina no corpo que a recebe. Portanto, a velocidade denotada por c refere-se a um movimento relativo; já que está em movimento o próprio raio vetor ao longo do qual a ordem procede, sendo transportado ao longo da mesma trajetória que o corpo móvel.⁸²

A ordem mm_1/r_0 recebida pelo corpo obediente no tempo t tem agora obviamente de atravessar aquele comprimento do raio vetor que está presente no instante de sua recepção; assim ela tem de atravessar o comprimento do raio vetor r que existe no tempo t . O tempo necessário é r/c ; portanto, $t - t_0 = r/c$.

Seja ω o potencial receptivo mm_1/r_0 no tempo t , seja também $t_0 = t - \Delta t$ e $r_0 = r - \Delta r$, resulta então que:

$$\omega = \frac{mm_1}{r_0} = \frac{mm_1}{r - \Delta r} ; \quad (2)$$

e obtemos ao mesmo tempo para o intervalo Δt correspondendo ao comprimento Δr a

⁸⁰[Nota de Carl Neumann:] Isso é apresentado mais detalhadamente, por exemplo, nas páginas 6 e 7 de meu artigo:

Considere inicialmente apenas *dois* pontos m e m_1 que se deslocam sob influência mútua. Então, procedendo da concepção de uma propagação progressiva do potencial, para cada instante de tempo t , dois potenciais devem ser diferenciados, o emissivo e o receptivo.

O *potencial emissivo* é aquele que é enviado no tempo t de cada um dos dois pontos e que, portanto, alcança o outro ponto um pouco mais tarde...

Por outro lado, o *potencial receptivo* é aquele que é recebido no tempo t por qualquer um dos dois pontos e que, portanto, foi enviado um pouco antes pelo outro ponto. De acordo com isso o potencial receptivo pertencendo ao tempo *dado* é idêntico ao potencial emissivo de um tempo *anterior*...

Com base nessas definições que acabaram de ser citadas para os potenciais emissivo e receptivo, o último teorema também pode ser apresentado como:

O valor do potencial recebido por um ponto em um dado tempo é idêntico àquele [potencial] que é emitido pelo outro ponto em um tempo anterior.

Afinal de contas o potencial é entendido, nas páginas citadas do meu artigo, como sendo completamente determinado pelo valor expresso nas fórmulas.

Contudo, disso fica claro quão pouco é dito no meu texto sobre uma analogia direta entre a propagação do potencial e aquela da luz. Seria completamente absurdo dizer que o valor da luz (como a quantidade de luz ou a intensidade da luz) recebido por um ponto em um dado momento é idêntico ao emitido pelo outro ponto em um momento um pouco anterior.

Em geral, como se pode ver, as suposições que fiz sobre o potencial têm uma diferença tão extraordinariamente marcante em relação às leis da luz que dificilmente me ocorreria querer enfatizá-las.

⁸¹Ver a página 29 na Subseção 5.1.2.

⁸²[Nota de Carl Neumann:] Essa é a primeira vez em que usei essas palavras para explicar esse conceito. Anteriormente, ao escrever meu artigo, coloquei o conceito de maneira diferente, de forma mais pictórica. Pensei então no corpo dando a ordem como estando cercado por uma atmosfera estendendo-se infinitamente, a qual era até certo ponto conectada rigidamente ao corpo e também tomava parte em todos os seus movimentos; pensei assim na ordem desse corpo emissor como prosseguindo nessa atmosfera ideal pura com velocidade constante e sem sofrer qualquer modificação em sua constituição original. Usei assim a palavra “*propagação*”, que talvez devesse ser substituída de maneira melhor por “*transmissão*”.

seguinte fórmula:

$$\Delta t = t - t_0 = \frac{r}{c} . \quad (3)$$

Contudo, por uma manipulação adicional, e desprezando a terceira potência em $1/c$, as Fórmulas (2) e (3) fornecem o valor do potencial receptivo ω :

$$\omega = w + \frac{d\mathfrak{w}}{dt} ,$$

onde w representa a expressão (1), enquanto que, por outro lado, $\mathfrak{w}$ é uma combinação racional de $\log r$ e dr/dt ; e, além disso, pela aplicação do princípio de Hamilton, o valor que acabou de ser mencionado é equivalente ao seguinte valor mais simples: $\omega = w$; — que não está sujeito a dúvidas e, de fato, não é questionado por ninguém.

Consequentemente está mostrado que os conceitos dados levam realmente à fórmula potencial (1) assumida hipoteticamente. No entanto, é difícil avaliar por enquanto se esta substituição de uma fórmula inusitada por ideias igualmente inusitadas envolve progresso. Ao escrever meu artigo também não atribuí muito peso a essa segunda linha de raciocínio. Isso explica a enorme brevidade com que tratei o assunto, usando apenas 3 páginas de meu artigo com 38 páginas. Aconteceu assim que essa parte do conceito subjacente em meu artigo não foi explicado detalhadamente, mas apenas sugerido brevemente e de passagem.⁸³ Coube ao leitor, por assim dizer, extrair primeiro essas ideias das fórmulas fornecidas; e essa não foi (como admito) uma tarefa fácil e certamente não foi gratificante. Pois, como vemos, essas ideias, ao menos em sua forma atual, são muito diferentes em comparação com aquelas utilizadas usualmente na explicação dos processos físicos.

De qualquer forma parece notável, para mim pelo menos,^{84,85} que os mesmos conceitos também levam à lei da interação mútua entre a eletricidade e o éter. Assim, se substituirmos a função $1/r$ no potencial Newtoniano por qualquer função $\varphi(r)$, então, com base nessas ideias, no lugar das fórmulas (2) e (3), teríamos

$$\omega = mm_1\varphi(r_0) = mm_1\varphi(r - \Delta r) , \quad (2a)$$

$$\Delta t = t - t_0 = \frac{r}{c} . \quad (3a)$$

Contudo, com um desenvolvimento posterior esse resultado leva imediatamente à fórmula (1a) do potencial, levando consequentemente à lei da interação mútua entre a eletricidade e o éter.

⁸³[Nota de Carl Neumann:] Anteriormente pensei ser permissível, já que considerava aquele artigo como sendo apenas provisório, prosseguir com uma publicação mais extensa, sendo essa também minha intenção. O tratamento muito desigual de suas seções individuais é consistente com esse caráter provisório do trabalho, pois algumas delas são escritas em grande detalhe, enquanto outras apresentam apenas os resultados. Esse também é o motivo pelo qual não publiquei meu artigo mais amplamente, e intencionalmente não o coloquei nas livrarias.

⁸⁴[Nota de Carl Neumann:] Não posso exigir que o argumento aqui apresentado seja geralmente aceito como válido. Pois a lei da interação mútua entre a eletricidade e o éter, na qual vou confiar aqui, poderia ser colocada em dúvida pelas investigações experimentais de Verdet sobre a dispersão que surge a partir da rotação do plano de polarização da luz por um ímã (*Ann. d. chim.* (3) Vol. 69, pág. 415). No que me diz respeito, acredito por razões óbvias que os resultados provisórios das observações de dispersão não podem fornecer um voto decisivo sobre a correção ou incorreção dessa lei.

⁸⁵[Ver63].

De maneira geral gostaria de considerar essa segunda parte de meu artigo como não sendo de forma alguma supérflua. Em vez disso, estou inclinado a considerá-la como um trabalho preparatório, permitindo uma visão mais profunda sobre quaisquer obstáculos que, mesmo que não sejam eliminados, podem ao menos ser analisados e clarificados. As objeções de Clausius foram direcionadas contra essa segunda parte do meu trabalho. Aproveito a oportunidade para responder a elas nos próximos parágrafos.

6.3 Potencial e Luz

Minhas suposições relativas ao potencial mostram uma diferença muito grande em relação às leis da luz. Tenho em vista, por exemplo, as diferenças entre emissão, transmissão e recepção. A luz emitida por um corpo luminoso é independente do corpo iluminado, já o potencial emitido em qualquer instante por um corpo que está atraindo é dependente no sentido mais estrito da posição instantânea do corpo que está sendo atraído (o mesmo pode ser $= mm_1/r$ ou $= mm_1\varphi(r)$, onde r significa a distância instantânea). Além disso, a luz emitida pelo corpo luminoso em um dado instante diminui de intensidade quanto mais distante está do corpo; já o potencial emitido se desloca até o corpo atraído sem qualquer variação de seu valor original. Finalmente, a luz recebida (isto é, absorvida) pelo corpo iluminado é em geral uma fração da luz emitida; enquanto que o potencial recebido pelo corpo atraído é idêntico (isto é, igual) ao potencial que está chegando.

Assim, as leis pelas quais o potencial de um corpo é transmitido para um outro corpo (de acordo com minhas suposições) são assim tão diferentes das leis correspondentes da luz, que dificilmente podemos falar de uma analogia. Haveria apenas uma circunstância na qual poderia ser afirmada um tipo de analogia. Ela consiste no fato de que a luz, como o potencial, se propaga com uma velocidade constante muito grande; e mesmo essa analogia não é perfeita, pois a velocidade constante para a luz e para o potencial possuem valores diferentes,⁸⁶ e no caso da luz vale um movimento absoluto, enquanto que para o potencial é um movimento relativo.

Coincidentemente, a semelhança que acabamos de mencionar foi apontada por uma determinada passagem na introdução do meu trabalho (página 3).⁸⁷ Pois aí se observa que Riemann fez a suposição de que o “*potencial — semelhante à luz — se propaga através do espaço com uma certa velocidade constante*”;⁸⁸ ao mesmo tempo foi adicionado que essa suposição também era a base de minha pesquisa.

Deve ficar claro que essa comparação com a luz foi completamente acidental e incidental não apenas pelo texto de meu artigo, mas também pelo fato de que encontramos tal comparação em apenas *um* local em todo meu trabalho, e é ainda mais claro quando se percebe que tal comparação com a luz *não se encontra em qualquer lugar* de minha comunicação para a Sociedade [de Ciências] de Göttingen. (A palavra “luz” não aparece em qualquer lugar dessa comunicação.)⁸⁹

De qualquer forma também tenho de acrescentar que a passagem citada da introdução

⁸⁶Carl Neumann assumiu que seu potencial propaga-se no espaço com a constante c de Weber. O valor de c é igual a $\sqrt{2}$ vezes a velocidade da luz no vácuo v_L , isto é, $c = \sqrt{2} \cdot v_L$. Ver [Ass21e] para uma discussão sobre a constante c de Weber e sua relação com a velocidade da luz v_L .

⁸⁷Ver a página 27.

⁸⁸Carl Neumann está se referindo ao trabalho póstumo de Riemann publicado em 1867, [Rie67b] com tradução para o inglês em [Rie67a] e [Rie77a].

⁸⁹Creio que Neumann está se referindo aqui a [Neu68b].

de meu artigo, que forneceu apenas uma nota histórica casual, a saber, que Riemann deve ser considerado como quem originou a ideia de um movimento progressivo do potencial, possui menos exatidão. Quando eu estava escrevendo, parecia mesquinho para mim enfatizar na introdução que minha ideia sobre esse movimento progressivo diferia fundamentalmente daquela de Riemann (até onde essa última [ideia] é entendida por mim). Logo, omiti essa diferença; o que poderia levar mais facilmente a um mal entendido pois as disputas em questão são tratadas de maneira extremamente breve no texto do meu artigo.

Assim, é facilmente compreensível que Clausius, ao julgar meu artigo, tenha partido da opinião de que eu supus que o potencial se propaga de um corpo para outro de uma maneira similar à propagação da luz; enquanto que na realidade minhas suposições ligadas ao movimento progressivo do potencial exibem a maior diferença em relação às leis da luz. — Só posso desejar ter sido alertado sobre o perigo de tal mal-entendido e que tenha sido encorajado a eliminá-lo.

Leipzig, 19 de janeiro de 1869.

Capítulo 7

[Weber, 1869] Sobre uma Formulação Simples da Lei Fundamental Geral da Ação Elétrica

Wilhelm Weber^{90,91}

Nesses *Annalen*, 1848, Vol. 73, pág. 193 e seguintes,⁹² onde apresentei um resumo de meu Primeiro Tratado sobre “Medições Eletrodinâmicas,”⁹³ adicionei na página 229^{94,95} que a expressão dada naquele Tratado [de 1846] para a lei fundamental geral da ação elétrica podia ser simplificada ao especificar a expressão do *potencial* em vez da expressão da *força*, isto é, a função das coordenadas x, y, z , cujos coeficientes diferenciais parciais negativos com relação a x, y, z , correspondem às *componentes da força* paralelas a essas coordenadas. Se denotarmos por e, e' duas partículas elétricas, r a distância entre elas, e c como sendo uma certa constante, então a expressão da *força* era⁹⁶

$$\frac{ee'}{r^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{c^2} \frac{d^2r}{dt^2} \right) ,$$

⁹⁰[Web69] com tradução para o inglês em [Web21k].

⁹¹As Notas de Wilhelm Weber são representadas por [Nota de Wilhelm Weber:]; as Notas de Heinrich Weber, o Editor do Volume 4 das *Obras* de Wilhelm Weber, são representadas por [Nota de Heinrich Weber:]; todas as outras Notas são de minha autoria.

⁹²[Web48a] com traduções para o inglês em [Web52c], [Web66], [Web19] e [Web21o].

⁹³[Web46] com tradução parcial para o francês em [Web87] e traduções completas para o inglês em [Web07] e [Web21d].

⁹⁴[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 245.

⁹⁵[Web48a, pág. 229 do artigo original de 1848 e pág. 245 do Vol. III das *Obras* de Weber]. Ver também [Web52c, pág. 520], [Web66, pág. 520], [Web19, pág. 42] e [Web21o, págs. 238-239].

⁹⁶A expressão dr^2/dt^2 deve ser entendida como $(dr/dt)^2$.

enquanto que a expressão do *potencial* era^{97,98}

$$\frac{ee'}{r} \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{dr^2}{dt^2} \right) .$$

Essa última formulação da lei pode agora ser colocada em palavras da seguinte maneira, por meio da qual emerge mais claramente o *significado físico* da lei e a dependência do *estímulo de movimento*⁹⁹ sobre o *movimento existente*, a saber:

Entre duas partículas elétricas ocorre, em parte, o movimento recíproco e, em parte, a estimulação do movimento recíproco. Se chamarmos os seguintes valores, ou seja, o de movimento mútuo quando nenhuma excitação ocorre, e o de excitação mútua quando nenhum movimento ocorre, de *valores limites*, então a fração ausente em um valor limite é sempre representada por uma fração igual do outro valor limite.

O *último* dos dois valores limites é o bem conhecido *potencial eletrostático* ee'/r , enquanto que o *primeiro* valor limite é sempre o mesmo, a saber, o *valor de um movimento mútuo com*

⁹⁷[Nota de Wilhelm Weber:] Independentemente disso, Neumann em suas pesquisas sobre os princípios da eletrodinâmica começou com a *fórmula hipotética* para o potencial das massas elétricas como [sendo dado por:]

$$\frac{ee'}{r} \left(1 + \frac{1}{c^2} \frac{dr^2}{dt^2} \right) .$$

⁹⁸Sejam duas partículas com cargas e e e' e massas ε e ε' separadas pela distância r . A energia potencial V de Weber é dada por:

$$V = \frac{ee'}{r} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] .$$

Por outro lado, a energia Lagrangiana de Neumann, W , é:

$$W = \frac{ee'}{r} \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] .$$

Neumann apresentou essa expressão em 1868 quando introduziu as formulações Lagrangiana e Hamiltoniana da eletrodinâmica de Weber, [Neu68a], com tradução para o inglês em [Neu21b] e tradução em português no Capítulo 5.

A energia potencial $V = (ee'/r)[1 - (1/c^2)(dr/dt)^2]$ de Weber difere da energia Lagrangiana $W = (ee'/r)[1 + (1/c^2)(dr/dt)^2]$ de Neumann pelo sinal na frente do termo $(dr/dt)^2$.

Para um sistema de duas partículas interagindo através da força de Weber, a soma de V com a energia cinética $T = \varepsilon v^2/2 + \varepsilon' v'^2/2$ das partículas é constante no tempo, a saber:

$$E = T + V = \text{constante no tempo}.$$

A Lagrangiana L e a Hamiltoniana H desse sistema são dadas por, respectivamente:

$$L = T - W ,$$

$$H = E = T + V = \text{constante no tempo}.$$

Discuti esse tópico em [Ass92a], [Ass94, Seção 3.5] e [Ass15a]. Ver também o Capítulo 4 dessa tradução em português das obras de Weber.

⁹⁹Em alemão: *Bewegungsanregung*. Essa expressão pode ser traduzida como “estímulo de movimento” ou “excitação do movimento”.

a *velocidade* c , o qual pode ser representado por ac^2 . — Se há agora um movimento mútuo entre e e e' com a velocidade $dr/dt < c$, cujo valor é $= a \frac{dr^2}{dt^2}$, e, portanto, a seguinte fração está faltando no primeiro valor limite

$$\frac{ac^2 - a \frac{dr^2}{dt^2}}{ac^2} = 1 - \frac{1}{c^2} \frac{dr^2}{dt^2},$$

então essa fração faltante é representada por uma fração igual do outro valor limite ee'/r , isto é, por $(ee'/r)(1 - [1/c^2][dr^2/dt^2])$, que é a expressão geral do *potencial*, como dado anteriormente.

Se e e e' indicam as *massas* das partículas elétricas,¹⁰⁰ α a *velocidade* de e na direção r , e β a *velocidade* de e perpendicular a r , [enquanto que] α' e β' são as mesmas *velocidades* para e' , sendo que de acordo com isso $\alpha - \alpha' = dr/dt$ é a velocidade relativa entre as duas partículas, então

$$\frac{1}{2}e(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{2}e'(\alpha'^2 + \beta'^2)$$

será a força viva ou trabalho pertencendo às duas partículas,¹⁰¹ que expressa seus movimentos, em termos de valores, proporcionais às massas em movimento e aos quadrados de suas velocidades. Se agora

$$\begin{array}{ll} \text{no lugar de } \alpha, \text{ colocarmos} & \frac{e\alpha + e'\alpha'}{e + e'} + \frac{e'(\alpha - \alpha')}{e + e'}, \\ \text{e no lugar de } \alpha', \text{ colocarmos} & \frac{e\alpha + e'\alpha'}{e + e'} + \frac{e(\alpha' - \alpha)}{e + e'}, \end{array}$$

e notarmos que $\alpha - \alpha' = dr/dt$, então obteremos essa força viva ou trabalho das duas massas e e e' representadas nas *duas partes* seguintes, a saber:

$$= \frac{1}{2} \frac{ee'}{e + e'} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{(e\alpha + e'\alpha')^2}{e + e'} + e\beta^2 + e'\beta'^2 \right).$$

A *primeira* [parte] pode ser chamada de *trabalho interno*, a *última* [parte] de *trabalho externo*, já que para a *primeira* [parte] é suficiente um conhecimento das partículas e e e' , assim como do aumento ou diminuição da distância entre elas, enquanto que para a *última* [parte], *além [do conhecimento] das partículas* e e e' , tem de ser fornecido um sistema fixo de coordenadas para com isso sermos capazes de observar e medir as velocidades $(e\alpha + e'\alpha')/(e + e')$, β e β' .

Fica agora evidente que esse *trabalho interno* $(1/2)[ee'/(e + e')] \cdot [dr^2/dt^2]$ é o valor exato do *movimento mútuo* das duas partículas, que foi denominado anteriormente por $a[dr^2/dt^2]$, de tal forma que $a = (1/2)[ee'/(e + e')]$.

O *trabalho interno* e o *potencial* das duas partículas e , e' na distância r podem ter valores muito diferentes, porém, se um valor aumenta, o outro diminui, sendo o aumento e a

¹⁰⁰Weber está utilizando aqui os símbolos e e e' para indicar não apenas os valores das cargas elétricas das duas partículas, mas também os valores de suas massas inerciais. Em 1871 ele vai representar as cargas elétricas por ε e ε' , enquanto que as massas inerciais serão representadas por ε e ε' , [Web71] com traduções para o inglês em [Web72] e [Web21g]. A tradução em português desse artigo de 1871 aparece no Capítulo 9, ver em especial a página 81 na Seção 9.1.

¹⁰¹Ver a Nota de rodapé 23 na página 25.

diminuição sempre na mesma proporção. Se o *potencial* diminuiu em ee'/r , então o *trabalho interno* aumentou em $(1/2)[ee'/(e + e')]c^2 = ac^2$. Se esse *trabalho interno* que substituiu o potencial desaparecido for chamado de *equivalente ao trabalho*¹⁰² daquele potencial, resultará então da mesma relação que o *equivalente ao trabalho de potencial arbitrário* V será $= [rc^2/2(e + e')] \cdot V$.

O *trabalho interno existente* e o *equivalente ao trabalho do potencial existente* formam conjuntamente a *soma dos valores dos trabalhos internos existentes* e, assim entendidos, obtemos a seguinte formulação simples de nossa lei:

Para duas partículas elétricas e e e' , estando em qualquer distância entre si, a soma dos valores do trabalho interno existente é sempre a mesma, sendo igual a $(1/2)[ee'/(e + e')] \cdot c^2$.

Pois o *trabalho interno* existente é $(1/2)[ee'/(e + e')] \cdot [dr^2/t^2]$, o potencial existente é V , e seu *equivalente ao trabalho* é $[rc^2/2(e + e')] \cdot V$. Consequentemente, a *soma dos valores de trabalho interno existentes* é igual a

$$\frac{1}{2} \frac{ee'}{e + e'} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{rc^2}{2(e + e')} \cdot V = \frac{1}{2} \frac{ee'}{e + e'} \cdot c^2 ,$$

ou, dividida pelo último termo,

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{r}{ee'} \cdot V = 1 ,$$

sendo que a partir disso é obtido o *potencial*

$$V = \frac{ee'}{r} \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{dr^2}{dt^2} \right) ,$$

como dado anteriormente.

A formulação da lei discutida aqui tem como objetivo mostrar apenas, da maneira mais simples, a dependência mútua de duas partículas em seus movimentos, especialmente a dependência de suas estimulações de movimento mútuas em relação a seus movimentos existentes. Surgem necessidades bem diferentes quando queremos encontrar o desenvolvimento matemático completo de todas as consequências dessa lei em conexão com os princípios gerais da mecânica no caso de massas elétricas maiores ligadas de várias maneiras com outros corpos. Para solucionar essa tarefa os princípios da eletrodinâmica precisam ser colocados de outras formas, o que não foi o objetivo desse trabalho.

¹⁰²Em alemão: *Arbeitsäquivalent*. Essa expressão pode ser traduzida como equivalente ao trabalho, trabalho equivalente, equivalente de trabalho, ou equivalente-trabalho.

Capítulo 8

Introdução à Sexta Memória de Weber sobre Medições Eletrodinâmicas

A. K. T. Assis¹⁰³

Gostaria de discutir alguns aspectos relacionados à Sexta Memória principal de Weber sobre Medições Eletrodinâmicas.¹⁰⁴ Desejo comentar, em particular, sobre as reações de Maxwell relacionadas com a eletrodinâmica de Weber, principalmente no que diz respeito ao princípio de conservação da energia.¹⁰⁵ Essa discussão ajuda a contextualizar o trabalho de Weber e como ele foi recebido por seus contemporâneos.

O princípio de conservação da energia levando em consideração a energia térmica foi estabelecido por Julius Robert von Mayer (1814-1878) em 1842 e também por James Prescott Joule (1818 - 1889) em 1843.¹⁰⁶

Em 1846 Weber publicou sua Primeira Memória principal sobre Medições Eletrodinâmicas.¹⁰⁷ Em particular, introduziu sua lei de força que depende da distância r entre as partículas eletrizadas que estavam interagindo, da velocidade radial relativa entre elas, dr/dt , assim como da aceleração radial relativa entre elas, d^2r/dt^2 . Nesse trabalho de 1846 ele não discutiu a conservação da energia.

Em 1847 Hermann von Helmholtz (1821-1894) publicou seu trabalho famoso e muito influente sobre a conservação da energia.¹⁰⁸ Em seu trabalho ele colocou esse princípio em uma base teórica sólida ao desenvolver as consequências matemáticas das forças centrais. Ele utilizou a expressão “conservação da força” para aquilo que é chamado hoje em dia de “conservação da energia”. Seja uma partícula de massa m deslocando-se em relação a um referencial inercial com uma velocidade v . Na época de Helmholtz a grandeza mv^2

¹⁰³Homepage: www.ifi.unicamp.br/~assis

¹⁰⁴[Web71] com traduções para o inglês em [Web72] e [Web21g]. Ela está traduzida em português no Capítulo 9.

¹⁰⁵[Ass94, Seção 3.6] e [Ass15a, Apêndice D].

¹⁰⁶[May42] com tradução para o inglês em [May62] e tradução para o português em [May84]; [Jou43]. Ver também [Mar84].

¹⁰⁷[Web46] com tradução parcial para o francês em [Web87] e traduções completas para o inglês em [Web07] e [Web21d].

¹⁰⁸[Hel47] com tradução para o inglês em [Hel53] e [Hel66].

era usualmente denominada de força viva.¹⁰⁹ Contudo, nesse trabalho de 1847 Helmholtz afirmou explicitamente que iria denominar a grandeza $mv^2/2$ de força viva. Hoje em dia essa grandeza $mv^2/2$ é denominada de energia cinética da partícula. Helmholtz resolveu denominar $mv^2/2$ de força viva já que essa última grandeza aparecia mais frequentemente na mecânica e parecia ser mais útil do que a grandeza mv^2 , como pode ser visto pela seguinte citação:¹¹⁰

Para haver uma melhor concordância com a maneira usual de medir a intensidade das forças, proponho denominar a grandeza $\frac{1}{2}mv^2$ como sendo a quantidade de *força viva*, por meio da qual ela fica idêntica à quantidade de trabalho.

Em 1872 ele fez uma definição análoga, [Hel72a, pág. 640 das *Obras* de Helmholtz] com tradução para o inglês em [Hel72b, pág. 533]:

Se denominarmos, como sempre foi feito até agora, a *força viva* ou a *energia atual* como sendo a soma das massas inerciais móveis multiplicadas cada uma pela metade do quadrado de sua velocidade, então, [...]

Helmholtz denominou de “tensão” à grandeza que é chamada hoje em dia de energia potencial de um corpo.¹¹¹ Como exemplo temos a energia potencial mgh de um corpo de massa m localizado na altura h em relação ao solo, com g sendo a aceleração de queda livre. O principal resultado de seu trabalho de 1847 foi expresso da seguinte maneira:¹¹²

As proposições anteriores podem ser resumidas como segue:

1. Sempre que corpos naturais atuam entre si por forças atrativas ou repulsivas que são independentes do tempo e da velocidade, a soma de suas forças vivas e tensões tem de ser constante; portanto, a quantidade máxima de trabalho que pode ser obtida é uma quantidade limitada.
2. Se, ao contrário, também existem forças em corpos naturais que dependem do tempo e da velocidade, ou que atuam em direções diferentes da linha de ligação entre os dois pontos materiais que interagem, como, por exemplo, forças de rotação, então seriam possíveis combinações de tais corpos, nas quais a força pode ser ganha ou perdida ao infinito.

Em 1848 Weber apresentou sua energia potencial a partir da qual podia deduzir sua lei de força.¹¹³ A conservação da energia estava implícita em sua dedução, embora ele não tenha enfatizado esse tópico.

No Capítulo Introdutório relacionado à Primeira Memória principal de Weber sobre Medições Eletrodinâmicas publicado no Volume 2 dessas traduções em português de suas principais obras sobre eletrodinâmica apresentei várias citações de Maxwell nas quais ele elogiou bastante a eletrodinâmica de Weber.¹¹⁴ Porém, se Maxwell conhecia tão bem a

¹⁰⁹Ver a Nota de rodapé 23 na página 25.

¹¹⁰Ver [Hel47, pág. 9] com tradução para o inglês em [Hel53, pág. 119].

¹¹¹Ver a Nota de rodapé 32 na página 28.

¹¹²[Hel47, págs. 19-20], [Hel53, pág. 126] e [Hel66, pág. 126].

¹¹³[Web48a] com traduções para o inglês em [Web52c], [Web66], [Web19] e [Web21o].

¹¹⁴A versão em inglês desse Capítulo Introdutório pode ser encontrada em [Ass21b].

eletrodinâmica de Weber e a apreciava tanto, por qual motivo não trabalhou com ela e ajudou a desenvolver suas propriedades e aplicações? O principal motivo, como enfatizado pelo próprio Maxwell, é que ele acreditava que a eletrodinâmica de Weber não era compatível com o princípio de conservação da energia. Ele foi influenciado diretamente por esse trabalho de 1847 de Helmholtz. Os resultados de Helmholtz foram interpretados por Maxwell e por vários outros cientistas como implicando que a eletrodinâmica de Weber era incompatível com a conservação da energia. Essa interpretação se devia ao fato de que embora a força de Weber fosse central (apontando ao longo da reta que ligava as partículas que estavam interagindo), ela dependia da velocidade das partículas eletrizadas. Essa interpretação de Maxwell pode ser vista em seu artigo de 1855 (publicado em 1858) no qual ele apontou esse problema com a eletrodinâmica de Weber:¹¹⁵

Existe, entretanto, uma teoria da eletrodinâmica reconhecidamente física, que é tão elegante, tão matemática e tão inteiramente diferente de qualquer coisa neste artigo, que devo enunciar seus axiomas, sob o risco de repetir o que deveria ser bem conhecido. Ela está contida nas *Medições Eletrodinâmicas* do Sr. W. Weber, e pode ser encontrada nas *Transactions* da Sociedade Leibniz, e da Sociedade Real de Ciências na Saxônia.^{116,117} As suposições são as seguintes:

1. Que duas partículas de eletricidade quando estão em movimento não se repelem mutuamente com a mesma força que existia quando estavam em repouso, mas que a força é alterada por uma quantidade que depende do movimento relativo entre as duas partículas, de tal forma que a expressão para a repulsão na distância r é dada por

$$\frac{ee'}{r^2} \left[1 + a \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + br \frac{d^2r}{dt^2} \right] .$$

2. Que quando a eletricidade está se deslocando em um condutor, a velocidade do fluido positivo *em relação à matéria do condutor* é igual e oposta à velocidade do fluido negativo.
3. Que a ação total de um elemento condutor sobre um outro elemento condutor é a resultante das ações mútuas das massas de eletricidade dos dois tipos que estão contidas em cada elemento.¹¹⁸

¹¹⁵[Max58, págs. 66-67 do artigo de 1858 e págs. 207-208 do livro de Niven].

¹¹⁶[Nota de Maxwell:] Quando isso foi escrito, eu não estava ciente de que parte da Memória do Sr. Weber está traduzida nas *Scientific Memoirs* de Taylor, Volume V, Artigo XIV. O valor de suas pesquisas, tanto experimentais quanto teóricas, torna o estudo de sua teoria necessário para todo pesquisador da eletricidade.

¹¹⁷Maxwell escreveu o artigo em 1855, sendo ele publicado em 1858. Essa Nota de Maxwell apareceu na versão publicada em 1858. Maxwell estava se referindo nessa Nota de rodapé ao resumo publicado em 1848 da Primeira Memória principal de Weber sobre Medições Eletrodinâmicas, [Web48a] com traduções para o inglês desde 1852: [Web52c], [Web66], [Web19] e [Web21o].

¹¹⁸Maxwell está se referindo aqui à força de Ampère entre dois elementos de corrente. De acordo com Weber, cada elemento de corrente é composto de cargas positivas e negativas de mesma intensidade deslocando-se em relação ao condutor com velocidades opostas. Logo a força de um elemento de corrente sobre outro elemento de corrente é composta por uma soma de 4 termos, a saber, (a) a força da carga positiva do primeiro elemento atuando sobre a carga positiva do segundo elemento, (b) a força da carga positiva do primeiro elemento atuando sobre a carga negativa do segundo elemento, (c) a força da carga negativa do primeiro elemento atuando sobre a carga positiva do segundo elemento, e (d) a força da carga negativa do primeiro elemento atuando sobre a carga negativa do segundo elemento.

4. Que a força eletromotriz em cada ponto é a diferença dessas forças atuando sobre os fluidos positivo e negativo.

Destes axiomas são dedutíveis as leis de Ampère da atração entre os condutores,¹¹⁹ e as de Neumann e outros,¹²⁰ para a indução de correntes. Aqui está então uma teoria realmente física, satisfazendo talvez melhor as condições exigidas do que qualquer outra já inventada, e apresentada por um filósofo cujas pesquisas experimentais formam uma ampla base para suas investigações matemáticas. Então qual é a utilidade de imaginar um estado eletrotônico¹²¹ do qual não temos uma concepção física distinta, em vez de [imaginar] uma fórmula de atração que podemos prontamente entender? Responderia que é uma boa coisa ter duas maneiras de encarar um assunto, e admitir que *existem* duas maneiras de encará-lo. Além disso, não creio que tenhamos atualmente qualquer direito de compreender a ação da eletricidade, e sustento que o principal mérito de uma teoria temporária é que ela orientará a experiência, sem impedir o progresso da verdadeira teoria quando esta aparecer. Existem também objeções em tornar quaisquer forças fundamentais da natureza dependente da velocidade dos corpos entre os quais ela atua. Caso as forças na natureza devam ser reduzidas a forças atuando entre partículas, o princípio de conservação da força requer que essas forças devam estar ao longo da linha unindo as partículas e ser funções apenas da distância. As experiências do Sr. Weber sobre a polaridade reversa dos diaímãs, que foram recentemente repetidas pelo Prof. Tyndall,¹²² estabelecem um fato que é igualmente uma consequência da teoria da eletricidade do Sr. Weber e da teoria das linhas de força.¹²³

O que Maxwell chamou aqui de “princípio de conservação da força” deve ser entendido como o princípio de conservação da energia. Essa expressão utilizada por Maxwell indica uma influência direta de Helmholtz sobre seu raciocínio, já que foi ele quem utilizou essa expressão anteriormente. O título do trabalho de Helmholtz de 1847 era *Über die Erhaltung der Kraft*, que foi traduzido para o inglês em 1853 com o seguinte título: *On the Conservation of Force*.¹²⁴

Em seu artigo de 1864 Maxwell apresentou de maneira ainda mais clara o motivo pelo qual rejeitava a eletrodinâmica de Weber e por qual motivo decidiu então seguir um outro caminho de pesquisa (itálicos meus):¹²⁵

(1) O fenômeno mecânico mais óbvio em experimentos elétricos e magnéticos é a ação mútua pela qual corpos em certos estados se põem em movimento enquanto ainda estão a uma distância perceptível entre si. O primeiro passo, portanto, para reduzir esses fenômenos à forma científica, é determinar a magnitude e a direção da força que atua entre os corpos, e quando se descobre que essa força depende de certa maneira da posição relativa dos corpos e de suas condições elétricas e magnéticas, parece à

¹¹⁹Ver a Nota de rodapé 7 na página 16.

¹²⁰Franz Ernst Neumann (1798-1895). Ver [Neu46] com tradução para o francês em [Neu48a], [Neu47], [Neu48b] e [Neu49].

¹²¹Esse estado eletrotônico foi introduzido por Faraday.

¹²²John Tyndall (1820-1893). Ver, por exemplo, [Tyn54], [Tyn55b], [Tyn55a], [Tyn55c], [Tyn56] e [Tyn88, págs. 111-192]. Para uma discussão dos trabalhos de Tyndall sobre diamagnetismo, ver [Jac15].

¹²³A teoria das linhas de força foi desenvolvida por Faraday e colocada em formato matemático por Maxwell.

¹²⁴[Hel47] com tradução para o inglês em [Hel53] e [Hel66].

¹²⁵[Max65, págs. 526-527 do livro de Niven].

primeira vista natural explicar os fatos assumindo a existência de algo em repouso ou em movimento em cada corpo, constituindo seu estado elétrico e magnético, e capaz de atuar à distância de acordo com leis matemáticas.

Assim se formaram as teorias matemáticas da eletricidade estática, do magnetismo, da ação mecânica entre condutores que transportam correntes, e da indução de correntes. Nestas teorias, a força que atua entre os dois corpos é tratada com referência apenas à condição dos corpos e sua posição relativa, sem qualquer consideração expressa do meio circundante.

Essas teorias supõem, mais ou menos explicitamente, a existência de substâncias cujas partículas têm a propriedade de agir umas sobre as outras à distância por atração ou repulsão. O desenvolvimento mais completo de uma teoria desse tipo é aquele do Sr. W. Weber,^{126,127} que fez a mesma teoria incluir fenômenos eletrostáticos e eletromagnéticos.

Ao fazê-lo, entretanto, ele achou necessário supor que a força entre duas partículas elétricas depende de sua velocidade relativa, bem como de sua distância. Essa teoria, desenvolvida pelos Srs. W. Weber e C. Neumann,^{128,129} é extremamente engenhosa e maravilhosamente abrangente em sua aplicação aos fenômenos da eletricidade estática, atrações eletromagnéticas, indução de correntes e fenômenos diamagnéticos; e chega até nós com mais autoridade, pois serviu para guiar as especulações de alguém que fez um avanço tão grande na parte prática da ciência elétrica, tanto pela introdução de um sistema consistente de unidades na medição elétrica, quanto por realmente determinar grandezas elétricas com uma precisão até então desconhecida.

(2) Contudo, *as dificuldades mecânicas* que estão envolvidas na suposição de partículas atuando à distância com forças que dependem da velocidade são tais que *me impedem de considerar essa teoria como definitiva*, embora ela tenha sido, e ainda possa ser, útil para levar à coordenação dos fenômenos.

Portanto, preferi buscar uma explicação para o fato em uma outra direção, supondo que eles sejam produzidos por ações que ocorrem no meio circundante, bem como nos corpos excitados, e tentando explicar a ação entre corpos distantes sem supor a existência de forças capazes de atuar diretamente em distâncias perceptíveis.

William Thomson (1824-1907), conhecido usualmente como Lorde Kelvin, e Peter Guthrie Tait (1831-1901), foram alguns dos principais opositores em relação à eletrodinâmica de Weber no Reino Unido. Em 1867 publicaram o livro *Treatise on Natural Philosophy* — Tratado sobre Filosofia Natural. Há uma tradução autorizada para o alemão feita por Helmholtz e Gustav Wertheim (1843-1902). Nos parágrafos 381-385, páginas 310-312, eles classificaram as teorias matemáticas da filosofia natural (antiga denominação para aquilo que é chamado hoje em dia de física). Eles consideraram a eletrodinâmica de Weber como perniciosa (que

¹²⁶[Nota de Maxwell:] *Electrodynamische Maassbestimmungen. Leipzig Trans.*, Volume I, 1849, e as *Scientific Memoirs* de Taylor, Volume V, Artigo xiv.

¹²⁷Maxwell estava se referindo a [Web46] com traduções completas para o inglês em [Web07] e [Web21d]; assim como a [Web48a] com traduções para o inglês em [Web52c], [Web66] e [Web19] e [Web21o].

¹²⁸[Nota de Maxwell:] “Explicare tentatur quomodo fiat ut lucis planum polarizationis per vires electricas vel magneticas declinetur.” — Halis Saxonum, 1858.

¹²⁹[Neu58]. Ver também [Neu63].

faz mal, nociva) e perigosa, como pode ser visto a partir da seguinte citação (minha ênfase em itálico):¹³⁰

381. Talvez seja aconselhável dizer algumas palavras aqui sobre o uso de hipóteses e especialmente aquelas de gradações de valor muito diferentes que são promulgadas na forma de Teorias Matemáticas de diferentes ramos da Filosofia Natural.

[...] *E isso nos leva a uma quarta classe que, embora engenhosa, deve ser considerada na realidade mais pernicioso do que útil.*

385. Um bom exemplo de tal teoria é a de Weber, que afirma fornecer uma base física para a Teoria Eletrodinâmica de Ampère, que acabou de ser mencionada como uma das [teorias] admiráveis e realmente úteis da terceira classe. Ampère contenta-se com dados experimentais relacionados à ação entre correntes fechadas e deduz matematicamente a partir deles a ação que um elemento de corrente tem de exercer sobre um outro elemento de corrente — se tal caso pudesse ser submetido à experiência. Isso não pode levar a confusão. Mas Weber vai além, ele assume que uma corrente elétrica consiste no movimento de partículas dos dois tipos de eletricidade deslocando-se em direções opostas ao longo do fio condutor; e que essas partículas exercem forças sobre outras partículas de eletricidade, quando em movimento relativo, diferentes daquelas que exerceriam se estivessem em repouso relativo. *No estado atual da ciência, isso é totalmente injustificável, porque é impossível conceber que a hipótese de dois fluidos elétricos possa ser verdadeira e, além disso, porque as conclusões são inconsistentes com a Conservação da Energia, para a qual temos inúmeras razões experimentais para aceitar como princípio geral da natureza. Isto apenas aumenta o perigo de tais teorias, quando elas explicam outros fenômenos, como aqueles das correntes induzidas, que são explicados pela [lei] de Weber.* Outra desta classe é a Teoria Corpuscular da Luz, que durante algum tempo causou grandes danos e que dificilmente poderia ser justificável a menos que um corpúsculo luminoso tivesse sido realmente visto e examinado. *Como tais especulações, embora perigosas, são interessantes e muitas vezes belas (como, por exemplo, a [teoria] de Weber), iremos referir-nos novamente a elas nas seções apropriadas.*

Contudo, Helmholtz, Maxwell, Kelvin e Tait estavam errados no que diz respeito à conservação da energia na eletrodinâmica de Weber. O próprio Weber já havia apresentado em 1848 sua energia potencial a partir da qual podia deduzir sua lei de força. Maxwell estava ciente em 1855 da existência desse artigo de Weber. Em 1858 Maxwell também sabia que esse artigo havia sido traduzido em inglês, como visto nas Notas de rodapé 116 e 117.

Em 1868 Carl Neumann (1832-1925) mostrou ainda mais explicitamente a conservação da energia na eletrodinâmica de Weber, ver a tradução desse trabalho de Neumann no Capítulo 5. Naquela época Neumann não estava ciente da energia potencial de Weber de 1848, como enfatizou em 1880 nas suas Observações Suplementares quando esse artigo de Neumann foi reimpresso em 1880, ver a Seção 5.6:

Um argumento de Weber (que apareceu como um artigo curto nos *Annalen de Poggendorff*, Vol. 73, página 229, 1848)¹³¹ mostra de maneira elementar que o

¹³⁰[TT67, págs. 310-312] com tradução para o alemão em [TT71, págs. 349-351].

¹³¹[Web48a] com traduções para o inglês em [Web52c], [Web66], [Web19] e [Web21o].

princípio da força viva continua a ser válido para a lei fundamental de Weber. — Lamento que naquela época não tivesse conhecimento desse artigo.¹³² Aliás, em minhas publicações posteriores (como, por exemplo, nos *Abhandlungen der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss.*, Vol. 11, 1874, página 115)¹³³ fiz todos os esforços para colocar as considerações de Weber sob a luz apropriada.

De qualquer forma, essa falta de conhecimento da energia potencial de Weber de 1848 teve um efeito positivo para Neumann, já que o levou a introduzir em seu artigo de 1868 as formulações Lagrangiana e Hamiltoniana para a eletrodinâmica de Weber, como discuti na Seção 4.1.

Em 1869 e 1871 Weber provou detalhadamente que sua lei de força satisfazia ao princípio de conservação da energia.¹³⁴

Maxwell mudou seu ponto de vista apenas em 1871, após a prova de Weber. Harman reproduziu um cartão postal de Maxwell para P. G. Tait, de 7 de novembro de 1871, no qual ele informou a Tait que Weber tinha razão. Sua força tem um potencial. Portanto, em qualquer operação cíclica nenhum trabalho é perdido ou ganho. Há então conservação da energia na eletrodinâmica de Weber.¹³⁵

A prova de Helmholtz não se aplica à eletrodinâmica de Weber. O motivo é que a força de Weber depende não apenas da distância e velocidade relativa entre as partículas que estão interagindo, mas também da aceleração relativa entre elas. E esse caso mais geral não foi considerado por Helmholtz em 1847.

Weber disse o seguinte em 1871 quando discutiu a conservação da energia com sua lei de força em sua Sexta Memória principal sobre Medições Eletrodinâmicas:¹³⁶

A lei da ação elétrica anunciada na Primeira Memória sobre Medições Eletrodinâmicas (Leipzig, 1846)^{137,138} foi testada e modificada de várias formas. Ela foi também o assunto de observações e especulações de um tipo mais geral; essas, contudo, não podem de forma alguma ser consideradas como já tendo levado a conclusões definitivas. A *Primeira Parte* dessa Memória é limitada a uma discussão da relação entre essa lei e o *princípio de conservação da energia*, sendo que sua grande importância e significado relevante ficaram especialmente proeminentes em conexão com a teoria mecânica do calor. Como foi afirmado que a lei que está sendo discutida está em contradição com esse princípio, é feita uma tentativa aqui de mostrar que *não há tal contradição*. Ao contrário, a lei nos permite fazer uma adição ao princípio de conservação da energia, e de alterá-lo de tal maneira que sua aplicação para *cada par de partículas* não esteja limitada apenas ao tempo durante o qual o par sofre

¹³²Ou seja, em 1868 Carl Neumann ainda não sabia do artigo de Weber de 1848. Nesse artigo Weber introduziu sua energia potencial dependente da velocidade a partir da qual podia deduzir sua lei de força.

¹³³[Neu74].

¹³⁴[Web69] com tradução para o inglês em [Web21k]; e [Web71] com traduções para o inglês em [Web72] e [Web21g]. Esses dois trabalhos de Weber estão traduzidos em português nos Capítulos 7 e 9.

¹³⁵[Har82, págs. 96-97] e [Max95, págs. 686-688].

¹³⁶[Web71, pág. 249 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web72, págs. 1-2], ver também a página 79 do Capítulo 9.

¹³⁷[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 25.

¹³⁸Ver [Web46, pág. 25 das *Obras* de Weber] com tradução parcial para o francês em [Web87] e traduções completas para o inglês em [Web07] e [Web21d].

um aumento ou diminuição da força viva¹³⁹ através da ação de outros corpos, mas sempre vale independentemente das várias relações que as duas partículas podem ter com outros corpos.

Além disso, na *Segunda Parte* a lei é aplicada para o desenvolvimento das *equações de movimento de duas partículas elétricas sujeitas apenas à ação mútua entre elas*. Embora esse desenvolvimento não leve diretamente a quaisquer comparações ou controles exatos por meio de experiências existentes (sendo que em relação a isso ela recebeu até o momento pouca atenção), contudo isso leva a vários resultados que parecem ter importância ao fornecer pistas para a investigação das *condições moleculares* e *movimentos moleculares* dos corpos, sendo que isso adquiriu um significado especial em relação à química e à teoria do calor, e que oferecem conexões interessantes nessas áreas ainda obscuras para pesquisas futuras.

Quando Maxwell escreveu seu livro *Tratado sobre Eletricidade e Magnetismo*, em 1873, ele apresentou seu novo ponto de vista de que a força de Weber é consistente com o princípio de conservação da energia:¹⁴⁰

Então, se assumirmos para a repulsão entre as duas partículas qualquer uma das expressões modificadas

$$\frac{ee'}{r^2} \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(u^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \right) \right], \quad (18)$$

ou^{141,142}

$$\frac{ee'}{r^2} \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(r \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \right) \right], \quad (19)$$

podemos deduzir delas as forças eletrostáticas comuns, e as forças agindo entre correntes como determinado por Ampère.

851.] A primeira dessas expressões, (18), foi descoberta por Gauss^{143,144} em julho de 1835, e interpretada por ele como uma lei fundamental da ação elétrica, que “dois elementos de eletricidade em um estado de movimento relativo atraem ou repelem um ao outro, mas não do mesmo modo como se eles estivessem em estado de repouso relativo”. Essa descoberta não foi, tanto quanto sei, publicada enquanto Gauss era vivo, de tal forma que a segunda expressão, descoberta independentemente por

¹³⁹Em alemão: *lebendiger Kraft*. Ver a Nota de rodapé 23 na página 25. Como vai ficar evidente a partir da Nota de rodapé 170 na página 87, o que Weber denomina de *lebendiger Kraft* ou força viva de uma partícula, deve ser entendido como a atual energia cinética, a saber, $mv^2/2$.

¹⁴⁰[Max73a, Vol. 2, Artigos 850-853, págs. 428-430] e [Max54a, Vol. 2, Artigos 850-853, págs. 483-484] com tradução para o português em [Ass92c].

¹⁴¹[Nota de Maxwell:] Para uma descrição de outras teorias desse tipo, ver *Report on Electrical Theories*, de J. J. Thomson, B. A. Report, 1885, págs. 97-155.

¹⁴²Ver [Tho86].

¹⁴³[Nota de Maxwell:] *Werke*, edição de Göttingen, 1867, Vol. 5, pág. 616.

¹⁴⁴[Gau67] com tradução para o inglês em [Gau21a] e tradução para o português no Capítulo 3. Ver também o Capítulo 2.

W. Weber e publicada na primeira parte do seu célebre *Elektrodynamische Maassbestimmungen*,^{145,146} foi o primeiro resultado do tipo tornado conhecido ao mundo científico.

852.] As duas expressões levam precisamente ao mesmo resultado quando elas são aplicadas à determinação da força mecânica entre duas correntes elétricas, e este resultado é idêntico ao de Ampère. Mas quando elas são consideradas como expressões da lei física de ação entre duas partículas elétricas, somos levados a perguntar se elas são consistentes com outros fatos da natureza já conhecidos.

Ambas as expressões envolvem a velocidade relativa da partículas. Ora, ao estabelecer por raciocínio matemático o princípio bem conhecido da conservação da energia, é geralmente assumido que a força agindo entre duas partículas é uma função apenas da distância, e é comumente afirmado que se é função de qualquer outra coisa, tal como o tempo, ou a velocidade das partículas, a prova não se manteria.

Portanto uma lei de ação elétrica, envolvendo a velocidade das partículas, tem sido suposta algumas vezes ser inconsistente com o princípio da conservação da energia.

853.] A fórmula de Gauss é inconsistente com este princípio, e deve, portanto, ser abandonada, pois ela leva à conclusão de que a energia poderia ser gerada indefinidamente em um sistema finito por meios físicos. Esta objeção não se aplica à fórmula de Weber, pois ele mostrou^{147,148} que se assumirmos como energia potencial de um sistema de duas partículas elétricas,

$$\psi = \frac{ee'}{r} \left[1 - \frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \right],$$

a repulsão entre elas, que é encontrada diferenciando esta quantidade com respeito a r , e mudando o sinal, é aquela dada pela fórmula (19).

Portanto o trabalho realizado sobre uma partícula em movimento pela repulsão de uma partícula fixa é $\psi_o - \psi_1$, onde ψ_o e ψ_1 são os valores de ψ no começo e fim de sua trajetória. Ora, ψ depende apenas da distância, r , e da velocidade na direção de r . Se, portanto, a partícula descreve qualquer caminho fechado, de tal forma que sua posição, velocidade e direção de movimento são os mesmos ao final como no começo, ψ_1 será igual a ψ_o , e nenhum trabalho será feito durante o ciclo completo de operações.

Então uma quantidade indefinida de trabalho não pode ser gerada por uma partícula em movimento periódico sob a ação da força assumida por Weber.

Apresento agora a tradução da Sexta Memória principal de Weber sobre Medições Eletrodinâmicas.

¹⁴⁵[Nota de Maxwell:] *Abh. Leibnizens Ges.*, Leipzig (1846), pág. 316.

¹⁴⁶[Web46] com tradução parcial para o francês em [Web87] e traduções completas para o inglês em [Web07] e [Web21d].

¹⁴⁷[Nota de Maxwell:] *Pogg. Ann.*, lxxiii, pág. 229, 1848.

¹⁴⁸[Web48a, pág. 229 do artigo de 1848 e pág. 245 das *Obras* de Weber] com traduções para o inglês em [Web52c], [Web66], [Web19] e [Web21o].

Capítulo 9

[Weber, 1871, ME6] Medições Eletrodinâmicas, Sexta Memória, Relacionada Especialmente com o Princípio de Conservação da Energia

Wilhelm Weber^{149,150}

I - Introdução

A lei da ação elétrica anunciada na Primeira Memória sobre Medições Eletrodinâmicas (Leipzig, 1846)^{151,152} foi testada e modificada de várias formas. Ela foi também o assunto de observações e especulações de um tipo mais geral; essas, contudo, não podem de forma alguma ser consideradas como já tendo levado a conclusões definitivas. *A Primeira Parte* da presente Memória é limitada a uma discussão da relação entre essa lei e o *princípio de conservação da energia*, sendo que sua grande importância e significado relevante ficaram especialmente proeminentes em conexão com a teoria mecânica do calor. Como foi afirmado que a lei que está sendo discutida está em contradição com esse princípio, é feita uma tentativa aqui de mostrar que *não há tal contradição*. Ao contrário, a lei nos permite fazer uma adição ao princípio de conservação da energia, e de alterá-lo de tal maneira que sua aplicação para *cada par de partículas* não esteja limitada apenas ao tempo durante o qual o par não sofre um aumento ou diminuição da força viva¹⁵³ através da ação de outros corpos, mas sempre vale independentemente das várias relações que as duas partículas podem ter com outros corpos.

¹⁴⁹[Web71] com tradução para o inglês em [Web72] e [Web21g].

¹⁵⁰As Notas de Wilhelm Weber são representadas por [Nota de Wilhelm Weber:]; as Notas de Heinrich Weber, o Editor do Volume 4 das *Obras* de Weber, são representadas por [Nota de Heinrich Weber:]; todas as outras Notas são de minha autoria.

¹⁵¹[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 25.

¹⁵²Ver [Web46, pág. 25 das *Obras* de Weber] com tradução parcial para o francês em [Web87] e traduções completas para o inglês em [Web07] e [Web21d].

¹⁵³Em alemão: *lebendiger Kraft*. Ver a Nota de rodapé 23 na página 25. Como vai ficar evidente a partir da Nota de rodapé 170 na página 87, o que Weber denomina de *lebendiger Kraft* ou força viva de uma partícula, deve ser entendido como a atual energia cinética, a saber, $mv^2/2$.

Além disso, na *Segunda Parte* a lei é aplicada para o desenvolvimento das *equações de movimento de duas partículas elétricas sujeitas apenas à ação mútua entre elas*. Embora esse desenvolvimento não leve diretamente a quaisquer comparações ou controles exatos por meio de experiências existentes (sendo que em relação a isso ela recebeu até o momento pouca atenção), contudo isso leva a vários resultados que parecem ter importância ao fornecer pistas para a investigação das *condições moleculares* e *movimentos moleculares* dos corpos, sendo que isso adquiriu um significado especial em relação à química e à teoria do calor, e que oferecem conexões interessantes nessas áreas ainda obscuras para pesquisas futuras.

II - Relação entre as Leis da Eletricidade e o Princípio de Conservação da Energia

9.1 Partículas Elétricas e Massas Elétricas

Partículas de eletricidade positiva e negativa são denominadas pelas mesmas letras, por exemplo, por e ou e' e assim por diante, mas é atribuído um valor positivo ou negativo a e ou e' ... dependendo se isso representa uma partícula do fluido positivo ou negativo.

Se f representar a força mensurável de repulsão exercida pela primeira partícula e sobre uma outra partícula exatamente igual e separada dela pela distância r mensurável, e se f' representar a força de repulsão exercida pela segunda partícula e' sobre uma outra partícula e' exatamente igual, então [a grandeza] $\pm r\sqrt{f}$ será considerada como a *medida de e* ,¹⁵⁴ enquanto que $\pm r\sqrt{f'}$ será a *medida de e'* , onde $\pm$ é para ser considerado o sinal superior ou inferior dependendo se a partícula é uma partícula do fluido positivo ou negativo. A unidade de força que é adotada aqui para a medida de f e f' é a unidade reconhecida na mecânica, a saber, a força que, quando ela atua na unidade de massa reconhecida na mecânica (1 miligrama), fornece a essa massa uma unidade de velocidade em uma unidade de tempo. — A *força de repulsão* entre as duas partículas e e e' , desde que a distância r entre elas permaneça inalterada, é dada por, de acordo com a lei *eletrostática*:

$$= \frac{ee'}{r^2} .$$

Um valor negativo dessa expressão denota uma *força atrativa*.

Contudo, nessa maneira de denominar as partículas dos fluidos elétricos, e e e' não possuem o significado de *massas* no sentido mecânico, como fica claro a partir da observação simples que e e e' podem ter em uma situação valores positivos e em outras situações valores negativos; contudo, os valores de e e e' estão intimamente relacionados às massas das partículas. Pois se denotarmos por ε e ε' — cujos valores são sempre positivos — às *massas* das partículas e e e' (no sentido mecânico, de acordo com o qual a *unidade de massa* — a saber, 1 miligrama — é determinada pela massa de *um* corpo ponderável, sendo que massas *diferentes* são comparadas entre si na proporção dos recíprocos das acelerações produzidas nelas pela mesma força),¹⁵⁵ obteremos para valores *positivos* de e e e' ,

$$\frac{e}{\varepsilon} = \frac{e'}{\varepsilon'} = a ,$$

e para valores *negativos* de e e e' ,

$$\frac{e}{\varepsilon} = \frac{e'}{\varepsilon'} = b ,$$

onde a possui um determinado valor *positivo*, enquanto que b possui um determinado valor

¹⁵⁴Em alemão: *Grössenwerth von e*. Essa expressão pode ser traduzida como a medida, valor de medida, valor ou intensidade de e .

¹⁵⁵Seja f uma mesma força atuando sobre duas massas inerciais diferentes ε e ε' de tal forma que elas adquiram as acelerações α e α' , respectivamente, em relação a um referencial inercial. Nesse caso $\varepsilon/\varepsilon' = \alpha'/\alpha$, como afirmado por Weber.

negativo.¹⁵⁶ Ainda não foi determinado se temos aqui $a^2 = b^2$, nem qual a razão que a^2 tem para b^2 , assim como ainda não foram determinados os próprios valores numéricos de a ou b . — Em muitos casos a massa elétrica ε está conectada com a massa ponderável m de tal maneira que é impossível mover ε independentemente de m ; em tais casos apenas a massa $m + \varepsilon$ é levada em consideração, sendo que em geral ε pode ser considerada como infinitamente pequena comparada com m . Consequentemente apenas raramente terão de ser levadas em consideração as massas ε e ε' .

Nem sempre é feita a distinção indicada aqui entre as partículas e , e' e suas massas ε , ε' ; muitas vezes os símbolos e e e' das partículas também são usados para denotar as massas. Contudo, deve ser observado que quando isso é feito, não devem ser levados em consideração os sinais de e e e' .¹⁵⁷ A omissão dos fatores desconhecidos a e b é sempre permissível quando estamos lidando apenas com os *valores relativos* das massas da eletricidade positiva ou negativa.

9.2 A Lei da Força Elétrica

A lei da força elétrica foi apresentada da seguinte maneira nas Medições Eletrodinâmicas (Leipzig, 1846, pág. 119):^{158,159}

Se duas partículas elétricas forem denotadas por e e e' , a força repulsiva exercida pelas duas partículas uma sobre a outra a uma distância r é representada por

$$\frac{ee'}{r^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{c^2} \frac{d^2r}{dt^2} \right),$$

onde c é a constante que naquele artigo [de 1846] foi denominada por $4/a$.

Mas essa expressão para a *força* que as partículas e e e' exercem mutuamente entre si, como é fácil de perceber, depende de uma grandeza que contém como um fator a própria força que é para ser determinada. Isso pode ser prontamente visto quando a aceleração relativa entre as duas partículas, a saber, d^2r/dt^2 , é quebrada em duas partes,

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r'}{dt^2} + \frac{d^2r''}{dt^2},$$

onde a primeira parte, d^2r'/dt^2 , é a aceleração relativa devida à ação mútua entre as duas partículas, enquanto que a segunda parte, d^2r''/dt^2 , é a aceleração devida a outras causas (a

¹⁵⁶Ou seja, Weber está assumindo aqui que a razão carga/massa de uma partícula positiva pode ser diferente da razão carga/massa de uma partícula negativa. Hoje em dia sabemos que essa grande intuição de Weber ocorre de fato com as partículas fundamentais da natureza. Um próton e um elétron, por exemplo, possuem cargas elétricas iguais e opostas. Contudo, suas massas são bem diferentes, tal que a razão carga/massa para um próton tem um valor numérico bem diferente da razão carga/massa para um elétron. O mesmo pode ser dito quando comparamos a razão carga/massa de um elétron de condução em relação à razão carga/massa de um íon positivo de cobre em uma rede cristalina. Deve ser lembrado que o elétron e o próton só foram descobertos após a morte de Weber em 1891.

¹⁵⁷Isto é, as cargas elétricas das partículas são representadas por e e e' . Quando os valores das massas dessas partículas também são representadas por e e e' , então não deve ser levado em conta para as massas se e e e' são partículas de cargas positivas ou negativas.

¹⁵⁸[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. III, pág. 157

¹⁵⁹Ver [Web46, pág. 157 das *Obras de Weber*], [Web07, pág. 98] e [Web21d, pág. 149]. Ver ainda [Web52b, pág. 366 das *Obras de Weber*] com tradução para o inglês em [Web21e, pág. 346]. Ver também [Ass21e].

saber, do movimento existente das partículas [na direção] perpendicular a r , e das interações em que elas se encontram com outros corpos). A primeira parte, que provém da interação de ambas as partículas, é proporcional à *força resultante dessa interação* e é representada pelo quociente dessa força e da massa sobre a qual atua.

Portanto, segue facilmente, como foi mostrado na Memória já citada (página 168),^{160,161} uma outra expressão para a força que as partículas e e e' exercem entre si contendo apenas termos que são independentes da força a ser determinada, a saber

$$\frac{ee'}{r^2 - \frac{2r}{c^2}(e + e')} \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2rf}{c^2} \right) ,$$

(onde foi colocado f no lugar de d^2r''/dt^2), ou, se as partículas elétricas e e e' forem distinguidas por suas massas ε e ε' de acordo com a Seção anterior (uma distinção que não foi feita na Memória citada anteriormente [de 1846]), [segue a seguinte] expressão:

$$\frac{ee'}{r^2 - \frac{2r}{c^2} \cdot \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon \varepsilon'} ee'} \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2rf}{c^2} \right) .$$

Disso resulta que a *lei da força elétrica* não é de forma alguma tão simples quanto esperamos que seja uma lei fundamental; ao contrário, ele parece ser particularmente complexa em dois aspectos.

Em primeiro lugar, é uma consequência dessa expressão para a *força* que, como mencionado na Memória mencionada [de 1846], a força que duas partículas elétricas exercem entre si não depende exclusivamente dessas próprias partículas, da distância entre elas e da velocidade relativa entre elas, mas também da parte de sua aceleração relativa representada por f , *que é parcialmente devida à ação de outros corpos*. Também foi observado que, uma vez que Berzelius denominou de *forças catalíticas* às forças exercidas por *dois* corpos um sobre o outro quando dependem da presença de um *terceiro* corpo,¹⁶² as *forças elétricas*, geralmente consideradas, são *forças catalíticas*.

Em segundo lugar, segue dessa expressão para a força um outro resultado notável, a saber, que quando as partículas e e e' são *do mesmo tipo*,¹⁶³ *elas nem sempre se repelem*, assim, quando $dr^2/dt^2 < c^2 + 2rf$, elas vão se repelir desde que

$$r > \frac{2}{c^2} \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon \varepsilon'} ee' ,$$

e, ao contrário, elas vão se *atrair* quando

$$r < \frac{2}{c^2} \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon \varepsilon'} ee' .$$

Uma exceção a essa regra ocorre apenas no caso em que¹⁶⁴

¹⁶⁰[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 212.

¹⁶¹[Web46, pág. 212 das *Obras* de Weber] e [Web21d, pág. 201].

¹⁶²Jöns Jacob Berzelius (1779-1848). Ver [Ber36c], [Ber36a] e [Ber36b].

¹⁶³Em alemão: *gleichartige Theilchen*. Essa expressão pode ser traduzida como partículas semelhantes, partículas similares, ou partículas do mesmo tipo. Isto é, quando as duas partículas são positivas, ou quando as duas partículas são negativas, tal que $ee' > 0$ nos dois casos.

¹⁶⁴A próxima equação apareceu no artigo original com o seguinte formato:

$$\left(r - 2 \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon^2} \frac{ee'}{c^2} \right) .$$

$$\left(r - 2 \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon \varepsilon'} \frac{ee'}{c^2} \right) ,$$

que sempre é um fator no denominador, torna-se igualmente um fator no numerador. Esse caso ocorre quando as duas partículas elétricas estão em *repouso relativo permanente*, de tal forma que $dr/dt = 0$ e $d^2r/dt^2 = 0$.

Quando $dr/dt = 0$ a expressão geral para a força dada anteriormente torna-se de fato,

$$\frac{ee'}{r \left(r - 2 \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon \varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{c^2} \right)} \cdot \left(1 + \frac{2r}{c^2} f \right) .$$

Ao dividir isso pela massa $\varepsilon \varepsilon' / (\varepsilon + \varepsilon')$, encontramos a parte da aceleração que é devida às forças exercidas entre si pelas duas partículas elétricas, a saber,

$$\frac{(\varepsilon + \varepsilon') ee'}{\varepsilon \varepsilon' r \left(r - 2 \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon \varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{c^2} \right)} \cdot \left(1 + \frac{2r}{c^2} f \right) .$$

Se somarmos a isto a outra parte da aceleração, ou seja, f , que resulta do movimento existente das partículas perpendiculares a r , e da ação de outros corpos, então obtém-se a aceleração *total*, a saber:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = f + \frac{(\varepsilon + \varepsilon') ee'}{\varepsilon \varepsilon' r \left(r - 2 \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon \varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{c^2} \right)} \cdot \left(1 + \frac{2r}{c^2} f \right) ,$$

a qual é $= 0$ quando as partículas estão *em repouso relativo permanente*. Portanto, *para o caso de repouso relativo permanente* temos

$$f = - \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon \varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{r^2} .$$

Se esse valor de f for substituído na expressão para a força

$$\frac{ee'}{r \left(r - 2 \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon \varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{c^2} \right)} \cdot \left(1 + \frac{2r}{c^2} f \right) ,$$

essa força vai ficar no formato

$$\frac{ee'}{r \left(r - 2 \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon \varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{c^2} \right)} \cdot \frac{1}{r} \left(r - 2 \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon \varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{c^2} \right) .$$

Portanto, vemos que no *caso de repouso relativo permanente*, o fator

$$\left(r - 2 \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon \varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{c^2} \right)$$

é comum ao numerador e denominador. O valor do quociente, a saber, ee'/r^2 , que é assim independente desse fator, fornece consequentemente a expressão para a força, no *caso de repouso relativo permanente*, em total concordância com a *lei fundamental da eletrostática*, de acordo com a qual essa força tem um valor *positivo em todas as distâncias* para partículas do *mesmo tipo*.

9.3 A Lei do Potencial Elétrico

Foi mostrado na Seção anterior que a *lei da força elétrica* é complexa em dois aspectos, a saber, *em primeiro lugar*, a força repulsiva entre duas partículas elétricas depende de coisas que não pertencem à natureza das partículas que exercem forças entre si, ou às suas posições relativas no espaço, ou ao movimento relativo existente entre elas, mas *depende de outros corpos*; e, *em segundo lugar*, as mesmas partículas podem exercer entre si uma *repulsão* em certas distâncias, e *atração* em outras distâncias.

Comparada com essa *lei de força elétrica complicada*, a *lei do potencial elétrico* é bem mais simples.

De fato, o valor do potencial V entre duas partículas elétricas e e e' , como afirmei em 1848 nos *Annalen* de Poggendorff (Vol. lxxiii, pág. 229),^{165,166} é determinado pela seguinte lei:

$$V = \frac{ee'}{r} \left(\frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} - 1 \right) .$$

Observando que tanto r quanto dr/dt possuem valores diferentes em tempos diferentes para as duas partículas e e e' e que, conseqüentemente, essas duas grandezas são funções do tempo, segue que dr/dt também pode ser considerada como uma função de r , a qual pode ser denominada por fr .¹⁶⁷ Obtemos assim

$$V = \frac{ee'}{r} \left(\frac{1}{c^2} \cdot (fr)^2 - 1 \right) .$$

Diferenciando isso obtém-se a *expressão para a força*

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{ee'}{r^2} \left(\frac{1}{c^2} \cdot (fr)^2 - 1 \right) + 2\frac{ee'}{rc^2} \cdot fr \cdot \frac{dfr}{dr} ,$$

ou, se colocarmos novamente dr/dt no lugar de fr ,

$$\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{r^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{c^2} \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\frac{dr}{dt}}{dr} \right) ,$$

que pode ser escrita como

$$\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{r^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{c^2} \cdot \frac{d^2r}{dt^2} \right) .$$

Disso vem que

$$\frac{ee'}{r} \left(\frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} - 1 \right)$$

é uma função cujo quociente diferencial com relação a r representa a força repulsiva entre as duas partículas e e e' , onde r e dr/dt denotam, respectivamente, a distância entre elas e a velocidade relativa entre elas, consideradas como funções do tempo. Mas como

¹⁶⁵[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. III, pág. 245.

¹⁶⁶[Web48a, pág. 245 das *Obras de Weber*] com traduções para o inglês em [Web52c], [Web66], [Web19] e [Web21o].

¹⁶⁷Ou seja, $fr = f(r)$.

$$\frac{ee'}{r} \left(\frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} - 1 \right) = 0$$

quando e e e' estão infinitamente separadas entre si, então

$$\frac{ee'}{r} \left(\frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} - 1 \right)$$

é o *potencial* das partículas elétricas e e e' , isto é, o *trabalho* que é realizado quando as duas partículas, sob a influência de sua força repulsiva, se aproximam de uma distância infinita até a distância r , chegando na distância r com a velocidade relativa dr/dt .^{168,169}

Resulta da mesma maneira a partir do que foi dito anteriormente que o *trabalho* que é gasto quando um dado arranjo relativo, juntamente com o estado de movimento de um sistema de partículas e e e' , são modificados para um outro arranjo e um outro estado de movimento, depende apenas dos arranjos e movimentos das partículas no início e no final [do processo], sendo independente da maneira pela qual é efetuada a transição, sendo também independente dos estados de movimento que podem ter existido durante a transição.

9.4 Leis Elétricas Fundamentais

A *lei do potencial elétrico* parece estar, tendo em vista sua simplicidade, em uma relação muito mais próxima com as leis fundamentais da eletricidade do que a lei mais complexa da *força elétrica*; contudo, a expressão da lei do potencial pode ainda ser dividida em duas leis mais simples, que podem ser apresentadas da seguinte maneira:

Primeira Lei. — Se duas partículas e e e' estão em repouso relativo ou possuem o mesmo movimento relativo em duas distâncias diferentes r e ρ , as quantidades de trabalho V e U que são gastas ao separar as partículas enquanto estão atuando mutuamente entre si, desde essas distâncias até uma distância infinita, estão inversamente entre si como a razão entre essas distâncias, isto é,

$$V : U = \rho : r . \quad (1)$$

Segunda Lei. — O trabalho U que é gasto ao separar as partículas e e e' enquanto estão sujeitas à força exercida mutuamente entre si desde uma *distância dada* $\rho = ee'/a$ *proporcional à grandeza* ee' até uma distância infinita, forma *juntamente com a força viva* x que pertencia às partículas em consequência do movimento relativo entre elas na distância ρ , uma *soma constante*, a saber, a , isto é,

¹⁶⁸[Nota de Wilhelm Weber:] Beer partiu dessa lei do *potencial* elétrico em sua ‘Introdução à Eletrodinâmica’ (ver “*Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik*, de August Beer. Nach dem Tode des Verfassers herausgegeben von Julius Plücker”: Braunschweig, 1865, pág. 250). — Não deveria ser questionável colocar no topo a lei do *potencial* como a lei fundamental e deduzir dele a lei da força. Em alguns aspectos, é mais justificável falar da *existência física do trabalho expresso pelo potencial* do que da *existência física de uma força* da qual só se pode dizer que *tenta mudar as condições físicas dos corpos*.

¹⁶⁹[Bee65, pág. 250]. August Beer (1825-1863) foi um físico e matemático alemão obtendo o doutorado em 1848 sob a orientação de Julius Plücker (1801-1868). Tradução do título do livro de Beer: *Introdução à Eletrostática, Teoria do Magnetismo e Eletrodinâmica*, de August Beer, editado após a morte do autor por Julius Plücker.

$$U + x = a . \quad (2)$$

Segue da Equação (1) que

$$U = \frac{r}{\rho} V ,$$

portanto, pela Equação (2),

$$\frac{r}{\rho} V + x = a ,$$

ou, como $\rho = ee'/a$,

$$V = \frac{ee'}{r} \left(1 - \frac{x}{a} \right) .$$

Contudo, a força viva relativa x é proporcional ao quadrado da velocidade relativa dr/dt , de tal forma que no lugar de a podemos introduzir uma nova constante c^2 de tal forma que¹⁷⁰

¹⁷⁰[Nota de Wilhelm Weber:] Se ε e ε' denotam as massas das partículas e e e' , e se α e β são as velocidades de ε na direção de r e perpendicular a essa direção, enquanto que α' e β' são as mesmas velocidades para ε' , de tal forma que a velocidade relativa entre as duas partículas é $\alpha - \alpha' = dr/dt$, então

$$\frac{1}{2}\varepsilon(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{2}\varepsilon'(\alpha'^2 + \beta'^2)$$

é a *força viva* total das duas partículas. Se agora, no lugar de α , colocarmos

$$\frac{\varepsilon\alpha + \varepsilon'\alpha'}{\varepsilon + \varepsilon'} + \frac{\varepsilon'(\alpha - \alpha')}{\varepsilon + \varepsilon'} ,$$

e se, no lugar de α' , [colocarmos]

$$\frac{\varepsilon\alpha + \varepsilon'\alpha'}{\varepsilon + \varepsilon'} - \frac{\varepsilon(\alpha - \alpha')}{\varepsilon + \varepsilon'} ,$$

obteremos a força viva total das duas partículas representada como a soma de duas partes da seguinte maneira, a saber,

$$= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{(\varepsilon\alpha + \varepsilon'\alpha')^2}{\varepsilon + \varepsilon'} + \varepsilon\beta^2 + \varepsilon'\beta'^2 \right] ,$$

a *primeira* parte, ou $\frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{dr^2}{dt^2}$, é a *força viva relativa* das partículas que foi denominada por x anteriormente. Contudo, a é também a força viva relativa das mesmas partículas, a saber, aquela que corresponde a uma velocidade relativa específica c , de tal forma que $a = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot c^2$. Obtemos, portanto, $\frac{x}{a} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2}$, como foi dado anteriormente.

Pode ser observado ainda que a *segunda* parte da soma anterior, a saber,

$$\frac{1}{2} \left[\frac{(\varepsilon\alpha + \varepsilon'\alpha')^2}{\varepsilon + \varepsilon'} + \varepsilon\beta^2 + \varepsilon'\beta'^2 \right] ,$$

também pode ser representada, após uma outra subdivisão, como sendo a soma de duas partes, a saber,

$$= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{ds^2}{dt^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{(\varepsilon\alpha + \varepsilon'\alpha')^2}{\varepsilon + \varepsilon'} + (\varepsilon + \varepsilon')\gamma^2 \right] ,$$

onde ds/dt representa a velocidade com que as duas partículas se deslocam relativamente entre si no espaço em uma direção perpendicular a r , enquanto que γ representa a velocidade, perpendicular a r , do centro de gravidade das duas partículas. Obtemos assim a força viva total das duas partículas dividida em três partes, a saber,

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} .$$

Obtemos assim

$$V = \frac{ee'}{r} \left(1 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} \right) .$$

A grandeza V denota aqui o trabalho gasto ao separar as duas partículas desde a distância r até uma distância infinita. Se V denotar o trabalho feito ao trazer as partículas de uma separação infinita até a distância r , o que é geralmente assumido, de tal forma que valores positivos de dV/dr signifiquem *repulsão*, obteremos

$$V = \frac{ee'}{r} \left(\frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} - 1 \right) ,$$

isto é, a *lei do potencial elétrico*.

9.5 Princípio de Conservação da Energia para Duas Partículas que Formam um Sistema Isolado

As duas leis fundamentais apresentadas na Seção anterior, que podem ser chamadas de

- lei da dependência do potencial em relação à distância para *um movimento relativo constante*, e

$$\begin{aligned} i. \quad & \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} , \\ ii. \quad & \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{ds^2}{dt^2} , \\ iii. \quad & \frac{1}{2} \left[\frac{(\varepsilon\alpha + \varepsilon'\alpha')^2}{\varepsilon + \varepsilon'} + (\varepsilon + \varepsilon')\gamma^2 \right] . \end{aligned}$$

A *primeira* dessas partes, a saber,

$$\frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} ,$$

representa a *força viva relativa* das duas partículas; enquanto que as *primeiras* duas partes consideradas em conjunto, a saber,

$$\frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \left(\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{ds^2}{dt^2} \right) ,$$

representam a *força viva interna* total, ou toda a *energia cinética interna do sistema*; e a *terceira* parte, a saber,

$$\frac{1}{2} \left[\frac{(\varepsilon\alpha + \varepsilon'\alpha')^2}{\varepsilon + \varepsilon'} + (\varepsilon + \varepsilon')\gamma^2 \right] ,$$

representa a *força viva externa*, ou a *energia cinética externa do sistema* (isto é, a força viva do centro de gravidade das duas partículas).

- lei da dependência do potencial em relação ao movimento relativo para *uma distância constante*,

ainda precisam ser discutidas mais detalhadamente em suas relações com o princípio de conservação da energia.

De acordo com o princípio de conservação da energia, distinguem-se três formas de energia, a saber, *energia cinética*,¹⁷¹ *energia potencial*, e *energia térmica*.¹⁷²

A *energia cinética* é aquela parte da energia que depende dos movimentos existentes; e há uma determinação especial de como ela depende do movimento, a saber, ela depende em parte do valor da massa móvel, e em parte da velocidade com que essa massa se desloca. A mesma determinação também se aplica à *energia térmica*, se essa energia for considerada, de acordo com a teoria mecânica do calor, como sendo um *movimento interno [das partículas] nos corpos*. Porém, se estamos lidando com um sistema de duas *partículas elementares* (isto é, de partículas em cujo *interior* não há movimento), então é óbvio que em tal sistema não há energia térmica, e que apenas permanecem a *energia cinética* e a *energia potencial*.

Por último, a *energia potencial* é aquela parte da energia que depende do potencial existente; sendo necessária uma determinação especial de como ela *depende do potencial*, exatamente como, no caso da energia cinética, é necessário determinar a maneira especial em que ela depende do movimento.

Essa determinação especial foi dada agora *igualando a energia potencial* (exceto o sinal) *com o potencial*.¹⁷³

A justificativa para esta determinação foi encontrada no fato de o potencial ser uma grandeza homogênea à energia cinética, que, quando considerado negativamente e somado à energia cinética, dá sempre a mesma soma, desde que ambas as partículas formem um sistema *isolado*,¹⁷⁴ que não recebe energia do exterior, nem a fornece para fora.

Por exemplo, se temos um sistema de duas partículas ponderáveis m e m' , seu *potencial* é

$$V = \frac{mm'}{r} ,$$

e a *força viva interna*, ou a *energia cinética interna do sistema*, é

¹⁷¹Em alemão: *Bewegungsenergie*. Essa expressão pode ser traduzida como energia cinética ou energia do movimento.

¹⁷²Em alemão: *Wärmeenergie*. Essa expressão pode ser traduzida como energia térmica ou energia do calor.

¹⁷³[Nota de Wilhelm Weber:] O sinal do *potencial*, V , é determinado de tal forma que valores positivos de dV/dr indicam forças repulsivas; o sinal da *energia potencial* é fixado pelo sinal do trabalho que é feito em consequência da ação mútua entre as partículas quando as duas partículas são separadas da distância r até uma distância infinita. Consequentemente, para duas partículas ponderáveis m e m' , o potencial é $V = mm'/r$, e a energia potencial $= -mm'/r$. Para duas partículas elétricas e e e' o potencial é

$$= \frac{ee'}{r} \left(\frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} - 1 \right) ,$$

e a energia potencial

$$= \frac{ee'}{r} \left(1 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} \right) .$$

¹⁷⁴Em alemão: *ein abgesondertes System*.

$$W = \frac{1}{2} \frac{mm'}{m+m'} (u^2 + \alpha^2) ,$$

onde $u = dr/dt$ é a velocidade relativa das duas partículas, e α é a diferença de suas velocidades no espaço perpendiculares a r . Contudo, para um sistema isolado, se colocarmos $r = r_0$ e $\alpha = \alpha_0$ quando $u = 0$, obteremos facilmente o seguinte valor, a saber,¹⁷⁵

$$u^2 = \frac{r_0 - r}{r_0} \left[\frac{2(m+m')}{r} - \frac{r_0 + r}{r_0} \alpha^2 \right] ,$$

consequentemente, a soma

$$W - V = -\frac{mm'}{r_0} + \frac{1}{2} \frac{mm'}{m+m'} \cdot \alpha_0^2 .$$

Essa soma tem sempre o mesmo valor, desde que os valores de r_0 e α_0 permaneçam inalterados, isto é, desde que o sistema de duas partículas não ganhe energia de fora, nem perca energia para o exterior. — Em um sistema isolado como esse, a *energia cinética externa* forma *uma soma constante em si mesma*.

A mesma coisa acontece também para duas partículas *elétricas* e e e' ; pois o potencial delas, considerado com o sinal negativo e adicionado à energia cinética delas, igualmente dá sempre a mesma soma, desde que as partículas formem um sistema *isolado*.

Temos para o *potencial* de um tal sistema de partículas,

$$V = \frac{ee'}{r} \left(\frac{u^2}{c^2} - 1 \right) ,$$

¹⁷⁵[Nota de Wilhelm Weber:] A força com que duas partículas atuam mutuamente entre si, a saber, dV/dr , dividida por m , fornece a aceleração da partícula m , isto é, $\frac{1}{m} \cdot \frac{dV}{dr}$; já dividida por m' ela fornece a aceleração da partícula m' , a saber, $\frac{1}{m'} \cdot \frac{dV}{dr}$. Consequentemente, aquela parte da aceleração relativa entre as duas partículas que surge da ação mútua entre elas é:

$$= \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right) \frac{dV}{dr} ,$$

enquanto que aquela parte da aceleração relativa entre as duas partículas que resulta de sua rotação uma em torno da outra é representada por α^2/r . Se agora essa última porção for subtraída da aceleração total du/dt , vai resultar a seguinte equação:

$$\frac{du}{dt} - \frac{\alpha^2}{r} = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right) \frac{dV}{dr} .$$

Colocando $r = r_0$ e $\alpha = \alpha_0$ para o instante no qual $u = 0$, obtemos a seguinte expressão aplicável para o caso no qual as únicas forças atuando sobre as duas partículas são aquelas devidas à ação mútua entre elas:

$$\alpha r = \alpha_0 r_0 .$$

Obtemos de acordo com isso ao integrar a equação diferencial anterior após ela ter sido multiplicada por $2dr = 2udt$,

$$u^2 + \alpha_0^2 r_0^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) = 2 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right) \left(\frac{mm'}{r} - \frac{mm'}{r_0} \right) ,$$

e, portanto,

$$u^2 = \frac{r_0 - r}{r} \left(\frac{2(m+m')}{r_0} - \frac{r_0 + r}{r} \alpha_0^2 \right) = \frac{r_0 - r}{r_0} \left(\frac{2(m+m')}{r} - \frac{r_0 + r}{r_0} \alpha^2 \right) .$$

e, para a *energia cinética interna do sistema*,

$$W = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} (u^2 + \alpha^2) = \frac{ee'}{\rho c^2} (u^2 + \alpha^2) ,$$

se $u = dr/dt$ denotar a velocidade relativa das duas partículas, sendo α a diferença de suas velocidades no espaço perpendiculares a r . Contudo, para um tal sistema *isolado*, quando colocamos $r = r_0$ e $\alpha = \alpha_0$ para $u = 0$, é fácil obter¹⁷⁶

$$\alpha = \frac{r_0}{r} \alpha_0 ,$$

$$u^2 = \frac{r - r_0}{r - \rho} \left(\frac{\rho}{r_0} c^2 + \frac{r_0 + r}{r} \alpha_0^2 \right) ,$$

e, conseqüentemente, a soma

$$W - V = \frac{ee'}{r_0} + \frac{ee'}{\rho} \cdot \frac{\alpha_0^2}{c^2} = \frac{ee'}{r_0} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \alpha_0^2 .$$

Essa soma tem o mesmo valor desde que r_0 e α_0 permaneçam inalterados, isto é, desde que o sistema de duas partículas não perca energia para o exterior, nem ganhe energia de fora.^{177,178} — *Vale o mesmo princípio em relação à energia cinética externa de um sistema isolado composto de duas partículas elétricas, assim como para aquele [sistema isolado composto] de duas partículas ponderáveis.*

¹⁷⁶[Nota de Wilhelm Weber:] Ver a Seção 9.11.

¹⁷⁷[Nota de Wilhelm Weber:] No trabalho muito instrutivo do Sr. Tait, “A Sketch of Thermodynamics” (Edinburgh, 1868), aparece a seguinte passagem na página 76, com referência às investigações de Riemann e Lorenz que apareceram nos *Annalen* de Poggendorff de 1867 [*Phil. Mag.*, S. 4, Vol. xxxiv, págs. 368 e 287]:

Mas as investigações desses autores estão totalmente baseadas na teoria inadmissível de Weber de forças exercidas entre si por *partículas elétricas em movimento*, para as quais não vale a conservação da energia, enquanto que o resultado de Maxwell está em concordância perfeita com esse grande princípio.

Essa afirmação do Sr. Tait parece estar em contradição com o que dissemos anteriormente. Na página 56 do mesmo trabalho o Sr. Tait menciona que Helmholtz baseou a doutrina da energia no princípio de Newton e no seguinte *postulado*:

A matéria consiste em partículas fundamentais que exercem forças umas sobre as outras, cujas direções são as das linhas que unem cada par de partículas e cujas magnitudes dependem apenas das distâncias entre as partículas.

É evidente a contradição da lei fundamental da eletricidade *com esse postulado*, mas não há contradição alguma *com o princípio da conservação da energia*, — distinção essa que o Prof. Tait parece ter confundido.

¹⁷⁸Ver [Tai68, págs. 56 e 76]. Tait estava se referindo às investigações de Bernhard Riemann e do físico dinamarquês Ludvig Valentin Lorenz (1829-1891). Ver [Rie67b] com tradução para o inglês em [Rie67a] e [Rie77a]; [Lor67b] com tradução para o inglês em [Lor67a]. Tait e Weber citaram o trabalho de 1847 de Helmholtz, [Hel47] com tradução para o inglês em [Hel53] e [Hel66]. A “lei fundamental da eletricidade” (em alemão: *elektrischen Grundgesetzes*) a que Weber se refere aqui é a sua própria lei de força de 1846 que depende não apenas da distância e velocidade relativa entre as partículas eletrizadas que estão interagindo, mas também da aceleração relativa entre elas.

9.6 Extensão do Princípio de Conservação da Energia a Duas Partículas Elétricas que Não Formam um Sistema Isolado

Se a energia potencial for considerada, como foi feito na Seção anterior, como igual e oposta ao potencial, vai valer o princípio de conservação da energia para duas partículas apenas se essas duas partículas constituírem um sistema *isolado*, isto é, desde que o sistema formado pelas duas partículas não ganhe energia de fora, nem perca energia para o exterior.

Contudo, se a energia *total* de um tal sistema *isolado* de duas partículas fosse inicialmente $= A$, mas, com o sistema deixando de estar isolado, ele recebesse de fora uma quantidade de *energia cinética* $= a$, parece seguir que, se o sistema ficasse agora novamente isolado, a energia *total* ficaria e permaneceria novamente constante, desde que o sistema permanecesse isolado; mas que a energia *total* do sistema em seu estado final isolado teria o valor $A + a$ (isto é, aumentada pelo valor a em relação a seu estado isolado anterior). Isso, contudo, não prova conclusivamente de forma alguma a impossibilidade de estender o princípio de conservação da energia a duas partículas elétricas que não constituem um sistema isolado.

A rigor, isso só foi provado com a suposição de que a *energia potencial* do sistema depende apenas da distância entre as duas partículas; enquanto que se, por outro lado, a energia potencial não depende apenas da distância entre as duas partículas, mas também do *movimento* relativo entre elas, é evidente que enquanto o sistema recebe de fora uma quantidade de *energia cinética* $= a$, pode ter sido produzida dessa maneira uma mudança em sua *energia potencial*. Assim, é possível que a mudança na *energia potencial*, causada dessa maneira indiretamente a partir do exterior, possa ser $= -a$, de tal forma que a energia *total* (energia cinética e energia potencial em conjunto) das duas partículas, mesmo que elas não constituam um sistema isolado, ainda manteria o mesmo valor.

Contudo, isso certamente não ocorre na realidade para um sistema de duas partículas elétricas se a *energia potencial* for considerada como *igual e oposta ao potencial*; mas essa suposição, que tornaria dessa maneira impossível a extensão do princípio, não foi de forma alguma provada como sendo necessária. De fato, em geral, apenas se *exigia uma determinação mais precisa sobre como a energia potencial depende do potencial*, deixando claro que entre potencial e energia potencial, por serem quantidades homogêneas, deve haver uma relação puramente numérica. Mas se esta razão numérica é sempre a razão de $+1$ para -1 , ou se esta razão pode ser determinada de forma diferente, ainda pode ser considerado em geral como duvidoso, o que significa que permanece a possibilidade dessa extensão do princípio.

De fato, entendemos o *potencial* de duas partículas como sendo a quantidade de *trabalho* que, em consequência da ação mútua entre as duas partículas, é feito quando elas são transferidas de uma maneira arbitrária desde uma distância infinita até a distância r existente atualmente com a velocidade relativa dr/dt existente atualmente.

Contudo, é evidente que é feito *trabalho* em consequência da ação mútua entre as duas partículas, não apenas durante a transferência delas de uma distância *maior* até a distância r , mas também durante a transferência delas de uma distância *menor* até a distância r . E não há motivo óbvio pelo qual a *energia atribuída ao sistema* deva depender do trabalho feito no *primeiro* caso, mas não deva depender do trabalho feito no *último* caso.

Por exemplo, se a *primeira* quantidade de trabalho fosse denotada, de acordo com a Seção 9.4, por V , e a *segunda* [quantidade de trabalho] por $\frac{\rho-r}{\rho}V$, a energia potencial atribuída ao sistema poderia ser considerada como a *diferença dessas duas quantidades de trabalho*, a

saber,

$$= \frac{\rho - r}{\rho} V - V = -\frac{r}{\rho} V .$$

Essa diferença das duas quantidades de trabalho é evidentemente a quantidade de trabalho que é feita em consequência da ação mútua entre as duas partículas durante a transferência delas do valor limite para *pequenas* distâncias até o valor limite para *grandes* distâncias — isto é, o valor assumido por

$$-V = \frac{ee'}{r} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)$$

se r for considerado igual ao valor limite para *pequenas* distâncias, ou quando colocamos $r = \rho$, onde ρ denota o valor limite de pequenas distâncias. Portanto, de acordo com isso, essa *diferença das duas quantidades de trabalho*

$$= \frac{ee'}{\rho} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) = -\frac{r}{\rho} V .$$

Para determinar dessa maneira a energia potencial de um sistema de duas partículas elétricas quando a *primeira quantidade de trabalho* mencionada anteriormente é

$$V = \frac{ee'}{r} \left(\frac{u^2}{c^2} - 1 \right) ,$$

só é necessário adicionalmente, para a determinação da *segunda quantidade de trabalho*, determinar o valor de ρ , isto é, o valor da *menor distância* para a qual o último trabalho deve ser aplicado.

Agora essa *menor distância*, assim como a *maior distância*, precisam ser determinadas *por si mesmas, independentemente das condições atualmente existentes* entre as duas partículas. Isso foi feito no caso da distância *maior* ao designar para ela um valor infinitamente grande; pode ser obtida a mesma coisa no caso da distância *menor* ao atribuir a ela o valor

$$2 \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon \varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{c^2} ,$$

uma distância que é dada em função das partículas e e e' , de suas massas ε e ε' , assim como pela constante elétrica c conhecida.

Se colocarmos agora a distância menor igual ao valor ρ obteremos, em virtude das equações

$$V = \frac{ee'}{r} \left(\frac{u^2}{c^2} - 1 \right) ,$$

$$\frac{\rho - r}{\rho} V = \frac{\rho - r}{\rho} \cdot \frac{ee'}{r} \left(\frac{u^2}{c^2} - 1 \right) ,$$

o valor procurado da *energia potencial*, a saber,

$$-\frac{r}{\rho} V = -\frac{ee'}{\rho} \left(\frac{u^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} (c^2 - u^2) .$$

De acordo com a distinção que é feita aqui entre o *potencial* e a *energia potencial* de duas partículas elétricas e com a determinação correspondente da relação que elas possuem entre si, uma distinção análoga também pode ser feita entre a força viva e a *energia cinética* de duas partículas. Pois não há necessidade que a *energia cinética* de duas partículas seja considerada como sendo igual à *força viva total das duas partículas*; tudo que é geralmente essencial é uma *determinação definida da relação que existe entre a energia cinética das duas partículas e a força viva total que pertence a elas*.

Agora a força viva total pertencente às duas partículas foi representada na Nota de rodapé da Seção 9.4 como a soma de duas partes,¹⁷⁹ das quais a *primeira* parte, a saber,

$$\frac{1}{2} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} ,$$

foi denominada de *força viva relativa*. A *segunda* parte era aquela que as duas partículas possuíam em virtude de sua rotação uma em torno da outra no espaço e como resultado do movimento de seu centro de gravidade no espaço.

Se, ao estabelecer o conceito de *energia* de duas partículas, assumirmos que o *princípio de conservação da energia* de duas partículas deve ser fundado na essência das duas partículas e, na verdade, *na essência das duas partículas consideradas como um sistema isolado*, então é claro que para este propósito, o conceito de *energia* de duas partículas (completamente independente das relações em que essas partículas possam estar com todos os outros corpos no espaço) só pode ser tornado dependente das relações apresentadas pelo sistema das duas partículas como tais.

Aplicando esse princípio fundamental à *energia cinética* de duas partículas da mesma maneira como acabou de ser feito com relação à *energia potencial*, vemos que a *energia cinética* precisa ser considerada como dependente da *primeira* parte da força viva total pertencente às duas partículas — isto é, da *força viva relativa* entre elas — e não [como dependente] da *segunda* parte da força viva total, ou daquela [parte] que as duas partículas possuem em função da revolução de uma ao redor da outra no espaço ou do movimento no espaço do centro de gravidade delas; pois essa última parte depende de relações que não são apresentadas diretamente pelas próprias partículas. Pois as duas partículas, vistas por si só, não oferecem nada em uma relação espacial além da distância entre elas, da qual não pode ser derivado nenhum conhecimento da rotação ou do movimento do centro de gravidade no espaço.

Consequentemente, no que segue deve ser entendido por *energia cinética* das duas partículas apenas a *força viva relativa* entre elas, mas não a força viva total possuída pelas duas partículas.

Porém, é fácil ver que, de acordo com isso, enquanto um sistema de duas partículas elétricas e e e' recebe de fora uma quantidade de energia cinética $= a$, ele sofre realmente uma mudança de sua *energia potencial* $= -a$; de tal forma que a *energia total* do sistema tem de sempre manter o mesmo valor não apenas quando as duas partículas constituem um sistema isolado, mas também quando esse não é o caso. Pois se representarmos a *energia cinética* comunicada de fora por

$$a = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} v^2 ,$$

¹⁷⁹Ver a Nota de rodapé 170 na página 87.

enquanto que a existente *energia cinética* das partículas *antes* da comunicação dessa porção era

$$= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot u_0^2 ,$$

então a *energia cinética* existente *após* a comunicação será

$$\frac{1}{2} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot u^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} (u_0^2 + v^2) .$$

Consequentemente, a *energia potencial antes da comunicação* é

$$-\frac{r}{\rho} V_0 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} (c^2 - u_0^2) ,$$

enquanto que a *energia potencial após a comunicação* é

$$-\frac{r}{\rho} V = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} (c^2 - u^2) = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} (c^2 - u_0^2) - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} v^2 ;$$

de tal forma que, em consequência da comunicação a partir de fora da *energia cinética* = +a, ocorreu uma mudança da *energia potencial* que é representada por

$$-\frac{1}{2} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} v^2 = -a .$$

9.7 Aplicação a Outros Corpos

Se distinguirmos, de acordo com a última Seção, entre o potencial e a energia potencial de duas partículas — isto é, se definirmos

o potencial como a quantidade de *trabalho* que, em consequência da ação mútua entre duas partículas, é feito durante a transferência das partículas desde uma distância infinita até a distância existente r com a velocidade relativa existente dr/dt ; e

a energia potencial como a quantidade de *trabalho*, considerada *negativamente*, que, em consequência da ação mútua entre duas partículas, é feito durante a transferência das partículas *desde a distância maior* $r = \infty$ *até a distância menor* $r = \rho$ (determinada pelas partículas e e e' , por suas massas ε e ε' , e pela constante c), com a existente velocidade relativa dr/dt ,

essa última (ou seja, a *energia potencial com o significado que foi indicado*) pode ser dividida em duas partes, uma das quais é igual e oposta ao *potencial* e, portanto, idêntica com a grandeza que *anteriormente era referida apenas como energia potencial*, e que a partir de agora é referida apenas como parte da energia potencial considerada, que pode ser chamada de *energia potencial livre*. O restante é a *segunda* parte, que pode ser chamada de *energia potencial latente*.

O princípio da conservação da energia pode então ser expresso, *em primeiro lugar*, no *sentido amplo* anterior, da seguinte forma:

Para um sistema *isolado* de duas partículas a soma da *energia cinética* e da *energia potencial livre* é sempre a mesma.

Pois desde que nenhuma energia cinética seja perdida para o exterior ou comunicada a partir de fora, toda mudança na energia potencial livre será compensada por uma mudança igual e oposta na energia cinética.

Porém, o princípio de conservação da energia também pode ser enunciado, *em segundo lugar*, no *sentido mais restrito*, como segue (sendo a energia potencial e a energia cinética entendidas no sentido que acabou de ser definido):

A energia cinética relativa de duas partículas, e a energia potencial total que elas possuem juntamente com essa energia cinética, sempre formam juntas a mesma soma, independentemente de o sistema ser isolado ou não.

Em relação a isso podem ser feitas as seguintes observações:

- (1) Uma partícula considerada por si própria pode ter apenas *energia cinética*.
- (2) Duas partículas possuem da mesma maneira em primeiro lugar energia cinética, que é a soma daquelas [energias cinéticas] que elas possuem quando consideradas separadamente.
- (3) Essa soma consiste de uma parte *A*, que pode ser atribuída parcialmente ao movimento do centro de gravidade delas, e parcialmente à rotação das duas partículas no espaço em torno uma da outra — e de uma outra parte *B*, que as partículas possuem relativamente entre si quando consideradas por si próprias. Essa última parte, *B*, é chamada de *energia cinética relativa*, ou *aquela [energia cinética] pertencente ao sistema formado pelas duas partículas*.
- (4) Porém, no *sistema de duas partículas*, há algo além de sua energia cinética, que não pertence às duas partículas consideradas separadamente, a saber, uma maior ou menor *capacidade para realizar trabalho*,¹⁸⁰ em virtude da ação mútua das duas partículas entre si. *A medida dessa capacidade para realizar trabalho* é chamada de *energia potencial do sistema*, ou a *energia potencial relativa das duas partículas*; e esta *medida da capacidade de trabalho* é baseada no trabalho que é realizado como resultado da interação entre as duas partículas durante seu deslocamento *desde a distância menor $r = \rho$ até a distância maior $r = \infty$* , onde ρ é determinado pelas próprias partículas e , e' , por suas massas ε , ε' , assim como pela constante c .
- (5) Contudo, o princípio de conservação da energia, quando definido especificamente como dado anteriormente, só é aplicável a duas partículas se o *potencial* entre as duas partículas for da mesma forma que aquele [potencial] de duas partículas elétricas, a saber,

$$V = \frac{ee'}{r} \left(\frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} - 1 \right) .$$

O potencial de duas massas ponderáveis m e m' , ao contrário, é

$$V = \frac{mm'}{r} ,$$

o qual (desprezando o sinal) só pode ser incluído na forma geral anterior se o valor da constante c para as massas ponderáveis for infinitamente grande. Contudo, é evidente que na realidade seria suficiente que a constante c tivesse apenas um valor muito grande em vez de um valor infinito, para que não houvesse qualquer coisa perceptivelmente inconsistente com os resultados da experiência. E, considerando o valor extraordinariamente alto que tem de ser atribuído à constante c no caso das partículas elétricas, não parece ser necessário, para

¹⁸⁰Em alemão: *Arbeitsfähigkeit*. Essa expressão pode ser traduzida como capacidade de trabalho ou capacidade para realizar trabalho.

evitar quaisquer contradições perceptíveis [experimentalmente], adotar qualquer outro valor para os corpos ponderáveis; consequentemente tem de ser permissível representar o *potencial* entre duas partículas ponderáveis m e m' por

$$V = \frac{mm'}{r} \left(1 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} \right) ,$$

onde a constante c mantém o mesmo valor que ela possui no potencial entre duas partículas elétricas.

Porém, mesmo que mais tarde resulte a partir de resultados experimentais mais precisos que não é permissível atribuir dessa maneira o mesmo valor à constante c no caso de partículas ponderáveis, ainda permaneceria a possibilidade de atribuir à constante c um valor ainda maior para partículas ponderáveis; e esse [valor] poderia ser facilmente considerado tão grande que desapareceriam completamente quaisquer desacordos perceptíveis experimentalmente.

III - Movimento de Duas Partículas Elétricas Devido à Interação entre Elas

9.8 Sobre a Validade das Leis para Movimentos Moleculares

A lei elétrica fundamental determina a ação exercida por qualquer partícula dada sobre uma outra partícula sob circunstâncias arbitrárias. A aplicação mais simples e mais óbvia que pode ser feita dessa lei parece ser o desenvolvimento das leis de movimento de duas partículas que atuam mutuamente entre si. Contudo, teve um interesse prático maior, em primeiro lugar, as leis de distribuição da eletricidade em repouso nos condutores, e as leis das forças exercidas por uma corrente de eletricidade em um condutor fechado atuando em um outro condutor, devidas à eletricidade que flui nesse último condutor — bem como o desenvolvimento das leis das forças (eletromotrizes) exercidas por correntes fechadas (ou por ímãs) sobre a eletricidade em condutores fechados, porque os resultados desses desenvolvimentos permitiram testes diretos e confirmações experimentais. Mesmo que falte este importante interesse prático no desenvolvimento das leis do movimento de duas partículas sob mera influência mútua, alguns dos seus resultados podem ainda merecer atenção em outros aspectos.

O interesse nesses resultados diz respeito prioritariamente aos *movimentos moleculares* de duas partículas,¹⁸¹ que estão excluídos de toda pesquisa experimental direta e para os quais, portanto, nenhuma justificativa pode ser atribuída à aplicação da lei estabelecida, na medida em que ela é considerada uma lei experimental. Consequentemente, o desenvolvimento das leis dos *movimentos moleculares* de duas partículas de acordo com a lei que foi estabelecida tem de ser considerado apenas com uma *tentativa* de fornecer uma diretriz para a teoria dos movimentos moleculares, que ainda está completamente ausente, o que obviamente não é suficiente por si só, mas é um requisito adicional essencial. Pois desde que não são conhecidas e levadas em consideração as *forças moleculares que atuam apenas em distâncias moleculares*, os resultados que podem ser adquiridos não podem ter qualquer aplicação *quantitativa* exata, mas apenas um valor *qualitativo* dentro de certos limites, e podem ser relevantes apenas como um primeiro *reconhecimento* do território.

¹⁸¹Quando Gauss e Weber utilizam as palavras “molécula” ou “molecular”, eles em geral não estão utilizando o conceito moderno usado para distinguir, por exemplo, os termos “núcleo”, “átomo”, “molécula” ou “íon”. Naquela época até mesmo a existência dos átomos ainda não era totalmente aceita. A palavra “molécula” era um diminutivo derivado da palavra em latim “moles”, que significa massa ou grande massa. A palavra “molécula” foi aparentemente utilizada pela primeira vez em francês no século XVII, significando uma pequena massa ou partícula. Logo, usualmente Gauss e Weber utilizavam a palavra “molécula” significando uma partícula, massa microscópica ou corpúsculo. O adjetivo “molecular” se referia ao mundo microscópico ou à constituição corpuscular da matéria.

9.9 Movimento de Duas Partículas Elétricas na Direção da Linha Reta que As Conecta

Para¹⁸² duas partículas e e e' deslocando-se apenas em consequência da ação mútua entre elas, de acordo com as leis fundamentais da Seção 9.4, ao colocar

$$\rho = 2 \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'} \right) \frac{ee'}{c^2} ,$$

$$x = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} ,$$

$$a = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot c^2 ,$$

e fornecendo também um sinal negativo a U e a V , para com isso designar os *potenciais*, teremos

$$V : U = 2 \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'} \right) \frac{ee'}{c^2} : r ,$$

$$-U + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot c^2 ;$$

e, portanto,

$$V = \frac{2}{r} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'} \right) \frac{ee'}{c^2} \cdot U = \frac{ee'}{r} \left(\frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} - 1 \right) .$$

Se não há no espaço qualquer *movimento de rotação das partículas uma ao redor da outra*, então $[1/\varepsilon][dV/dr]$ é a aceleração da partícula e na direção de r , enquanto que $[1/\varepsilon'][dV/dr]$ é a aceleração da partícula e' na direção oposta. Portanto, a *aceleração relativa* das duas partículas torna-se

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'} \right) \frac{dV}{dr} ,$$

e a partir disso, ao integrar entre os limites $r = r_0$ e $r = r$ (com r_0 denotando o valor de r para o instante em que $dr/dt = u = 0$), como $\rho = 2(1/\varepsilon + 1/\varepsilon')[ee'/c^2]$, obtemos

$$\frac{dr^2}{dt^2} = u^2 = \frac{r - r_0}{r - \rho} \cdot \frac{\rho}{r_0} \cdot c^2 .$$

[A grandeza] ρ/r_0 tem sempre um valor positivo ou negativo diferente de zero. Pois

$$\rho = 2 \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'} \right) \cdot \frac{ee'}{c^2}$$

tem um valor finito dado, embora muito pequeno, que é positivo ou negativo dependendo se ee' é positivo ou negativo; enquanto que

¹⁸²Uma discussão detalhada do movimento de duas partículas ao longo da reta que as une utilizando a eletrodinâmica de Weber, incluindo gráficos e figuras, encontra-se em [AC92], [Ass94, Seção 7.1] e [Ass15a, Seção 5.3].

$$r_0 = \frac{r}{1 + \frac{u^2}{c^2} \cdot \frac{r-\rho}{\rho}}$$

também tem um valor positivo ou negativo diferente de zero, pois os valores iniciais de r e u^2 , pelos quais r_0 é determinado, têm de ser considerados como quantidades mensuráveis positivas a serem determinadas pela experiência.

Se ρ/r_0 for positivo, na medida em que o numerador e o denominador são positivos, todos os movimentos estarão confinados a distâncias fora do intervalo ρr_0 , e serão divididos em *movimentos à distância* e *movimentos moleculares*, que estão separados entre si pelo intervalo ρr_0 .

Contudo, se ρ/r_0 for positivo na medida em que o numerador e o denominador são negativos, os movimentos se estenderão a todas as distâncias possíveis, já que então o intervalo ρr_0 ficará fora das distâncias possíveis.

Se ρ/r_0 for negativo, sendo que nesse caso o intervalo ρr_0 fica parcialmente fora e parcialmente dentro das distâncias possíveis, todos os movimentos estarão confinados à parte do intervalo ρr_0 que está dentro das distâncias possíveis; e se ρ for positivo e r_0 negativo, eles serão *movimentos moleculares*.

Disso segue que quando ρ e r_0 são negativos, então, *em primeiro lugar*, não ocorrem transições de *movimentos à distância* para *movimentos moleculares*; *em segundo lugar*, u^2 sempre permanece menor do que c^2 , caso inicialmente fosse menor;¹⁸³ e *em terceiro lugar*, quando u^2 é menor do que c^2 , [então] r e r_0 (ambos ao mesmo tempo) são maiores ou menores do que ρ .

Se nos ativermos apenas à experiência, alguns desses movimentos relativos das duas partículas podem ser completamente excluídos da observação; pois é evidente que infinitamente grandes velocidades relativas nunca ocorrem na realidade; ao contrário, $[1/c^2][dr^2/dt^2]$ quase sempre deve ser considerada como uma fração muito pequena.¹⁸⁴

Essa limitação, retirada da natureza, também é assumida tacitamente quando

$$V = \frac{ee'}{r} \left(\frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} - 1 \right)$$

é considerado como o *potencial*, que é suposto ser = 0 para um valor infinitamente grande de r . Pois se dr^2/dt^2 fosse infinitamente grande, a expressão $[ee'/r]([1/c^2][dr^2/dt^2] - 1)$ poderia ter um valor diferente de zero mesmo para valores infinitamente grandes de r .

Contudo, se o valor de dr^2/dt^2 nunca for infinitamente grande, tem de haver um valor finito o qual dr^2/dt^2 nunca excede. Podemos assumir c^2 como sendo um tal valor.

Dada essa limitação das velocidades relativas, [então] r_0 é sempre positivo; e para cada valor de r_0 existe apenas uma única série continuamente conectada de valores relacionados de r e dr^2/dt^2 , a saber:

Se ρ for positiva e $r_0 > \rho$,

os valores correspondentes de r e dr^2/dt^2 se estenderão de $r = r_0$ até $r = \infty$, e de $dr^2/dt^2 = 0$ até $dr^2/dt^2 = (\rho/r_0)c^2$.¹⁸⁵ Os movimentos serão nesse caso *movimentos à distância*.

¹⁸³Isto é, se inicialmente u^2 for menor do que c^2 , então u^2 sempre permanecerá menor do que c^2 .

¹⁸⁴Isto é, quase sempre ocorre que $(\frac{dr/dt}{c})^2 \ll 1$.

¹⁸⁵Devido a um erro de impressão, no texto original apareceu aqui $dr^2/dt^2 = \rho/r_0$ no lugar de $dr^2/dt^2 = (\rho/r_0)c^2$.

Se ρ for positiva e $r_0 < \rho$, ou se ρ é negativa,

os valores correspondentes se estenderão de $r = r_0$ até $r = 0$, e de $dr^2/dt^2 = 0$ até $dr^2/dt^2 = c^2$. No primeiro caso, quando ρ for positiva e $r_0 < \rho$, e da mesma forma no segundo caso, quando ρ for negativa e $r_0 < \rho$, os movimentos serão *movimentos moleculares*; mas se, no segundo caso, $r_0 > \rho$, os movimentos serão parcialmente *movimentos à distância* e parcialmente *movimentos moleculares*.

Portanto, com essa limitação dos movimentos, obtemos para duas partículas e e e' deslocando-se apenas em consequência da ação mútua entre elas, se *não há movimento de rotação das partículas uma ao redor da outra* no espaço, a seguinte equação de movimento, a saber,

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{r - r_0}{r - \rho} \cdot \frac{\rho}{r_0},$$

na qual foi colocado $u = dr/dt$, e onde ρ tem um valor que é dado pelas partículas e e e' , por suas massas ε e ε' , assim como pela constante c , e onde r_0 denota uma constante a ser determinada de acordo com essa mesma equação pelo valor inicial de r (que tem de ser positivo e diferente de ρ , mas caso contrário pode ter qualquer valor) e pelo valor inicial de u^2 (que tem de ser positivo e menor do que c^2 , mas caso contrário pode ter qualquer valor).

9.10 Dois Estados de Agregação de um Sistema de Duas Partículas do Mesmo Tipo

Para duas partículas do mesmo tipo o valor de ρ é positivo.¹⁸⁶ Além disso, como para cada valor de r a velocidade relativa u pode ter dois valores iguais e opostos, de acordo com a equação anterior,

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{r - r_0}{r - \rho} \cdot \frac{\rho}{r_0},$$

ou o valor de r *primeiro* diminui de $r = \infty$ até $r = u_0$, e assim u simultaneamente aumenta de $u = -c\sqrt{\rho/r_0}$ até $u = 0$, e então r aumentará *em seguida* de $r = r_0$ até $r = \infty$, e assim u aumentará simultaneamente de $u = 0$ para $u = +c\sqrt{\rho/r_0}$;

ou então o valor de r pode *primeiro* diminuir de $r = r_0$ até $r = 0$, e assim u diminui simultaneamente de $u = 0$ até $u = -c$, e então r aumentará *em seguida* de $r = 0$ até $r = r_0$, enquanto u diminuirá simultaneamente de $u = +c$ até $u = 0$.

É fácil perceber que o *primeiro* movimento *não é recorrente*; porque após a distância r ter diminuído de qualquer tamanho até r_0 , ela aumenta novamente até o infinito, ou seja, nunca mais diminui. No *último* caso, ao contrário, o movimento é *recorrente*, pois a distância r diminui alternadamente de r_0 para 0, e aumenta novamente de 0 para r_0 .

No instante em que $r = 0$, parece haver uma mudança repentina no valor da velocidade u de $-c$ para $+c$. Na verdade, porém, não há salto; pois $-c$ quando r está desaparecendo denota a mesma velocidade que $+c$ quando r está aumentando novamente a partir de zero.

¹⁸⁶Isto é, ρ é positivo tanto para duas partículas com cargas positivas, quanto para duas partículas com cargas negativas.

Além disso, esses dois casos de movimento se distinguem ainda mais pelo fato de que *não ocorre transição* de um movimento para outro; pois, de acordo com a equação anterior, uma tal transição, no caso do intervalo ρr_0 ou $r_0 \rho$, só poderia ocorrer se u tivesse valores imaginários.

A distinção entre *dois estados de agregação de um sistema de duas partículas de mesmo tipo* pode agora ser baseada nessa separação dos dois estados de movimento, ou seja, um estado de agregação no qual as duas partículas só podem estar em *movimento à distância*, e um estado de agregação no qual as duas partículas só podem estar em *movimento molecular*. Não pode ocorrer uma transição de um estado de agregação para o outro enquanto as duas partículas estiverem se movendo apenas em consequência da ação recíproca entre elas.

Além disso, só falta observar que foi pressuposto aqui que as duas partículas, consideradas no espaço, só tinham movimento na direção de r ; mas na próxima Seção será considerado o caso oposto.

9.11 Movimentos de Duas Partículas Elétricas que Possuem Velocidades Desiguais no Espaço em uma Direção Perpendicular à Linha Reta que As Conecta

Seja¹⁸⁷ α a diferença das duas velocidades que duas partículas elétricas e e e' , à distância r entre si, possuem no espaço em uma direção perpendicular à linha reta r que as une; nesse caso α^2/r denota a parte da aceleração relativa du/dt que depende de α .¹⁸⁸

Se deduzirmos essa parte α^2/r da aceleração total du/dt , a diferença $(du/dt - \alpha^2/r)$ expressa aquela parte da aceleração relativa das duas partículas que resulta das forças exercidas por elas entre si. De acordo com a Seção 9.9 essa última parte era

$$= \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'} \right) \frac{dV}{dr} ,$$

e, portanto, obtemos a seguinte equação:

$$\frac{du}{dt} - \frac{\alpha^2}{r} = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'} \right) \frac{dV}{dr} .$$

Multiplicando essa equação por $u dt = dr$, obtemos

$$u du - \alpha^2 \frac{dr}{r} = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'} \right) \cdot \frac{dV}{dr} dr ,$$

portanto, ao integrar a partir do instante em que $u = 0$, sendo r_0 o valor correspondente de r nesse instante,

$$\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'} \right) (V - V_0) = \frac{1}{2} u^2 - \int_{r_0}^r \frac{\alpha^2}{r} dr ,$$

¹⁸⁷Uma discussão detalhada do movimento de duas partículas no espaço utilizando a eletrodinâmica de Weber, incluindo gráficos e figuras, encontra-se em [CA91], [Ass94, Seção 7.1] e [Ass15a, Seção 5.3].

¹⁸⁸Deve ser lembrado que Weber definiu anteriormente $u = dr/dt$. A grandeza α^2/r é a aceleração centrípeta.

onde $V = (ee'/r)([u^2/c^2] - 1)$ e $V_0 = -ee'/r_0$, mas onde, para realizar a última integração, α^2 precisa ser representado como uma função de r .

Agora $r \cdot \alpha dt$ é o elemento de superfície descrito pela linha conectando as duas partículas que estão se repelindo ou se atraindo enquanto elas se deslocam uma ao redor da outra durante o intervalo de tempo dt ; e para elementos iguais de tempo dt esse elemento superficial mantém sempre o mesmo valor, portanto, $r\alpha dt = r_0\alpha_0 dt$. Introduzindo o valor resultante

$$\alpha^2 = r_0^2 \alpha_0^2 \cdot \frac{1}{r^2}$$

no último membro da equação anterior, e realizando a integração, obtemos a seguinte equação,

$$2 \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'} \right) \frac{ee'}{c^2} \left(\frac{r - r_0}{rr_0} + \frac{1}{r} \cdot \frac{u^2}{c^2} \right) = \frac{u^2}{c^2} + \frac{\alpha_0^2}{c^2} \cdot \frac{r_0^2 - r^2}{r^2} ,$$

para a qual, ao colocar

$$2 \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'} \right) \frac{ee'}{c^2} = \rho ,$$

é obtida a seguinte equação de movimento:

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{r - r_0}{r - \rho} \left(\frac{\rho}{r_0} + \frac{r + r_0}{r} \cdot \frac{\alpha_0^2}{c^2} \right) .$$

Colocando esse valor de u^2/c^2 na equação

$$V = \frac{ee'}{r} \left(\frac{u^2}{c^2} - 1 \right) ,$$

obtemos

$$V = \frac{ee'}{r} \left(\frac{r - r_0}{r - \rho} \left(\frac{\rho}{r_0} + \frac{r + r_0}{r} \cdot \frac{\alpha_0^2}{c^2} \right) - 1 \right) ,$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{r_0} \cdot \frac{r_0 - \rho}{(r - \rho)^2} - \frac{ee'}{(r - \rho)^2} \left(1 - \left(3 - 2\frac{\rho}{r} \right) \frac{r_0^2}{r^2} \right) \frac{\alpha_0^2}{c^2} .$$

9.12 Estados de Agregação Dessas Duas Partículas

De acordo com a última Seção, existe uma equação entre a velocidade relativa u e a distância relativa r das duas partículas deslocando-se *no espaço* sob a ação de suas forças recíprocas, a saber, a equação

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{r - r_0}{r - \rho} \left(\frac{\rho}{r_0} + \frac{r + r_0}{r} \frac{\alpha_0^2}{c^2} \right) ,$$

na qual ρ denota uma constante que é *positiva* para duas partículas *do mesmo tipo*, e *negativa* para duas partículas *de tipos diferentes*.¹⁸⁹

¹⁸⁹Duas partículas de mesmo tipo podem ser duas partículas com cargas positivas, ou então duas partículas com cargas negativas. Nesses casos temos $ee' > 0$. Já duas partículas de tipos diferentes significa uma partícula com carga positiva e uma partícula com carga negativa. Nesses casos temos $ee' < 0$. Ver a Nota de rodapé 163 na página 83.

Agora, a partir disso seguem resultados relativos aos movimentos livres das duas partículas *no espaço* que se deslocam sob a influência da própria ação recíproca entre elas com velocidades desiguais em uma direção perpendicular à linha reta que as une, [resultados esses] bem similares àqueles obtidos com relação aos movimentos considerados na Seção 9.10 *ao longo da direção da linha reta r*. De fato, também resulta nesse caso uma distinção entre dois estados de agregação para duas partículas de *tipos diferentes* — a saber, um estado de agregação no qual as duas partículas se deslocam de tal maneira a retornar periodicamente na mesma posição relativa entre si, e um estado de agregação no qual as duas partículas se deslocam de tal forma a ficar cada vez mais distantes entre si e nunca retornam à mesma posição. Não ocorre transição de um estado de agregação para o outro desde que as duas partículas se desloquem apenas sob a influência de suas forças recíprocas.

9.13 Não Há Movimento Circular Dessas Duas Partículas Uma em Torno da Outra

Uma rotação de duas partículas uma em torno da outra implica a existência de uma certa *força de atração* caso as duas partículas devam permanecer a uma distância constante entre si durante essa rotação; e essa força atrativa necessária para a rotação, com uma mesma distância, aumenta com o quadrado da velocidade angular.¹⁹⁰ De acordo com isso, esperaríamos que, para duas partículas elétricas *do mesmo tipo* a uma distância $r_0 < \rho$ (na qual elas se atraem), sempre haveria uma *certa velocidade angular* α_0 para a qual a força atrativa necessária para a rotação deva ser igual à força que resulta da ação recíproca entre as duas partículas, de tal forma que as duas partículas girando uma em torno da outra permaneceriam, para essa velocidade angular, na mesma distância r_0 . Contudo, esse não é o caso, pois a força atrativa que resulta da ação recíproca entre as duas partículas depende não apenas da distância r_0 , mas também da velocidade angular α_0 , e aumenta com essa última [velocidade angular] de uma tal maneira que ela sempre permanece maior do que a força atrativa exigida pela velocidade angular, de tal forma que com qualquer rotação desse tipo está sempre envolvida uma aproximação mútua das duas partículas.

De fato, segue facilmente que, no caso de duas partículas *do mesmo tipo* e e e' , quando ρ tem um valor *positivo* e $r = r_0$, de tal forma que $u = 0$, não existe um valor de α_0 para o qual $du/dt = 0$, como deveria ser o caso se as duas partículas devessem permanecer a uma distância constante r_0 . Pois quando $r = r_0$, resulta da equação ao final da Seção 9.11 que

$$\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{r_0(r_0 - \rho)} \left(1 + 2\frac{\alpha_0^2}{c^2} \right) ,$$

e como

$$\frac{du}{dt} - \frac{\alpha^2}{r} = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'} \right) \frac{dV}{dr} = \frac{\rho}{2ee'} \cdot \frac{dV}{dr} ,$$

segue adicionalmente disso que

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2} \frac{c^2}{r_0 - \rho} \left(\frac{\rho}{r_0} + 2\frac{\alpha_0^2}{c^2} \right) ,$$

¹⁹⁰Em alemão: *Drehungsgeschwindigkeit*.

onde du/dt só pode ser igual a zero quando

$$\alpha_0^2 = -\frac{1}{2} \frac{\rho}{r_0} c^2 ,$$

o que é impossível para um valor *positivo* de ρ (isto é, quando e e e' são *do mesmo tipo*).

Além disso, segue que no caso de duas partículas *do mesmo tipo*, se $r = r_0$, [então] du/dt ou é *positivo* ou *negativo*, caso $r_0 > \rho$ ou $r_0 < \rho$. Consequentemente, as duas partículas se separam a distâncias cada vez maiores quando $r = r_0 > \rho$, e se aproximam cada vez mais quando $r = r_0 < \rho$, qualquer que seja o valor que α_0 possa ter.

9.14 Período de Oscilação de um Par Atômico Elétrico

Duas partículas elétricas *do mesmo tipo* a uma distância mútua $r_0 < \rho$ (na qual a velocidade relativa entre elas é $= 0$) não permanecem nessa distância, mas se aproximam desde $r = r_0$ até $r = 0$ com uma velocidade que aumenta de $u = 0$ até

$$u = \sqrt{c^2 + \frac{r_0^2 \alpha_0^2}{\rho} \cdot \frac{1}{r}} ,$$

isto é, que torna-se infinita, caso a velocidade angular α_0 seja diferente de zero para o instante no qual $r = r_0$. Disso segue que o intervalo de tempo ϑ no qual as duas partículas se aproximam desde a distância $r = r_0$ até $r = 0$ tem um valor finito. O fato de que para o instante no qual $r = 0$ o valor da velocidade relativa das duas partículas torna-se

$$\sqrt{c^2 + \frac{r_0^2 \alpha_0^2}{\rho} \cdot \frac{1}{r}} = \pm \infty ,$$

significa aqui apenas que essa velocidade relativa deve ser considerada daqui por diante como uma velocidade de separação $= +\infty$, enquanto que, até esse ponto, ela era uma velocidade de aproximação $= -\infty$. Assumindo isso, segue facilmente que, em um segundo intervalo de tempo ϑ igual, as duas partículas vão se separar novamente desde a distância $r = 0$ até a distância $r = r_0$. O intervalo de tempo 2ϑ , no qual as duas partículas se aproximam com velocidade crescente desde a distância $r = r_0$ até $r = 0$, e então se separam novamente desde a distância $r = 0$ até $r = r_0$, pode ser chamado de *período de oscilação*¹⁹¹ do *par atômico* formado pelas duas partículas elétricas.¹⁹²

Ainda falta *determinar o período de oscilação 2ϑ de um tal par atômico*.

Esse período de oscilação pode ser prontamente deduzido da equação

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{r - r_0}{r - \rho} \left(\frac{\rho}{r_0} + \frac{r_0 + r}{r} \cdot \frac{\alpha_0^2}{c^2} \right) ,$$

¹⁹¹Em alemão: *Schwingungsdauer*. Deve ser observado que normalmente Gauss e Weber utilizavam a antiga definição francesa do período de oscilação t , que tem o valor de metade da definição inglesa do período de oscilação T , isto é, $t = T/2$, [Gil71a, págs. 154 e 180]. Por exemplo, o período de oscilação T para pequenas oscilações de um pêndulo simples de comprimento ℓ é dado por $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$, onde g é a aceleração de queda livre nesse local devido à gravidade terrestre, enquanto que $t = T/2 = \pi\sqrt{\ell/g}$.

¹⁹²Em alemão: *die Schwingungsdauer des von den beiden elektrischen Theilchen gebildeten Atomen-Paares gennat werden*. A expressão *elektrischen Atomen-Paares* no título dessa Seção pode ser traduzida como par atômico elétrico ou par de átomos elétricos.

se for assumido aqui que r_0 não é maior do que ρ .

Pois se considerarmos, *em primeiro lugar*, o caso limite no qual $r_0 = \rho$, segue da equação anterior que

$$u^2 = c^2 + \alpha_0^2 + \rho\alpha_0^2 \cdot \frac{1}{r} ,$$

portanto, colocando $u = dr/dt$,

$$dt = -dr \sqrt{\frac{r}{\rho\alpha_0^2 + (c^2 + \alpha_0^2)r}} .$$

Obtemos disso, por integração,

$$\vartheta = - \int_{\rho}^0 dr \sqrt{\frac{r}{\rho\alpha_0^2 + (c^2 + \alpha_0^2)r}} .$$

De acordo com isso obtemos:

$$\vartheta = \frac{\rho}{c^2 + \alpha_0^2} \sqrt{c^2 + 2\alpha_0^2} - \frac{\rho\alpha_0^2}{(c^2 + \alpha_0^2)^{3/2}} \log \left(\sqrt{1 + \frac{c^2}{\alpha_0^2}} + \sqrt{2 + \frac{c^2}{\alpha_0^2}} \right) ,$$

ou, para pequenos valores de α_0/c ,

$$\vartheta = \frac{\rho}{c} \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{c^2} \log \frac{2c}{\alpha_0} \right) .$$

Se, *em seguida*, nos limitarmos à consideração de *pequenas oscilações* (isto é, aquelas para as quais r_0/ρ é muito pequeno), resultará da equação anterior, quando r_0 e r são considerados como desprezivelmente pequenas quando comparadas com ρ , que

$$u^2 = \frac{r_0^2\alpha_0^2}{\rho} \cdot \frac{1}{r} + c^2 - \left(\frac{c^2}{r_0} + \frac{\alpha_0^2}{\rho} \right) r ,$$

portanto, colocando $u = dr/dt$,

$$cdt = -dr \sqrt{\frac{r}{\frac{r_0^2\alpha_0^2}{\rho c^2} + r - \left(\frac{1}{r_0} + \frac{\alpha_0^2}{\rho c^2} \right) r^2}} ,$$

o que leva a uma integral elíptica.¹⁹³ Para valores de α_0/c que desaparecem,¹⁹⁴ obtemos

$$cdt = -dr \sqrt{\frac{1}{1 - r/r_0}} ,$$

logo, por integração,

$$\vartheta = -\frac{1}{c} \int_{r_0}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - r/r_0}} = \frac{2r_0}{c} .$$

Se, como assumido, $r < \rho$, [então] r_0 pode ser chamado de amplitude de oscilação; e segue que, para pequenos valores de α_0/c e para pequenas amplitudes de oscilação, o período de

¹⁹³Ver a Nota de rodapé 187.

¹⁹⁴Isto é, quando $c \gg \alpha_0$.

oscilação 2ϑ de um par atômico elétrico é proporcional à amplitude de oscilação r_0 . Contudo, o valor com o qual r_0 tem de ser multiplicado para fornecer 2ϑ , embora seja uma constante $= 4/c$ para pequenas amplitudes, diminui para amplitudes maiores, tornando-se $= 2/c$ para a amplitude $r = \rho$.

Se colocarmos $c = 439\,450 \cdot 10^6$ milímetros/segundo, seguirá dessa última determinação que o valor de ρ tem de estar aproximadamente entre $1/4000$ e $1/8000$ de um milímetro para que essas oscilações possam ter a mesma rapidez que as oscilações da luz.¹⁹⁵

A diferença entre as partículas elétricas e e e' e suas massas ε e ε' não tem qualquer influência nas oscilações para pequenos valores de α_0/c e pequenas amplitudes; mas em amplitudes maiores somente na medida em que o valor de ρ depende disso.

9.15 Aplicabilidade a Grupos Atômicos Químicos

A distinção entre dois ou mais estados de agregação dos corpos, dependendo se consistem em átomos simples, ou pares de átomos, ou grupos de ainda mais de dois átomos, adquiriu grande importância na *química*.¹⁹⁶ Às vezes ocorre um estado de agregação, às vezes o outro, e em muitos processos químicos ocorre uma transição de um para o outro, mas os estados intermediários que ocorrem em tais transições não podem persistir, e esses estados de agregação, portanto, ficam completamente isolados uns dos outros como *estados permanentes*.

Agora é óbvio que a *permanência* de algumas condições atômicas, que são distinguidas como estados especiais de agregação, e a *falta de permanência* em todas as outras condições atômicas, pode ter sua causa nas leis da ação recíproca entre os átomos — isto é, na diferença nas forças que os átomos exercem uns sobre os outros de acordo com a diferença nas condições em que se encontram em relação uns aos outros. O motivo da permanência de alguns estados atômicos e da falta de permanência de outros [estados atômicos] ainda não foi demonstrada em tais leis de interação dos átomos, e também seria difícil encontrar essa razão em tais leis de interação, como se tentou até o momento estabelecer e assumir para os átomos ponderáveis.

Surge, portanto, a questão de saber se a razão para a persistência de certos estados atômicos não poderia talvez ser encontrada nas leis de interação como foram estabelecidas e assumidas aqui para partículas elétricas. Portanto também são de interesse em conexão com esse aspecto os movimentos de duas partículas elétricas sob a influência da ação recíproca atribuída a elas que foram desenvolvidas nas Seções anteriores, porque isso realmente demonstrou uma razão na qual a existência de tais estados persistentes de agregação poderia se basear. Em relação a isso deve ser observado especialmente que as mesmas forças que determinam os *estados de agregação da eletricidade* formada por átomos simples ou por pares atômicos, também podem talvez determinar estados similares de *agregação de corpos ponderáveis*. Pois dada a distribuição geral da eletricidade, pode-se supor que existe um átomo elétrico ligado a cada átomo ponderável. Contudo, caso átomos de eletricidade se liguem firmemente a átomos ponderáveis, nada será alterado nas relações dos átomos elétricos com exceção das *massas* que têm de ser movidas pelas forças atuando nos átomos elétricos. Contudo, nos desenvolvimentos precedentes as *massas* foram deixadas indeterminadas, sendo denominadas simplesmente por ε e ε' ; enquanto que as próprias partículas elétricas, às quais

¹⁹⁵Ver [Ass21e] para uma discussão da constante c de Weber e sua relação com a velocidade da luz no vácuo.

¹⁹⁶A expressão em alemão *chemische Atomengruppen* que aparece no título dessa Seção pode ser traduzida como grupos atômicos químicos, grupos químicos de átomos ou grupos de átomos químicos.

pertencem as massas ε e ε' , são determinadas pelas grandezas mensuráveis e e e' , independentemente do conhecimento dos valores ε e ε' . Se agora considerarmos os valores de ε e ε' tão grandes de forma a incluir as massas dos átomos ponderáveis ligados aos átomos elétricos, então todas as determinações inicialmente encontradas apenas para *átomos elétricos* também se aplicam aos *átomos ponderáveis* conectados aos átomos elétricos.¹⁹⁷

9.16 Estado de Agregação e Oscilação de Duas Partículas Elétricas de Tipos Diferentes

No caso de duas partículas elétricas *de tipos diferentes* valem as mesmas equações que no caso de duas partículas de mesmo tipo, a saber, aquelas da Seção 9.11; isto é,

$$\begin{aligned}\frac{u^2}{c^2} &= \frac{r - r_0}{r - \rho} \left(\frac{\rho}{r_0} + \frac{r + r_0}{r} \cdot \frac{\alpha_0^2}{c^2} \right), \\ V &= \frac{ee'}{r} \left[\frac{r - r_0}{r - \rho} \left(\frac{\rho}{r_0} + \frac{r + r_0}{r} \cdot \frac{\alpha_0^2}{c^2} \right) - 1 \right], \\ \frac{dV}{dr} &= \frac{ee'}{(r - \rho)^2} \left[\frac{r_0 - \rho}{r_0} - \left(1 - \frac{3r - 2\rho}{r^3} \cdot r_0^2 \right) \frac{\alpha_0^2}{c^2} \right],\end{aligned}$$

onde

$$\rho = 2 \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'} \right) \frac{ee'}{c^2};$$

a única diferença é que, quando as partículas são *de tipos diferentes*, então ρ tem um valor *negativo*, já que o produto ee' é *negativo*. Além dessas equações temos também $\alpha r = \alpha_0 r_0$ (pois apenas estão sendo considerados os movimentos que são realizados pelas duas partículas elétricas sob a influência da ação recíproca entre elas), logo segue finalmente a equação

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\rho c^2}{ee'} \cdot \frac{dV}{dr} + \frac{r_0^2 \alpha_0^2}{r^3}.$$

Portanto resulta que, assim como no caso de duas partículas elétricas de mesmo tipo, quando $r = r_0$,

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dr} &= \frac{ee'}{r_0(r_0 - \rho)} \left(1 + 2 \frac{\alpha_0^2}{c^2} \right), \\ \frac{du}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{c^2}{r_0 - \rho} \left(\frac{\rho}{r_0} + 2 \frac{\alpha_0^2}{c^2} \right),\end{aligned}$$

e que, quando também vale $\alpha_0 = \sqrt{-\rho c^2 / 2r_0}$ (que agora possui um valor real, já que

$$-\rho = -2 \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'} \right) \frac{ee'}{c^2}$$

¹⁹⁷Um átomo elétrico de massa desprezível ligado a um átomo ponderável (em outras palavras, uma partícula eletrizada de massa desprezível ligada a uma partícula neutra com massa mensurável) é o equivalente daquilo que é denominado de íon nos dias atuais. Um íon pode ser, por exemplo, um átomo ou molécula que ganhou ou perdeu elétrons.

é positivo para partículas de tipos diferentes), então $du/dt = 0$; de acordo com isso, quando $r = r_0$ e $\alpha_0 = \sqrt{-\rho c^2/2r_0}$, as duas partículas *permanecem sempre à mesma distância* r_0 enquanto giram uma em torno da outra, caso que não poderia ocorrer com duas partículas *do mesmo tipo*.

Contudo, segue além disso a partir da equação

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{r - r_0}{r - \rho} \left(\frac{\rho}{r_0} + \frac{r + r_0}{r} \frac{\alpha_0^2}{c^2} \right),$$

ou, quando colocamos n no lugar do valor constante $-r_0^2 \alpha_0^2 / \rho c^2$, a partir da seguinte equação:

$$-\frac{r - \rho}{\rho} \cdot \frac{u^2}{c^2} = \left(\frac{r}{r_0} - 1 \right) \cdot \left[n \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r} \right) - 1 \right],$$

que além do valor $r = r_0$, para o qual é dado $u = 0$, existe também em geral um outro valor de r , a saber, $nr_0/(r_0 - n)$, para o qual da mesma forma vale $u = 0$.

Contudo, esses dois valores de r para os quais $u = 0$ são, no entanto, dependendo do valor de n , ora mais, ora menos diferentes entre si; e quando $n = r_0/2$ (isto é, quando $\alpha_0 = \sqrt{-\rho c^2/2r_0}$), eles coincidem completamente; e é apenas quando coincidem os dois valores de r para os quais $u = 0$ que ocorre o caso mencionado anteriormente para o qual temos ao mesmo tempo $u = 0$ e $du/dt = 0$; conseqüentemente, as duas partículas, enquanto giram uma ao redor da outra, permanecem à mesma distância.

Em todos os outros casos nos quais a velocidade $u = 0$ (como, por exemplo, quando $r = 2n - x$, onde $x < n$) há sempre um segundo valor de r — nesse caso $r = 2n + nx/(n - x)$, — para o qual a velocidade $u = 0$. Então du/dt tem um valor positivo para $r = 2n - x$, mas diminui e torna-se igual a zero entre $r = 2n - x$ e $r = 2n + nx/(n - x)$; de tal forma que, para $r = 2n + nx/(n - x)$, [a grandeza] du/dt tem um valor negativo. Disso é evidente que ocorre repulsão entre as duas partículas desde $r = 2n - x$ até o valor de r para o qual $du/dt = 0$, ocorrendo atração desde esse ponto até $r = 2n + nx/(n - x)$ e, conseqüentemente, segue que as duas partículas vão sempre permanecer em *movimento oscilatório entre si dentro dos limites indicados*.

9.17 Sobre as Correntes Moleculares de Ampère

O estado de agregação molecular de duas partículas elétricas de tipos diferentes que acabou de ser descrito, a saber, aquele no qual a distância entre as duas partículas aumenta e diminui alternadamente entre limites definidos exatamente, sendo que a trajetória na qual uma partícula se desloca ao redor da outra torna-se uma órbita circular nos dois limites, merece uma melhor consideração, especialmente naqueles casos nos quais é possível considerar uma das partículas como estando em repouso e a outra partícula como movendo-se em um círculo ao redor da primeira. A relação entre as partículas no que diz respeito às suas participações no movimento depende da razão entre suas massas ε e ε' ; e, de acordo com a Seção 9.15, os valores de ε e ε' precisam incluir as massas dos átomos ponderáveis ligados aos átomos elétricos. Seja e a partícula elétrica positiva, e seja a partícula negativa igual e oposta a ela, sendo portanto denominada por $-e$ (em vez de e'). Considere agora que um átomo ponderável está ligado apenas à última partícula, de tal forma que sua massa seja tão aumentada que a massa da partícula positiva possa ser desprezada em comparação com

ela. Nesse caso a partícula $-e$ pode ser considerada como estando em repouso e apenas a partícula $+e$ como estando em movimento ao redor da partícula $-e$.

As duas partículas de tipos diferentes, quando estão no estado de agregação molecular que foi descrito, representam conseqüentemente uma *corrente molecular de Ampère*; pois pode ser mostrado que elas correspondem completamente às suposições feitas por Ampère em relação às *correntes moleculares*.¹⁹⁸

Para mostrar isso vamos desenvolver a expressão da força exercida pela *partícula móvel* e sobre qualquer dado elemento de corrente. Seja ds' o comprimento do dado elemento de corrente, $+e'ds'$ a eletricidade positiva e $-e'ds'$ a eletricidade negativa que ele contém; e , finalmente, seja u' a velocidade da partícula positiva $+e'ds'$, e $-u'$ a velocidade da partícula negativa $-e'ds'$. Seja também r a distância entre o elemento de corrente e a partícula e ; u a velocidade da partícula e ; x, y, z as coordenadas da partícula e ; x', y', z' as coordenadas do elemento de corrente; ϑ e ϑ' os ângulos que as direções de u e u' fazem com r ; e ε o ângulo entre as direções de u e u' .

Em seguida, seja a expressão geral para a força repulsiva entre as partículas elétricas e e e' na distância r , a saber,

$$\frac{ee'}{r^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{c^2} \frac{d^2r}{dt^2} \right) ,$$

transformada como segue (ver Beer, *Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Electrodynamik*, pág. 251).¹⁹⁹ Em primeiro lugar, a equação

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

é diferenciada com relação ao tempo t ; obtemos então

$$r \frac{dr}{dt} = (x - x') \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt} \right) + (y - y') \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy'}{dt} \right) + (z - z') \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz'}{dt} \right) ,$$

ou também

$$r \frac{dr}{dt} = r(u \cos \vartheta - u' \cos \vartheta') .$$

Por uma segunda diferenciação obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dr^2}{dt^2} + r \frac{d^2r}{dt^2} &= \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz'}{dt} \right)^2 \\ &+ (x - x') \left(\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2x'}{dt^2} \right) + (y - y') \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2y'}{dt^2} \right) + (z - z') \left(\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{d^2z'}{dt^2} \right) , \end{aligned}$$

onde

¹⁹⁸Ver a Nota de rodapé 7 na página 16 para referências sobre os principais trabalhos de Ampère em francês, português e inglês. As correntes moleculares de Ampère foram discutidas no Capítulo 5 (A Concepção Magnética de Ampère) de [AC11] e [AC15].

¹⁹⁹[Bee65, pág. 251].

$$\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz'}{dt}\right)^2 = u^2 + u'^2 - 2uu' \cos \varepsilon .$$

Se agora denotarmos por N à aceleração de uma partícula cujas componentes são d^2x/dt^2 , d^2y/dt^2 , d^2z/dt^2 , e por ν ao ângulo que sua direção faz com r , e, de maneira semelhante, por N' à aceleração da outra partícula cujas componentes são d^2x'/dt^2 , d^2y'/dt^2 , d^2z'/dt^2 , e por ν' ao ângulo que sua direção faz com r , obteremos

$$\begin{aligned} \frac{x - x'}{r} \left(\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2x'}{dt^2} \right) + \frac{y - y'}{r} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2y'}{dt^2} \right) + \frac{z - z'}{r} \left(\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{d^2z'}{dt^2} \right) \\ = N \cos \nu - N' \cos \nu' . \end{aligned}$$

A substituição desses valores fornece

$$2 \frac{dr^2}{dt^2} + 2r \frac{d^2r}{dt^2} = 2 (u^2 + u'^2 - 2uu' \cos \varepsilon) + 2r (N \cos \nu - N' \cos \nu') ,$$

$$3 \frac{dr^2}{dt^2} = 3 (u \cos \vartheta - u' \cos \vartheta')^2 .$$

A segunda equação subtraída da primeira fornece

$$\begin{aligned} -\frac{dr^2}{dt^2} + 2r \frac{d^2r}{dt^2} = 2 (u^2 + u'^2 - 2uu' \cos \varepsilon) - 3 (u \cos \vartheta - u' \cos \vartheta')^2 \\ + 2r (N \cos \nu - N' \cos \nu') , \end{aligned}$$

portanto, a expressão geral da força repulsiva entre duas partículas elétricas e e e' na distância r , a saber,

$$\frac{ee'}{r^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{c^2} \frac{d^2r}{dt^2} \right) ,$$

fica então obtida na seguinte forma modificada,

$$\begin{aligned} = \frac{ee'}{c^2 r^2} \left[c^2 + 2 (u^2 + u'^2 - 2uu' \cos \varepsilon) - 3 (u \cos \vartheta - u' \cos \vartheta')^2 \right. \\ \left. + 2r (N \cos \nu - N' \cos \nu') \right] . \end{aligned}$$

Ao substituir para a partícula e' a eletricidade positiva no dado elemento de corrente, a saber, $+e'ds'$, essa expressão fornecerá a [seguinte] força repulsiva

$$\begin{aligned} \frac{ee'ds'}{c^2 r^2} \left[c^2 + 2 (u^2 + u'^2 - 2uu' \cos \varepsilon) - 3 (u \cos \vartheta - u' \cos \vartheta')^2 \right. \\ \left. + 2r (N \cos \nu - N' \cos \nu') \right] ; \end{aligned}$$

porém, colocando para a partícula e' a eletricidade negativa no dado elemento de corrente, a saber, $-e'ds'$, obteremos a seguinte força repulsiva

$$\frac{ee'ds'}{c^2 r^2} \left[-c^2 - 2 (u^2 + u'^2 + 2uu' \cos \varepsilon) + 3 (u \cos \vartheta + u' \cos \vartheta')^2 \right]$$

$$- 2r (N \cos \nu + N' \cos \nu') \] ,$$

já que nesse caso $\varepsilon + \pi$, $\vartheta' + \pi$, e $\nu' + \pi$ assumem o lugar de ε , ϑ' , e ν' ; portanto, essas expressões em conjunto fornecem a força repulsiva total entre a partícula móvel e e todo o elemento de corrente, a saber,

$$\frac{4ee'ds'}{c^2r^2} (3uu' \cos \vartheta \cos \vartheta' - 2uu' \cos \varepsilon - rN' \cos \nu') .$$

Por outro lado, a força repulsiva entre a partícula estacionária $-e$ e todo o elemento de corrente, se r denota a distância entre a partícula estacionária e e o dado elemento de corrente, é

$$+\frac{4ee'ds'}{c^2r^2} \cdot rN' \cos \nu' ,$$

já que nesse caso $u = 0$. Contudo, a diferença entre o valor dado para r aqui e aquele atribuído para ele anteriormente (a saber, a distância entre a partícula $+e$, em movimento ao redor da partícula $-e$, até o dado elemento de corrente), pode ser considerada como uma fração desprezível de r , de tal forma que obtemos para a força repulsiva exercida conjuntamente pela partícula móvel $+e$ e pela partícula estacionária $-e$ sobre o elemento de corrente a [seguinte] expressão

$$\frac{4ee'ds'}{c^2r^2} (3 \cos \vartheta \cos \vartheta' - 2 \cos \varepsilon) \cdot uu' .$$

Se fôssemos colocar no lugar da partícula elétrica móvel $+e$ um segundo elemento de corrente, sendo denominada por $+eds$ a eletricidade positiva dele deslocando-se com a velocidade $+\frac{1}{2}u$, e por $-eds$ a eletricidade negativa dele deslocando-se com velocidade $-\frac{1}{2}u$, obteríamos para a força repulsiva mútua entre os dois elementos de corrente o valor

$$= \frac{4eds \cdot e'ds'}{c^2r^2} (3 \cos \vartheta \cos \vartheta' - 2 \cos \varepsilon') \cdot uu' ,$$

isto é, a mesma expressão que antes, caso a partícula elétrica denominada anteriormente por $+e$ (e deslocando-se com velocidade u) fosse considerada como igual à eletricidade positiva contida no segundo elemento de corrente, a saber, $+eds$ (deslocando-se com velocidade $\frac{1}{2}u$).

Segue disso que o movimento circular da partícula elétrica $+e$ ao redor da partícula estacionária $-e$ representa uma corrente elétrica dupla circular, caso a eletricidade positiva contida nessa última [corrente dupla circular] for $= +e$ e se desloque em sua órbita circular com a metade da velocidade da partícula elétrica $+e$ mencionada anteriormente, e se também a eletricidade negativa contida na mesma corrente for $= -e$ e se desloque com a mesma velocidade que a eletricidade positiva, mas na direção oposta.

A partir disso, pode-se observar que uma partícula elétrica $+e$, quando está em movimento circular ao redor da partícula elétrica $-e$, exerce sobre todas as correntes galvânicas as mesmas ações que aquelas assumidas por Ampère no caso de suas correntes moleculares.

Contudo, as correntes moleculares assumidas por Ampère diferem essencialmente de todas as outras correntes galvânicas porque, de acordo com a suposição de Ampère, elas *persistem* sem força eletromotriz, enquanto que todas as outras correntes galvânicas, de acordo com a lei de Ohm,²⁰⁰ são proporcionais à força eletromotriz, ou seja, *desaparecem* quando cessa a força

²⁰⁰Georg Simon Ohm (1789-1854). A lei de Ohm é de 1826: [Ohm26a], [Ohm26c], [Ohm26d], [Ohm26b] e [Ohm27] com tradução para o francês em [Ohm60] e tradução para o inglês em [Ohm66].

eletromotriz. Contudo, é evidente que a partícula elétrica $+e$, mencionada anteriormente, vai continuar por si própria indefinidamente em seu movimento circular ao redor da partícula $-e$ sem força eletromotriz e, portanto, também em relação a isso corresponde completamente às correntes moleculares supostas por Ampère.

Obtém-se assim uma construção simples das correntes moleculares assumidas por Ampère, sem comprovação de sua possibilidade, com base nas *leis do estado de agregação molecular de duas partículas elétricas de tipos diferentes*, conforme encontradas na Seção anterior.²⁰¹

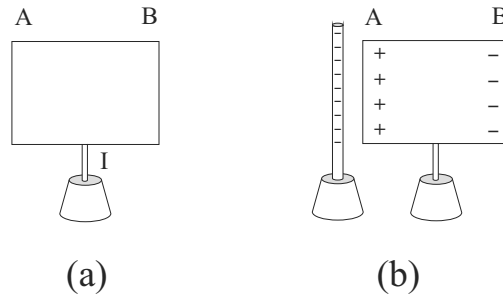
²⁰¹Ou seja, Ampère assumiu a existência de correntes moleculares constantes que poderiam persistir indefinidamente sem a presença de uma força eletromotriz atuando sobre elas. Contudo, Ampère não mostrou como seria possível a existência dessas correntes moleculares persistentes. Weber encontrou um modelo de como seria possível a existência dessa corrente molecular constante, sem a presença de uma força eletromotriz, com base em sua lei de força.

9.18 Movimentos no Espaço de Duas Partículas Elétricas de Tipos Diferentes, sob a Influência de uma Força de Separação Elétrica

Seja $\pi + v$ o ângulo que a direção da força de separação elétrica²⁰² faz com r , enquanto que a denota o valor da aceleração relativa entre as duas partículas que depende da força de separação, então $-a \cos v$ e $a \sin v$ são as componentes de a , — a *primeira [componente]* expressa a parte da aceleração relativa du/dt que é dependente da força de separação, e a *última [componente]* expressa a parte de $d\alpha/dt$ que depende da força de separação, onde α é a diferença das velocidades das duas partículas em uma direção perpendicular a r . Assume-se que a direção da força de separação esteja no plano em que as duas partículas giram uma ao redor da outra.

Se agora a *primeira* componente, a saber, $-a \cos v$, como sendo a parte de du/dt que depende da *força de separação*, e também α^2/r , como sendo a parte de du/dt que depende

²⁰²Em alemão: *einer elektrischen Scheidungskraft*. Essa expressão pode ser traduzida como “força de separação”, “força separadora”, “força de segregação” ou “força segregadora” elétrica. Apresento aqui um exemplo simples de uma força de separação. Considere uma placa metálica AB que está isolada eletricamente da Terra por meio de um suporte isolante I como mostrado na Figura (a) dessa Nota de rodapé:



Se um canudo plástico eletrizado negativamente for colocado próximo do lado A dessa placa, as partículas eletrizadas na placa vão se separar como mostrado na Figura (b). O lado A da placa vai ficar positivamente eletrizado, enquanto que o lado B vai ficar negativamente eletrizado. Essa polarização da placa é causada pela força elétrica do canudo eletrizado negativamente atuando nos elétrons livres da placa. Apresentei várias experiências interessantes sobre esse tópico feitas com material simples e barato, juntamente com muitas citações de fontes originais, nos dois volumes do livro *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade*, que estão disponíveis em português, inglês, italiano e russo: [Ass10a], [Ass10b], [Ass15b], [Ass17a], [Ass18a], [Ass18b] e [Ass19b].

Um outro efeito de uma força de separação ocorre na eletrólise. Em geral as forças elétricas são proporcionais ao valor da carga q da partícula teste sobre a qual atuam. Uma partícula positivamente eletrizada com $q > 0$ sofre uma força em uma direção, enquanto que uma partícula negativamente eletrizada com $q < 0$ será forçada na direção oposta. Caso essas partículas estejam livres para se deslocar como no caso da eletrólise, será produzida uma corrente dupla devido a essa força elétrica de separação. Isto é, as partículas positivas vão se deslocar em uma direção e as partículas negativas vão se deslocar na direção oposta.

Já uma força de separação magnética pode ser entendida como qualquer força que ocasiona a magnetização de um material como o ferro ou aço. Essa força pode ser ocasionada pela presença de um ímã nas proximidades desse pedaço de ferro ou aço. Nesse caso ela pode ser chamada de força magnetizadora ou força magnetizante. Essa força de separação magnética também pode ser ocasionada pela presença de um circuito no qual flui uma corrente constante, sendo esse circuito colocado nas proximidades ou ao redor do pedaço de ferro ou aço que se quer imantar. Nesse último caso pode-se falar de uma força de separação eletromagnética, força eletromagnetizadora, força eletromagnetizante, ou de uma magnetização produzida por correntes elétricas.

da *velocidade* α , forem deduzidas da aceleração total du/dt , então a diferença

$$\left(\frac{du}{dt} + a \cos v - \frac{\alpha^2}{r} \right)$$

vai denotar a parte da aceleração relativa que resulta da força que as duas partículas e e e' exercem entre si, a saber,

$$\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'} \right) \frac{dV}{dr} = \frac{\rho}{2} \frac{c^2}{ee'} \cdot \frac{dV}{dr} ;$$

portanto é obtida a seguinte equação:

$$\frac{du}{dt} + a \cos v - \frac{\alpha^2}{r} = \frac{\rho}{2} \frac{c^2}{ee'} \cdot \frac{dV}{dr} .$$

Se a *última* componente, a saber, $a \sin v$, como sendo a parte da aceleração $d\alpha/dt$ que depende da *força de separação*, for deduzida do valor total $d\alpha/dt$, então a diferença

$$\left(\frac{d\alpha}{dt} - a \sin v \right)$$

vai fornecer aquela parte da aceleração total $d\alpha/dt$ que resulta do *movimento existente devido apenas à influência das forças exercidas entre si pelas duas partículas*. Contudo, supondo apenas a influência das forças de atração e repulsão exercidas entre si pelas duas partículas, o elemento de superfície $\alpha r dt$, descrito em um dado elemento de tempo dt , teria um valor constante, isto é, teríamos

$$\alpha \frac{dr}{dt} + r \frac{d\alpha}{dt} = 0 ;$$

portanto a parte resultante da aceleração $d\alpha/dt$ torna-se

$$-\frac{\alpha}{r} \frac{dr}{dt} .$$

Ao igualar essa parte com a diferença anterior obtemos a equação

$$\frac{d\alpha}{dt} - a \sin v = -\frac{\alpha}{r} \frac{dr}{dt} .$$

Além dessas [equações] temos, como é auto-evidente, uma terceira equação,

$$dv = \frac{\alpha dt}{r} .$$

De acordo com isso, para as quatro grandezas variáveis, r , u , α , v , existem as seguintes três equações:

$$a \cos v - \frac{\alpha^2}{r} = \frac{\rho c^2}{2ee'} \cdot \frac{dV}{dr} - \frac{du}{dt} , \quad (1)$$

$$a \sin v - \frac{\alpha dr}{r dt} = \frac{d\alpha}{dt} , \quad (2)$$

$$dv = \frac{\alpha dt}{r} . \quad (3)$$

Multiplicando a Equação (1) por $dr = udt$, e a Equação (2) por $rdv = \alpha dt$, obtemos

$$a \cos v \cdot dr - \frac{\alpha^2 dr}{r} = \frac{\rho c^2}{2ee'} \cdot \frac{dV}{dr} dr - udu , \quad (4)$$

$$ar \sin v \cdot dv - \frac{\alpha^2 dr}{r} = \alpha d\alpha . \quad (5)$$

A diferença dessas duas equações fornece

$$a \cdot d(r \cos v) = \frac{\rho c^2}{2ee'} \cdot \frac{dV}{dr} dr - \alpha d\alpha - udu . \quad (6)$$

De (2) e (3) obtemos também

$$-2ar^3 \cdot d(\cos v) = d(\alpha^2 r^2) . \quad (7)$$

A integração da Equação diferencial (6) fornece, após multiplicar por 2 e usar que $V = (ee'/r)([u^2/c^2] - 1)$,

$$2ar \cos v = \frac{\rho c^2}{r} \left(\frac{u^2}{c^2} - 1 \right) - \alpha^2 - u^2 + \text{constante}; \quad (8)$$

e a partir disso, como $r = r_0$, $\alpha = \alpha_0$ e $\cos v = -1$ quando $u = 0$, vem que

$$-2ar_0 = -\frac{\rho c^2}{r_0} - \alpha_0^2 + \text{constante}. \quad (9)$$

A Equação (9), subtraída da Equação (8), fornece

$$2ar \cos v + 2ar_0 = \left(\frac{\rho}{r} - 1 \right) u^2 + \rho c^2 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) - \alpha^2 + \alpha_0^2 . \quad (10)$$

Ao integrar a Equação diferencial (7) obtemos, após dividir por r^3 ,

$$-2a \cos v = \frac{\alpha^2}{r} + 3 \int \frac{\alpha^2 dr}{r^2} ,$$

ou, multiplicando por r ,

$$-2ar \cos v = \alpha^2 + 3r \int \frac{\alpha^2 dr}{r^2} , \quad (11)$$

portanto, da soma de (10) e (11),

$$2ar_0 = \left(\frac{\rho}{r} - 1 \right) u^2 + \rho c^2 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) + \alpha_0^2 + 3r \int \frac{\alpha^2 dr}{r^2} ,$$

e, portanto,

$$u^2 = \frac{1}{r - \rho} \left(\rho c^2 \left(\frac{r}{r_0} - 1 \right) + r\alpha_0^2 + 3r^2 \int \frac{\alpha^2 dr}{r^2} - 2ar_0 r \right) . \quad (12)$$

Além disso da Equação (3), como $dr = udt$, segue que

$$dv = \frac{\alpha}{u} \frac{dr}{r} , \quad (13)$$

e como, pela Equação (7),

$$d(\cos v) = -\frac{d(\alpha^2 r^2)}{2ar^3} ,$$

e pela Equação (11),

$$\cos v = -\frac{1}{2\alpha} \left(\frac{\alpha^2}{r} + 3 \int \frac{\alpha^2 dr}{r^2} \right) ,$$

obtemos, ao substituir esses valores na equação idêntica²⁰³

$$dv = -\frac{d(\cos v)}{\sqrt{1 - \cos^2 v}} ,$$

de acordo com a Equação (13),

$$\frac{\alpha dr}{u r} = \frac{\frac{d(\alpha^2 r^2)}{2ar^3}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4a^2} \left(\frac{\alpha^2}{r} + 3 \int \frac{\alpha^2 dr}{r^2} \right)^2}} ;$$

e disso e da Equação (12),

$$\begin{aligned} u^2 &= \left(\frac{\alpha r^2 dr}{d(\alpha^2 r^2)} \right)^2 \cdot \left(4a^2 - \left(\frac{\alpha^2}{r} + 3 \int \frac{\alpha^2 dr}{r^2} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{r - \rho} \left(\frac{r - r_0}{r_0} \rho c^2 + r (\alpha_0^2 - 2ar_0) + \rho r^2 \int \frac{\alpha^2 dr}{r^2} \right) , \end{aligned} \quad (14)$$

ou a seguinte equação para as duas variáveis r e α :

$$\begin{aligned} 4a^2 &= \left(\frac{\alpha^2}{r} + 3 \int \frac{\alpha^2 dr}{r^2} \right)^2 \\ &+ \frac{4}{r - \rho} \left(\frac{d(\alpha r)}{dr} \right)^2 \cdot \left(\frac{r - r_0}{r_0} \cdot \frac{\rho c^2}{r^2} + \frac{\alpha_0^2 - 2ar_0}{r} + 3 \int \frac{\alpha^2 dr}{r^2} \right) . \end{aligned} \quad (15) \quad ^{204}$$

²⁰³Hoje em dia a próxima equação seria escrita como

$$dv = -\frac{d(\cos v)}{\sqrt{1 - \cos^2 v}} .$$

²⁰⁴[Nota de Wilhelm Weber:] Se desaparecer a força de separação a , então αr , de acordo com a Seção 9.11, tem de assumir um valor constante. Contudo, para um valor constante de αr e para $a = 0$, a Equação (15) fica reduzida a

$$0 = \frac{\alpha^2}{r} + 3 \int \frac{\alpha^2 dr}{r^2} ,$$

e isso, dividido pelo valor constante $\alpha^2 r^2$, fornece a equação idêntica

$$0 = \frac{1}{r^3} + 3 \int \frac{dr}{r^4} ,$$

de acordo com a Seção 9.11.

Se nos limitarmos agora a pequenos valores de a , para os quais αr não é, de fato, constante, assim como é quando $a = 0$ de acordo com a Seção 9.11, mas para os quais a grandeza αr difere apenas um pouco de um valor constante $\alpha_0 r_0 = n$, de tal forma que pode ser colocado

$$\alpha r = n(1 + \varepsilon) , \quad (16)$$

onde ε sempre tem um valor muito pequeno. Segue então disso que

$$\frac{\alpha^2}{r} = (1 + 2\varepsilon) \frac{n^2}{r^3} , \quad (17)$$

$$\frac{d(\alpha r)}{dr} = n \frac{d\varepsilon}{dr} . \quad (18)$$

Além disso, por (11) e (17),

$$\int \frac{d\varepsilon}{r^3} = -\frac{a}{n^2} \cos v ,$$

ou

$$d\varepsilon = \frac{a}{n^2} r^3 \sin v dv ; \quad (19)$$

de (18) e (19),

$$\frac{d(\alpha r)}{dr} = \frac{a}{n} r^3 \sin v \cdot \frac{dv}{dr} ; \quad (20)$$

e de (17) e (19),

$$\frac{\alpha^2}{r} = \frac{n^2}{r^3} + \frac{2a}{r^3} \int r^3 \sin v dv . \quad (21)$$

Se substituirmos agora os valores de $d(\alpha r)/dr$ e α^2/r dados por (20) e (21) na seguinte equação resultando de (11) e (15), a saber²⁰⁵

$$a^2 \sin^2 v = \frac{1}{r - \rho} \cdot \left(\frac{d(\alpha r)}{dr} \right)^2 \cdot \left(\frac{r - r_0}{r_0} \cdot \frac{\rho c^2}{r^2} + \frac{\alpha_0^2 - 2a r_0}{r} - \frac{\alpha^2}{r} - 2a \cos v \right) , \quad (22)$$

obteremos, colocando novamente no lugar de n seu valor $\alpha_0 r_0$, a seguinte equação entre r e v , a saber,

$$\frac{\alpha_0^2 r_0^2}{r^4 c^2} \cdot \frac{dr^2}{dv^2} = \frac{r - r_0}{r - \rho} \left(\frac{\rho}{r_0} + \frac{r + r_0}{r} \cdot \frac{\alpha_0^2}{c^2} \right)$$

²⁰⁵O lado esquerdo da próxima equação seria escrito hoje em dia da seguinte maneira:

$$a^2 \sin^2 v .$$

$$- \frac{2a}{(r-\rho)c^2} \left(r_0 r + \frac{3}{r} \int r^2 \cos v dr \right) .^{206} \quad (23)$$

Ao diferenciar essa equação, após multiplicá-la por $r(r-\rho)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left((r-\rho) \frac{\alpha_0^2 r_0^2}{r^3 c^2} \cdot \frac{dr^2}{dv^2} \right) &= \frac{\rho r}{r_0} + (r+r_0) \frac{\alpha_0^2}{c^2} \\ &+ (r-r_0) \left(\frac{\rho}{r_0} + \frac{\alpha_0^2}{c^2} \right) - \frac{2a}{c^2} (2r_0 r + 3r^2 \cos v) . \end{aligned}$$

Se colocarmos aqui, para considerar um caso especial,

$$\rho = -\frac{2r_0}{c^2} (\alpha_0^2 + ar_0) ,$$

(isto é, o caso no qual, para $a = 0$, as duas partículas permanecem, de acordo com a Seção 9.16, à mesma distância enquanto giram uma ao redor da outra), obteremos

$$\frac{d}{dr} \left((r-\rho) \frac{\alpha_0^2 r_0^2}{r^3 c^2} \cdot \frac{dr^2}{dv^2} \right) = -\frac{2(r-r_0)}{c^2} (\alpha_0^2 + ar_0) - \frac{6ar}{c^2} (r_0 + r \cos v) ,$$

que torna-se $= 0$, *em primeiro lugar*, quando $u = 0$ e conseqüentemente $r = r_0$, $\alpha = \alpha_0$, e $\cos v = -1$, e, *em segundo lugar*, quando

$$r_0 - r = \frac{3ar(r_0 + r \cos v)}{\alpha_0^2 + ar_0} ,$$

um caso que ocorre para pequenos valores de a , quando $\cos v = +1$ e então aproximadamente $r = r_0 - 6ar_0^2/\alpha_0^2$.

Segue-se disso que, assim como, de acordo com a Seção 9.16, uma de duas partículas elétricas de tipos diferentes, para as quais $\rho = -2r_0\alpha_0^2/c^2$, poderia mover-se em torno da outra em uma órbita circular *sem a força de separação*, assim também quando duas partículas elétricas de tipos diferentes, para as quais

$$\rho = -2r_0 \left(\frac{\alpha_0^2}{c^2} + ar_0 \right) ,$$

estão sob a ação de uma força de separação ($= a$), uma das partículas pode girar em torno da outra em uma órbita fechada, embora a órbita não seja circular. A distância entre as

²⁰⁶[Nota de Wilhelm Weber:] A partir da equação anterior, como $[r/\alpha]u$ também pode ser substituído no lugar de dr/dv , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_0^2 r_0^2}{\alpha^2 r^2} \cdot \frac{u^2}{c^2} &= \frac{r-r_0}{r-\rho} \left(\frac{\rho}{r_0} + \frac{r+r_0}{r} \cdot \frac{\alpha_0^2}{c^2} \right) \\ &- \frac{2a}{(r-\rho)c^2} \left(r_0 r + \frac{3}{r} \int r^2 \cos v dr \right) , \end{aligned}$$

o que, quando desaparece a força de separação a e, portanto, de acordo com a Seção 9.11, quando $ar = \alpha_0 r_0$, leva à equação

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{r-r_0}{r-\rho} \left(\frac{\rho}{r_0} + \frac{r+r_0}{r} \cdot \frac{\alpha_0^2}{c^2} \right) ,$$

isto é, leva à mesma equação que já foi obtida para esse caso na Seção 9.11.

duas partículas é diferente, dependendo se a partícula em movimento, calculada a partir da partícula central, está para frente ou para trás na direção da força de separação, ou seja, no último caso $= r_0$, e no primeiro caso $= r_0 - 6[ar_0^2/\alpha_0^2]$.

Uma tal posição excêntrica de uma partícula no plano da órbita descrita (sob a influência de uma força de separação) pela outra partícula ao redor dessa, pode ser comparada com a separação dos fluidos elétricos em repouso sob a influência de uma força de separação similar; porém, surge a notável diferença de que essa separação ocorre em direções opostas nos dois casos.

Segue disso que em todos os condutores que foram eletrizados da maneira usual sob a influência de uma força de separação elétrica,²⁰⁷ a eletricidade não pode ficar contida apenas no estado de agregação correspondendo às correntes moleculares de Ampère, já que nesse caso a separação resultante ocorreria na direção oposta em relação àquela que ocorre de fato. Porém, mesmo se toda a eletricidade em um tal condutor existisse na forma de correntes moleculares de Ampère antes que começasse a ação da força de separação, tem de haver entre essas correntes moleculares algumas que não poderiam continuar a existir sob a influência da força de separação (uma partícula continuando a girar em uma órbita fechada ao redor da outra partícula), mas seriam dissolvidas, com as duas partículas se afastando cada vez mais uma da outra, até atingirem os limites do condutor. Sob a influência da força de separação, as partículas positiva e negativa das correntes moleculares rompidas só poderiam permanecer em repouso quando distribuídas de uma maneira particular sobre a superfície do condutor; porém, quando a força de separação deixa de atuar, elas entrariam novamente em movimento até que tivessem se unido novamente duas a duas em correntes moleculares de Ampère.

9.19 Correntes Elétricas em Condutores

Se toda a eletricidade nos condutores, antes que uma força de separação começasse a agir, estivesse contida no estado de agregação das correntes moleculares de Ampère, que, no entanto, não poderiam continuar a existir sob a influência de uma força de separação, mas seriam dissolvidas, com as duas partículas elétricas de tipos diferentes girando uma em torno da outra afastando-se cada vez mais uma da outra, até que finalmente suas trajetórias se aproximassem assintoticamente da direção da força de separação, então, antes que as partículas que se afastassem cada vez mais uma da outra atingissem os limites do condutor, ocorreriam encontros entre as partículas elétricas de tipos diferentes provenientes de correntes moleculares diferentes, que então formariam entre si novas correntes moleculares. Por sua vez essas correntes moleculares recentemente formadas iriam então ser dissolvidas, e as partículas que as constituíam iriam novamente se afastar cada vez mais em trajetórias se aproximando assintoticamente da direção da força de separação, e assim por diante.

Surgiria assim uma corrente de eletricidade no condutor na direção da força de separação. Caso o condutor tenha o formato de um anel uniforme, e caso a força de separação tenha a mesma intensidade em cada elemento separado do comprimento do anel e atue na direção do elemento, será produzida uma corrente circular no anel, e as leis de movimento das partículas elétricas sob a ação de uma força de separação elétrica, desenvolvidas na Seção anterior, formarão a base da teoria dessas correntes elétricas constantes em condutores fechados.

Aqui é óbvio que, durante a existência dessa corrente, cada partícula realiza *trabalho* à

²⁰⁷Nesse caso os condutores isolados, na presença de uma força de separação elétrica, ficam polarizados eletricamente, como discutido na Nota de rodapé 202.

medida que se move na direção da força de separação sob a influência da força de separação. E como todas as outras forças que atuam sobre tal partícula em um condutor precisam se equilibrar conjuntamente, esse trabalho aparecerá como um aumento equivalente da força viva da partícula; portanto segue que a força viva de todas as correntes moleculares de Ampère contidas no condutor tem de aumentar enquanto a corrente atravessa o condutor; isto é, o quadrado da velocidade com que as partículas na corrente molecular de Ampère giram uma ao redor da outra tem de aumentar proporcionalmente à força de separação (*força eletromotriz*), e proporcionalmente à distância através da qual atua essa força em sua própria direção (ou à *intensidade da corrente*). Se for denominada de *resistência* à razão da *força eletromotriz* para a *intensidade de corrente*, podemos dizer no lugar do que foi afirmado que a força viva de todas as correntes moleculares contidas no condutor aumenta, durante a passagem da corrente, proporcionalmente à *resistência*, e proporcionalmente ao *quadrado da intensidade da corrente*.

Este aumento da *energia cinética* das partículas elétricas contidas em um condutor à medida que uma corrente passa pelo condutor surge como consequência necessária da ação da força eletromotriz sobre as partículas, enquanto essas partículas avançam na direção desta força como resultado da corrente.

Esta conclusão teórica é agora confirmada pela experiência, não de forma direta, mas de forma indireta, a saber, pelo fato de se *observar* um aumento da *energia térmica* no condutor à medida que uma corrente atravessa o condutor. E esse aumento *observado* da *energia térmica* no condutor é igual ao aumento *calculado* da *energia cinética* das partículas elétricas nas correntes moleculares de Ampère do condutor.

Agora a *energia térmica* de um corpo é uma *energia cinética* resultante de movimentos no *interior do corpo*, que são, portanto, inacessíveis à observação direta. De maneira semelhante, a *energia cinética* pertencente às partículas elétricas nas correntes moleculares de Ampère em um condutor é uma energia cinética que resulta dos movimentos que ocorrem no *interior do condutor* e que, portanto, são inacessíveis a uma observação direta.

Apesar dessa concordância, a *energia térmica* de um corpo e essa energia cinética das partículas elétricas nas correntes moleculares de Ampère contidas no mesmo corpo talvez possam ser completamente diferentes no que diz respeito às suas naturezas essenciais. Pois é possível que a *energia térmica* seja uma energia resultante do movimento de partículas bem diferentes daquelas da eletricidade, e o movimento dessas outras partículas possa ser de um tipo bem diferente daqueles [movimentos] das partículas nas correntes de Ampère.

Para explicar a identidade do aumento da energia das correntes moleculares de Ampère, como determinado anteriormente, com o aumento da energia térmica encontrado pela observação, seria então absolutamente necessário, *de acordo com o princípio de conservação da energia*, que ocorresse uma *transferência* da energia cinética das partículas elétricas nas correntes de Ampère para as outras partículas cujo movimento constitui o calor. E, de fato, seria necessário que *toda* a energia cinética produzida pela corrente nas partículas elétricas nas correntes de Ampère fosse transferida *completamente* para essas outras partículas em cada instante.

Além do fato de ser impossível explicar essa transferência *total*, é óbvio que qualquer transferência, mesmo que parcial, da energia cinética das correntes moleculares de Ampère para outras partículas contradiria a *persistência* inerente a todas as correntes de Ampère. Se de fato ocorresse uma tal transferência de energia cinética das partículas elétricas em correntes moleculares para outras partículas, isso provaria simplesmente que as correntes moleculares formadas por essas partículas não eram de fato *correntes moleculares de Ampère*,

já que elas não possuiriam a permanência que consiste na essência das correntes moleculares de Ampère.

A conclusão que se segue disso é que se todas as partículas elétricas nos condutores estão no estado de agregação das correntes moleculares de Ampère, o aumento observado na *energia térmica* de um condutor enquanto uma corrente flui através dele vem *diretamente* do aumento na *energia cinética* das partículas elétricas que formam as correntes de Ampère, ou seja, a *energia térmica* transmitida ao condutor pela corrente é *energia cinética* que vem de movimentos dentro do condutor, isto é, de movimentos que consistem em uma *amplificação das correntes moleculares de Ampère formadas pelas partículas elétricas no condutor*.

Em conexão com a *identidade entre a energia térmica e a energia cinética das correntes moleculares de Ampère* também pode ser feita referência ao que foi dito [no artigo] “Ueber die Umsetzung der Stromarbeit in Wärme — Sobre a Conversão do Trabalho Elétrico em Calor”, no 10º volume dos *Abhandlungen der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen* (1862), na 33ª Seção da Memória intitulada “Zur Galvanometrie — Sobre a Galvanometria.”^{208,209}

9.20 Sobre o Termomagnetismo

A próxima observação conecta-se prontamente com a hipótese da Seção anterior de que a eletricidade nos condutores existe no estado de agregação correspondendo às correntes moleculares de Ampère — e com a consequente identidade entre a *energia térmica* do condutor e a *energia cinética* das correntes de Ampère no condutor — a saber, a *igualdade de temperatura* em dois condutores tem de depender de certas relações entre a intensidade e caráter das correntes de Ampère nos dois condutores mas que, junto com a relação necessária para essa igualdade de temperatura, a seguinte diferença pode existir entre as correntes dos dois condutores. A saber, nas correntes de Ampère de um condutor, uma *massa maior* de eletricidade pode se mover *com uma velocidade menor*, e nas do outro condutor, uma *massa menor* de eletricidade pode se mover *com uma velocidade maior*.²¹⁰

Suponha agora um anel formado por dois condutores diferentes através do qual flui uma corrente constante, de tal forma que no mesmo tempo uma quantidade igual de eletricidade atravessa cada seção do anel; então é evidente que quantidades iguais de eletricidade também precisam atravessar as duas seções retas que limitam a *primeira camada do segundo condutor*. Porém a eletricidade que atravessa a primeira seção vem do *primeiro condutor*, em cujas correntes moleculares massas grandes de eletricidade deslocam-se com pequena velocidade. Portanto, em consequência dessa menor velocidade, essa eletricidade que penetra na *primeira camada do segundo condutor* possui uma força viva menor. — A eletricidade que atravessa a segunda seção vem da primeira camada mencionada anteriormente do próprio segundo condutor, onde uma massa menor de eletricidade se desloca nas correntes de Ampère com uma velocidade maior e, portanto, ela possui, como uma consequência de sua velocidade

²⁰⁸[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. IV, pág. 91.

²⁰⁹[Web62, Seção 33, pág. 91 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web24d, Seção 33, pág. 120].

²¹⁰Quando Weber se refere aqui a massas maiores ou menores de eletricidade, ele não está se referindo às massas inerciais maiores ou menores das partículas, mas sim às cargas elétricas maiores ou menores dessas partículas. Suponha, em particular, que flui uma mesma corrente elétrica i em dois condutores. Em um desses condutores podemos ter partículas de cargas maiores Q deslocando-se com velocidades menores v em relação ao condutor, enquanto que no outro condutor temos partículas de cargas menores q deslocando-se com velocidades maiores V em relação ao condutor. A corrente será a mesma nos dois condutores se valer $Qv = qV$.

maior, uma maior força viva. Disso resulta que, como resultado da corrente, essa *primeira camada do segundo condutor* transmite mais força viva para a próxima camada do segundo condutor do que recebe da última camada do primeiro condutor, ou seja, há uma diminuição da energia cinética nas correntes de Ampère dessa camada, ou seja, uma *diminuição da energia térmica* ou da *temperatura*.

A condição oposta ocorre ao considerar as duas seções retas que limitam a *primeira camada do primeiro condutor*. A eletricidade que entra nessa camada pela primeira seção transversal sai da extremidade do segundo condutor a uma velocidade maior; a eletricidade que sai dessa camada através da segunda seção transversal sai dessa camada a uma velocidade menor, de onde se conclui que, como resultado da corrente, a *primeira camada do primeiro condutor* fornece uma força viva menor à próxima camada do mesmo condutor do que recebe da última camada do segundo condutor, após o que há, portanto, um aumento na energia cinética nas correntes de Ampère dessa camada, ou seja, um aumento na *energia térmica* ou na *temperatura*.

Vê-se que aqui é apresentada uma fundação para a doutrina do *termomagnetismo* e, em particular, para a experiência fundamental de Peltier,²¹¹ cuja continuação aqui, no entanto, levaria longe demais.

Pode ser suficiente apenas adicionar aqui uma observação similar em relação à experiência termomagnética fundamental de Seebeck.²¹² Em um corpo que possui a mesma temperatura em todas as suas partículas, supõe-se que o calor está em um estado de *equilíbrio móvel*; ou, segundo Fourier,²¹³ fala-se de uma *radiação mútua* entre as partículas do corpo, em virtude da qual cada partícula perde tanto calor para as partículas vizinhas quanto recebe delas. Agora, se o calor consiste em correntes moleculares de Ampère que, contudo, se desfazem à medida que as partículas positivas e negativas se afastam umas das outras até encontrarem outras partículas com as quais formam novas correntes moleculares, então a igualdade de temperatura consistiria no fato de que a força viva das partículas elétricas que emergem de uma parte do corpo seria igual à força viva das partículas elétricas que entram nessa parte do corpo.

Vamos agora considerar a superfície de contato de dois condutores que diferem entre si apenas pelas maiores massas de eletricidade deslocando-se com velocidade menor nas correntes de Ampère de um [condutor], e menores massas deslocando-se com velocidade maior naquelas [correntes moleculares de Ampère] do outro [condutor]. Então, quando os dois condutores estão na mesma temperatura, a força viva das partículas elétricas que passam do primeiro condutor para o segundo precisa ser igual à força viva das partículas elétricas que passam do segundo condutor para o primeiro; contudo, a *massa* das partículas elétricas passam do primeiro condutor para o segundo seria maior do que a *massa* das partículas elétricas que passam do segundo condutor para o primeiro. Porém, a partir disso (se é sempre a eletricidade positiva que passa [de um condutor para outro condutor], enquanto a eletricidade negativa permanece no condutor, a cujas partículas ela se adere) resultaria uma *diferença da carga elétrica nos dois lados da superfície de contato*; isto é, haveria uma *força eletromotriz* nessa superfície de contato; pois a força eletromotriz de uma superfície de contato é uma força por meio da qual é produzida uma diferença de carga elétrica nos dois lados da superfície de contato.

²¹¹Jean Charles Athanase Peltier (1785-1845). Ver [Pel34].

²¹²Thomas Johann Seebeck (1770-1831) foi um físico báltico-alemão. Ver [See25] e [See26] com tradução parcial para o inglês em [See69] e tradução parcial para o português em [FS16].

²¹³Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), [Fou22] com tradução para o inglês em [Fou52].

Se agora os dois condutores são de tal natureza que essa diferença de carga nos dois lados da superfície de contato entre eles não é sempre a mesma, mas é *maior ou menor de acordo com as variações da temperatura*, seguiria a produção de uma corrente em um anel formado por esses dois condutores, caso houvessem temperaturas diferentes nas duas superfícies de contato dos condutores.

9.21 Helmholtz, Sobre a Contradição entre a Lei da Força Elétrica e a Lei de Conservação da Força

Em seu artigo, “Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektrizität für ruhende leitende Körper — Sobre as equações de movimento da eletricidade para corpos condutores em repouso,” no *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Vol. lxxii, págs. 7 e 8),²¹⁴ Helmholtz deduziu a partir da força elétrica a equação de movimento de duas partículas elétricas para movimentos ao longo da distância r entre as duas partículas, a saber,

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} = \frac{C - \frac{ee'}{r}}{\frac{1}{2}mc^2 - \frac{ee'}{r}},$$

ou, colocando $C = ee'/r_0$ e $2ee'/mc^2 = \rho$, a equação

$$\frac{1}{c^2} \frac{dr^2}{dt^2} = \frac{r - r_0}{r - \rho} \cdot \frac{\rho}{r_0},$$

isto é, a mesma equação que foi obtida na Seção 9.9.

Se

$$\frac{ee'}{r} > \frac{1}{2}mc^2 > C,$$

isto é, se

$$\frac{\rho}{r} > 1 > \frac{\rho}{r_0},$$

temos dr^2/dt^2 positivo e maior do que c^2 , portanto dr/dt é real. Se essa última grandeza também for positiva, r vai crescer até que $ee'/r = mc^2/2$, isto é, até que $r = \rho$, e então dr/dt se torna *infinitamente grande*.

O mesmo acontecerá se inicialmente

$$C > \frac{1}{2}mc^2 > \frac{ee'}{r},$$

isto é, se

$$\frac{\rho}{r_0} > 1 > \frac{\rho}{r},$$

e se dr/dt for negativa.

²¹⁴[Hel70].

De acordo com Helmholtz, essas consequências estão em contradição com a lei de conservação da força.²¹⁵

Em primeiro lugar, deve-se notar que aqui são assumidas duas partículas elétricas, que começam a se mover com uma velocidade *finita*, mas que é maior que a velocidade c , ou seja, maior que $439\,450 \cdot 10^6$ milímetros/segundo.²¹⁶ O caso de dois corpos que se movem um contra o outro a essa velocidade não é encontrado em nenhum lugar da natureza; em vez disso, em todas as aplicações práticas da lei, [a grandeza] $(1/c^2)(dr^2/dt^2)$ é sempre considerada uma fração muito pequena, o que merece atenção.²¹⁷

De acordo com Helmholtz (*obra citada*, pág. 7), uma lei está em contradição com a lei de conservação da força caso duas partículas, movendo-se de acordo com essa lei e começando com uma velocidade *finita*, atingem, a uma distância finita entre si, uma *força viva infinita*, sendo assim capazes de realizar uma quantidade infinitamente grande de trabalho.

Isto parece expressar a proposição de que, de acordo com a lei da conservação da força, duas partículas nunca podem possuir força viva infinita.

Porque obviamente seria possível reverter a afirmação anterior e dizer:

Uma lei está em contradição com a lei de conservação da força caso duas partículas, deslocando-se de acordo em essa lei e começando com uma velocidade *infinita* alcançam, a uma distância finita entre si, uma força viva *finita*, sofrendo assim uma diminuição infinitamente grande do trabalho que são capazes de realizar.

Portanto, as duas partículas precisam sempre manter uma velocidade infinita; pois se elas não a perderam em qualquer distância finita, não importando quão grande, elas nunca iriam perdê-la, de acordo com a natureza do potencial, mesmo a distâncias maiores. Mas os corpos que se movem sempre uns em direção aos outros a uma velocidade infinita estão excluídos do âmbito da nossa investigação.

Mas se duas partículas têm sempre apenas força viva finita, então deve haver um valor limite finito da força viva que elas nunca excedem. É então possível que este valor limite para duas partículas elétricas e e e' possa ser $= ee'/r$; o que significa que o quadrado da velocidade com que ambas as partículas se movem uma em relação à outra não pode ser maior que c^2 .

De acordo com isso, a contradição denunciada por Helmholtz não estaria na lei [da força elétrica], mas na suposição de que as partículas partem com uma velocidade cujo quadrado seria $dr^2/dt^2 > c^2$.

Se for assumida uma tal determinação do valor limite da força viva em conexão com a *lei de conservação da força* de acordo com Helmholtz, então ela também pode ser igualmente assumida em conexão com a *lei fundamental da ação elétrica* (ver a Seção 9.4); isto é, tanto o *trabalho* denominado aqui por U , assim como a força viva denominada por x (na lei $U + x = ee'/\rho$), podem ser consideradas como sendo *grandezas positivas por natureza*.

Em segundo lugar, pode ser observado que, embora as duas partículas elétricas atinjam uma força viva infinita a uma distância mútua finita, essa distância finita é

$$\rho = \frac{2ee'}{c^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'} \right) ,$$

²¹⁵Essa expressão “conservação da força” aparece no título do artigo de Helmholtz de 1847 no qual discutiu aquilo que é chamado de hoje em dia de “conservação da energia”, [Hel47] com tradução para o inglês em [Hel66]. Ver ainda o Capítulo 8.

²¹⁶Ver [Ass21e] para uma discussão da constante c de Weber e sua relação com a velocidade da luz no vácuo.

²¹⁷Ou seja, na prática sempre encontramos $(\frac{dr}{dt}/c)^2 \ll 1$.

que, de acordo com nossas medidas, é uma *distância indeterminavelmente pequena*, pelo mesmo motivo que as próprias massas elétricas ε e ε' não podem ser determinadas de acordo com nossas medidas.²¹⁸ Portanto, essa distância foi referida na Seção 9.9 como sendo uma *distância molecular*.

De qualquer forma, a *teoria dos movimentos moleculares* necessita de um desenvolvimento especial, que ainda falta em toda parte. Contudo, enquanto tal teoria permanecer excluída das investigações mecânicas, todas as dúvidas de *admissibilidade física* relativas à área dos *movimentos moleculares* não terão fundamento.

Em terceiro lugar, pode ser observado que a mesma objeção, a saber, que duas partículas que começam com velocidade finita atingem força viva infinita a uma distância finita entre si, também se aplica à lei da gravitação, caso seja suposto que as massas das partículas ponderáveis estão *concentradas em pontos*. Contudo, se essa objeção for eliminada no caso da lei da gravitação assumindo que as massas até mesmo das menores partículas *ocupam espaço*, teremos de fazer a mesma suposição em relação às partículas elétricas, sendo que nesse caso ocorrerá que apenas uma parte infinitesimalmente pequena de tal partícula atinge a distância ρ em um determinado momento; outra parte infinitesimalmente pequena, que já havia alcançado a distância ρ no momento anterior, teria trocado a velocidade de aproximação infinitamente grande por uma velocidade de afastamento infinitamente grande. No entanto, se essas partes que desaparecem das menores partículas estiverem firmemente conectadas umas às outras, não haverá dúvida sobre essas velocidades infinitas.

Até mesmo as massas cósmicas podem começar seus movimentos sob condições fisicamente admissíveis e, ao continuar a se mover de acordo com a lei da gravitação, podem alcançar condições fisicamente inadmissíveis, que só podem ser evitadas através da cooperação de *forças moleculares confinadas a distâncias moleculares*. A rigor, a desconsideração dessa cooperação só é permitida temporariamente, desde que as condições sejam tais que sua influência seja zero ou possa ser considerada insignificante. No entanto, assim como uma objeção à lei da gravitação não é derivada disso, qualquer objeção à lei fundamental da ação elétrica não deve surgir das condições fisicamente inadmissíveis às quais, de acordo com Helmholtz, essa lei leva, se considerarmos que essas condições inadmissíveis estão vinculadas apenas a determinadas distâncias moleculares.

²¹⁸Nessa frase aparecem duas vezes a palavra *Maassen* em alemão, que pode ser entendida aqui como medidas ou unidades. A palavra “Maass”, hoje em dia escrita como “Maß”, pode ser traduzida como medição, medida, dimensão, unidade, unidade de medida, padrão, dose, escala etc.

Capítulo 10

Introdução ao Artigo de 1872 de Tisserand

A. K. T. Assis²¹⁹

Apresento aqui a tradução do artigo de 1872 do astrônomo francês Félix Tisserand (1845-1896): “Sur le mouvement des planètes autour du Soleil, d’après la loi électrodynamique de Weber”.²²⁰

Em alguns de seus trabalhos Wilhelm Weber estudou o problema de dois corpos com sua lei de força de 1846.²²¹ Weber mencionou o artigo de Tisserand que está sendo traduzido aqui em seu oitavo Tratado principal sobre Medições Eletrodinâmicas que foi escrito na década de 1880 e publicado postumamente em 1894.²²²

Muitos cientistas têm publicado análises do problema de dois corpos utilizando a lei de Weber aplicada tanto ao eletromagnetismo quanto à gravitação.²²³

²¹⁹Homepage: www.ifi.unicamp.br/~assis

²²⁰[Tis72] com traduções para o inglês em [Tis17a], [Tis21] e [Tis24a].

²²¹[Web46] com tradução parcial para o francês em [Web87] e traduções completas para o inglês em [Web07] e [Web21d]; e especialmente em [Web71] com traduções para o inglês em [Web72] e [Web21g], e tradução para o português no Capítulo 9.

²²²[Web94d, Seção 3] com traduções para o inglês em [Web08, Seção 3] e [Web21b, Seção 3]. Ver a Seção 18.3 do Capítulo 18 dessa tradução em português.

²²³[See64] com tradução para o alemão em [See24], ver também [Nor65, pág. 46]; [Hol70] com tradução para o inglês em [Hol17]; [Tis72] com traduções para o inglês em [Tis17a], [Tis21] e [Tis24a], [Tis90] com traduções para o inglês em [Tis17b] e [Tis24b], ver também [Tis96, Volume 4, Cap. 28 (Vitesse de propagation de l’attraction — Velocidade de propagação da atração), págs. 499-503] e [Poi53, págs. 125 e 201-203]; [Zöl72, pág. 334], [Rie74]; [Zöl76b, págs. xi-xii], [Zöl76a, pág. 216] e [Zöl83, págs. 126-128]; [Lol83]; [Ser85]; [Lév90] com tradução para o inglês em [Lév24]; [Rit92]; [Sch97]; [Ger98] com tradução para o inglês em [Ger], e [Ger17]; [Zen21, págs. 46-47]; [See17a] e [See17b]; [Sch25] com tradução para o português em [XA94] e traduções para o inglês em [Sch95] e [Sch21]; [Bus26]; [Wie60], [Whi73a, págs. 207-208], [Eby77], [SS87], [Ass89], [CA91], [Ass92a], [AC92], [Ass94], [Ass99b], [AW03], [AWW11] com tradução para o português em [AWW14] e tradução para o alemão em [AWW18], [Ass13], [Ass14b], [Ass15a], [FW19] e [FW24].

Capítulo 11

[Tisserand, 1872] Sobre o Movimento dos Planetas ao Redor do Sol de Acordo com a Lei Eletrodinâmica de Weber

François Félix Tisserand^{224,225}

De acordo com essa lei [de Weber], a força que produz o movimento do planeta ao redor do Sol é:

$$F = \frac{fm\mu}{r^2} \left(1 - \frac{1}{h^2} \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2}{h^2} r \frac{d^2r}{dt^2} \right) ,$$

na qual f é a constante da atração universal,²²⁶ m a massa do planeta, μ a soma dessa massa e a massa do Sol, r a distância do planeta ao Sol, e h a velocidade com que a atração se propaga no espaço.

A integração das equações de movimento é realizada rigorosamente com o auxílio da função elíptica.²²⁷ Após começar com essa solução, pode-se obter algumas fórmulas aproximadas que serão convenientes para obter valores numéricos. Contudo, chega-se mais rapidamente ao resultado colocando

$$F = \frac{fm\mu}{r^2} + F_1$$

e considerando F_1 como uma força de perturbação,²²⁸ será então suficiente variar as constantes do movimento elíptico.

Essas são as equações do movimento perturbado:

²²⁴[Tis72] com traduções para o inglês em [Tis17a], [Tis21] e [Tis24a].

²²⁵Todas as Notas são de minha autoria.

²²⁶Ou seja, a constante gravitacional universal, também chamada de constante newtoniana da gravitação e que é usualmente representada hoje em dia pela letra G .

²²⁷Ver as Notas de rodapé 187 e 223 nas páginas 102 e 127, repectivamente.

²²⁸Isto é, com $|F_1| \ll |F|$.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{f\mu x}{r^2} + X &= 0 , \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{f\mu y}{r^2} + Y &= 0 , \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{f\mu z}{r^3} + Z &= 0 , \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

onde

$$\begin{aligned} X &= \frac{f\mu}{h^2} \frac{x}{r^2} \Omega ; \\ Y &= \frac{f\mu}{h^2} \frac{y}{r^2} \Omega ; \\ Z &= \frac{f\mu}{h^2} \frac{z}{r^2} \Omega ; \\ \Omega &= -\frac{dr^2}{dt^2} + 2r \frac{d^2r}{dt^2} . \end{aligned}$$

As equações do movimento elíptico são obtidas colocando $X = Y = Z = 0$ nas Equações (1). Suponha que essas equações foram integradas e sejam os seguintes elementos elípticos: a , o semi-eixo maior; e , a excentricidade; φ , a inclinação; θ a longitude do nó; ϖ , a longitude do periélio; ε a longitude da época. Para o caso que estamos considerando, obteremos as fórmulas que determinam a variação das constantes ao considerar as fórmulas bem conhecidas e ao substituir a derivada dR/dp da função perturbadora com relação a um elemento arbitrário p por $X \frac{dx}{dp} + Y \frac{dy}{dp} + Z \frac{dz}{dp} = R_p$.

Mas temos:

$$R_p = \frac{f\mu}{h^2} \frac{\Omega}{r^3} \left(x \frac{dx}{dp} + y \frac{dy}{dp} + z \frac{dz}{dp} \right) = \frac{f\mu}{h^2} \frac{\Omega}{r^2} \frac{dr}{dp} .$$

Como a expressão para o raio vetor depende apenas de a , e , $\varepsilon - \varpi$, teremos:

$$\frac{dr}{d\varphi} = 0 , \quad \frac{dr}{d\theta} = 0 , \quad \frac{dr}{d\varepsilon} = -\frac{dr}{d\varpi} ,$$

consequentemente:

$$R_\varphi = 0 , \quad R_\theta = 0 , \quad R_\varepsilon = -R_\varpi .$$

Encontraremos facilmente as seguintes fórmulas:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{2}{na} R_\varepsilon , & \frac{d\theta}{dt} &= 0 , \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{1-e^2}{na^2e} R_\varepsilon , & \frac{d\varpi}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} R_e , \\ \frac{d\varphi}{dt} &= 0 , & \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{2}{na} R_a - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} (1 - \sqrt{1-e^2}) R_e . \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Observamos sobre essas fórmulas (2) que φ e θ não são alterados pela força perturbadora, o que é óbvio *a priori*; contudo, o que é menos óbvio é que o parâmetro também não é alterado. De fato, temos:

$$\frac{d[a(1-e^2)]}{dt} = -\frac{2}{na}(1-e^2)R_\varepsilon + 2ae\frac{1-e^2}{na^2e}R_\varepsilon = 0 .$$

Para ter alguma ideia do valor da perturbação, vamos desenvolver essas perturbações em série, procedendo de acordo com os senos e cossenos dos múltiplos da anomalia média ζ , desprezando as potências de e que são maiores que 1.

Inicialmente nos ocupamos de Ω , que contém o termo $r\frac{d^2r}{dt^2}$; mas temos:²²⁹

$$r\frac{d^2r}{dt^2} = -\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} ,$$

ou temos até mesmo, com uma aproximação que é totalmente satisfatória:

$$r\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{dr^2}{dt^2} - \frac{f\mu}{r} + f\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) ;$$

vai então resultar que:

$$\frac{\Omega}{r^2} = 2f\mu\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{ar^2}\right) - \frac{3}{r^2}\frac{dr^2}{dt^2} ,$$

que é uma expressão que pode ser desenvolvida como segue:

$$\frac{\Omega}{r^2} = n^2e\left[2\cos\zeta + \frac{e}{2}(1 + 11\cos 2\zeta)\right] + \dots ,$$

Teremos então:

$$\begin{aligned} R_a &= \frac{f\mu}{h^2}\frac{\Omega}{r^2}\frac{dr}{da} = \frac{2f\mu}{h^2}n^2e\cos\zeta + \dots , \\ R_e &= \frac{f\mu}{h^2}\frac{\Omega}{r^2}\frac{dr}{de} = -\frac{f\mu}{h^2}n^2ae\left[1 + \cos 2\zeta + \frac{3e}{4}(3\cos\zeta + 5\cos 3\zeta)\right] + \dots , \\ R_\varepsilon &= \frac{f\mu}{h^2}\frac{\Omega}{r^2}\frac{dr}{d\varepsilon} = \frac{f\mu}{h^2}n^2ae^2\sin 2\zeta + \dots , \end{aligned}$$

e deduzimos, sempre desprezando e^2 , que:

²²⁹Devido a um erro de impressão, essa equação apareceu no texto original da seguinte forma:

$$r\frac{d^2r}{dt^2} = -\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} .$$

A expressão $(dx^2 + dy^2 + dz^2)/dt^2$ deve ser entendida como:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 .$$

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= 0, & \frac{d\theta}{dt} &= 0, \\
\frac{de}{dt} &= -\frac{f\mu ne}{h^2 a} \sin 2\zeta, & \frac{d\varpi}{dt} &= \frac{f\mu n}{h^2 a} \left[1 + \cos 2\zeta + \frac{3e}{4} (3 \cos \zeta + 5 \cos 3\zeta) \right], \\
\frac{d\varphi}{dt} &= 0, & \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{4f\mu ne}{h^2 a} \cos \zeta,
\end{aligned}$$

logo, ao integrar essas equações:

$$\begin{aligned}
\delta\alpha &= 0, & \delta\theta &= 0, \\
\delta e &= \frac{f\mu e}{h^2 a} \cos 2\zeta, & \delta\varpi &= \frac{f\mu n}{h^2 a} t + \frac{f\mu}{h^2 a} \left[\frac{1}{2} \sin 2\zeta + \frac{9e}{4} \sin \zeta + \frac{5}{4} e \sin 3\zeta \right], \\
\delta\varphi &= 0, & \delta\varepsilon &= \frac{4f\mu e}{h^2 a} \sin \zeta.
\end{aligned}$$

Vemos, portanto, que as perturbações dos elementos são nulas ou periódicas, com exceção daquela de $\delta\varpi$, que contém uma parte secular. Mais tarde vamos confirmar que as partes periódicas são totalmente desprezíveis nas diversas hipóteses que podem ser feitas sobre o valor de h , de modo que chegamos à seguinte conclusão:

Na lei de Weber, os elementos permanecem os mesmos que na lei de Newton; apenas a longitude do periélio aumenta em $\frac{f\mu n}{h^2 a} t$, valor tanto maior quanto mais próximo o planeta estiver do Sol.

Considere o caso de Mercúrio. Ao usar o dia solar médio como sendo a unidade de tempo e o semi-eixo da órbita da Terra como sendo a unidade de distância, encontraremos que:

$$\delta\varpi = \frac{(1,05160)}{h^2} t.$$

Se assumirmos que h tem o mesmo valor que nas experiências de Weber sobre eletricidade, a saber, $h = 439450 \times 10^6$, tendo como unidades o segundo e o milímetro,²³⁰ teremos então inicialmente com nossas unidades:

$$\log h = 2,40805 \quad \text{e} \quad \delta\varpi = (\bar{4},23550)t;$$

ao final de um século, encontramos:

$$\delta\varpi = +6,28'';$$

para Vênus, teremos apenas:

$$\delta\varpi = +1,32''.$$

²³⁰Isto é, $h = 439450 \times 10^6$ milímetros/segundo. Ver [Ass21e] para uma discussão da constante c de Weber e sua relação com a velocidade da luz no vácuo.

Se assumíssemos h igual à velocidade de propagação da luz, teríamos:

$$\log h = 2,23948$$

e então:

para Mercúrio e um século: $\delta\varpi = +13,65''$,

para Vênus e um século: $\delta\varpi = +2,86''$.

Para mostrar que esses termos periódicos são desprezíveis, será suficiente considerar o maior deles, que é $\delta\varpi$, a saber, $\frac{f\mu}{2ah^2} \sin 2\zeta$; encontraremos então que seu coeficiente não chega a $0,003''$.

Capítulo 12

[Weber, 1874] Sobre o Equivalente da Força Viva

Wilhelm Weber^{231,232,233,234}

Alguns dos meus Tratados anteriores sobre Medições Eletrodinâmicas já apareceram nos Volumes 73, 82 e 99 dos *Annalen*.^{235,236} Aqui, apenas o assunto principal do último desses Tratados será discutido em mais detalhes, ou seja, a conexão da estabelecida lei fundamental da ação elétrica com o princípio da conservação de energia e com o equivalente de forças vivas dado pelo mesmo.²³⁷

No que diz respeito às objeções levantadas contra a lei fundamental da ação elétrica mencionada anteriormente, devo me limitar aqui ao seguinte comentário geral devido à falta de espaço.

As investigações *matemáticas* mais recentes sobre eletricidade têm se preocupado principalmente com as *ações à distância* e, portanto, com exceção da eletrostática, limitaram-se principalmente às *leis integrais* e *elementares*, em contraste com as leis pontuais, de acordo com a designação de Neumann.²³⁸ Do ponto de vista *físico*, no entanto, as ações da eletri-

²³¹[Web74] com tradução para o inglês em [Web24f].

²³²As Notas de Heinrich Weber, o Editor do Volume 4 das *Obras* de Wilhelm Weber, são representadas por [Nota de Heinrich Weber:]; as Notas de Laurence Hecht, o tradutor da versão em inglês desse artigo, são representadas por [Nota de Hecht:]; todas as outras Notas são de minha autoria.

²³³[Nota de Heinrich Weber:] Volume do jubileu dedicado ao editor dos *Annalen der Physik und Chemie*, J. C. Poggendorff, Leipzig, 1874, págs. 199-213.

²³⁴Johann Christian Poggendorff (1796-1877) editou o *Annalen der Physik und Chemie* de 1824 a 1876, onde muitos dos artigos de Weber foram publicados. O moderno *Annalen der Physik* é o sucessor deste periódico. O ano de 1874 marcou o quinquagésimo ano em que Poggendorff estava atuando como Editor desse periódico.

²³⁵[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, págs. 215, 276 e 597.

²³⁶[Web48a] com traduções para o inglês em [Web52c], [Web66], [Web19] e [Web21o]; [Web51] com traduções para o inglês em [Web61] e [Web21n]; e [WK56] com tradução para o português em [WK08] e traduções para o inglês em [WK03] e [WK21].

²³⁷Ver a Nota de rodapé 23 na página 25.

²³⁸Carl Neumann (1832-1925), professor de física e matemática na Universidade de Leipzig, classificou em 1872 as teorias existentes da eletrodinâmica baseadas na ação à distância em três tipos, [Neu72]. (a) Havia as leis pontuais (*Punktgesetze* em alemão), do tipo utilizado por Coulomb e Weber, baseadas na suposição de forças entre partículas elétricas ou entre massas pontuais; (b) havia as leis elementares (*Elementargesetze* em alemão), referindo-se ao enfoque de Ampère utilizando elementos de corrente descritos matematicamente

cidade nos corpos pelos quais ela flui, ou seja, as *ações térmicas* e *químicas*, tornaram-se tão importantes e significativos que o *físico* não pode evitar voltar sua atenção para as *leis pontuais*, as únicas que podem abrir caminho para a compreensão da conexão interna entre eletricidade e calor, bem como para a compreensão da mecânica interna dos processos químicos.

São, acima de tudo, essas ações térmicas e químicas que tornam necessário atribuir uma *constituição molecular* aos corpos em geral. Com uma constituição molecular, entretanto, cada molécula, como um corpo celeste, é um mundo em movimento em si mesmo, cujas condições e movimentos internos não são observados diretamente. Entretanto, essas condições e movimentos internos desempenham um papel importante em todos os processos térmicos e químicos, de modo que assumir a *constituição molecular dos corpos* tornou-se uma necessidade na *teoria mecânica do calor*, bem como na *teoria química dos átomos*.

Com a *constituição molecular dos corpos*, no entanto, como pode ser facilmente visto, não pode haver questão de uma distribuição arbitrária de massas; pois as massas atômicas nas moléculas são massas de um *determinado valor*, que sempre permanecem *separadas*; elas estavam originalmente a certas distâncias umas das outras e em certos movimentos em direção umas às outras, e sempre permaneceram em tal interação que foram preservadas separadas e distantes umas das outras. Certamente é fácil entender que, no caso de tais átomos, não *ocorrem todos os acúmulos de massa concebíveis* e que suposições arbitrárias sobre tais acúmulos de massa podem levar a contradições, mesmo que nada mais detalhado ou preciso tenha sido determinado ou possa ser determinado, mesmo que todas as leis da interação dos átomos sejam conhecidas, desde que o problema dos três corpos não seja resolvido; pois o conhecimento das leis de movimento de *dois* corpos agindo reciprocamente um sobre o outro não é suficiente para isso.

As objeções mencionadas anteriormente, mesmo que sejam justificadas de outra forma, devem, portanto, ser deixadas de lado por enquanto, porque não pode ser decidida a questão se a culpa das contradições criticadas deve ser encontrada na lei fundamental contestada ou, em vez disso, nas acumulações de massa arbitrariamente assumidas.

12.1 Princípio de Conservação da Energia

A lei da inércia já havia dado origem à proposição de que, *se nenhuma influência externa for exercida sobre um corpo, sua força viva*²³⁹ *permanecerá inalterada*.

Isso foi seguido pelo teorema da conservação da força viva, a saber: *se não houver influência externa sobre um sistema de corpos, a soma de suas forças vivas será a mesma em todos os momentos em que a posição mútua dos corpos do sistema for a mesma*.

Esse teorema da conservação da força viva foi finalmente estendido para a lei da conservação da energia, a saber: *se não houver influência externa sobre um sistema de corpos, então, em tais momentos de tempo, em que a posição mútua dos corpos do sistema é diferente, a soma das forças vivas não é a mesma, mas essa soma, juntamente com o trabalho que seria feito como resultado da interação dos corpos do sistema se eles fossem movidos a distâncias infinitas um do outro, permanece constante*. Essa soma das forças vivas foi

e às forças entre esses elementos de corrente; e (c) havia as leis integrais (*Integralgesetze* em alemão), do tipo desenvolvido por seu pai, o físico Franz Neumann (1798-1895), relacionadas com os circuitos elétricos fechados.

²³⁹Em alemão: *seine lebendige Kraft*. Ver a Nota de rodapé 23 na página 25.

chamada de *energia cinética*,²⁴⁰ e esse trabalho [foi denominado] de *energia potencial* do sistema de corpos, cuja soma permanece sempre a mesma quando as influências externas são excluídas.

No entanto, como será visto, essa lei de conservação da energia recém-declarada contém vários princípios conectados entre si, que devem ser separados, a saber: *em primeiro lugar*, princípios relacionados às propriedades de corpos individuais ou partículas e, *em segundo lugar*, princípios relacionados às propriedades de pares de corpos.

12.2 Distinção entre as Propriedades de um Corpo Individual ou Partícula, e as Propriedades de um Par de Partículas

1. *Todo corpo ou partícula* (todo ponto físico ou átomo), considerado por si só, tem propriedades pelas quais seu comportamento no espaço e no tempo é completamente determinado, se forem dados seu comportamento em qualquer instante e todas as forças que agem sobre ele a partir desse momento. Essas propriedades das partículas individuais do corpo são *inércia*²⁴¹ e *massa*, e não há outra diferença entre as diferentes partículas em relação às suas propriedades individuais a não ser o valor de sua massa.

2. *Cada par de partículas* tem propriedades que são completamente independentes das propriedades das partículas individuais. Essas propriedades dos *pares* são a razão pela qual *trabalho* é realizado toda vez que a distância entre as duas partículas muda. De fato, as propriedades de cada *par* dão origem a uma força de repulsão ou atração mútua, que, multiplicada pela mudança na distância entre as duas partículas, dá origem ao *trabalho* realizado pelo *par*.

3. Um sistema de *três* ou mais partículas *não* tem propriedades que já não estejam contidas nas propriedades das partículas e pares individuais.

Essa restrição da natureza dos corpos às propriedades das *partículas individuais* e *pares de partículas* leva ao importante resultado de que o estudo dos processos naturais que englobam todos os corpos pode ser bastante simplificado ao dividi-los nos processos dos pares individuais, que podem ser considerados independentemente uns dos outros. A observação dos processos naturais que abrangem todos os corpos não seria capaz de tal decomposição se propriedades especiais fossem associadas à *totalidade de muitos corpos* que ainda não estivessem contidas nas propriedades dos *corpos individuais* e dos *pares de corpos*. Em todo caso, é muito importante que todos os elementos essenciais para a observação dos processos naturais gerais já estejam completamente contidos nas propriedades dos *corpos individuais* e *pares de corpos*.

12.3 Características de uma Lei Fundamental de Interação

Agora que as propriedades das partículas *individuais* foram completamente determinadas na *mecânica geral*, a *física* basicamente só precisa determinar as propriedades de cada *par*

²⁴⁰Em alemão: *Bewegungsenergie*. Ver a Nota de rodapé 171 na página 89.

²⁴¹Em alemão: *Beharrung*.

de partículas. Nessa determinação, nada mais precisa ser levado em consideração do que a natureza e as relações mútuas das partículas que formam um par, e o trabalho resultante de sua interação sob essas condições a cada mudança de distância. As relações entre essas duas partículas são dadas por sua distância e pela velocidade da mudança na distância. — O sistema de coordenadas fixo necessário para uma determinação completa da posição e dos movimentos das partículas no espaço não é necessário para a determinação dessa distância e de sua mudança e, portanto, não é considerado aqui; portanto, deve ser possível representar as leis fundamentais da interação entre os corpos, que resultam das propriedades associadas a cada par, sem o auxílio de coordenadas espaciais.²⁴²

Para que as leis fundamentais da interação entre os corpos sejam representadas dessa forma, somente a distância relativa r entre as duas partículas, sua velocidade relativa dr/dt e as funções dessas duas grandezas são consideradas como quantidades variáveis; as funções das coordenadas espaciais não são usadas.

Agora, nenhuma das proposições mencionadas na Seção 12.1, nem mesmo a última, a saber, a proposição declarada sob o nome de princípio da conservação da energia, corresponde a esses requisitos de uma lei fundamental da interação entre os corpos, porque não se trata apenas das propriedades de um par de corpos, mas das propriedades de um sistema de corpos (um sistema de pares de corpos) em geral e, de fato, de uma propriedade que nem sempre é atribuída a esse sistema, mas apenas enquanto não houver influência externa; além disso, porque a soma, que de acordo com esse teorema deve permanecer a mesma, é, por sua natureza, uma função das coordenadas espaciais x, y, z .

12.4 Dois Tipos de Equivalentes de uma Força Viva

Um par de partículas, ε e ε' , se afastando ou se aproximando entre si com a velocidade dr/dt possuem uma força viva relativa que é determinada pelo produto do quadrado dr^2/dt^2 multiplicado por um fator que depende das massas ε e ε' ,²⁴³ a saber

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \right). \quad 244$$

Não precisamos considerar aqui a força viva absoluta média do par (atribuída a seu centro de gravidade), a saber

²⁴²[Nota de Hecht e Assis:] O conceito de representar a força viva relativa sem que seja necessário utilizar um sistema fixo de coordenadas foi mencionado por Carl Jacobi (1804-1851) em suas *Vorlesungen über Dynamik — Palestras sobre Dinâmica*, Quarta Palestra, “Das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft — O Princípio de Conservação da Força Viva,” editadas por A. Clebsch em 1866 a partir das notas fornecidas por C. W. Brocardt que assistiu às palestras de Jacobi na Universidade de Königsberg no semestre de inverno de 1842-43, [Jac66] e [Jac84] com tradução para o inglês em [Jac09]. As ideias de Jacobi são um desenvolvimento dos trabalhos de Lagrange (1736-1813) e Hamilton (1805-1865) descrevendo um sistema por meio da conservação de sua força viva.

²⁴³A expressão dr^2/dt^2 deve ser entendida como $(dr/dt)^2$. Para uma dedução detalhada das próximas fórmulas dessa Seção ver, em particular, a Seção 4 da Sexta Memória principal de Weber, [Web71] com traduções para o inglês em [Web72] e [Web21g]. Ela está traduzida no Capítulo 9. Ver, em especial, a Seção 9.4.

²⁴⁴Weber está utilizando aqui o conceito de massa reduzida ($mm'/(m + m')$), que ainda é utilizado para descrever o sistema de dois corpos na mecânica celeste. No caso em que as partículas elétricas, ε e ε' , possuem massa igual, a massa reduzida é igual à metade da massa de qualquer uma das duas massas.

$$\frac{1}{2} \left[\frac{(\varepsilon\alpha + \varepsilon'\alpha')^2}{\varepsilon + \varepsilon'} + (\varepsilon + \varepsilon')\gamma^2 \right] ,$$

onde α e α' significam as velocidades das duas partículas na direção r , enquanto que γ é a velocidade do centro de gravidade perpendicular a r .

Também não precisamos considerar a força viva que surge do movimento das partículas *uma ao redor da outra*, a saber²⁴⁵

$$\frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \frac{ds^2}{dt^2} ,$$

onde $[ds/dt]$ representa a velocidade com que as duas partículas se movem uma em direção à outra na direção perpendicular a r .

No entanto, essa *força viva relativa* pertencente ao sistema das duas partículas muda com o tempo, pois às vezes uma parte dela é perdida, às vezes uma nova parte é adicionada. No entanto, essa mudança não ocorre sem que algo mais seja mudado ao mesmo tempo e, quando esse algo mais é restaurado, a parte perdida da força viva também é restaurada. Diz-se que a parte da força viva que foi perdida nesse meio tempo foi substituída por outra coisa e essa outra coisa é descrita como um *equivalente* da parte da força viva que foi perdida.

Tornou-se uma tarefa importante da pesquisa física estabelecer *leis para esse equivalente*, de acordo com as quais ele pode ser determinado a partir de *quantidades mensuráveis*.

Agora, esse *equivalente pode ser* um movimento de um corpo, *ou não*. No *primeiro* caso, o equivalente também seria uma força viva, como a que ele representa, e diferiria dela apenas pelo fato de pertencer a outros pares de partículas, embora ao mesmo tempo, poderia acontecer de ele se tornar imperceptível para nós como um movimento, como no caso do calor. Em todos esses casos, quando o equivalente da força viva perdida também é uma força viva e, de fato, da mesma magnitude, a soma das forças vivas permanece inalterada e é apenas uma questão de uma distribuição alterada delas, cuja razão deve ser buscada nas leis da propagação do movimento.

Bem diferente disso é o *outro caso*, em que a força viva perdida não é substituída diretamente por uma força viva, mas por algo diferente da força viva. A investigação desse último tipo de equivalentes de partes perdidas da força viva relativa de duas partículas requer, de preferência, um exame mais exato, tanto em relação à sua natureza quanto em relação às leis de sua determinação a partir de outras *grandezas mensuráveis*.

12.5 Equivalente do Segundo Tipo

1. A *força viva* é algo que realmente *existe* e é sempre *positiva*, assim como a *massa*. Disso resulta que o *potencial das forças*, por exemplo, das forças elétricas, que às vezes é positivo, às vezes é negativo, *não pode ser equivalente à força viva* no sentido verdadeiro. O potencial também não é algo que realmente *existe*; pois é o trabalho que seria feito se as duas partículas fossem trazidas de uma distância infinita para a distância r . Se, em vez do trabalho que foi feito, pudéssemos agora colocar, na definição dada pelo potencial, o trabalho que *teria sido*

²⁴⁵A próxima equação deve ser entendida como

$$\frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 .$$

feito se as duas partículas tivessem sido movidas de uma distância infinita para a distância r , então *esse trabalho* em si consistiria em uma mudança na *força viva relativa das duas partículas* ou no *cancelamento de outro trabalho*. Mas um *trabalho cancelado* também não é nada realmente existente, tão pouco quanto uma força cancelada. E uma *mudança na força viva* já está contida como uma parte da força viva existente e, portanto, não pode ser considerada como existente além da força viva existente.

2. No entanto, esse *trabalho meramente imaginário*,²⁴⁶ como é o potencial, que seria realizado se as duas partículas fossem levadas *de uma distância finita para uma infinita* ou vice-versa, poderia servir como *definição e magnitude* de algo realmente *existente*, ou seja, como definição de uma *propriedade* realmente existente pertencente ao sistema das duas partículas; somente na definição de tal propriedade, a distância *existente* r não deve ser tomada como a distância finita a partir da qual as duas partículas devem ser levadas a uma distância infinita, mas essa distância finita deve ser determinada *independentemente da distância existente* r ; pois a propriedade deve se aplicar *a todos os valores de r* sem distinção.

Como uma ilustração de como esse *trabalho meramente imaginário* pode servir para definir uma propriedade realmente existente, pode-se citar o exemplo das *hastes elásticas*, para as quais uma distância finita muito específica entre as duas extremidades da haste é dada pelo chamado *comprimento natural da haste* ρ , *independentemente do comprimento r existente da haste*. No caso dessa haste, um *trabalho meramente imaginário*, ou seja, aquele que seria realizado pela haste se ela fosse levada do comprimento natural duplo para o simples, ou seja, de 2ρ para ρ , é agora usado como uma *definição e medida* de algo realmente *presente* na haste, ou seja, a propriedade realmente existente de *elasticidade* da haste.

Se a *tensão* correspondente ao comprimento da haste r for denotada por R , a *elasticidade* da haste será expressa por $\int_{2\rho}^{\rho} Rdr$. Da mesma forma, a expressão $\int_{\rho}^{\infty} Rdr$ pode ser usada como uma definição da propriedade de *duas partículas elétricas* dada anteriormente, se R denotar sua força repulsiva no momento em que, durante a transferência da distância finita ρ (determinada independentemente de r) para uma distância infinita, a distância entre elas tornou-se *igual* a r . — Se essa propriedade das duas partículas for aplicada de modo geral, então R deve ser uma função do tempo t para sempre representar corretamente a força repulsiva, que pode ser diferente em momentos diferentes para a mesma distância. — A propriedade das duas partículas elétricas definida por $\int_{\rho}^{\infty} Rdr$ será chamada de sua *capacidade de trabalho*.²⁴⁷

3. Como a força viva relativa de duas partículas é algo totalmente independente da distância r em si entre as partículas, o equivalente dessa força viva também deve ser independente de r . Se, portanto, o equivalente, assim como o potencial, fosse representado pela integral de uma função de r , essa integral teria de ser uma *integral definida* entre limites que seriam totalmente independentes de r , assim como a propriedade de duas partículas elétricas que acabou de ser definida, que foi chamada de sua capacidade de trabalho.

4. Por fim, o conceito de equivalente da força viva implica (porque a força viva é invariável enquanto nenhuma parte dela for substituída por um equivalente) que o equivalente da parte perdida da força viva, expresso em uma unidade adequada, adicionado à parte existente da força viva tem de formar uma *constante*. Entretanto, o *valor finito* dessa constante, como a soma de duas quantidades positivas, fornece um *valor limite* que não pode ser excedido por nenhuma dessas duas quantidades, nem pela força viva nem pelo equivalente. É óbvio que, sempre que a força viva relativa de duas partículas puder crescer além de qualquer limite

²⁴⁶Em alemão: *gedachte Arbeit*.

²⁴⁷Em alemão: *Arbeitsfähigkeit*. Ver a Nota de rodapé 180 na página 96.

até o infinito, não haverá equivalente para as forças vivas e, portanto, nenhum princípio de conservação da energia para o qual a existência de um equivalente de forças vivas seja a condição e a base.

Mas uma força viva restringida por esse *limite*, ou uma velocidade relativa limitada das partículas de um corpo, pode parecer entrar em conflito com os princípios da *mecânica geral*, em que todas as forças são consideradas como dadas sem que se pergunte sua *origem*, assim como a distribuição *inicial* das massas e suas velocidades são consideradas como dadas sem que se pergunte como elas surgiram. De fato, se na *mecânica geral todas as forças* fossem entendidas como forças dadas, a possibilidade de produzir qualquer velocidade relativa de duas partículas seria evidente. Essa possibilidade não é de forma alguma plausível se voltarmos à *origem das forças*, como na física, e derivarmos todas as forças da interação entre os corpos *regida por uma lei*. Aqui se percebe que, *em princípio*, não há nada que impeça tal *limite*, mas que a existência ou não desse limite só pode ser decidida a partir das *leis* da interação entre os próprios corpos.

12.6 Lei da Capacidade de Trabalho com a Condição de que seja Equivalente à Força Viva

No início da Seção anterior, foi explicado que somente uma quantidade realmente existente e positiva poderia ser o equivalente procurado da força viva. Então, verificou-se que o potencial de duas partículas $\int_{\infty}^r Rdr$, ou seja, *aquele trabalho* que seria realizado se as duas partículas fossem trazidas de uma distância infinita para a distância existente r , não seria uma quantidade desse tipo e, portanto, não poderia ser o equivalente procurado da força viva; que, por outro lado, $\int_{\rho}^{\infty} Rdr$, ou seja, *aquele trabalho* que seria realizado se ambas as partículas fossem levadas de uma distância finita ρ , que pode ser determinada independentemente da distância existente r , para uma distância infinita, poderia muito bem servir como uma *definição de tal grandeza*, ou seja, como uma definição de uma propriedade realmente existente do sistema das duas partículas em seu estado atual, que foi chamada de *capacidade de trabalho* existente do sistema. *Essa capacidade de trabalho* deve agora ser determinada em mais detalhes, supondo-se que seja o *equivalente* procurado da *força viva*.

Se denominarmos U à *capacidade de trabalho* de duas partículas elétricas ε e ε' em qualquer instante dado, e chamarmos de x à *força viva relativa entre essas partículas* nesse mesmo instante, seguirá então que a *capacidade de trabalho* U , *como sendo o equivalente*, adicionada à *força viva* x , será igual a uma constante, a , isto é:

$$x + U = a , \quad \text{ou} \quad U = a \left(1 - \frac{x}{a} \right) .$$

Se agora, seguindo a Seção 12.4, colocarmos a *força viva* como:

$$x = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} ,$$

e, para o caso em que U desaparece (onde $x = a$), colocarmos $dr^2/dt^2 = c^2$,²⁴⁸ seguirá que:

$$U = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} c^2 \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{dr^2}{dt^2} \right) .$$

²⁴⁸Essa expressão deve ser entendida como $(dr/dt)^2 = c^2$.

Nessa expressão da capacidade de trabalho U , no entanto, sabe-se que as massas ε e ε' são quantidades que não podem ser determinadas por medição. Duas partículas elétricas são, portanto, distinguidas, não por suas massas não mensuráveis, ε e ε' , mas sim pelas forças mensuráveis e^2 e e'^2 , que cada uma dessas duas partículas exerce individualmente sobre uma partícula igual a ela a uma distância $= 1$, *em repouso relativo*, ou melhor, de acordo com as raízes quadradas desses valores e e e' , que são proporcionais às massas não mensuráveis.²⁴⁹

Para introduzir agora na expressão da *capacidade de trabalho*

$$U = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} c^2 \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{dr^2}{dt^2} \right)$$

as quantidades *mensuráveis* e e e' no lugar das *imensuráveis* ε e ε' , é preciso aderir ao *valor limite* de U para valores nulos da velocidade dr/dt , ou para valores nulos da força viva $x = [1/2][\varepsilon \varepsilon' / (\varepsilon + \varepsilon')][dr^2/dt^2]$, que pode ser denominada por U_0 , a saber:

$$U_0 = a = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} c^2 .$$

Nesse caso, aplica-se a lei *eletrostática*, segundo a qual o trabalho que seria realizado durante uma mudança virtual na distância dr é $= [ee'/r^2]dr$. Se entendermos U_0 como *aquele trabalho* que seria realizado como resultado dessa interação *eletrostática* se ambas as partículas fossem levadas de uma distância finita ρ , que pode ser determinada independentemente da distância existente r , para uma distância infinita, obteremos

$$U_0 = a = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} c^2 = \int_{\rho}^{\infty} \frac{ee'}{r^2} dr = \frac{ee'}{\rho} .$$

Disso decorre, *em primeiro lugar*, que para todo sistema de duas partículas elétricas existe realmente uma distância finita $\rho = ee'/a$ que pode ser determinada independentemente da distância existente r ; *em segundo lugar*, se substituirmos ee'/ρ em vez de a na equação $U = a(1 - [1/c^2][dr^2/dt^2])$, o resultado será a *capacidade de trabalho desejada* ou o *equivalente desejado da força viva*:

$$U = \frac{ee'}{\rho} \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{dr^2}{dt^2} \right) .$$

12.7 Dedução do Potencial a partir da Capacidade de Trabalho

A capacidade de trabalho U foi definida na Seção anterior pelo trabalho que seria realizado se ambas as partículas fossem levadas da distância finita ρ , que pode ser determinada in-

²⁴⁹As massas inerciais das duas partículas são representadas por ε e ε' . Na época de Weber os elétrons ainda não eram conhecidos. Também ainda não era possível determinar experimentalmente as massas das partículas microscópicas responsáveis por uma corrente elétrica em um condutor, nem as massas dos átomos e moléculas. Sejam e e e' os valores das cargas elétricas dessas partículas. A força eletrostática R entre duas cargas pontuais e e e' separadas por uma distância r é dada por $R = ee'/r^2$ no sistema absoluto de unidades introduzido por Gauss e Weber. Quando $r = 1$ unidade de distância, a força entre elas é dada por $R = ee'$. No caso de duas partículas iguais com cargas e e e , a força entre elas quando $r = 1$ é dada por $R = e^2$. Da mesma forma, no caso de duas partículas iguais com cargas e' e e' , a força entre elas quando $r = 1$ é dada por $R = e'^2$.

dependentemente da distância existente r , para uma distância infinita uma da outra, ou seja

$$U = \int_{\rho}^{\infty} R dr .$$

Agora, no entanto, no final da Seção anterior, foi encontrado

$$U = \frac{ee'}{\rho} \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{dr^2}{dt^2} \right) ,$$

para o qual também pode ser escrito:

$$U = \int_{\rho}^{\infty} \frac{ee'}{r^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{c^2} \frac{d^2r}{dt^2} \right) dr .$$

Segue-se então que a força repulsiva resultante da interação entre as duas partículas é dada por

$$R = \frac{ee'}{r^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{c^2} \frac{d^2r}{dt^2} \right) .$$

De acordo com a definição do potencial V como sendo o *trabalho* que seria feito como resultado da interação entre as duas partículas se elas fossem trazidas de uma distância infinita para a distância existente r , chegamos finalmente ao seguinte:

$$V = \int_{\infty}^r R dr = \int_{\infty}^r \frac{ee'}{r^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{c^2} \frac{d^2r}{dt^2} \right) dr ,$$

ou,

$$V = \frac{ee'}{r} \left(\frac{1}{c^2} \frac{dr^2}{dt^2} - 1 \right) .$$

12.8 Aplicação Geral

Finalmente, se considerarmos as massas m e m' de *quaisquer* duas partículas, sendo r sua distância relativa, e cuja força viva relativa é

$$\frac{1}{2} \frac{mm'}{m+m'} \frac{dr^2}{dt^2} ,$$

e se ocorrer uma interação entre essas duas partículas *em repouso relativo*, tal que a mudança virtual na distância dr corresponda ao trabalho $[kmm'/r^n]dr$, então para essas partículas resulta, sob a mesma suposição sobre a existência de um equivalente da força viva, assim como para as partículas *elétricas* consideradas até agora, uma *capacidade de trabalho* U , a saber:

$$U = \frac{1}{2} \frac{mm'}{m+m'} c^2 \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{dr^2}{dt^2} \right) .$$

Se, além disso, para essas partículas, a *soma constante* da força viva e da capacidade de trabalho, ou seja,

$$\frac{1}{2} \frac{mm'}{m+m'} c^2 ,$$

for equiparada ao *valor limite* da capacidade de trabalho para a força viva que desaparece, onde se aplica a lei de interação válida para o *repouso relativo*, ou seja, se for estabelecido

$$\frac{1}{2} \frac{mm'}{m+m'} c^2 = \int_{\rho}^{\infty} \frac{kmm'}{r^n} dr = \frac{k}{n-1} \cdot \frac{mm'}{\rho^{n-1}} ,$$

então será obtido

$$U = \frac{k}{n-1} \cdot \frac{mm'}{\rho^{n-1}} \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{dr^2}{dt^2} \right) ,$$

para o qual também pode ser escrito:

$$U = k \int_{\rho}^{\infty} \frac{mm'}{r^n} \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{(n-1)c^2} \frac{d^2r}{dt^2} \right) dr .$$

Disso decorre a *força repulsiva* R resultante da interação das partículas (que foi assumida *no caso de repouso relativo* das partículas = kmm'/r^n), para o *caso de movimento relativo*, ou seja, quando a força viva é $= [1/2][mm'/(m+m')][dr^2/dt^2]$:

$$R = \frac{kmm'}{r^n} \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{(n-1)c^2} \frac{d^2r}{dt^2} \right) .$$

Por fim, isso resulta no potencial V , a saber:

$$V = \int_{\infty}^r R dr = \int_{\infty}^r \frac{kmm'}{r^n} \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{(n-1)c^2} \frac{d^2r}{dt^2} \right) dr ,$$

ou,

$$V = \frac{k}{n-1} \cdot \frac{mm'}{r^{n-1}} \cdot \left(\frac{1}{c^2} \frac{dr^2}{dt^2} - 1 \right) .$$

Capítulo 13

[Weber, 1875] Sobre o Movimento da Eletricidade em Corpos de Constituição Molecular

Wilhelm Weber^{250,251,252}

Em meu primeiro Tratado sobre Medições Eletrodinâmicas de 1846,^{253,254} estabeleci uma lei geral da *força elétrica*, abrangendo simultaneamente a eletrostática e a eletrodinâmica, e mais tarde dei continuidade a isso com algumas discussões mais específicas, a saber: *em primeiro lugar*, sobre a *lei geral do potencial* das forças elétricas, nestes *Annalen* de 1848, Vol. 73, pág. 229;^{255,256} *em segundo lugar*, sobre o *princípio da energia* e sua conexão com a lei geral da força elétrica, no último Tratado sobre Medições Eletrodinâmicas de 1871;^{257,258} e *em terceiro lugar*, finalmente, sobre a *capacidade de trabalho*²⁵⁹ de duas partículas elétricas, como equivalente das forças vivas,²⁶⁰ no Volume de jubileu destes *Annalen* de 1874, página 199,^{261,262} ao qual serão acrescentadas agora algumas discussões adicionais, que não encontraram lugar no último trabalho. Em particular, após algumas observações preliminares e acréscimos aos dois últimos Tratados e sobre as objeções levantadas contra a lei geral da

²⁵⁰[Web75] com tradução para o inglês em [Web24g].

²⁵¹As Notas de Wilhelm Weber são representadas por [Nota de Wilhelm Weber:]; as Notas de Heinrich Weber, o Editor do Volume 4 das *Obras* de Wilhelm Weber, são representadas por [Nota de Heinrich Weber:]; todas as outras Notas são de minha autoria.

²⁵²[Nota de Heinrich Weber:] *Annalen der Physik und Chemie*, editado por J. C. Poggendorff, Vol. 156, Leipzig, págs. 1-61.

²⁵³[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 25.

²⁵⁴[Web46] com tradução parcial para o francês em [Web87] e uma tradução completa para o inglês em [Web21d].

²⁵⁵[Nota de Heinrich Weber:] *Ibidem*, Vol. III, pág. 245.

²⁵⁶[Web48a] com traduções para o inglês em [Web52c], [Web66], [Web19] e [Web21o].

²⁵⁷[Nota de Heinrich Weber:] *Ibidem*, Vol. IV, pág. 247.

²⁵⁸[Web71] com traduções para o inglês em [Web72] e [Web21g]. A tradução para o português aparece no Capítulo 9.

²⁵⁹Em alemão: *Arbeitsfähigkeit*. Ver a Nota de rodapé 180 na página 96.

²⁶⁰Ver a Nota de rodapé 23 na página 25.

²⁶¹[Nota de Heinrich Weber:] *Ibidem*, Vol. IV, pág. 300.

²⁶²[Web74] com tradução para o inglês em [Web24f]. Esse trabalho está traduzido no Capítulo 12. Ver ainda a Nota de rodapé 234 na página 135.

força elétrica estabelecida no Primeiro Tratado, lidaremos aqui com *os movimentos da eletricidade em corpos de constituição molecular*,²⁶³ cuja consideração é conduzida e necessária pelos resultados de tantas outras investigações que torná-los objeto de pesquisas especiais detalhadas dificilmente pode ser evitado, apesar dos limites estreitos que ainda parecem ser impostos para esta pesquisa do lado matemático.

13.1 Observações sobre as Leis Fundamentais da Eletricidade que foram Exibidas na Seção 4 do Tratado de 1871 sobre Medições Eletrodinâmicas

No Tratado mencionado anteriormente de 1871,²⁶⁴ a *lei da força elétrica*, que havia sido estabelecida no Tratado de 1846, foi analisada na Segunda e Terceira Seções e comparada em termos de sua composição com a *lei muito mais simples do potencial elétrico* estabelecida nestes *Annalen*, Volume 73, página 229.²⁶⁵ Mas como essa última lei ainda carece da simplicidade que é exigida de uma *lei fundamental*, foi feita uma tentativa na Quarta Seção do mesmo Tratado para analisar essa lei do potencial mais de perto e dividi-la em partes constituintes que possuem a simplicidade das leis fundamentais, a saber, a lei da dependência do potencial de duas partículas em relação à distância entre elas quando estão *no mesmo movimento relativo*, e a lei da dependência do potencial em relação ao movimento relativo quando estão *a uma certa distância*, sendo que, no entanto, uma terceira lei era essencialmente necessária para determinar essa distância, a saber, a *lei da eletrostática*, que por si só, no entanto, já possui a simplicidade exigida de uma lei fundamental.

As *leis elétricas fundamentais* estabelecidas na Quarta Seção, *incluindo a lei eletrostática*, são as *três* seguintes:

Primeira lei. Duas partículas elétricas de massas ε e ε' a uma distância r exercem uma sobre a outra, em repouso relativo, uma força na direção r diretamente proporcional ao produto de suas massas $\varepsilon\varepsilon'$ e inversamente proporcional ao quadrado de sua distância r^2 , sendo então igual a $\mu^2 \cdot [\varepsilon\varepsilon'/r^2]$. — Se colocarmos $\mu\varepsilon = \pm e$ e $\mu\varepsilon' = \pm e'$, onde o sinal superior ou inferior se aplica dependendo se a partícula de massa pertence à eletricidade positiva ou negativa, a força será de repulsão ou atração dependendo se é positiva ou negativa a expressão da força ee'/r^2 .²⁶⁶

Segunda lei. Se duas partículas elétricas e e e' estiverem em momentos diferentes a distâncias r' e r'' em repouso relativo ou em movimento relativo igual (ou seja, se tiverem a mesma força viva relativa), então os trabalhos V' e V'' realizados por influência mútua, quando ambas as partículas são levadas das distâncias dadas r' e r'' a uma distância infinita, se comportam inversamente às distâncias dadas, ou seja

$$V' : V'' = r'' : r' .$$

Terceira lei. O trabalho U que seria realizado sob a ação das forças que as partículas e e e' exercem uma sobre a outra, se as partículas fossem movidas a uma distância infinita

²⁶³Ou seja, em corpos de constituição corpuscular. Ver a Nota de rodapé 181 na página 98.

²⁶⁴Ver a Nota de rodapé 258.

²⁶⁵Ver a Nota de rodapé 256.

²⁶⁶Weber está considerando duas partículas com massas ε e ε' que possuem as cargas elétricas e e e' . As massas ε e ε' são sempre positivas. Já as cargas elétricas e e e' podem ser positivas ou negativas.

a partir de uma *certa distância* $\rho = ee'/a$ *proporcional a* ee' ,²⁶⁷ na qual elas possuem uma certa força viva x , forma junto com essa força viva x uma *soma constante*, a saber, a , ou seja

$$U + x = a .$$

Com relação a essas leis, deve-se observar, *em primeiro lugar*, que a grandeza U introduzida na terceira [lei], que com a força viva x forma a soma constante a , assim como as outras duas grandezas x e a , é *sempre positiva*, tanto no caso em que as duas partículas elétricas e e e' são do mesmo tipo, quanto no caso em que não são.²⁶⁸

Esse valor *positivo* resulta da equação $U = [r/\rho]V$ obtida da segunda lei (em que²⁶⁹

$$V = \left(\frac{ee'}{r} \right) \left(1 - \left[\frac{1}{c^2} \right] \left[\frac{dr^2}{dt^2} \right] \right)$$

é o *potencial* das duas partículas e e e' , sendo $\rho = ee'/a$ *uma distância determinável a partir da natureza da eletricidade e das partículas e e e'* , pois, dependendo se e e e' são do mesmo tipo ou de tipos diferentes, as grandezas V e ρ serão simultaneamente positivas ou negativas, de modo que o quociente V/ρ *sempre* permanece *positivo*. Deve-se observar que, se houver alguma hesitação em permitir no cálculo um *valor negativo de ρ* para a distância entre dois pontos, como já foi observado na Nota sobre a terceira lei, em vez de $\rho = ee'/a$, que é negativo para partículas elétricas de tipos diferentes, pode ser colocado $\rho = \mu\varepsilon \cdot \mu\varepsilon'/a$, que é *sempre positivo*, mas onde, ao mesmo tempo, U não deve ser colocado igual ao *trabalho* feito

$$\left(\frac{ee'}{\rho} \right) \left(1 - \left[\frac{1}{c^2} \right] \left[\frac{dr^2}{dt^2} \right] \right) ,$$

que é *negativo* para partículas de tipos diferentes, mas deve ser igualado ao *valor absoluto* desse trabalho:

$$\pm \left(\frac{ee'}{\rho} \right) \left(1 - \left[\frac{1}{c^2} \right] \left[\frac{dr^2}{dt^2} \right] \right) = \mu^2 \left(\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\rho} \right) \left(1 - \left[\frac{1}{c^2} \right] \left[\frac{dr^2}{dt^2} \right] \right) .$$

Em segundo lugar, deve-se observar que, se, como foi feito aqui, a lei fundamental da eletrostática for adicionada às leis eletrodinâmicas, uma das leis eletrodinâmicas, ou seja, a lei da dependência do potencial de duas partículas em relação à sua distância quando estão *no mesmo movimento relativo*, pode ser totalmente omitida, pois já está essencialmente contida nas outras duas leis e pode ser deduzida delas.

Pois, a partir da *primeira* lei, [isto é,] a lei fundamental da eletrostática, o *potencial* V para $x = 0$ depende das três quantidades variáveis e , e' , r , ou seja, é proporcional a três

²⁶⁷[Nota de Wilhelm Weber:] Em vez de ee' , pode ser colocado $\mu\varepsilon \cdot \mu\varepsilon'$ (ou seja, o *valor absoluto* de ee'), o que faz com que ρ sempre tenha um valor *positivo*; mas então o trabalho U também deve ser considerado de acordo com seu *valor absoluto*, de modo que a lei estabelecida seja aplicada.

²⁶⁸Ou seja, todas essas grandezas U , x e a serão positivas quando e e e' são positivas, quando e e e' são negativas, e também quando uma dessas cargas for positiva e a outra negativa.

²⁶⁹A próxima equação deve ser entendida como:

$$V = \left(\frac{ee'}{r} \right) \left(1 - \left[\frac{1}{c^2} \right] \left[\frac{dr}{dt} \right]^2 \right) .$$

A mesma coisa deve ser entendida nas próximas equações.

fatores E , E' e R , cada um dos quais contém apenas *uma* dessas quantidades, assim o valor de V para $x = 0$ é determinado pela seguinte equação:

$$V = A \cdot EE'R .$$

A partir da *terceira* lei, por outro lado, conclui-se que o *potencial* V para $r = \rho$ depende das quantidades variáveis e , e' , x e é proporcional a três fatores E , E' , X , cada um dos quais contém apenas *uma* dessas quantidades, assim o valor de V para $r = \rho$ é determinado pela seguinte equação:

$$V = B \cdot EE'X .$$

Agora $E = e$, $E' = e'$, $R = 1/r$, $X = (1 - x/a)$ e, além disso, o valor da constante A é igual ao valor de X para $x = 0$, e o valor da constante B é igual ao valor de R para $r = \rho$.

A partir disso, pode-se concluir que E , E' , R , X , ou e , e' , $1/r$, $(1 - x/a)$ são sempre fatores de V e que, além disso, só existe a possibilidade de mais um fator, a saber, o fator $(1 + f(r, x))$, no qual $f(r, x)$ teria que ser uma função de r e x que desaparece para $r = \rho$ e também para $x = 0$.

Portanto, $V = EE'RX = (ee'/r)(1 - x/a)$ é, em todo caso, a determinação *mais simples* de V admissível de acordo com a primeira e a terceira leis, que resulta dessas duas leis, independentemente da segunda lei, que pode ser deduzida da determinação agora obtida de $V = (ee'/r)(1 - x/a)$. Pois dessa determinação resulta a seguinte proporção para dois valores de V , a saber, V' e V'' , que se aplicam ao mesmo valor de x , mas para valores diferentes de r , a saber, r' e r'' :

$$V' : V'' = \frac{ee'}{r} \left(1 - \frac{x}{a}\right) : \frac{ee'}{r''} \left(1 - \frac{x}{a}\right) = r'' : r' ,$$

uma determinação *inteiramente idêntica* à segunda lei.

Entretanto, uma complicação da lei, como a que resultaria da adição de outro fator $(1 + f(r, x))$, não deve ser considerada permissível sem necessidade comprovada.

O *resultado* é que, em vez das três leis fundamentais mencionadas anteriormente, duas são suficientes, a saber:

1. a lei fundamental da eletrostática, e
2. o princípio da energia;

pois é fácil ver que a lei fundamental, que foi colocada por último como a *terceira* anteriormente, é o próprio *princípio da energia*, cuja essência consiste no fato de que a *força viva relativa* x de duas partículas e e e' é às vezes maior e às vezes menor, mas que, além dessa força viva das duas partículas, há também um *equivalente da força viva*, que sofre uma diminuição a cada aumento da força viva, e vice-versa, de modo que a *soma dessa força viva e do equivalente existente simultaneamente tem um valor constante*, que é denotado por a . Ao mesmo tempo, reconhece-se que a quantidade denotada por U no enunciado anterior da lei fundamental é o *equivalente da força viva presente no par de partículas, além da força viva* x .

C. Neumann chegou a um resultado semelhante ao encontrado aqui em seu “Principien der Elektrodynamik — Os Princípios da Eletrodinâmica”, Tübingen 1868,²⁷⁰ segundo o

²⁷⁰[Neu68a] com tradução para o inglês em [Neu21b]. Ver também [Neu68b] e [Neu69a] com tradução para o inglês em [Neu21a]. Esses trabalhos estão traduzidos nos Capítulos 5 e 6.

qual a mesma coisa que foi alcançada aqui pelo *princípio da energia* em conexão com a lei fundamental da eletrostática foi alcançada pela *lei de propagação dos potenciais* obtida por ele em conexão com a lei fundamental da eletrostática. Assim, é estabelecida uma conexão entre esse princípio da energia e essa lei de propagação dos potenciais, que parece levar a uma explicação de um a partir do outro. Consulte também os *Mathematische Annalen*, Volume 1, página 317 e os *Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften*, XVIII, página 103 e seguintes.²⁷¹

13.2 Comentários sobre o Ensaio no Volume do Jubileu destes *Annalen*, página 199

Depois de distinguir entre as propriedades das partículas individuais e as propriedades dos pares de partículas, foi apresentada a proposição no ensaio mencionado anteriormente^{272,273} de que um sistema de *três* ou mais partículas não tem propriedades que já não estejam contidas nas propriedades das partículas individuais e dos pares, e foi, portanto, proposto como uma característica de uma verdadeira lei *fundamental* que nada mais deve ser levado em conta nela do que a *natureza* e as *relações mútuas* das partículas que formam um par, e o *trabalho decorrente dessas relações a partir de sua interação a cada mudança de distância*. Para que uma *lei fundamental* seja representada dessa forma, somente são levadas em consideração como quantidades variáveis o *tempo* t , a *distância relativa* r entre as duas partículas, sua *velocidade relativa* dr/dt e as funções dessas grandezas.

Se esse for o caso, segue-se como uma lei fundamental do *princípio da energia* que ele deve se aplicar a um par de partículas sob todas as condições em que elas possam se encontrar, quer estejam sozinhas no universo ou se quaisquer outras partículas estiverem presentes além delas, e que, no último caso, nem a natureza nem as condições de outras partículas podem ser levadas em conta na expressão do princípio.

Dessa forma, o *princípio da energia* como lei fundamental só pode lidar com as *energias* pertencentes ao próprio par de partículas e exclusivamente a ele. Uma dessas energias é a força viva relativa do par de partículas, que é chamada de *energia cinética*.²⁷⁴ Mas como essa energia cinética de um par de partículas muda, o princípio da energia pressupõe necessariamente a existência de *outra energia* no par de partículas para que seja possível uma *soma invariável de energia*. E essa *outra energia* também deve mudar, de modo que uma diminuição nela esteja sempre associada a um aumento na energia cinética, e vice-versa. A essência da *segunda energia*, portanto, consiste no fato de que uma *nova força viva é gerada ou a força viva existente é destruída* como resultado de cada redução ou aumento da segunda energia.

No entanto, *a força viva é gerada ou destruída pelo trabalho*, por exemplo, pelo trabalho resultante da interação entre as duas partículas com cada mudança de distância. A existência real desse trabalho, entretanto, pressupõe uma *capacidade de trabalho*²⁷⁵ baseada na interação das partículas, uma capacidade de gerar ou destruir força viva, e essa *capacidade de trabalho*,

²⁷¹[Neu69a] com tradução para o inglês em [Neu21a] e tradução para o português no Capítulo 6, e [Neu74, pág. 103 e seguintes].

²⁷²[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. IV, pág. 300.

²⁷³[Web74] com tradução para o inglês em [Web24f]. Esse trabalho está traduzido no Capítulo 12.

²⁷⁴Em alemão: *Bewegungsenergie*. Ver a Nota de rodapé 171 na página 89.

²⁷⁵Em alemão: *Arbeitsvermögen*. Essa expressão pode ser traduzida como capacidade de trabalho, capacidade de realizar trabalho, capacidade para trabalhar, capacidade de energia ou capacidade energética.

que é medida de acordo com a magnitude da força viva que pode ser gerada ou destruída, é a *segunda energia do par de partículas*, que é maior ou menor dependendo do fato de a *primeira energia*, ou seja, a força viva do par de partículas, ser menor ou maior, de modo que a *soma de ambas as energias*, ou seja, a *força viva* e a *capacidade de trabalho* do par de partículas, permaneça inalterada.

A partir disso, adotamos as seguintes disposições mais detalhadas para a definição da *capacidade de trabalho como energia*. *Em primeiro lugar*, a capacidade de trabalho de duas partículas e e e' é uma *propriedade que sempre pertence a elas, dada a energia cinética* (ou seja, dada a força viva relativa das partículas).

Em segundo lugar, a magnitude dessa propriedade é determinada pelo trabalho que seria realizado como resultado da interação entre as duas partículas *em uma determinada mudança de distância a ser determinada em mais detalhes*. No entanto, essa *mudança na distância, que deve ser determinada com mais precisão*, não é aquela que *de fato* ocorreria ou poderia ocorrer (que teria de começar com a distância r existente), mas é uma *mudança meramente virtual na distância*, que começa com uma distância ρ determinada independentemente da distância r existente, para a qual as partículas devem ser consideradas deslocadas. Pois o trabalho realizado em qualquer mudança de distância, começando com a distância existente r , não poderia servir para determinar a magnitude da capacidade de trabalho, pois dependeria de r e, portanto, assumiria valores diferentes simultaneamente com r , mesmo que a *força viva relativa das partículas permanecesse inalterada*, enquanto uma mudança de distância pode ser concebida como um deslocamento fictício das partículas para uma distância sempre igual ρ , que pode ser determinada independentemente da distância existente r , uma mudança na distância pode ser concebida entre os limites fixos ρ e ρ' , em que, como resultado da interação entre as duas partículas, *o mesmo trabalho seria sempre realizado, o que, de acordo com seu valor absoluto (pois o trabalho positivo ou negativo é de igual importância para a capacidade de trabalho), pode servir como uma medida de uma propriedade atribuída ao par de partículas*. Não é preciso dizer que a *força viva relativa das partículas deve permanecer inalterada nesse deslocamento fictício das partículas da distância r para a distância ρ* .

Se R denota agora a força repulsiva entre as duas partículas e e e' resultante da interação, e $\rho' - \rho$ denota a mudança imaginária na distância das partículas resultante do deslocamento fictício, então a capacidade de trabalho U dessas partículas é dada pela fórmula:

$$U = \pm \int_{\sigma=\rho}^{\sigma=\rho'} R d\sigma ,$$

em que o sinal superior ou inferior se aplica dependendo do fato de as duas partículas serem do mesmo tipo ou de tipos diferentes.²⁷⁶

Nessa fórmula, R é uma função de σ , mas nem sempre a mesma, o que só seria o caso se $d\sigma/dt = 0$, onde, pela lei eletrostática, $R = ee'/\sigma^2$ seria sempre a mesma função de σ . Se $d\sigma/dt$ não for zero, R é uma função de σ e $d\sigma/dt$, e $d\sigma/dt$ nem sempre é a mesma função de σ , como fica claro pelo fato de que, *em primeiro lugar*, os *valores iniciais* de σ e $d\sigma/dt$ podem ser dados arbitrariamente, o que significa que valores muito diferentes de $d\sigma/dt$ podem ser dados para os mesmos valores de σ ; e, *em segundo lugar*, que para a mesma alteração na distância, a velocidade relativa $d\sigma/dt$ pode sofrer alterações muito diferentes de acordo com a diferença nas *forças externas* que atuam sobre as partículas.

²⁷⁶Isto é, o sinal superior se aplica quando as duas partículas são positivas ou quando as duas partículas são negativas, enquanto que o sinal inferior se aplica quando uma partícula é positiva e a outra negativa.

Agora, se R for uma função de σ e $d\sigma/dt$, então a *integral indefinida* $\int R d\sigma$ também será uma função desse tipo; mas a *integral definida* $\int_{\sigma=\rho}^{\sigma=\rho'} R d\sigma$ dependerá apenas dos valores inicial e final de σ , ou seja, ρ e ρ' , e dos quocientes diferenciais associados a esses valores.

Se a *integral definida* $\int_{\sigma=\rho}^{\sigma=\rho'} R d\sigma$ deve expressar a *capacidade de trabalho de duas partículas que têm a velocidade relativa r'* , já foi observado que a velocidade relativa r' presente na distância r deve ser mantida inalterada quando as partículas são movidas para a distância ρ , de modo que $d\sigma/dt = r'$ é dado para $\sigma = \rho$, por meio do qual é determinada a *dependência da capacidade de trabalho U em relação a r'* .

Contudo, uma *dependência semelhante da capacidade de trabalho U* também ocorreria no valor de $d\sigma/dt$, que pertence ao valor final $\sigma = \rho'$, exceto no caso em que $\rho' = \infty$, onde essa dependência não precisa ocorrer. Disso decorre que deve ser definido $\rho' = \infty$, pois a fórmula para U como definição da *capacidade de trabalho de duas partículas que possuem a velocidade relativa r'* não pode ser dependente de qualquer outra velocidade relativa que não seja r' , ou seja, aquela que as partículas realmente possuem no momento em que sua capacidade de trabalho é considerada.

Se $\rho' = \infty$, a *capacidade de trabalho U* das partículas e e e' será expressa pela fórmula:

$$U = \pm \int_{\sigma=\rho}^{\sigma=\infty} R d\sigma ,$$

onde R é uma função de σ e $d\sigma/dt$, e $d\sigma/dt$ é uma função de σ , que para $\sigma = \rho$ tem o valor r' , que é a velocidade relativa entre as partículas cuja capacidade de trabalho deve ser determinada.

Por fim, no que diz respeito à quantidade ρ , ela é determinada pelo fato de que apenas *uma distância finita entre duas partículas elétricas* pode ser especificada, a qual, independentemente da distância existente r , só pode ser determinada a partir da natureza da eletricidade em geral e das duas partículas em particular, ou seja, a partir da soma invariável de energia a associada ao par de partículas, e das forças repulsivas $\mu^2 \varepsilon^2$ e $\mu^2 \varepsilon'^2$ exercidas por cada uma das duas partículas de massa ε e ε' sobre uma partícula igual a ela na distância unitária, de acordo com a lei fundamental da eletrostática, segundo a fórmula $\rho = \mu^2 \cdot [\varepsilon \varepsilon' / a]$. Se definirmos $\mu \varepsilon = \pm e$ e $\mu \varepsilon' = \pm e'$, onde o sinal superior ou inferior se aplica dependendo se a partícula de massa é de eletricidade positiva ou negativa, então ρ , que é sempre positivo, pode ser definido como $= \pm e e' / a$, onde o sinal superior ou inferior se aplica dependendo se as duas partículas são de mesmo tipo ou de tipos diferentes.

Observação. Se for necessário expressar na própria fórmula U que R é uma função de σ e $d\sigma/dt$, e que $d\sigma/dt$ é uma função de σ , que tem o valor r' para $\sigma = \rho$, que é a velocidade relativa *dada* entre as partículas cuja *capacidade de trabalho* deve ser determinada, então, *em primeiro lugar*, poderia ser colocado $R(\sigma, d\sigma/dt)$ no lugar de R , *em segundo lugar*, para denotar $d\sigma/dt$ como uma função de σ , [pode ser colocado] $f(\sigma)$ e, *em terceiro lugar*, finalmente, para distinguir essa função $f(\sigma)$, que deve assumir *o valor dado r'* para $\sigma = \rho$, de outras funções $f(\sigma)$, que assumem *o valor dado r'* para outros valores de σ , *o valor de σ para o qual a função assume o valor dado* pode ser especialmente adicionado ao símbolo da função f , ou seja, pode ser escrito aqui $f_\rho(\sigma)$ no lugar de $f(\sigma)$. A *capacidade de trabalho* é então expressa da seguinte forma:

$$U = \pm \int_{\sigma=\rho}^{\sigma=\infty} R[\sigma, f_{\rho}(\sigma)] d\sigma ,$$

e a *velocidade relativa dada* é expressa por:

$$r' = f_{\rho}(\rho) .$$

Das duas partículas que, com o propósito de determinar seu potencial de trabalho U a partir da distância $\sigma = r$ na qual estão realmente localizadas, foram consideradas deslocadas para a distância $\sigma = \rho$ enquanto mantinham a velocidade relativa r' que realmente possuem, mas agora, como resultado de sua interação, *mesmo que fossem realmente deslocadas da distância existente $\sigma = r$ para $\sigma = \infty$, um trabalho seria realizado, que é chamado de potencial das partículas e é geralmente denotado por V* . De acordo com a notação dada para U , a expressão desse potencial é:

$$V = \int_{\sigma=r}^{\sigma=\infty} R[\sigma, f_r(\sigma)] d\sigma ,$$

e a *velocidade relativa dada* é obtida por:

$$r' = f_r(r) .$$

De acordo com a definição dada da *capacidade de trabalho* de duas partículas e e e' , como *energia de trabalho*, em que, juntamente com a *força viva relativa como energia cinética*, as energias das duas partículas e e e' são completamente determinadas, e de acordo com o declarado *princípio da energia*, como a *lei da soma invariável de ambas as energias*, a tarefa pode agora ser definida:

Determinar a força R com a qual duas partículas elétricas e e e' em movimento arbitrário agem uma sobre a outra a partir do *princípio da energia* em conjunto com a *lei fundamental da eletrostática*.

Pois, como a *lei fundamental da eletrostática* determina a força com a qual duas partículas elétricas e e e' , quando sua *força viva relativa* é zero, agem uma sobre a outra, e como, além disso, o *princípio da energia* determina o que é alterado na *interação de duas partículas elétricas e e e'* , quando sua *força viva relativa* não é zero, mas $= x$ (ou seja, que o *aumento da energia cinética* das duas partículas pela magnitude x está ligado a uma *diminuição da energia de trabalho* pela mesma magnitude x), parece que isso significa que, em geral, pelo *princípio da energia em conexão com a lei fundamental da eletrostática*, deve ser possível deduzir a lei geral da força, que inclui simultaneamente a eletrostática e a eletrodinâmica, com a qual duas partículas elétricas e e e' agem uma sobre a outra.

O *princípio da energia* fornece as seguintes fórmulas para isso, a saber, *em primeiro lugar*, a *fórmula da energia cinética* (ou *força viva relativa*) das duas partículas que têm as massas ε e ε' :²⁷⁷

²⁷⁷A próxima fórmula deve ser entendida como:

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{d\sigma^2}{dt^2} ,$$

da qual se conclui que, se para uma determinada distância $\sigma = r$ a velocidade relativa é denotada por r' e a força viva relativa por x ,

$$x = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot r'^2 ; \quad (1)$$

em segundo lugar, a fórmula da energia de trabalho, a saber

$$U = \pm \int_{\sigma=\rho}^{\sigma=\infty} R[\sigma, f_\rho(\sigma)] d\sigma , \quad (2)$$

onde $f_\rho(\sigma) = d\sigma/dt$ denota uma função de σ que tem o valor dado r' para $\sigma = \rho$; e em terceiro lugar, a lei da soma constante de energia, que é expressa na seguinte fórmula:

$$x + U = a . \quad (3)$$

A essas três fórmulas dadas pelo princípio da energia é acrescentada, em quarto lugar, a fórmula para a lei fundamental da eletrostática, ou seja, a lei da força repulsiva R com a qual duas partículas e e e' agem uma sobre a outra a uma distância relativa σ :

$$R = \frac{ee'}{\sigma^2} . \quad (4)$$

Para $\xi = 0$, em que $x = 0$, a expressão da força eletrodinâmica $R[\sigma, f_\rho(\sigma)]$ muda para a expressão da força eletrostática $R = ee'/\sigma^2$, e é possível encontrar da Equação (2) e da Equação (3), para $x = 0$,

$$U = \pm \int_{\sigma=\rho}^{\sigma=\infty} \frac{ee'}{\sigma^2} d\sigma = \pm \frac{ee'}{\rho} = a .$$

Além disso, se denotarmos por c ao valor de r' na Equação (1) para $x = a = \pm ee'/\rho$ teremos:

$$\pm \frac{ee'}{\rho} = \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon \varepsilon'}{(\varepsilon + \varepsilon')} \right] \cdot c^2 ,$$

e se substituirmos o valor de

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon \varepsilon'}{(\varepsilon + \varepsilon')} \right] = \pm \frac{ee'}{\rho c^2}$$

dado por isso na Equação (1), encontraremos então que:

$$x = \pm \frac{ee'}{\rho} \cdot \frac{r'^2}{c^2} .$$

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 .$$

Se substituirmos agora esse valor de x e o valor encontrado previamente de $a = \pm ee'/\rho$ na Equação (3) e apelarmos para a Equação (2), obteremos então:

$$U = \pm \frac{ee'}{\rho} \left(1 - \frac{r'^2}{c^2} \right) = \pm \int_{\sigma=\rho}^{\sigma=\infty} R[\sigma, f_\rho(\sigma)] d\sigma .$$

Temos agora identicamente:

$$-d \cdot \frac{ee'}{\sigma} \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{d\sigma^2}{dt^2} \right) = \frac{ee'}{\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{d\sigma^2}{dt^2} + \frac{2\sigma}{c^2} \frac{d^2\sigma}{dt^2} \right) d\sigma ,$$

de onde segue a seguinte integral indefinida:

$$-\frac{ee'}{\sigma} \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{d\sigma^2}{dt^2} \right) = \int \frac{ee'}{\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{d\sigma^2}{dt^2} + \frac{2\sigma}{c^2} \frac{d^2\sigma}{dt^2} \right) d\sigma .$$

Agora, quando substituimos nisso $d\sigma/dt = f_\rho(\sigma)$, o que denota uma função de σ que possui o valor r' quando $\sigma = \rho$, isso fornecerá então:

$$-\frac{ee'}{\sigma} \left(1 - \frac{1}{c^2} [f_\rho(\sigma)]^2 \right) = \int \frac{ee'}{\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} [f_\rho(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2} \frac{d \cdot f_\rho(\sigma)}{dt} \right) d\sigma ,$$

e se considerarmos essa integral entre os limites $\sigma = \rho$ e $\sigma = \infty$, obteremos:

$$\frac{ee'}{\rho} \left(1 - \frac{1}{c^2} [f_\rho(\rho)]^2 \right) = \int_{\sigma=\rho}^{\sigma=\infty} \frac{ee'}{\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} [f_\rho(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2} \frac{d \cdot f_\rho(\sigma)}{dt} \right) d\sigma ,$$

consequentemente, como $f_\rho(\rho) = r'$ e como

$$\left[\frac{ee'}{\rho} \right] \left(1 - \frac{r'^2}{c^2} \right) = \int_{\sigma=\rho}^{\sigma=\infty} R[\sigma, f_\rho(\sigma)] d\sigma ,$$

então

$$\int_{\sigma=\rho}^{\sigma=\infty} R[\sigma, f_\rho(\sigma)] d\sigma = \int_{\sigma=\rho}^{\sigma=\infty} \frac{ee'}{\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} [f_\rho(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2} \frac{d \cdot f_\rho(\sigma)}{dt} \right) d\sigma .$$

A suposição mais simples para satisfazer a essa fórmula consiste em colocar

$$R[\sigma, f_\rho(\sigma)] = \frac{ee'}{\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} [f_\rho(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2} \frac{d \cdot f_\rho(\sigma)}{dt} \right) .$$

Na expressão para a *capacidade de trabalho* U , [a expressão] $f_\rho(\sigma)$ foi colocada igual a $d\sigma/dt$ para denotar uma função de σ que possui o valor dado r' para $\sigma = \rho$.

Na expressão do *potencial* V também seria necessário colocar agora $f_r(\sigma)$ no lugar de $d\sigma/dt$ para assim designar uma função de σ que possuísse o valor dado r' para $\sigma = r$, e seria obtido de maneira semelhante:

$$R[\sigma, f_r(\sigma)] = \frac{ee'}{\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} [f_r(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2} \cdot \frac{d \cdot f_r(\sigma)}{dt} \right) .$$

Nesse último caso, entretanto, em que $\sigma = r$ e $d\sigma/dt = r'$ são a distância real e a velocidade real, é comum não usar o símbolo de função $f_r(\sigma)$, mas deixar $d\sigma/dt$ inalterado na fórmula. Além disso, pode-se então omitir a designação especial da força repulsiva entre as duas partículas como uma função de σ e $d\sigma/dt$ adicionando essas variáveis sob o símbolo

de função R , ou seja, $R(\sigma, d\sigma/dt)$, colocando apenas R em seu lugar. Se isso for feito agora, a lei geral da força R , com a qual duas partículas elétricas e e e' em movimento arbitrário agem uma sobre a outra, será representada pela seguinte fórmula:

$$R = \frac{ee'}{\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{d\sigma^2}{dt^2} + \frac{2\sigma}{c^2} \frac{d^2\sigma}{dt^2} \right) .$$

Finalmente, o *princípio da energia* estabelecido aqui será aplicado para a lei estabelecida por C. Neumann nos “Principien der Elektrodynamik - Princípios da Eletrodinâmica”, Tübingen 1868, página 37,²⁷⁸ e nos *Berichten der Königl. Sächs. Gesellschaften der Wissenschaften*, 1871, Seção 20, página 399,²⁷⁹ cuja concordância com o princípio anterior é particularmente interessante de provar.

Neumann expressou essa lei da seguinte maneira nesta última obra:

Se um sistema de qualquer número de partículas $M + \mu$ se mover sob a influência de determinadas forças externas, a seguinte fórmula se aplicará a cada elemento de tempo dt :

$$d(T + U^0 + U - V) = dS ,$$

ou seja, para cada intervalo de tempo, o aumento na *energia* do sistema será igual ao trabalho consumido pelo sistema durante esse intervalo de tempo. A *energia* do sistema deve ser entendida como a expressão $T + U^0 + U - V$, que depende apenas de seu estado instantâneo (ou seja, das coordenadas e velocidades), em que T denota a força viva, U^0 o potencial comum do sistema, U o potencial eletrostático e V o potencial eletrodinâmico.

A *capacidade de trabalho* ou a *energia de trabalho* U de duas partículas elétricas e e e' (que estão a uma distância r definida uma da outra e têm uma força viva relativa x definida) foi encontrada como sendo:

$$U = \int_{\sigma=\rho}^{\sigma=\infty} \frac{ee'}{\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} [f_\rho(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2} \frac{d \cdot f_\rho(\sigma)}{dt} \right) d\sigma ,$$

na qual $f_\rho(\sigma) = d\sigma/dt$ denota uma função de σ cujo valor para $\sigma = \rho$ é dado pela força viva existente x , a saber, pela equação

$$\pm \frac{ee'}{\rho c^2} [f_\rho(\rho)]^2 = x \quad \text{ou} \quad f_\rho(\rho) = c \sqrt{\pm \frac{\rho x}{ee'}} .$$

O valor para U obtido anteriormente pode agora ser representado como uma soma de dois termos, a saber:

$$U = \int_{\sigma=\rho}^{\sigma=r} \frac{ee'}{\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} [f_\rho(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2} \frac{d \cdot f_\rho(\sigma)}{dt} \right) d\sigma$$

²⁷⁸Ver a Nota de rodapé 270.

²⁷⁹[Neu71a, pág. 399].

$$+ \int_{\sigma=r}^{\sigma=\infty} \frac{ee'}{\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} [f_\rho(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2} \frac{d \cdot f_\rho(\sigma)}{dt} \right) d\sigma .$$

Como nada mais é geralmente determinado aqui sobre a função $f_\rho(\sigma)$ do que meramente seu valor para $\sigma = \rho$, que resulta da equação $[\pm ee'/\rho c^2][f_\rho(\rho)]^2$, ou seja, $f_\rho(\rho) = c\sqrt{\pm \rho x/ee'}$, funções muito diferentes de σ geralmente podem ser definidas para $f_\rho(\sigma)$.

A função $f_\rho(\sigma)$ só seria *realmente determinável* com precisão se fosse uma questão de *deslocamento real* das partículas e e e' , onde seriam realmente fornecidas todas as relações das quais depende a função $f_\rho(\sigma)$. Entretanto, não se pode falar de um *deslocamento real* de ρ para ∞ para partículas que não estão a uma distância ρ , mas sim a uma distância r . Para fins da definição de U , entretanto, é suficiente imaginar o deslocamento das partículas de ρ para ∞ somente depois de tê-las imaginado *previamente* deslocadas de r para ρ , e de tal forma que a força viva relativa das partículas na distância ρ seria novamente a mesma que havia sido na distância r , ou seja, $x = [\pm ee'/\rho c^2][f_\rho(\sigma)]^2$, sendo que o valor da função $f_\rho(\sigma)$ é determinado para $\sigma = \rho$.

Se imaginássemos agora que o deslocamento adicional das partículas, ou seja, primeiro de ρ de volta para r , ocorresse apenas sob a influência mútua entre as próprias partículas, *sem a influência de forças externas*; então, como $f_\rho(\sigma)$ é dado para $\sigma = \rho$, ou seja, $f_\rho(\rho) = c\sqrt{\pm \rho x/ee'}$, o valor de $f_\rho(\sigma)$ para um valor de σ diferente de ρ , por exemplo, para $\sigma = r$, pode ser encontrado $= c\sqrt{\pm \rho y/ee'}$, em que y deve ser determinado pela seguinte equação:

$$y - x = \int_{\sigma=\rho}^{\sigma=r} \frac{ee'}{\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} [f_\rho(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2} \frac{d \cdot f_\rho(\sigma)}{dt} \right) d\sigma ,$$

isto é, a mudança na força viva relativa durante a mudança na distância de ρ para r é igual ao trabalho realizado pelas forças de interação no caminho percorrido.

Mas se, além das forças resultantes da interação, outras *forças externas* P agissem sobre as partículas durante sua mudança de distância e também tentassem afastá-las umas das outras (ou aproximá-las), então y seria determinado pela seguinte equação:

$$y - x = \int_{\sigma=\rho}^{\sigma=r} \frac{ee'}{\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} [f_\rho(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2} \frac{d \cdot f_\rho(\sigma)}{dt} \right) d\sigma + S ,$$

onde $S = \int_{\sigma=\rho}^{\sigma=r} P d\sigma$ denota o trabalho feito pelas *forças externas*.

Entre todos os casos concebíveis dessa maneira, há também o caso em que temos

$$\int_{\sigma=\rho}^{\sigma=r} \frac{ee'}{\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} [f_\rho(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2} \frac{df_\rho(\sigma)}{dt} \right) d\sigma + S = 0 ,$$

para o valor $\sigma = r$, que é igual à distância real das partículas que possuem a força viva relativa x , para a qual U é procurado, ou seja, temos $y = x$. Isto significa que a força viva das duas partículas no final da mudança na distância só pode ser a mesma que no início se o trabalho realizado pelas *forças de interação* durante a mudança na distância for anulado pelo trabalho realizado pelas *forças externas*.

Mas se a força viva relativa entre as duas partículas para a distância $\sigma = r$, que é denotada por y , for a mesma *no final* da mudança de distância indicada na integral

$$\int_{\sigma=\rho}^{\sigma=r} \frac{ee'}{\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} [f_\rho(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2} \frac{df_\rho(\sigma)}{dt} \right) d\sigma$$

assim como era *no início*, ou seja, $= x$, é óbvio que o mesmo valor da força viva x também se aplicará à distância $\sigma = r$, *no início* da mudança adicional da distância de r para ∞ indicada na integral

$$\int_{\sigma=r}^{\sigma=\infty} \frac{ee'}{\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} [f_\rho(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2} \frac{df_\rho(\sigma)}{dt} \right) d\sigma .$$

A partir disso, no entanto, fica claro que a diferença entre as funções $f_\rho(\sigma)$ e $f_r(\sigma)$ desaparece e

$$\int_{\sigma=r}^{\sigma=\infty} \frac{ee'}{\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} [f_\rho(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2} \frac{df_\rho(\sigma)}{dt} \right) d\sigma$$

denota o mesmo trabalho que

$$\int_{\sigma=r}^{\sigma=\infty} \frac{ee'}{\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} [f_r(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2} \frac{df_r(\sigma)}{dt} \right) d\sigma ,$$

ou seja, o trabalho que seria realizado como resultado da interação das partículas que possuem a dada força viva x com uma mudança na distância de r para ∞ . Temos então

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma=r}^{\sigma=\infty} \frac{ee'}{\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} [f_\rho(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2} \frac{df_\rho(\sigma)}{dt} \right) d\sigma \\ &= \int_{\sigma=r}^{\sigma=\infty} \frac{ee'}{\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} [f_r(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2} \frac{df_r(\sigma)}{dt} \right) d\sigma = V . \end{aligned}$$

De acordo com isso, podemos colocar a primeira parte de U , a saber:

$$\int_{\sigma=\rho}^{\sigma=r} \frac{ee'}{\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} [f_\rho(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2} \frac{df_\rho(\sigma)}{dt} \right) d\sigma = -S ,$$

e a segunda parte de U , a saber:

$$\int_{\sigma=r}^{\sigma=\infty} \frac{ee'}{\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} [f_\rho(\sigma)]^2 + \frac{2\sigma}{c^2} \frac{df_\rho(\sigma)}{dt} \right) d\sigma = V ,$$

o que fornece:

$$U = V - S ,$$

e se substituirmos esse valor na equação:

$$U + x = a ,$$

obteremos então a seguinte equação:

$$V + x - S = a .$$

Para as mesmas partículas, quando estão a uma distância r_1 e têm a força relativa x_1 , a seguinte equação resulta da mesma maneira:

$$V_1 + x_1 - S_1 = a ,$$

a partir disso é obtida a seguinte equação diferencial para pequenos valores de $r - r_1$ e $x - x_1$:

$$dV + dx - dS = 0 ,$$

que é a mesma equação estabelecida por Neumann no local indicado. Porém, Neumann denotou a força viva por T e o potencial, composto de uma parte eletrostática e outra eletrodinâmica, por $U - V$ e, finalmente, para o caso em que massas ponderáveis aderem às partículas elétricas, ele adicionou o potencial U^0 resultante da interação dessas massas ponderáveis, após o que ele expressou a mesma lei na seguinte equação:

$$d(T + U^0 + U - V) = dS .$$

13.3 Sobre as Objeções que foram Levantadas Contra a Lei Fundamental da Ação Elétrica

Se a lei fundamental da ação elétrica, de acordo com a qual a força repulsiva

$$R = \left[\frac{ee'}{r^2} \right] \left(1 - \left[\frac{1}{c^2} \right] \left[\frac{dr^2}{dt^2} \right] + \left[\frac{2r}{c^2} \right] \left[\frac{d^2r}{dt^2} \right] \right) ,$$

resulta da interação entre duas partículas elétricas e e e' (expressas em unidades eletrostáticas), for considerada na conexão aqui desenvolvida com o princípio da energia, é evidente que em todas as aplicações que devem ser feitas dessa lei para determinar, a partir das *relações iniciais* das partículas, seu comportamento subsequente, essas *relações iniciais* não devem ser assumidas como inteiramente arbitrárias. Elas não devem ser assumidas de tal forma que já contenham contradições com o princípio no qual se baseiam, o que seria o caso, por exemplo, se fosse atribuída a duas partículas elétricas uma *força viva relativa inicial*, que por si só já seria maior do que a soma total de energia das partículas, que é invariável de acordo com esse princípio.

Ao assumir tais *relações iniciais*, que estão em contradição com o princípio estabelecido, pode-se, no entanto, chegar a conclusões cuja admissibilidade pode ser corretamente criticada, de modo que a lei poderia parecer refutada, o que, no entanto, não é realmente o caso. Algumas das objeções de Helmholtz à lei anterior podem ser rastreadas até esse ponto.²⁸⁰ Por exemplo, Helmholtz chegou à conclusão, a partir da lei anterior, de que duas partículas, com uma velocidade relativa inicial que seria finita, mas maior que c (a partir da qual a força viva relativa das partículas seria maior que a soma total de energia, que é invariante de acordo com o princípio), alcançariam uma força viva infinita durante uma mudança finita na distância e, portanto, realizariam um trabalho infinitamente grande. A possibilidade de um *perpetuum mobile* também poderia ser deduzida desse fato.²⁸¹

Essas deduções, no entanto, desaparecem por si mesmas se, de acordo com o princípio estabelecido, o conceito de uma *quantidade essencialmente positiva* estiver ligado a *cada energia*, e todas elas juntas formarem uma *soma finita e invariável*; mas mesmo se alguém considerasse valores negativos e infinitamente crescentes como admissíveis para serem ligados a uma energia, essas deduções não levariam necessariamente à rejeição da lei anterior, porque não existiria mais a razão para declarar essas deduções inadmissíveis. Pois é óbvio que, se

²⁸⁰[Hel73].

²⁸¹Ou seja, também poderia ser deduzida desse fato a possibilidade de um moto-contínuo ou máquina de movimento perpétuo.

uma energia fosse negativa e se tornasse negativamente infinita, outra energia teria de existir ao mesmo tempo, que seria positiva e se tornaria positivamente infinita. Se essa energia, crescendo até o infinito, fosse a *energia cinética*, haveria uma fonte inesgotável de *força viva*, com a qual todas aquelas ações declaradas inadmissíveis por Helmholtz poderiam ser produzidas.

As objeções à lei fundamental da ação elétrica que acabamos de considerar, que se baseiam no fato de que o princípio estabelecido da energia não é reconhecido e que as relações iniciais das partículas elétricas são assumidas como estando em contradição com ele, são agora seguidas por outras objeções baseadas no fato de que Helmholtz acredita ter provado que a distância ρ , que ele descreve como *crítica*, nem sempre é uma distância *molecular*. No entanto, ele só provou isso atribuindo à distância ρ um significado completamente diferente do que havia sido dado a ela com o objetivo de definir a *energia de trabalho* U de duas partículas elétricas e e e' . De acordo com isso, $\rho = ee'/a$ dependia exclusivamente da natureza da eletricidade e das duas partículas e e e' , ou seja, das três quantidades a , e^2 e e'^2 , que denotam a soma de energia constante do par de partículas e as forças repulsivas eletrostáticas exercidas pelas duas partículas, cada uma sobre uma partícula igual a ela, na unidade de distância.

Helmholtz, por outro lado, diz no local indicado, página 43:²⁸²

O valor da distância ρ é $\rho = 2ee'/c^2\mu$.

Helmholtz, portanto, definiu μ como $2a/c^2$. Helmholtz continua:

Se a partícula elétrica possuir apenas sua própria massa, então e/μ terá um determinado valor β . Se μ também contiver massa ponderável, então e/μ será $< \beta$.

Disto fica claro que, de acordo com Helmholtz, ρ é uma quantidade que também depende da massa ponderável ligada à partícula elétrica e e, portanto, tem um significado completamente diferente daquele dado na lei que estabeleci. Helmholtz continua:

Mas mesmo que $b = 2e/c^2\mu$ seja uma quantidade extremamente pequena, ρ não depende apenas de b , mas temos $\rho = be'$, e e' ainda pode ter qualquer valor e, consequentemente, também ρ . Deve-se observar que, se quisermos pensar em e' como uma massa esférica de determinada densidade, seja como um fluido elétrico ou como um isolante permeado ou coberto com algum tipo de eletricidade, o diâmetro dessa esfera crescerá como $\sqrt[3]{e'}$ ou como $\sqrt[2]{e'}$ à medida que e' aumentasse, dependendo do fato de e' ser acumulado no interior ou na superfície, mas ρ [cresceria] como o próprio e' , e que, ao aumentar e' adequadamente, podemos dar à magnitude ρ qualquer tamanho finito e seus pontos finais [podem ser colocados] a qualquer distância da superfície da massa elétrica e' .

A descrição da partícula elétrica e' dada aqui por Helmholtz evidentemente mostra como ela é diferente, de acordo com a concepção de Helmholtz, de qualquer *átomo* realmente existente na natureza de acordo com seu tamanho e massa. É fácil ver que se, em vez dos átomos realmente existentes na natureza com massas incomensuravelmente pequenas, quisermos imaginar *átomos com massas planetárias*,²⁸³ o que depende de cada um, as distâncias

²⁸²[Hel73, pág. 43].

²⁸³Em alemão: *Atome mit Weltkörpermassen*.

moleculares ou atômicas nesse mundo imaginário não serão, obviamente, tão incomensuravelmente pequenas quanto no mundo real. É evidente o fato de que tais átomos gigantes poderiam ser produzidos, de acordo com a ficção, de conexões sólidas de átomos ponderáveis entre si e com átomos elétricos; mas isso não pode ser afirmado contra a lei fundamental da ação elétrica, que não tem nenhuma conexão com tais ficções.

Se as dúvidas de Helmholtz, tanto em relação à possibilidade de um movimento perpétuo quanto em relação ao tamanho mensurável da distância crítica ρ , parecem resultar principalmente de diferenças em visões e ideias básicas, as coisas devem ser diferentes quando consideramos a próxima objeção. Uma objeção levantada por Helmholtz consiste essencialmente no fato de que, como Helmholtz acredita ter provado, decorre da lei fundamental que estabeleci

que, em certos casos, com uma força motriz para frente, o ponto (impulsionado) μ é acelerado para trás e vice-versa.²⁸⁴

Mas essa prova baseia-se essencialmente no fato de que Helmholtz, tanto no *Journal de Borchardt*, Volume 75, página 47,²⁸⁵ quanto no *Montatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1872, 18 de abril, página 253,²⁸⁶ fala de uma *força viva* igual a²⁸⁷

$$\frac{1}{2} \left(\mu - \left[\frac{1}{c^2} \right] \left[\frac{ee'}{r} \right] \cos \vartheta^2 \right) q^2 ,$$

onde q é a velocidade com que a massa μ se move, mas onde a quantidade $-[1/c^2][ee'/r] \cos \vartheta^2$ não é uma *massa realmente existente*, muito menos uma massa que se move com a velocidade q . Agora, não fui capaz de adivinhar o que o Sr. Helmholtz quis dizer ao afirmar sobre a quantidade

$$\left(\mu - \left[\frac{1}{c^2} \right] \left[\frac{ee'}{r} \right] \cos \vartheta^2 \right) ,$$

que ela não é a massa que se move com a velocidade q , mas que ela *representa* essa massa (*Journal de Borchardt*, Vol. 75, página 48), ou que *seja*, por assim dizer, essa massa (*Monatsbericht*, 1872, 18 de abril, página 253), e, portanto, não entendo como Helmholtz, com a ajuda dessa comparação, chegou a descobrir

como consequência da lei de Weber, que em certos casos, com uma força motriz para frente, o ponto μ é acelerado para trás e vice-versa.

Tampouco entendo como essa quantidade que meramente *representa* uma massa, ou, por assim dizer, *seja* uma massa, pode *colidir* com outra massa realmente existente e como os movimentos desta última *após a colisão* podem ser determinados a partir das leis que se aplicariam se fosse uma questão de *massas realmente existentes se movendo com a velocidade q*.

²⁸⁴[Hel73, pág. 51].

²⁸⁵[Hel73, pág. 47]. Ver também a Nota de rodapé 27 na página 27.

²⁸⁶[Hel72a, pág. 253] com tradução para o inglês em [Hel72b], ver também [Hel82].

²⁸⁷A próxima equação deve ser entendida como:

$$\frac{1}{2} \left(\mu - \left[\frac{1}{c^2} \right] \left[\frac{ee'}{r} \right] \cos^2 \vartheta \right) q^2 .$$

No *Journal* de Borchardt, bem como no *Montatsberichte der Berliner Akademie*, o Sr. Helmholtz forneceu a equação da força viva desenvolvida por ele a partir de minha lei fundamental, que, para o caso de apenas *uma* massa pontual móvel μ com a carga elétrica e ²⁸⁸ em um espaço delimitado por uma superfície esférica de raio R uniformemente coberta de eletricidade, é reduzida à seguinte equação, em que ε denota a quantidade de eletricidade na área unitária da superfície esférica,²⁸⁹ a saber:²⁹⁰

$$\frac{1}{2} \left(\mu - \frac{4\pi}{3c^2} \cdot R\varepsilon e \right) q^2 - V + C = 0 .$$

Aqui V denota o potencial das forças *não elétricas*, e dV/ds denota a *força motriz*, como afirma Helmholtz. Resulta dessa equação por diferenciação:

$$\left(\mu - \frac{4\pi}{3c^2} \cdot R\varepsilon e \right) q \frac{dq}{ds} - \frac{dV}{ds} = 0 ;$$

portanto, se dV/ds for positivo, o que, de acordo com Helmholtz, é o caso de uma *força motriz para frente*, se ao mesmo tempo $\mu - [4\pi/c] \cdot R\varepsilon e$ for *negativo*, q vai diminuir, ou seja, μ será *acelerado para trás*.

Entretanto, Helmholtz considerou apenas *uma parte da força motriz*, ou seja, aquela que resulta do potencial das forças *não elétricas*. A *outra parte da força motriz*, que resulta do *potencial elétrico* ($[4\pi/6c^2]R\varepsilon e \cdot q^2$), cujo potencial foi reunido por Helmholtz com a força viva $\frac{1}{2}\mu q^2$, simplesmente porque tem o fator q^2 em comum com ela, Helmholtz não levou em conta de forma alguma ao afirmar: “*com uma força motriz para frente, q diminui, ou μ é acelerado para trás, se $(\mu - [4\pi/3c^2]R\varepsilon e)$ for negativo*”. Em vez disso, deveria ser lido: no caso de uma força *não elétrica* impulsionando para frente, μ é acelerado para trás se $(\mu - [4\pi/3c^2]R\varepsilon e)$ for negativo. No entanto, se *toda a força motriz* for levada em consideração em vez de apenas uma *parte* dela, então a partir da equação anterior será obtido por diferenciação:

$$\mu q \frac{dq}{ds} - \left(\frac{4\pi}{3c^2} R\varepsilon e \cdot q \frac{dq}{ds} + \frac{dV}{ds} \right) = 0 ,$$

onde $([4\pi/3c^2]R\varepsilon e \cdot q[dq/ds] + dV/ds)$ é a *força motriz total*, e disso segue que:

$$dq = \frac{ds}{\mu q} \left(\frac{4\pi}{3c^2} \cdot R\varepsilon e \cdot q \frac{dq}{ds} + \frac{dV}{ds} \right) ,$$

ou seja, levando em consideração que $ds/\mu q$ é sempre positivo, no caso de uma *força motriz total para a frente* (elétrica e não elétrica consideradas em conjunto), μ é sempre *acelerado*

²⁸⁸Em alemão: *mit dem elektrischen Quantum e*. Essa expressão pode ser traduzida como “com o quantum elétrico e ”, “com a quantidade elétrica e ”, “com o conteúdo elétrico e ”, “com a carga elétrica e ” ou “com a quantidade de carga elétrica e ”.

²⁸⁹Em alemão: *wo ε das Quantum Elektrizität auf der Flächeneinheit der Kugeloberfläche bezeichnet*. Ver a Nota de rodapé 288.

²⁹⁰Em sua sexta Memória principal sobre *Medições Eletrodinâmicas* de 1878 Weber apresentou o seguinte comentário sobre a próxima equação, [Web78a, pág. 405 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21f], relacionada ao seguinte artigo de Neumann: [Neu74, parágrafos 3 e 7]. Ver ainda a Nota de rodapé 419 na página 222 dessa tradução em português:

O fator $\frac{1}{2}q^2$ nessa equação não é $(\mu - [4\pi/3c^2]R\varepsilon e)$, como afirmado por Helmholtz, mas $(\mu - [8\pi/3c^2]R\varepsilon e')$. Conferir Neumann, parágrafos 3 e 7 de seu Tratado nesse Volume.

para a frente e vice-versa, sendo completamente irrelevante se $(\mu - [4\pi/3c^2]R\epsilon e)$ tem um valor positivo ou negativo.

Agora que foi eliminada dessa forma a aparente inconsistência nas conclusões tiradas por Helmholtz da minha lei fundamental, um resultado surpreendente ainda permanece, ou seja, de acordo com essa lei, uma força *não elétrica que retarda* a partícula μ em seu movimento, que é representada por um valor negativo de dV/ds , resulta indiretamente em uma força elétrica $= [4\pi/3c^2]R\epsilon e \cdot q[dq/ds]$, que *acelera* a partícula μ em seu movimento, e a acelera mais do que é retardada pela força anterior.

A *causa imediata* dessa força elétrica ($[4\pi/3c^2]R\epsilon e \cdot q[dq/ds]$) não está na força dV/ds , mas, de acordo com a lei fundamental, na *aceleração relativa* existente, que é representada aqui por $q[dq/ds]$, da qual essa força é obtida da maneira indicada pela multiplicação com $[4\pi/3c^2]R\epsilon e$. No entanto, a própria aceleração $q[dq/ds]$ resulta, de acordo com a lei geral do movimento, não de *uma*, mas de *todas as forças existentes*, ou seja, não apenas da força *não elétrica* dV/ds , mas também da força *elétrica* ($[4\pi/3c^2]R\epsilon e \cdot q[dq/ds]$), ou seja, dividindo a soma de ambas as forças por μ , de acordo com o que:

$$q \frac{dq}{ds} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{dV}{ds} + \frac{4\pi}{3c^2} R\epsilon e \cdot q \frac{dq}{ds} \right) .$$

Agora, em geral, os valores da *aceleração* $q[dq/ds]$ e da *força elétrica* ($[4\pi/3c^2]R\epsilon e \cdot q[dq/ds]$) serão então representados também como dependendo indiretamente apenas da *força não elétrica* dV/ds , a saber:

$$q \frac{dq}{ds} = \frac{1}{\mu - \frac{4\pi}{3c^2} R\epsilon e} \cdot \frac{dV}{ds} ,$$

$$\frac{4\pi}{3c^2} R\epsilon e \cdot q \frac{dq}{ds} = \frac{\frac{4\pi}{3c^2} R\epsilon e}{\mu - \frac{4\pi}{3c^2} R\epsilon e} \cdot \frac{dV}{ds} .$$

Portanto, se o valor dado de dV/ds for *negativo*, uma *dada* força *não elétrica que impulsiona para trás* a massa μ movendo-se com a velocidade q , resultaria em uma força elétrica muito maior *impulsionando* a mesma massa *para frente* se o valor negativo de $(\mu - [4\pi/3c^2]R\epsilon e)$ for muito pequeno.

E como é óbvio que o denominador $(\mu - [4\pi/3c^2]R\epsilon e)$ só pode se tornar zero ou negativo para um valor positivo de ϵe , ou seja, somente se a eletricidade com a qual a superfície da esfera está coberta for do mesmo tipo que a eletricidade que adere à massa ponderável móvel, então, para $\mu > [4\pi/3c^2]R\epsilon e$, a força elétrica ($[4\pi/3c^2]R\epsilon e \cdot q[dq/ds]$) tem a *mesma direção* que a força não elétrica dV/ds e sua magnitude, que é igual à outra força para $[4\pi/3c^2]R\epsilon e = \mu/2$, cresce com o aumento do valor de $[4\pi/3c^2]R\epsilon e$ até se tornar *infinita* para $[4\pi/3c^2]R\epsilon e = \mu$ e, em seguida, *muda de sinal*.

Esse salto da força elétrica em *intensidade* e *direção*, a saber, de $+\infty$ para $-\infty$, poderia causar ofensa como uma violação da continuidade se realmente decorresse da lei; no entanto, esse salto não ocorre de fato de acordo com a lei, pois a massa μ com sua carga e não pode, em consequência da aceleração sempre crescente, permanecer por um tempo longo o suficiente no interior da casca esférica, até que ocorra $[4\pi/3c^2]R\epsilon e = \mu$, mas já teria sido impelida mais cedo em direção à superfície da esfera formada pelo *isolante rígido*, por meio de cuja resistência o repouso teria sido restaurado.

Essas conclusões, como pode ser visto, não contêm nada de inconsistente e nem mesmo podem ser consideradas inesperadas sob condições tão extraordinárias, cuja representação

real não é sequer concebível. Pois se considerarmos cerca de 10 unidades eletrostáticas de carga para cada miligrama do portador ponderável, ou seja, $e/\mu = 10$, e se considerarmos ainda a mesma carga para cada milímetro quadrado da superfície, ou seja, $\varepsilon = 10$, então $[4\pi/3c^2]R\varepsilon e > \mu$ resulta na necessidade de ter um isolante esférico cujo raio seria $R > 3c^2/400\pi > 46 \cdot 10^{19}$ milímetros, ou seja, teria de ser 3 milhões de vezes maior do que a distância da Terra ao Sol.

A propósito, já foi chamada a atenção para outras conclusões quase mais notáveis, mas não inconsistentes, da lei fundamental da ação elétrica no Primeiro Tratado sobre Medições Eletrodinâmicas no ano de 1846,^{291,292} em particular para o fato de que a *interação entre dois corpos* se torna indiretamente dependente da *presença de um terceiro corpo*, resultando em forças que Berzelius rotulou de *catalíticas*.²⁹³

Mas mesmo que essas conclusões não encontrem analogias nas deduções tiradas de outras leis, pode-se perguntar se essa falta de analogia é uma desvantagem ou uma vantagem, uma vez que todas as deduções da lei da gravitação e de todas as outras leis estabelecidas por analogia com ela obviamente não podem levar à explicação de muitos fenômenos, especialmente aqueles que estão mais intimamente relacionados à constituição molecular dos corpos; leis de outro tipo, portanto, parecem ser necessárias para isso.

13.4 Identidade das Partes Móveis Contidas em Todos os Corpos, Cujo Movimento é Calor, Magnetismo ou Galvanismo

Todos os corpos ponderáveis são divididos em sólidos, líquidos e gasosos, e é feita uma distinção entre a estática e a dinâmica desses corpos, dependendo se eles são considerados em um estado de repouso ou em um estado de movimento. Mas, ao falar do estado de repouso na estática desses corpos, não se está de forma alguma se referindo a um estado de repouso de *todas* as partes encerradas dentro dos limites desses corpos, mas apenas das partes *ponderáveis* encerradas dentro desses limites. Sem essa restrição, nunca seria possível falar do estado de repouso de um corpo, porque todo corpo contém outras partes além de suas partes ponderáveis, que nunca entram em repouso.

Em primeiro lugar, uma pesquisa mais precisa sobre todos os fenômenos *elétricos* observados em corpos ponderáveis levou à conclusão de que há partes móveis dentro de todos esses corpos (incluindo os chamados corpos sólidos em repouso), ou seja, partes elétricas, e que os movimentos dessas partes dentro desses corpos são a causa de todos os fenômenos e ações galvânicas e eletrodinâmicas desses corpos.

Em segundo lugar, a investigação mais exata de todos os fenômenos *magnéticos* observados em corpos ponderáveis, tanto paramagnéticos quanto diamagnéticos, também levou à conclusão de que há partes móveis dentro de todos esses corpos, que por muito tempo tentou-se distinguir das primeiras [partes], ou seja, das elétricas, sob o nome de *fluidos magnéticos*. Afirmava-se que esses fluidos magnéticos podiam ser *distribuídos* de forma diferente dentro dos corpos, de acordo com as diferentes condições, mas que atingiam o repouso e o equilíbrio sob condições constantes. A razão para os fenômenos magnéticos estava na

²⁹¹[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 212.

²⁹²[Web46, pág. 212 das *Obras* de Weber] com uma tradução parcial para o francês em [Web87] e uma tradução completa para o inglês em [Web21d].

²⁹³Jöns Jacob Berzelius (1779-1848). Ver [Ber36c], [Ber36a] e [Ber36b].

distribuição desses fluidos magnéticos, sem a necessidade de movimentos contínuos deles. No entanto, investigações posteriores mostraram que a causa de *todos* os fenômenos magnéticos (paramagnéticos e diamagnéticos) não pode estar nesses fluidos magnéticos em repouso, independentemente de sua distribuição, mas que *todos* esses fenômenos podem ser explicados pela presença de *partículas em movimento contínuo dentro dos corpos ponderáveis*, ou seja, as mesmas partículas cujos movimentos são a causa de todos os fenômenos e ações galvânicas e eletrodinâmicas, ou seja, as *partículas elétricas*.

Em terceiro e último lugar, a pesquisa sobre a *temperatura* de cada corpo ponderável levou à conclusão de que há partes móveis dentro de todos esses corpos e que a causa de todos os fenômenos térmicos observados nesses corpos, ou seja, o *calor*, consiste nos movimentos dessas partes.

Agora, se as partes móveis contidas em todos os corpos ponderáveis, cujos movimentos são a causa de todas as ações galvânicas, não são outras partes além daquelas cujos movimentos são a causa de todos as ações magnéticas (paramagnéticas e diamagnéticas), então a suposição é muito óbvia, que as partes contidas em todos os corpos ponderáveis, cujo movimento é o *calor*, também são idênticas às partes contidas no interior dos corpos ponderáveis, cujo movimento é o *magnetismo*, e, conseqüentemente, também são idênticas às partes contidas no interior dos corpos ponderáveis, cujo movimento é o *galvanismo*. Pois, embora devamos geralmente admitir a existência de partes móveis no interior dos corpos, enquanto as partes ponderáveis permanecem em repouso, teremos muito mais hesitação em assumir a existência de *vários tipos de tais partes*, ou seja, em cada menor parte do corpo, que seria difícil distinguir umas das outras e investigar cada uma mais de perto. — Essa identidade presumida é agora confirmada por fatos que serão considerados em mais detalhes a seguir.

13.5 Identidade da Força Viva Gerada pela Força Eletromotriz na Corrente com o Calor Gerado pela Corrente no Condutor

A geração de calor pela corrente galvânica no condutor tem sido objeto de muitas investigações, pelas quais foi estabelecida a lei de que o *equivalente mecânico do calor gerado* no elemento de tempo dt é igual ao produto de dt com o quadrado da intensidade da corrente i e com a resistência w do condutor pelo qual a corrente passa,²⁹⁴ ambos medidos de acordo com unidades magnéticas absolutas.²⁹⁵ No entanto, deve-se observar que a maioria das medições realizadas dessa forma não foi realmente rastreada até as unidades absolutas e que essa rastreabilidade, quando tentada, ainda não alcançou a precisão e a certeza desejáveis, porque até o momento não existem escalas de resistência com redução precisamente garantida às unidades absolutas. Isso se deve ao fato de que as únicas escalas de resistência que até agora foram úteis para tais propósitos foram aquelas desenvolvidas recentemente por Siemens,²⁹⁶ e a única redução precisamente verificada dessas escalas para a resistência

²⁹⁴Denominando por dq à quantidade de calor produzida no intervalo de tempo dt temos então $dq = wi^2dt$. Esse resultado é devido a James Prescott Joule (1818-1889), [Jou41b] e [Jou41a] com tradução para o francês em [Jou42]. Uma análise detalhada do artigo de Joule pode ser encontrada em [MS20] e [Mar22].

²⁹⁵A expressão alemã *magnetische Maass* está sendo traduzida aqui como unidade magnética, ver a Nota de rodapé 218 na página 126.

²⁹⁶E. W. v. Siemens (1816-1892), [Sie60] com tradução para o inglês em [Sie61]. Ver também [GT19].

absoluta foi fornecida apenas por Kohlrausch (Volume suplementar VI, 1873, página 1).²⁹⁷

A rigor, apenas a lei da *proporcionalidade* da produção de calor com o produto $i^2 w dt$ teria que ser considerada comprovada e, para poder estabelecer a *igualdade* para ela, seriam necessárias medições absolutas ainda mais precisas do que foi possível até agora. No entanto, embora essa *igualdade* ainda não tenha sido comprovada com precisão suficiente, mas apenas de forma aproximada, nós a assumiremos aqui por enquanto, como foi feito por outros físicos.

De acordo com as *unidades magnéticas* nas quais essa lei se baseia, a resistência do condutor é $w = e/i$, em que e denota a força eletromotriz e i a intensidade da corrente gerada por essa força [eletromotriz] no condutor. Portanto, o equivalente mecânico do calor gerado pela corrente no elemento de tempo dt também pode ser representado por $e i dt$ em vez de $i^2 w dt$.

Além disso, segue-se que, de acordo com as *unidades magnéticas*, em primeiro lugar, a intensidade da corrente $i = 2Eu \cdot \sqrt{2}/c$,^{298,299} em que $2Eu$ é a soma do produto da eletricidade positiva $+E$ contida na unidade de comprimento do condutor em unidades eletrostáticas com sua velocidade $+u$, com o produto da eletricidade negativa $-E$ contida na unidade de comprimento do condutor em unidades eletrostáticas com sua velocidade $-u$.³⁰⁰

Em segundo lugar, de acordo com as *unidades magnéticas*, a força eletromotriz é dada por $e = [f/E] \cdot [c/\sqrt{2}]$,³⁰¹ em que f é a metade da diferença entre as forças expressas em unidades mecânicas que atuam sobre a eletricidade positiva e negativa no condutor na direção do condutor, e E é o número de unidades eletrostáticas de eletricidade positiva ou negativa contidas na unidade de comprimento do condutor.

Disso decorre o equivalente mecânico do calor gerado pela corrente no condutor:

$$i^2 w dt = e i dt = 2 f u dt = (+f) \cdot (+u dt) + (-f) \cdot (-u dt) ,$$

²⁹⁷[Koh73].

²⁹⁸[Nota de Wilhelm Weber:] Consulte o Quarto Tratado sobre Medições Eletrodinâmicas, 1857, página 264 [Nota de Heinrich Weber: *Obras* de Wilhelm Weber, Volume III, página 652], onde é dada a razão entre a unidade magnética da intensidade da corrente e a mecânica $= c\sqrt{2} : 4$. — A intensidade da corrente em unidades mecânicas é expressa por Eu , levando-se em conta apenas a eletricidade positiva, como é comum na determinação da direção da corrente, em que E denota a eletricidade positiva contida na unidade de comprimento do condutor em unidades eletrostáticas e u denota a velocidade com a qual ela se move. Consulte o Primeiro Tratado sobre Medições Eletrodinâmicas de 1846, Seção 21, página 114 e seguintes [Nota de Heinrich Weber: *Obras* de Wilhelm Weber, Volume III, pág. 152]. — De acordo com isso, a intensidade da corrente é determinada em unidades magnéticas como $i = Eu \cdot 2\sqrt{2}/c$.

²⁹⁹[KW57, pág. 652 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [KW21]. Ver também [Web46, pág. 152 das *Obras* de Weber] com uma tradução parcial para o francês em [Web87] e uma tradução completa para o inglês em [Web21d].

³⁰⁰As velocidades u e $-u$ aqui referem-se à velocidade de deriva das partículas eletrizadas em relação ao fio condutor conduzindo uma corrente elétrica.

³⁰¹[Nota de Wilhelm Weber:] A força eletromotriz exercida em um condutor é entendida como a diferença entre as forças expressas em unidades mecânicas que agiriam sobre a eletricidade positiva e negativa no condutor se cada unidade de comprimento do condutor contivesse uma unidade de eletricidade positiva e negativa. De fato, se cada unidade de comprimento contivesse *uma unidade eletrostática* de eletricidade positiva e negativa, a força eletromotriz que agiria no condutor seria expressa em *unidades mecânicas*; se, por outro lado, contivesse *uma unidade magnética* de eletricidade positiva e negativa, que é $c/2\sqrt{2}$ vezes maior do que a unidade eletrostática, a força eletromotriz que agiria no condutor seria expressa em *unidades magnéticas*. — Se denotarmos agora por $2f$ a diferença entre as forças expressas em unidades mecânicas que realmente agem sobre a eletricidade positiva e negativa contida no condutor e por E o número de unidades eletrostáticas de eletricidade positiva ou negativa contidas em cada unidade de comprimento, a força eletromotriz exercida sobre o condutor expressa em *unidades mecânicas* será $= 2f/E$ e em *unidades magnéticas* será dada por $e = [f/E] \cdot [c/\sqrt{2}]$.

que é igual à soma dos produtos da força que atua em cada partícula que está fluindo com a distância percorrida por essa partícula na direção da força que atua sobre ela, ou seja, igual ao *trabalho realizado pela corrente*.³⁰²

Se nenhuma outra força atuar sobre a eletricidade que flui no condutor além da força eletromotriz, é óbvio que a força viva da eletricidade que flui deve aumentar e que a magnitude desse aumento é dada pela magnitude do *trabalho elétrico*. Desse aumento na força viva da eletricidade que flui decorre um aumento na velocidade com que a eletricidade que flui se desloca. Se, portanto, a eletricidade fluindo no condutor não estivesse em outro movimento além do movimento da corrente, isso resultaria em um aumento constante na intensidade da corrente, o que, no entanto, estaria em contradição com a *corrente constante* assumida aqui, para a produção da qual, de acordo com a lei de Ohm,³⁰³ é necessária uma força eletromotriz constante.

Portanto, no caso assumido aqui, resta apenas que a eletricidade no condutor *não está sempre em mero movimento de corrente*, mas que esse movimento de corrente ocasionalmente se transforma temporariamente em *outro* movimento e vice-versa.

Agora, se esse *outro* movimento é o movimento da eletricidade em torno das moléculas ponderáveis, que está sempre presente no condutor e que é a causa de todos os fenômenos magnéticos (paramagnéticos e diamagnéticos), e do qual participa uma quantidade tão grande de eletricidade que a quantidade de eletricidade em fluxo desaparece em comparação; segue-se, por si só, que a eletricidade que flui deve sempre ter partido das correntes moleculares anteriores a uma velocidade menor do que [a velocidade com] que atinge as correntes moleculares seguintes, como resultado da aceleração que sofreu em seu caminho devido à força eletromotriz; mas que o aumento na força viva assim obtido pela eletricidade que flui é imediatamente cedido novamente às correntes moleculares na próxima estação, de modo que, com uma corrente persistente, apenas as *correntes moleculares* aumentam em força viva. Esse aumento da força viva nada mais é do que o calor produzido pela corrente no próprio condutor, como fica evidente pelo fato de ser igual ao equivalente mecânico do calor produzido, o que, como já foi observado, foi pelo menos aproximadamente comprovado. — Isso confirma a conjectura expressa no final da Seção anterior, de que as partes móveis contidas em todos os corpos ponderáveis, cujo movimento é o *calor*, são idênticas às partes contidas em todos os corpos ponderáveis cujo movimento é o *magnetismo*. Não há outras partes móveis dentro dos corpos que sejam independentes das partes ponderáveis além dessas, ou seja, as partes *elétricas*.

13.6 Movimento da Eletricidade nos Condutores

Se a eletricidade em todos os corpos está em constante movimento, especialmente em torno das moléculas ponderáveis, e se esses movimentos são a causa de todos os fenômenos *galvânicos*, *magnéticos* e *térmicos*; isso também é verdade para a eletricidade nos *condutores*, especialmente nos *condutores metálicos*, que se distinguem acima de todos os outros corpos por seu comportamento *galvânico*, assim como em relação à *condução de calor*³⁰⁴ e, finalmente, alguns, como o ferro e o bismuto, também por seu *magnetismo* ou *diamagnetismo*,

³⁰²Em alemão: *Stromarbeit*. Essa expressão pode ser traduzida como trabalho elétrico, trabalho realizado pela corrente, trabalho da corrente, trabalho da eletricidade ou trabalho da corrente elétrica.

³⁰³Ver a Nota de rodapé 200 na página 112.

³⁰⁴Em alemão: *Wärmeleitung*. Essa expressão pode ser traduzida como condução de calor ou condução térmica.

cuja razão obviamente deve ser buscada em condições especiais nas quais é encontrada a eletricidade nesses corpos.

Os movimentos de corrente elétrica ocorrem preferencialmente em *condutores metálicos* e, na verdade, os movimentos *puramente elétricos* (ou seja, aqueles em que apenas a eletricidade flui, sem a participação das partes ponderáveis), ocorrem *apenas* em condutores metálicos; pois nos *condutores não metálicos*, chamados úmidos ou *decomponíveis*,³⁰⁵ nenhuma corrente ocorre sem ação *eletrolítica*, ou seja, não sem a participação de partes ponderáveis na corrente, ou seja, algumas partes ponderáveis na corrente de eletricidade positiva, outras na corrente de eletricidade negativa.

Agora, a *persistência* das correntes elétricas em condutores metálicos requer uma explicação mais detalhada. Sabe-se pelas leis de Ohm que uma *corrente constante* só pode existir em condutores fechados sob a ação persistente de uma determinada força eletromotriz e, de acordo com a Seção anterior, essa força eletromotriz teria de acelerar em sua direção a eletricidade que flui, o que, portanto, alteraria a intensidade da corrente.

Se, no entanto, a corrente no condutor, conforme declarado na Seção anterior, consistir apenas em *elementos de corrente*, nos quais o movimento da corrente passa ininterruptamente apenas de uma molécula condutora para a outra, e se uma partícula elétrica, ao atingir a outra molécula condutora por meio desse movimento de corrente, se misturar com a eletricidade lá presente, que se move ao redor dessa molécula *passando* do movimento de corrente para o movimento de rotação, enquanto que, em vez dela, alguma outra partícula da eletricidade lá presente, *passando* do movimento de rotação para o movimento de corrente, forma um segundo elemento de corrente, e assim por diante; é evidente que, embora a aceleração da eletricidade deva ocorrer em cada elemento de corrente por meio da força eletromotriz, não é necessário que haja aumento na intensidade de toda a corrente, se em todos os elementos de corrente as partículas elétricas começarem seu movimento de corrente com uma velocidade sempre igual, *porém menor*, e terminarem com uma velocidade sempre igual, *porém maior*.

Disso resulta que, nos condutores metálicos, a *transição* do movimento rotacional das partículas elétricas para o movimento da corrente e vice-versa deve desempenhar um papel especial, pois é por meio dessa transição que a própria condução elétrica deve ser mediada.

Além disso, no entanto, a *condução elétrica* e a *condução térmica* em condutores metálicos estão intimamente relacionadas, e é óbvio que, se o calor for realmente idêntico à força viva da eletricidade que se move continuamente dentro dos corpos ponderáveis, a *condução de calor em condutores metálicos* deve ser mediada pela *transição* do movimento rotacional para o movimento da corrente e vice-versa, assim como a condução da corrente elétrica.

Se a razão para a capacidade de um condutor metálico conduzir eletricidade e calor residir no fato de que as partes elétricas em movimento rotacional podem *mudar* para o movimento de corrente e vice-versa, surge a pergunta sobre do que depende essa transição e por que ela ocorre nos *condutores*, mas não nos *isolantes*. Para esse fim, vamos analisar os movimentos moleculares de duas partículas elétricas de tipos diferentes³⁰⁶ consideradas no último Tratado sobre Medições Eletrodinâmicas (no Volume 10 dos *Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften*, 1871, Seção 16)^{307,308} e as diferenças nas *constituições moleculares dos corpos* baseadas nisso.

³⁰⁵Em alemão: *in nicht metallischen sogenannten feuchten oder zersetzbaren Leitern*.

³⁰⁶Ou seja, uma partícula positiva e outra negativa.

³⁰⁷[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. IV, pág. 279.

³⁰⁸[Web71, pág. 279 das *Obras de Weber*] com tradução para o inglês em [Web72] e [Web21g]. A tradução para o português aparece na Seção 9.16 do Capítulo 9.

Se nos restringirmos a esses sistemas que consistem em pares de partículas, uma das quais $-e$ é elétrica negativa e ligada a uma massa ponderável, e a outra $+e$ é elétrica positiva e se move em torno da primeira, esses sistemas podem ser diferenciados entre si pelas seguintes propriedades.

Primeira propriedade. Cada sistema desse tipo tem um valor definido e, de fato, negativo de ρ (ou seja, se $ee'/a = \rho$ e os sinais de e e e' dependem do fato de as partículas assim designadas pertencerem à eletricidade positiva ou negativa), que pode ser muito diferente para sistemas diferentes. Portanto, é uma *propriedade* de tais sistemas que cada um deles tenha um determinado valor de ρ , ou de ρc^2 , pelo qual pode ser distinguido de outros sistemas.

Segunda propriedade. De acordo com a Seção 11, no local indicado,³⁰⁹ $r^2\alpha^2 = r_0^2\alpha_0^2$ (se r_0 e α_0 denotarem os valores iniciais da distância entre as duas partículas e de sua velocidade relativa na direção perpendicular à sua linha de conexão, respectivamente, enquanto que r e α denotam os valores atuais) é uma *constante* do sistema, pelo menos enquanto nenhuma outra força atuar sobre as partículas além daquelas que resultam de sua interação. Essa *constante* é uma *segunda propriedade*, que também pode servir para distinguir entre sistemas diferentes; no entanto, isso não gera distinções *permanentes*, mas as transições de um sistema para outro podem ocorrer como resultado de influências *externas*.

Terceira propriedade. Em um sistema *persistente*, a distância entre as duas partículas pode mudar, mas deve haver uma menor distância finita r_0 , bem como uma maior r^0 , que depende da primeira. O valor da menor distância r_0 pode agora ser diferente para sistemas diferentes e pode, portanto, ser considerado como uma *terceira propriedade* que serve para distinguir entre sistemas diferentes, mas que também está sujeita a mudanças como resultado de influências externas.

Se denotarmos agora com $-n$ o quociente obtido ao dividir a segunda [constante] pelo produto da primeira e da última para esse sistema (no qual $\rho = ee'/a$, como já observado, tem um valor negativo) formado a partir das três constantes ρc^2 , $r_0^2\alpha_0^2$ e r_0 , definindo assim

$$n = -\frac{r_0\alpha_0^2}{\rho c^2},$$

resulta a seguinte equação de movimento, de acordo com a Seção 16, no local especificado,³¹⁰ em que u denota a velocidade relativa entre as duas partículas, a saber:

$$\frac{\rho - r}{\rho} \cdot \frac{u^2}{c^2} = \left(\frac{r}{r_0} - 1 \right) \cdot \left(n \left[\frac{r_0}{r} + 1 \right] - 1 \right).$$

Segue disso que para $u = 0$, temos $r = r_0$ ou $r = [n/(1-n)]r_0 = r^0$.

Além do mais, isso dá origem à distinção entre sistemas *persistentes* e *não persistentes*, de acordo com os valores de n . Um *sistema persistente*, ou seja, com r_0 como o menor valor de r e r^0 como o maior valor, só existe para $1 > n > 1/2$, ou seja, quando o valor de n está entre $1/2$ e 1 ; porque para $n > 1$ e para $n < 0$, segue-se que não existe nenhum valor para r^0 , que é essencialmente positivo, e para $1/2 > n > 0$ seria obtido $r = r^0 < r_0$, ou seja, a equação não serviria para encontrar o maior valor de r a partir do menor dos dois valores, para o qual $u = 0$, mas, inversamente, o menor valor a partir do maior.

Todos os sistemas *persistentes* podem, então, ser divididos em duas classes, a saber, aqueles em que $1/2 < n < 1 - \varepsilon$, que são *isolantes*, e aqueles em que $1 - \varepsilon < n < 1$, que

³⁰⁹Ver a Seção 9.11 do Capítulo 9.

³¹⁰Ver a Seção 9.16 do Capítulo 9.

são *condutores*. Aqui, ε é determinado pelo fato de que para $n = 1 - \varepsilon$ o maior valor de r , para o qual $u = 0$, que foi denotado por r^0 , é tão grande que a partícula em movimento entra na esfera de ação do sistema vizinho e, portanto, passa de um sistema para o outro. Se definirmos esse valor de $r^0 = (1 + \mu)r_0$ e observarmos que, em geral, $r^0 = [n/(1 - n)]r_0$, obteremos a equação $1 + \mu = n/(1 - n)$ para $n = 1 - \varepsilon$, portanto, $\varepsilon = 1/(2 + \mu)$.

Para o valor $n = 1 - \varepsilon$, em que ocorre a *transição de isolante para condutor*, a condutância³¹¹ é $= 0$ e aumenta com n se este for maior que $1 - \varepsilon$ e ainda estiver aumentando.

13.7 Dois Tipos de Propagação de Calor em Corpos Ponderáveis

As considerações da Seção anterior basearam-se essencialmente nas leis de movimento de duas partículas elétricas, que são deixadas à sua própria interação. Se outras partículas ainda estivessem presentes, supunha-se que elas estivessem tão distantes que sua influência quase desaparecia em relação à [interação] entre as duas partículas em consideração. Somente no caso em que as duas partículas de um par se afastam cada vez mais uma da outra é que deve haver um limite além do qual a influência das outras partículas se torna maior do que a interação das partículas em consideração uma sobre a outra. Entretanto, as leis de movimento que se aplicam a essa transição não podem ser desenvolvidas de forma completa e geral. Portanto, na Seção anterior foi citado apenas um resultado, a saber, que as duas partes que anteriormente formavam um par são separadas uma da outra e se unem a outras partes para formar novos pares.

Se, então, o *calor* é a força viva de partículas em movimento dentro de corpos ponderáveis e se essas partículas em movimento são partículas elétricas positivas que se movem em torno de partículas elétricas negativas aderidas a corpos ponderáveis, é óbvio que em *condutores metálicos*, conforme definido na Seção anterior, haverá *propagação de calor por condução*³¹² na interface de dois elementos condutores, e, ao mesmo tempo, em direções opostas, ou seja, quando partículas elétricas positivas individuais provenientes de uma molécula de um lado cruzam a interface na velocidade tangencial de seu movimento rotacional e se misturam com a eletricidade em rotação de uma molécula do outro lado da interface e vice-versa. Essa *propagação de calor em condutores metálicos*, que ocorre por meio da transferência de força viva *junto com seu portador*, é chamada de *propagação de calor por emissão* ou *condução térmica*.

Agora, a *propagação de calor* também ocorre em *isolantes*, ou seja, a transferência de força viva da molécula de um lado para a molécula do outro lado da interface entre dois elementos isolantes, e vice-versa, mas sem que as partículas elétricas, que são os portadores dessas forças vivas, cruzem a interface. Esse *segundo tipo de propagação de calor*, como ocorre em isolantes por meio da *transmissão de força viva sem seu portador*, é chamado de *propagação de calor por radiação*, ou *radiação térmica*.³¹³ Ela também ocorre de um corpo ponderável para outro através do espaço vazio, por exemplo, através do espaço cósmico.

Como é bem sabido, a mesma coisa que vale para esta propagação de calor por radiação no espaço vazio ou em isolantes também vale para a radiação de luz, ou seja, que ela é mediada

³¹¹Em alemão: *Leitungsvermögen*.

³¹²Em alemão: *Wärmeverbreitung durch Leitung*. Essa expressão pode ser traduzida como propagação de calor por condução ou transferência de calor por condução.

³¹³Em alemão: *Wärmestrahlung*.

pela propagação de ondas, o que pressupõe a existência de um meio de propagação de ondas. Até o momento, temos procurado aprender sobre a natureza desse meio a partir das leis do movimento ondulatório, conforme encontrado na observação dos fenômenos luminosos; mas se esse meio consistisse em eletricidade e se tivéssemos um conhecimento mais detalhado de sua constituição, seria possível desenvolver, a partir da lei fundamental da ação elétrica, as leis desses movimentos ondulatórios e explicar os fenômenos luminosos a partir deles, o que de fato foi tentado de várias maneiras, mas seria ir longe demais entrar em detalhes aqui.

13.8 Sobre a Concepção da Termoeletricidade Desenvolvida por Kohlrausch

Distinguimos dois tipos de propagação de calor, a saber, condução e radiação, que coincidem com dois tipos de propagação de movimento elétrico, a saber, a propagação de movimento com seu portador ou sem seu portador. O *primeiro* tipo de propagação ocorre em *condutores metálicos*, nos quais a eletricidade também pode ser colocada em movimento de corrente por *forças eletromotrizes*.

As correntes elétricas, entretanto, que ocorrem mesmo que as partículas não sejam movidas por nenhuma força eletromotriz, mas apenas sigam as leis de acordo com as quais elas se movem uma em torno da outra em virtude de sua interação, afastando-se uma da outra até cruzarem as fronteiras moleculares, diferem essencialmente das correntes elétricas produzidas por forças eletromotrizes porque, nas primeiras, a mesma quantidade de eletricidade passa para frente através da interface de duas moléculas *iguais e igualmente quentes* e para trás, enquanto nas correntes produzidas por *forças eletromotrizes*, uma quantidade maior de eletricidade atravessa a interface na direção da força do que na direção oposta. Essas correntes opostas e iguais se cancelam mutuamente, de modo que não resta nenhuma corrente no sentido mais restrito, pois corrente no sentido mais restrito significa apenas a *diferença* entre as duas correntes opostas.

No caso de moléculas *iguais, mas que estão em temperaturas diferentes*, de um condutor metálico, sobre as quais, de outra forma, não atuam forças eletromotrizes que produziriam uma corrente persistente em um circuito fechado, uma quantidade maior de eletricidade pode passar durante um instante da molécula mais quente através da interface para a mais fria do que a quantidade que passa para trás, mas esse intervalo de tempo dura apenas até que o excesso de eletricidade que chega às moléculas mais frias tenha produzido uma carga que exerce uma força eletromotriz na interface, pela qual a mesma quantidade de eletricidade é levada para trás das moléculas mais frias por meio da interface que seria levada para frente, de modo que a igualdade é restaurada.

Uma vez que a igualdade tenha sido estabelecida dessa forma, a *corrente elétrica* que passou pela interface por um instante vai desaparecer; o *fluxo de calor*, por outro lado, pode continuar mesmo que as partículas provenientes das moléculas mais quentes se movam *com uma velocidade maior* do que aquelas provenientes das moléculas mais frias. A partir disso, pode-se observar que, da estreita conexão entre o fluxo de calor e o fluxo elétrico, que se baseia no fato de que ambos derivam da eletricidade que passa pela interface, *não se segue necessariamente* que não possa haver fluxo de calor sem corrente elétrica, ou vice-versa.

De acordo com a visão desenvolvida por Kohlrausch sobre a *termoeletricidade* nas *Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaft zu Göttingen*, 1874, página 65,³¹⁴ essa

³¹⁴[Koh74].

conexão entre as correntes de calor e as correntes elétricas deve *realmente* existir, da mesma forma que seria o caso se a eletricidade e o calor fossem dois corpos conectados por forças coesivas, caso em que se poderia muito bem falar de uma transferência³¹⁵ do calor através da eletricidade, bem como da transferência da eletricidade através do calor. Porém o calor não é um corpo, mas a força viva de um corpo, e o *fluxo de calor* é, conseqüentemente, a transmissão da força viva de um lugar para outro, *seja com seu portador*, como nos condutores metálicos, *ou sem um portador*, como nos isolantes. Somente no *primeiro* caso, é óbvio, ou seja, em condutores metálicos, a conexão assumida por Kohlrausch poderia ocorrer; no *segundo* caso, tal conexão não é possível, porque então não existe corrente elétrica alguma.

A massa elétrica ε (em miligramas) passa por um elemento f da interface entre dois elementos condutores metálicos, das moléculas mais quentes de um lado para as mais frias do outro lado da interface, na unidade de tempo, à velocidade α . A massa ε' passa para trás através do mesmo elemento da interface, das moléculas mais frias para as mais quentes, à velocidade α' . Isso gera uma *corrente elétrica* que passa por f e, ao mesmo tempo, um *fluxo de calor* que passa por f , a primeira de intensidade $i = (\varepsilon - \varepsilon')$, de acordo com a unidade mecânica (miligramas como unidade de massa), o último de intensidade $W = (\varepsilon\alpha^2 - \varepsilon'\alpha'^2)$, de acordo com equivalentes mecânicos.

De acordo com isso, os seguintes casos são geralmente possíveis:

(1) $\varepsilon = \varepsilon'$,³¹⁶ em que um fluxo de calor de intensidade $\varepsilon(\alpha^2 - \alpha'^2)$ existiria sem corrente elétrica.

(2) $\varepsilon\alpha^2 = \varepsilon'\alpha'^2$, onde uma corrente elétrica de intensidade $(\varepsilon - \varepsilon')$ existiria sem fluxo de calor.

(3) Mesmo que nem $\varepsilon = \varepsilon'$ nem $\varepsilon\alpha^2 = \varepsilon'\alpha'^2$ fossem verdadeiros, ainda existiria uma certa relação entre $(\varepsilon - \varepsilon')$ e $(\varepsilon\alpha^2 - \varepsilon'\alpha'^2)$, que permaneceria constante para as mudanças de temperatura do condutor, mas que seria diferente de acordo com outras diferenças nos condutores.

O terceiro caso concorda essencialmente com a visão desenvolvida por Kohlrausch sobre a termoeletricidade.

Kohlrausch supõe que a razão entre as intensidades das correntes elétrica e de calor $(\varepsilon - \varepsilon')/(\varepsilon\alpha^2 - \varepsilon'\alpha'^2)$ é constante para cada condutor, mas dependente da natureza do condutor, e denota isso com α , de acordo com o qual a intensidade da corrente $i = \alpha W$, se W denota a intensidade do fluxo de calor. De acordo com Kohlrausch, essa suposição dá origem à lei das forças termoeletromotrizes, ou seja, que as forças termoeletromotrizes dependem apenas das temperaturas dos pontos de contato e são proporcionais à diferença de temperatura, e à lei de produção do calor de Peltier,³¹⁷ segundo a qual o calor é produzido ou absorvido no ponto de contato entre dois condutores, dependendo se a corrente vai para um condutor com uma constante termoeletrica maior ou menor.

O terceiro caso, ou seja, que há uma certa relação entre $(\varepsilon - \varepsilon')$ e $(\varepsilon\alpha^2 - \varepsilon'\alpha'^2)$, é obviamente satisfeito se colocarmos $\alpha^2 = \alpha'^2$. Sob essa restrição, no entanto, a dedução da lei das forças termoeletromotrizes dada por Kohlrausch não se aplica a termopilhas, em que cada um dos condutores que formam o circuito fechado tem uma temperatura diferente em suas duas extremidades, porque qualquer diferença de temperatura em um condutor (homogêneo) só pode ter sua razão em diferenças nos valores de α^2 e α'^2 . A *primeira* lei, a saber, a lei das forças termoeletromotrizes, não pode, portanto, ser deduzida da invariabilidade de

³¹⁵Em alemão: *Fortführung*.

³¹⁶No texto original apareceu aqui: $\varepsilon = \varepsilon$.

³¹⁷Ver a Nota de rodapé 211 na página 123.

$(\varepsilon - \varepsilon')/(\varepsilon\alpha^2 - \varepsilon'\alpha'^2)$, que resulta de $\alpha^2 = \alpha'^2$, mas a *segunda* lei, a saber, a lei da produção ou absorção de calor de Peltier, pode.

Se tivermos dois condutores metálicos diferentes e o quociente $(\varepsilon - \varepsilon')/(\varepsilon\alpha^2 - \varepsilon'\alpha'^2)$, que é constante para $\alpha^2 = \alpha'^2$, for chamado de m para um condutor e de n para o outro, será obtida a quantidade de calor que passa pela interface dos dois últimos elementos do primeiro condutor $= m(\varepsilon - \varepsilon')$; a quantidade de calor que passa pela interface dos dois primeiros elementos do segundo condutor, $n(\varepsilon - \varepsilon')$. Se uma corrente de intensidade $(\varepsilon - \varepsilon')$ passar pelo circuito fechado formada por ambos os condutores, é produzida a quantidade de calor $(m - n)(\varepsilon - \varepsilon')$ no ponto em que o primeiro condutor toca o segundo; no outro ponto de contato, ou seja, no ponto em que o segundo condutor toca o primeiro, será *produzida* a quantidade de calor $(n - m)(\varepsilon - \varepsilon')$ ou, o que dá no mesmo, será *absorvida* a quantidade de calor $(m - n)(\varepsilon - \varepsilon')$ nesse ponto.

Além dos três casos mencionados anteriormente, no entanto, há ainda um quarto caso a ser considerado, ou seja, além dos casos em que temos nos quocientes $\varepsilon = \varepsilon'$, ou $\varepsilon\alpha^2 = \varepsilon'\alpha'^2$, ou $\alpha^2 = \alpha'^2$, ainda há o seguinte caso:

(4) Mesmo que nem $\varepsilon = \varepsilon'$ nem $\alpha^2 = \alpha'^2$, há, no entanto, uma dependência da razão α^2/α'^2 em relação à razão ε/ε' , onde, por exemplo, α^2/α'^2 é igual a qualquer potência de ε/ε' .

Em um condutor metálico, o aumento da temperatura é acompanhado por um aumento de calor, ou seja, de acordo com nossa suposição, um aumento na força viva das partes elétricas móveis no condutor, do qual decorre um aumento na velocidade dessas partes, uma vez que sua quantidade ou massa não sofre qualquer alteração. Esse aumento na velocidade também se aplicará agora às partes móveis no momento em que elas cruzarem a fronteira de duas moléculas vizinhas, cuja velocidade foi indicada por α . Dessa forma, α aumentará com a temperatura do condutor. No entanto, com esse aumento na velocidade de todas as partes móveis associado a um aumento na temperatura, pode-se supor que a quantidade ou a massa das partículas ε que passam pela interface na unidade de tempo também aumente, de modo que ocorra um aumento simultâneo de α e ε com a temperatura, como foi suposto no quarto caso.

A equação

$$\frac{\alpha^2}{\alpha'^2} = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)^n,$$

fornece então a seguinte equação para a intensidade do fluxo de calor:

$$\varepsilon\alpha^2 - \varepsilon'\alpha'^2 = \varepsilon\alpha^2 \left(1 - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \cdot \frac{\alpha'^2}{\alpha^2}\right) = \varepsilon\alpha^2 \left(1 - \left[\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right]^{n+1}\right).$$

Se dividirmos essa intensidade do fluxo de calor pela intensidade da corrente elétrica $(\varepsilon - \varepsilon') = \varepsilon(1 - \varepsilon'/\varepsilon)$, obteremos então essa razão entre as duas intensidades como:

$$= \alpha^2 \left(1 + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + \dots + \left[\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right]^n\right).$$

Vemos disso que quando $n = 0$, o quarto caso coincidirá completamente com o terceiro caso que já foi considerado, pois os dois casos fornecerão:

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon'}{\varepsilon\alpha^2 - \varepsilon'\alpha'^2} = \frac{1}{\alpha^2}.$$

O próximo caso a considerar é quando $n = 1$, a partir do qual obtemos:

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon'}{\varepsilon\alpha^2 - \varepsilon'\alpha'^2} = \frac{1}{\alpha^2 \left(1 + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)}.$$

A partir das diferenças sempre muito pequenas entre duas moléculas vizinhas de um condutor, no entanto, também se segue agora que o valor de ε'/ε é apenas muito pouco diferente de 1, pelo menos para correntes fracas em bons condutores, de modo que obteremos aproximadamente no quarto caso que acabamos de considerar:

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon'}{\varepsilon\alpha^2 - \varepsilon'\alpha'^2} = \frac{1}{2\alpha^2}.$$

A suposição feita por Kohlrausch de que a razão da intensidade de corrente elétrica e de calor $(\varepsilon - \varepsilon')/(\varepsilon\alpha^2 - \varepsilon'\alpha'^2)$ tem um valor constante que depende apenas da natureza do condutor é, portanto, também válida nesse caso, pelo menos *aproximadamente*. Disso resulta que as mesmas conclusões que Kohlrausch deduziu de sua suposição se aplicam *aproximadamente* a esse quarto caso, em particular a lei das forças termoeletromotrizes, ou seja, que essas forças dependem apenas das temperaturas dos pontos de contato e são proporcionais às diferenças de temperatura nesses pontos.

Mesmo que essa dedução da lei das forças termoeletromotrizes dada por Kohlrausch não leve em consideração a *ação de contato*, fica claro que a ação de contato não é de forma alguma completamente excluída, mas que pode ser adicionada a ela.

13.9 Resistência à Condução e Máxima Intensidade de Corrente

Se a eletricidade em condutores metálicos de constituição molecular estiver realmente no movimento indicado na Seção 13.6, de acordo com o qual as partes elétricas positivas giram em torno das partes negativas aderidas a massas ponderáveis, mas nem sempre permanecem no mesmo caminho circular, porém, partindo de um caminho circular menor, aproximam-se de outra molécula à medida que o raio aumenta e, finalmente, passam para essa molécula; isso resulta em uma dependência das intensidades de corrente em relação às forças eletromotrizes em tais condutores, que não corresponde exatamente àquela declarada na lei de Ohm, mas difere no fato de que a intensidade de corrente nem sempre aumenta uniformemente com a força eletromotriz, mas finalmente se aproxima de um determinado valor limite, que não excede. No entanto, esse limite só seria atingido se as direções de todas as partes que entram no movimento da corrente, por mais diferentes que tenham sido inicialmente, fossem completamente levadas à direção dessa força no menor tempo possível pela força eletromotriz sempre crescente. A intensidade da corrente não poderia mais aumentar e, portanto, teria atingido seu máximo. Seria, portanto, de suma importância realizar experimentos com forças eletromotrizes muito grandes e muito pequenas no mesmo condutor, a fim de determinar se as intensidades das correntes por elas excitadas são sempre proporcionais a elas.

Seja A na Figura 1 uma molécula da qual partículas elétricas positivas são lançadas em todas as direções com a mesma velocidade α . Uma dessas direções é AB , e ξ é a distância que a partícula percorreria com sua velocidade α no tempo t . No entanto, uma força (eletromotriz) constante atua sobre essa partícula na direção paralela a AC , que forma

o ângulo ψ com AB , e a partícula percorreria assim, apenas devido a isso, uma distância η no tempo t que aumentaria proporcionalmente com t^2 ou com ξ^2 .

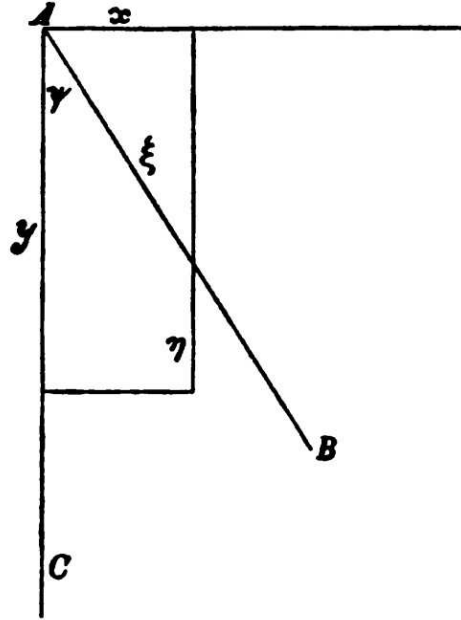


Fig. 1.

Colocamos então:

$$\eta = a\xi^2 ,$$

e, além disso:³¹⁸

$$x = \xi \sin \psi ,$$

$$y = \xi \cos \psi + \eta = x \cot \psi + \frac{a}{\sin^2 \psi} \cdot x^2 ,$$

$$r^2 = x^2 + y^2 ,$$

de onde obtemos:

$$y = \cot \psi \cdot \sqrt{r^2 - y^2} + \frac{a}{\sin^2 \psi} \cdot (r^2 - y^2) .$$

Esse movimento balístico³¹⁹ chega ao fim quando a distância da partícula a partir de A se torna igual a r , pois a partícula atinge a molécula vizinha. Essa distância r é independente

³¹⁸A equação para y deve ser entendida como:

$$y = \xi \cos \psi + \eta = x \cot \psi + \frac{a}{\sin^2 \psi} \cdot x^2 .$$

³¹⁹Em alemão: *Wurfbewegung*. Essa expressão pode ser traduzida como movimento balístico, de projétil, de lançamento ou de arremesso.

da direção do movimento balístico e pode ser considerada a mesma para todas as partículas ejetadas de A , podendo ser descrita como a distância molecular média.

Em primeiro lugar, como quanto maior a força eletromotriz proporcional a a , mais todos os outros termos da equação anterior desaparecem em relação ao termo que tem a como fator, segue-se que, para uma força eletromotriz crescente, y^2 se aproxima de um valor limite, a saber,

$$y^2 = r^2 ,$$

que é o mesmo para todas as partículas ejetadas por A . Portanto, a distância percorrida por todas as partículas na direção da força seria a mesma, ou seja, $= r$.

Se denotarmos por ε a massa das partículas emitidas por A na unidade de tempo, e por n o número de moléculas contidas no elemento condutor de comprimento r ; portanto, $n\varepsilon$ será a massa de eletricidade positiva que passaria na direção da força eletromotriz através da interface de duas camadas moleculares sucessivas na unidade de tempo se a força eletromotriz tivesse sido aumentada até o infinito, ou seja, o valor limite da intensidade da corrente de acordo com a unidade mecânica, tomando como base a unidade mecânica de massa (miligrama), deve-se observar apenas que, como a eletricidade não pode ser determinada em tais unidades de massa, ao determinar a intensidade de acordo com as chamadas unidades mecânicas, é comum expressar as quantidades de eletricidade não em unidades mecânicas de massa (miligramas), mas em unidades *eletrostáticas*.

Se σ denota agora o número de unidades eletrostáticas que se baseiam na unidade de massa da mecânica (miligramas), o valor limite acima da intensidade da corrente é obtido de acordo com a chamada unidade mecânica $= n\varepsilon\sigma$, ou se a designação da unidade de medida baseada nas três unidades fundamentais da mecânica (a saber, a massa M , a distância R e o tempo T) for adicionada,

$$= n\varepsilon\sigma \cdot \left[\sqrt{\frac{MR^3}{T^4}} \right] .$$

De acordo com as unidades *eletrostáticas*, uma quantidade de eletricidade é determinada por uma força (que essa quantidade de eletricidade exerce sobre uma quantidade igual a ela) $= f \cdot [MR/T^2]$ e por uma distância (a partir da qual essa força é exercida) $= r \cdot [R]$ e expressa por

$$r\sqrt{f} \cdot \left[\sqrt{\frac{MR^3}{T^2}} \right] .$$

A intensidade da corrente em unidades mecânicas, no entanto, é o quociente de tal quantidade de eletricidade que passa pela seção transversal do condutor dividida pela duração da transferência, que é igual a $t \cdot [T]$, de tal forma que a intensidade de corrente será

$$= r \frac{\sqrt{f}}{t} \cdot \left[\sqrt{\frac{MR^3}{T^4}} \right] .$$

No caso atual temos $r\sqrt{f}/t = n\varepsilon\sigma$.

Além disso, ao determinar o valor limite da intensidade da corrente, presumiu-se que a força eletromotriz em si não tem influência sobre o número de partículas elétricas emitidas pelas moléculas.

Se, por outro lado, a força eletromotriz ou a quantidade a que é proporcional a ela for muito pequena, então na equação encontrada:

$$y = \cot \psi \cdot \sqrt{r^2 - y^2} + \frac{a}{\sin \psi^2} \cdot (r^2 - y^2) ,$$

no último membro, que tem a como um fator, o valor aproximado que resulta da equação para $a = 0$ pode ser colocado no lugar de y^2 , ou seja, $y^2 = r^2 \cos \psi^2$. Obtém-se assim

$$y = \cot \psi \cdot \sqrt{r^2 - y^2} + ar^2 ,$$

e isso vai fornecer da mesma forma aproximadamente:

$$y = +r \cos \psi + ar^2 \sin \psi^2 .$$

Isso vai fornecer então, na média, para duas partículas que foram emitidas de A nas direções determinadas pelos ângulos ψ e $\pi - \psi$:

$$y = ar^2 \sin \psi^2 .$$

O valor médio para todas as trajetórias que são percorridas pelas partículas que são emitidas de A na direção da força será então:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} 2\pi y \sin \psi d\psi = ar^2 \int_0^{\pi/2} \sin \psi^3 d\psi = \frac{2}{3} ar^2 .$$

Se esse valor fosse $= r$, a intensidade da corrente seria a mesma do valor limite considerado anteriormente, ou seja, $= n\varepsilon\sigma \cdot \left[\sqrt{MR^3/T^4} \right]$; a intensidade real da corrente é agora apenas uma fração muito pequena desse valor, ou seja, $2ar/3$, de acordo com a qual é obtida essa intensidade de corrente i^0 :

$$i^0 = \frac{2}{3} ar \cdot n\varepsilon\sigma \cdot \left[\sqrt{\frac{MR^3}{T^4}} \right] .$$

Finalmente, para determinar o coeficiente a , deve ser observado que quando γ denota a força aceleradora que atua sobre as partículas que são emitidas de A , teremos:

$$\eta = \frac{1}{2} \gamma t^2 = \frac{1}{2} \gamma \cdot \frac{\xi^2}{\alpha^2} = a\xi^2 ,$$

que vai fornecer:

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma}{\alpha^2} ,$$

e, consequentemente:

$$i^0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\gamma r}{\alpha^2} \cdot n\varepsilon\sigma \cdot \left[\sqrt{\frac{MR^3}{T^4}} \right] .$$

Ao dividir a intensidade de corrente i^0 expressa em unidades *mecânicas* por $c/2\sqrt{2}$, ou seja, pelo número de unidades eletrostáticas contidas em cada unidade magnética, obteremos a mesma intensidade de corrente i expressa em unidades *magnéticas*, a saber:

$$i = \frac{2\sqrt{2}}{3c} \cdot \frac{\gamma r}{\alpha^2} \cdot n\varepsilon\sigma \cdot \left[\sqrt{\frac{MR}{T^2}} \right] .$$

Além disso, a *força eletromotriz* para a unidade de comprimento do condutor de acordo com a unidade *mecânica* e^0 é o produto da aceleração γ com a massa de eletricidade $= n\varepsilon/r$ fluindo na unidade de comprimento do condutor, dividida pelo número de unidades eletrostáticas $= n\varepsilon\sigma/r$ fluindo na unidade de comprimento, de acordo com o que, portanto

$$e^0 = \frac{\gamma}{\sigma} \cdot \left[\sqrt{\frac{M}{RT^2}} \right] .$$

Isso vai fornecer então a força eletromotriz por unidade de comprimento do condutor em unidades *magnéticas*, e , ao trocar o número de unidades eletrostáticas $n\varepsilon\sigma/r$ com o número de unidades magnéticas $n\varepsilon\sigma/r \cdot 2\sqrt{2}/c$, fazendo:

$$e = \frac{c}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\gamma}{\sigma} \cdot \left[\sqrt{\frac{MR}{T^4}} \right] .$$

Se substituirmos agora o valor de γ fornecido por isso na equação anterior para determinar i , obteremos então:

$$i = \frac{8}{3c^2} \cdot \frac{er}{\alpha^2} \cdot n\varepsilon\sigma^2 \cdot \left[\sqrt{\frac{MR}{T^2}} \right] .$$

Agora, se l denotar o comprimento do condutor fechado, então el será a força eletromotriz total que atua sobre o condutor fechado, e i será a intensidade de corrente que ela vai gerar em unidades *magnéticas*. Isso vai fornecer então a resistência w do condutor fechado:

$$w = \frac{el}{i} = \frac{3c^2}{8} \cdot \frac{\alpha^2}{n\varepsilon\sigma^2} \cdot \frac{l}{r} \cdot \left[\frac{R}{T} \right] ,$$

ou seja, uma *definição de resistência* que é completamente independente da determinação de resistência de acordo com a lei de Ohm que envolve medir a força eletromotriz e a intensidade de corrente.

A *condutância* $= 1/w$ é, portanto, determinada por suas causas, que residem na deflexão das partículas em relação às suas trajetórias ao longo das quais foram ejetadas. É óbvio que a *condutância* deve ser proporcional:

(1) à massa que se encontra em movimento balístico no canal de condução.

(2) à velocidade de deflexão produzida nessa massa por uma determinada força em um determinado caminho.

No elemento condutor r , essa massa é agora $n\varepsilon$, e a velocidade de deflexão causada por uma determinada força no caminho r é *inversamente proporcional ao quadrado da velocidade balística* α^2 . De acordo com isso, a *condutância* $1/w$ deve ser proporcional a $n\varepsilon/\alpha^2$ e, conseqüentemente, a *resistência do condutor* w deve ser proporcional a $\alpha^2/n\varepsilon$. Como isso se aplica à resistência do *elemento condutor* r , a *resistência de um condutor de qualquer comprimento* l é proporcional a $\alpha^3/n\varepsilon \cdot l/r$, o que corresponde à fórmula anterior, segundo a qual essa resistência é igual ao produto dessa quantidade com o *fator constante* $3c^2/8\sigma^2$.

Essa definição da resistência de um condutor é de particular interesse porque segue que quando a resistência w de um condutor é constante, além dos valores de l , n , r , também têm

de ser constantes a razão das duas variáveis α^2 e ε , ou seja, α^2/ε , logo se α^2 e ε tiverem se modificado para α'^2 e ε' , então temos de ter:

$$\frac{\alpha^2}{\varepsilon} = \frac{\alpha'^2}{\varepsilon'} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha^2}{\alpha'^2} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}.$$

Disso resulta agora que, se a resistência w de um condutor fosse constante e também não mudasse com a temperatura do condutor, o valor α^2/ε também seria constante para esse condutor, de acordo com o qual a visão da termoeletricidade estabelecida por Kohlrausch se aplicaria a esse condutor, conforme a Seção 13.8. No entanto, como a resistência dos condutores metálicos muda mais ou menos com a temperatura, segue-se que a visão de Kohlrausch só pode ser aproximadamente válida, e de fato principalmente para os condutores metálicos cuja resistência muda menos com a temperatura do condutor, do que parece resultar que esses condutores devem ser os mais adequados para produzir circuitos termomagnéticos.

13.10 Distribuição da Eletricidade em Condutores

A *eletrostática* foi fundada e desenvolvida por Coulomb e Poisson³²⁰ antes da descoberta do eletromagnetismo e da eletrodinâmica e, portanto, não foi possível a eles levar em consideração essas grandes descobertas. De fato, as leis desenvolvidas na eletrostática com relação à distribuição de fluidos elétricos em repouso e em equilíbrio em condutores, bem como as forças exercidas por eles durante essa distribuição, estão de acordo com a experiência no que diz respeito à observação e à medição; mas foi demonstrado pelas novas descobertas, especialmente no eletromagnetismo e na eletrodinâmica, que esse estado de equilíbrio dos fluidos elétricos, como Coulomb e Poisson supuseram nos condutores, realmente não existe, mas sim que todos os fluidos elétricos nos condutores estão sempre em *movimento constante* em torno de todas as moléculas ponderáveis, de onde se conclui que, a rigor, as leis de distribuição e ação da eletricidade *em repouso* desenvolvidas por Poisson não se aplicam de forma alguma à eletricidade nos condutores.

Portanto, todos os fenômenos até então considerados na *eletrostática* pertencem, na verdade, à *eletrodinâmica*, em cujas leis deve-se buscar a explicação completa. A eletrostática, que anteriormente formava a maior e mais importante parte da teoria da eletricidade e parecia ser a mais firmemente estabelecida, teria, portanto, aparentemente, que passar por uma reorganização completa. Essa reorganização deve, no entanto, estar sujeita à exigência de que ela seja capaz de explicar *eletrodinamicamente* toda a gama de fenômenos até então explicados *eletrostaticamente* de forma igualmente completa e precisa, mas isso não aconteceu até agora, nem foi feita ainda qualquer tentativa nesse sentido.

Apesar de toda a inclinação que se encontra, por um lado, de abandonar a ideia de *fluidos magnéticos* com a qual Coulomb e Poisson basearam a doutrina do magnetismo, que foi desenvolvida simultaneamente com a eletrostática, por outro lado parece haver uma certa timidez em relação às consequências associadas a ela, ou seja, sobre a então indispensável ideia da existência de correntes moleculares persistentes em todos os corpos magnéticos e diamagnéticos, de acordo com a qual a eletricidade nunca e em lugar algum chega ao repouso e ao equilíbrio. Além disso, a tentativa de explicação *eletrodinâmica* de todos os fenômenos

³²⁰Charles Augustin de Coulomb (1736-1806) e Siméon Denis Poisson (1781-1840). As principais obras de Coulomb sobre torção, eletricidade e magnetismo já se encontram traduzidas e comentadas em português e inglês: [Ass22] e [AB23]. Ver também [Pot84]; [Gil71b] e [Gil71a]. Ver ainda [Poi12a], [Poi12b] com tradução para o inglês em [Poi19], [Poi13], [Poi25a], [Poi25b], [Poi22a] e [Poi22b].

anteriormente considerados *eletrostáticos* ainda encontra grandes dificuldades, especialmente devido à falta de ajuda da matemática, que provavelmente se mostrará impotente por muito tempo com processos tão complicados.

Pela mesma razão, entretanto, nenhuma tentativa foi feita no estabelecimento da *eletrostática* para dar um relato mais exato da constituição do chamado *fluido neutro* e do *processo de separação* desse fluido nos condutores, em vez disso, limitou-se a uma suposição geral da mobilidade mútua dos dois componentes do fluido neutro, mesmo quando eles estão misturados, por meio da qual se tentou tornar o desenvolvimento das leis de distribuição elétrica independente de um conhecimento mais detalhado da constituição do fluido neutro que está distribuído por toda parte dentro dos condutores.

Basicamente, no entanto, essa suposição feita na eletrostática sobre a mobilidade mútua dos dois constituintes do fluido neutro não determina nem estabelece nada sobre a constituição interna desse fluido em si, especialmente nada sobre se os dois constituintes estão em repouso e em equilíbrio antes de sua separação, ou se estão em movimento um contra o outro, por exemplo, em movimento de rotação um em torno do outro, de modo que a ideia de correntes moleculares persistentes não parece ser completamente descartada pela suposição feita na eletrostática da mobilidade mútua dos dois constituintes do fluido neutro; de fato, a ideia de correntes moleculares persistentes pode ser vista como uma tentativa de explicar a mobilidade mútua presumida dos dois componentes. Assim, a eletrostática, conforme desenvolvida por Poisson, embora seja normalmente definida como a doutrina da distribuição da eletricidade *em repouso e equilíbrio* nos condutores, não está em contradição direta com a existência de correntes moleculares persistentes de eletricidade dentro dos condutores. Temos a *estática dos corpos sólidos*, a *hidrostática* e a *aerostática*,³²¹ que também parecem estar firmemente fundamentadas e às quais o mesmo se aplica. Elas também são definidas como a doutrina do repouso e do equilíbrio desses corpos, mas não há contradição entre elas e o fato de que esses corpos estão cheios de partículas em seu interior que não estão em repouso, mas em constante movimento e, de fato, em grande movimento. Pois, assim como os fenômenos *magnéticos* e *diamagnéticos* dos corpos levaram a movimentos internos contínuos neles (correntes elétricas moleculares), no caso dos corpos sólidos, líquidos e aeriformes aos quais se aplicam a estática, a hidrostática e a aerostática, os *fenômenos de calor* levaram a esses movimentos internos contínuos. Pois todo corpo ponderável tem uma certa temperatura a cada momento, que é o efeito do calor que o corpo contém, e esse calor nada mais é do que a força viva que é dada às partes móveis contidas no corpo. A partir da magnitude mensurável dessa força viva (o equivalente mecânico do calor), entretanto, foi demonstrado que esses movimentos dentro de todos esses corpos são muito grandes.

Se as partículas elétricas positivas se movem no *interior dos condutores* ao redor das partículas elétricas negativas que aderem a massas ponderáveis, mas nem sempre permanecem no mesmo caminho circular durante esse movimento, mas se aproximam das moléculas vizinhas com raio crescente, para as quais finalmente passam, e se essas transições ocorrem de uma molécula no interior do condutor indiferentemente em todas as direções para todas as moléculas vizinhas do condutor, das quais ocorre ao mesmo tempo uma emissão igual de partículas em todas as direções para todas as moléculas vizinhas, resulta, por outro lado, para as moléculas do condutor que estão mais próximas de sua superfície, que elas possuem moléculas isolantes em seu lado externo em vez de moléculas condutoras ou moléculas vizinhas das quais não ocorre tal emissão, e que também não recebem as partículas emitidas por

³²¹ Aerostática é a parte da estática de fluidos que estuda o equilíbrio dos gases e dos corpos sólidos imersos neles, quando sob a influência de forças gravitacionais.

outras moléculas. Disso decorre que, se as partículas individuais se afastaram tanto de seu ponto central à medida que o raio de sua órbita aumenta que elas passariam para a molécula vizinha se ainda houvesse outras moléculas condutoras no lado em que estão localizadas, isso não acontecerá se não houver nenhuma molécula condutora no lado em que estão localizadas, mas apenas moléculas isolantes. Essas partículas continuarão em seu caminho circular com raio crescente até chegarem a um lado em que haja outras moléculas condutoras nas proximidades. Esse será o caso quando a resultante de todas as forças elétricas nesse limite entre o condutor e o isolante for zero.

Se, por outro lado, essa resultante for diferente de zero e for *direcionada para fora*, ela pode exercer a mesma influência que uma molécula condutora vizinha, ou seja, pode fazer com que a partícula deixe seu caminho anterior ao redor da molécula condutora no lado do isolante adjacente e seja retida nas partículas isolantes vizinhas. Dessa forma, essas partículas ejetadas de eletricidade positiva podem se acumular em qualquer lugar nas interfaces entre o condutor e o isolante, em qualquer ponto, de acordo com o tamanho da resultante direcionada para fora.

Se a resultante for diferente de zero e for *direcionada para dentro*, o efeito disso sobre o aumento das partículas enviadas *para dentro* pelas moléculas condutoras mais próximas só poderá ser compensado por uma leve redução da quantidade de partículas elétricas positivas nessas moléculas condutoras, enquanto a quantidade de partículas elétricas negativas que aderem à massa ponderável, em torno da qual elas giram, permanece inalterada.

As leis de distribuição desenvolvidas por Poisson, de acordo com as quais um excesso de eletricidade positiva ou negativa também ocorre apenas na interface entre o condutor e o isolante, obviamente se aplicam ao excesso de eletricidade positiva em alguns pontos da interface entre o condutor e o isolante, e à falta de eletricidade positiva nas moléculas do condutor próximas ao isolante em outros pontos (cuja falta de eletricidade positiva é equivalente a um excesso de eletricidade negativa). Para essas leis de distribuição de eletricidade na superfície, não faz diferença se há o chamado fluido neutro separável dentro do condutor, como Poisson supõe, ou se há moléculas condutoras com eletricidade em movimento entre as quais ocorre uma troca contínua de partículas individuais. Essas moléculas condutoras devem ter tão pouca influência sobre a distribuição da eletricidade na superfície quanto o fluido neutro assumido por Poisson e, inversamente, a eletricidade distribuída na superfície de acordo com a lei de Poisson não tem influência sobre as moléculas condutoras, pois, de acordo com Poisson, a distribuição da eletricidade na superfície é determinada precisamente pelo fato de que a resultante de todas as forças exercidas pela superfície em qualquer ponto do interior deve ser zero, um requisito que é completamente independente do fato de haver fluido neutro dentro do condutor no ponto em consideração ou de haver moléculas condutoras com correntes moleculares elétricas. — A verdadeira constituição dos corpos e os verdadeiros processos, embora mais complicados, que dependem dela, que só podem ser parcialmente representados por processos mais simples, permanecerão, apesar de todos os obstáculos, sempre o objeto e a meta final da pesquisa.

Capítulo 14

[Weber, 1876] Observações sobre a Resposta de Edlund a Duas Objeções Feitas Contra a Teoria Unitária da Eletricidade

Wilhelm Weber^{322,323}

(Contribuição feita por carta.)

Em primeiro lugar, tomo a liberdade de dizer que a primeira crítica feita a Neumann [por Edlund] não se aplica de todo.³²⁴ No “Pós-escrito” de seu artigo no Volume 155 dos *Annalen* (página 228) Neumann *em primeiro lugar* apresentou os fatos da chamada indução unipolar e *em segundo lugar* provou a partir disso que (se estiver correta a ideia de que as ações da corrente elétrica devem ser atribuídas a alguma matéria que flui ao longo do caminho em determinadas velocidades) pelo menos *duas* dessas matérias devem ser assumidas.³²⁵

Edlund não fez objeção à última linha de argumentação de Neumann. Mas o fato invocado por Neumann, que de modo algum foi afirmado ou garantido por ele, de que um anel de corrente elétrica, de formato circular, de intensidade constante não induziria uma força eletromotriz em um condutor linear *aberto* se ambos estivessem fixos, mas induziria uma força eletromotriz *de certo valor* se o anel girasse em torno de seu eixo geométrico a uma velocidade constante, também foi citado por Edlund em sua resposta, acrescentando expressamente que corresponde realmente à concepção geral do processo físico da *indução unipolar*. Sua dúvida sobre a *veracidade do fato*, no entanto, não atinge Neumann, que não atestou essa veracidade.

Edlund apresentou os fatos da indução unipolar (pág. 592) nas seguintes palavras:

A experiência mostra que quando um condutor estacionário *fechado*, *b*, é colocado

³²²[Web76] com tradução para o inglês em [Web21p]. Esse trabalho de Weber está relacionado ao artigo de 1875 do físico sueco Erik Edlund (1819-1888), [Edl75].

³²³Todas as Notas são de minha autoria.

³²⁴Edlund estava criticando o trabalho de 1875 de Carl Neumann sobre indução unipolar, ver [Edl75] e [Neu75].

³²⁵Isto é, devem ser assumidos dois fluidos elétricos, positivo e negativo. Ou então devem ser supostos dois tipos de partículas, a saber, as partículas eletrizadas positivamente e as eletrizadas negativamente.

nas proximidades de um ímã girando ao redor de seu próprio eixo, nenhuma corrente é induzida no condutor fechado. — O motivo é que, de acordo com o modelo usual, o ímã girando induz de fato uma corrente em uma parte b_1 do condutor fechado, mas é induzida uma corrente igualmente intensa na outra parte b_2 do condutor; contudo as duas correntes induzidas fluem em direções opostas e se cancelam. Contudo, se uma parte da trajetória, b_1 , for fixada ao ímã e o ímã for colocado em rotação ao redor de seu próprio eixo, então o ímã não vai atuar sobre essa parte da trajetória. Agora se a experiência for arranjada de tal maneira que b_1 , apesar da rotação, permaneça em contato elétrico contínuo com a outra parte, b_2 , então será produzida uma corrente induzida no condutor.

Mas Edlund agora nega a *veracidade* deste fato que ele mesmo afirmou, ou seja, que a rotação em si (seja um anel de corrente que gira, ou um ímã que gira) induz uma ação especial em uma *parte estacionária* próxima de um condutor fechado; ao contrário, ele afirma que a experiência confirma o oposto e, para provar esta afirmação, refere-se a um experimento realizado por Plücker (Volume 87, página 352 destes *Annalen*)³²⁶ que ele mesmo repetiu para esse fim.

De acordo com a descrição de Edlund dessa experiência, uma corrente é observada em um condutor que permanece fechado enquanto um cilindro de cobre contendo uma parte da trajetória da corrente, b_1 , é girado ao redor do eixo de um ímã localizado no cilindro. — *Essa corrente permanece inalterada em direção e intensidade, independentemente se o ímã no cilindro estiver parado ou girar junto com o cilindro.*

Edlund agora acredita, de acordo com a concepção usual do processo físico da indução unipolar, que esse experimento deveria ter sido diferente. — A saber, se apenas o cilindro b_1 gira e o ímã permanece em repouso, pode-se considerar o ímã como ligado ao fio b_2 do galvanômetro, que também está em repouso, de tal forma que, de acordo com essa concepção, a indução só poderia ocorrer em b_1 ; contudo, quando o ímã e o cilindro b_1 giram com velocidade igual na mesma direção, pode-se considerar o ímã como estando ligado a b_1 , e então a indução só pode ocorrer em b_2 .

A corrente induzida, continua Edlund, deve, portanto, *de acordo com essa concepção*, mudar de direção ao passar de um experimento para outro e, a partir do fato de que esse não foi o caso, Edlund conclui que a concepção que foi formada até agora sobre o processo físico da indução unipolar, *por entrar em conflito com a experiência*, é totalmente incorreta.

A seguinte observação será suficiente para provar o erro cometido pela Edlund nesta dedução.

Na *primeira experiência*, a porção do condutor, b_1 , na qual a corrente é induzida, gira (para a frente) e o ímã permanece parado; na *segunda experiência*, o ímã gira (também para a frente) e a porção b_2 do condutor na qual a corrente é induzida permanece parada.

Uma comparação direta entre esses dois experimentos não é permitida, mas pode facilmente ser feita indiretamente se considerarmos que é essencialmente idêntico se *o condutor gira para frente e o ímã fica parado*, ou se *o condutor fica parado e o ímã gira para trás*.

Se, portanto, no *primeiro experimento*, o último caso for substituído pelo primeiro, a comparação com o *segundo experimento* será possível, e o resultado será que o ímã *girando para trás* (no primeiro experimento) induz uma corrente *de mesma direção e intensidade na parte estacionária do condutor b_1* , como (no segundo experimento) o ímã *girando para frente* induz na parte estacionária do condutor b_2 , o que está em perfeita concordância com

³²⁶[Plü52].

a concepção geral do processo físico da indução unipolar, conforme declarado pelo próprio Edlund. — De acordo com isso, o que foi ignorado por Edlund, *correntes opostas* só são induzidas nas duas partes b_1 e b_2 , que juntas formam um caminho de condução sempre fechado b , quando o ímã gira em relação ao condutor *na mesma direção*, tanto quando induz [uma corrente em] b_1 quanto quando induz [uma corrente] em b_2 ; por outro lado, *correntes de mesmo sentido* serão induzidas em b_1 e em b_2 se, como nos experimentos anteriores, o ímã girar *para trás* (em relação a esse condutor) durante a indução de b_1 , enquanto gira *para frente* durante a indução de b_2 .

Leipzig, 23 de dezembro de 1875.

Capítulo 15

[Weber, 1878a, ME7] Medições Eletrodinâmicas, Sétima Memória, Relacionada Especialmente à Energia de Interação

Wilhelm Weber^{327,328}

³²⁷[Web78a] com tradução para o inglês em [Web21f].

³²⁸As Notas de Wilhelm Weber são representadas por [Nota de Wilhelm Weber:]; as Notas de Heinrich Weber, o Editor do Volume 4 das *Obras* de Weber, são representadas por [Nota de Heinrich Weber:]; todas as outras Notas são de minha autoria.

Introdução

Helmholtz alegou,³²⁹ com a concordância de William Thomson, Tait e outros,³³⁰ que a lei fundamental geral da ação elétrica apresentada em 1846 nas “*Medições Eletrodinâmicas*”,^{331,332,333} à qual o *potencial* da força elétrica foi adicionado subsequentemente (*Annalen* de Poggen-dorff, 1848, Vol. 73, pág. 299),^{334,335} que ela estava em contradição com o princípio de conservação da energia. Contudo, C. Neumann e Maxwell discordaram,³³⁶ apontando um erro feito por Helmholtz quando ele afirmou que o princípio de conservação da energia só é válido para forças que dependem *apenas* da distância.^{337,338}

Helmholtz estabeleceu então um princípio da energia completamente *novo*,³³⁹ cuja diferença em relação ao princípio *comum* da energia³⁴⁰ foi especificado com mais detalhes por Neumann nas seguintes palavras:³⁴¹

Enquanto o princípio *comum* da energia requer, para todo sistema material, a existência de uma *função da energia*,³⁴² ou seja, a existência de uma função dependente do estado instantâneo do sistema, que tem a propriedade de aumentar em cada intervalo de tempo tanto quanto o trabalho fornecido ao sistema durante esse período, — o *novo* princípio estabelecido por Helmholtz exige não apenas a existência de tal função, mas ao mesmo tempo uma certa *propriedade* especial dela, afirmando que a ‘parte *cinética* dessa função (a parte dela que depende da velocidade) deve ser sempre positiva’.

Neumann também comentou o seguinte em relação a isso:

Não há dúvida de que os princípios da física são, por natureza, maleáveis e flexíveis. O *princípio da força viva*³⁴³ expandiu-se gradualmente para o *princípio da energia*, e é possivelmente capaz de uma expansão ainda maior.

³²⁹[Hel47] com tradução para o inglês em [Hel66].

³³⁰[TT67].

³³¹[Nota de Wilhelm Weber:] Ver *Abhandlungen bei der Begründung der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften*. Leipzig, 1846.

³³²[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 25.

³³³[Web46] com tradução parcial para o francês em [Web87] e traduções completas para o inglês em [Web07] e [Web21d].

³³⁴[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 245.

³³⁵[Web48a] com traduções para o inglês em [Web52c], [Web66], [Web19] e [Web21o].

³³⁶[Neu68a] com tradução para o inglês em [Neu21b] e tradução para o português no Capítulo 5; [Max73a, Cap. XXIII, Artigos 852-853, págs. 429-430] e [Max54b, Cap. XXIII, Artigos 852-853, págs. 483-484], com tradução para o português em [Ass92c], ver ainda [TCA04]. Discuti os pontos de vista de Maxwell em relação à eletrodinâmica de Weber em [Ass94, Seção 3.6, págs. 73-77] e [Ass15a, Apêndice D].

³³⁷[Nota de Wilhelm Weber:] Ver também Ad. Mayer: “Ueber den allgemeinsten Ausdruck der inneren Potentialkräfte eines Systems bewegter materieller Punkte, welches sich aus dem Princip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung ergibt” — “Sobre a expressão mais geral das forças potenciais internas de um sistema de pontos materiais em movimento, que resulta do princípio da igualdade de ação e reação”. *Mathematische Annalen*, Vol. 13, pág. 20.

³³⁸[May78].

³³⁹Em alemão: *ein vollkommen neues Princip der Energie*. Ver [Hel73].

³⁴⁰Em alemão: *gewöhnlichen Princip der Energie*. Isto é, princípio comum ou usual da energia.

³⁴¹[Neu75, págs. 216-217] e [Neu77, pág. 322].

³⁴²Em alemão: *Energiefunktion*. Essa expressão pode ser traduzida como função da energia, função energia ou função energética.

³⁴³Em alemão: *Das Princip der lebendigen Kraft*. Ver as Notas de rodapé 23 e 170 nas páginas 25 e 87, respectivamente.

Na verdade, faz parte inteiramente da natureza e do processo da *investigação experimental* utilizar tal princípio como *guia*, mesmo quando a formulação *definitiva* ainda esteja faltando e só possa ser obtida mais tarde a partir dos resultados da investigação; mas como é claro que o princípio deve ser *formulado* para servir de diretriz à pesquisa, significando, portanto, que ele só pode ser provisório, segue-se que durante esta investigação, tal princípio é realmente *maleável e flexível*.

Se Helmholtz tinha então o direito de formular *provisoriamente* o princípio da energia de tal forma que a minha lei fundamental, que ele rejeitou, entrasse em *contradição* com ele, então o oposto é obviamente igualmente justificado, a saber, formular *provisoriamente* o mesmo princípio de tal forma que não só estaria *de acordo* com essa lei fundamental, mas que esta surge como uma consequência necessária dele, provando que todas as leis *eletrodinâmicas*, às quais pertence essa lei fundamental, podem ser derivadas das leis *eletrostáticas* por meio do princípio estabelecido provisoriamente. Esse é o objetivo do presente Tratado, que, em lugar da lei geral *da ação elétrica* enunciada no primeiro Tratado,³⁴⁴ que abrangia ao mesmo tempo a eletrostática e a eletrodinâmica, se coloca no *topo* o *princípio de conservação da energia*, a partir do qual, em conjunto com a lei fundamental *estática* da interação entre duas partículas, deve ser deduzido, *em primeiro lugar*, a lei fundamental da ação elétrica e, *em segundo lugar*, a existência de uma *função da energia* para cada par de partículas, a partir da qual segue a validade do princípio *comum* da energia, tal como expresso por Neumann.

15.1 Diretrizes para a Pesquisa Experimental em Eletrodinâmica

Após a fundação obtida das *leis gerais do movimento dos corpos*,³⁴⁵ restaram essencialmente para ser investigadas na física apenas as *leis de interação entre os corpos*; já que sem interação todos os corpos *permaneceriam para sempre* em seus estados originais de repouso ou movimento. Portanto, todas as mudanças nesses estados e todos os fenômenos resultantes são *consequências* de suas interações.

Tais interações ocorrem quando os corpos se *tocam*, e também quando estão *à distância* entre si, e era óbvio que deveríamos começar investigando esse último caso, para extrair uma *diretriz* para o primeiro caso, o que é especialmente necessário sempre que a configuração espacial dos corpos não for diretamente observável, como acontece no caso das interações entre corpos que se tocam. Na verdade, aconteceu de fato dessa maneira, já que começamos com a investigação das interações entre *corpos celestes*, isto é, com as *interações gravitacionais*.

Após essa primeira área de investigação bem sucedida da *interação entre os corpos*, a saber, *interações gravitacionais*, veio a pesquisa das *interações elétricas e magnéticas*, já que além das interações gravitacionais essas eram as únicas interações realizadas por um corpo a *uma distância mensurável* de um outro corpo e elas próprias podiam ser determinadas por medições.

Por um longo tempo todas as investigações teóricas sobre *eletricidade e magnetismo*, em particular aquelas de Coulomb e Poisson,³⁴⁶ basearam-se na teoria da gravitação de

³⁴⁴Ver a Nota de rodapé 333.

³⁴⁵Ou seja, após a obtenção por Newton das leis do movimento. Ver a Nota de rodapé 29 na página 27.

³⁴⁶Ver a Nota de rodapé 320 na página 178.

Newton,³⁴⁷ até que finalmente, como uma consequência das descobertas de Oersted³⁴⁸ e Ampère da *equivalência entre correntes fechadas e ímãs*,³⁴⁹ surgiu uma diretriz totalmente nova, que levou em primeiro lugar à *redução de todas as ações magnéticas como sendo ações entre correntes elétricas* e, em segundo lugar, levou ao estabelecimento de uma *lei fundamental de interação entre quaisquer dois elementos de corrente*.

A ideia geral de reduzir as interações de todos os corpos entre si às *interações entre quaisquer dois corpos* serviu como um *terceiro guia*, segundo o qual as interações entre os *elementos de corrente* também deveriam ser reduzidas às interações entre *duas partículas elétricas quaisquer*. Em geral, esta ideia, independentemente do fato de que o oposto (a saber, interações entre *três* ou mais corpos que não poderiam ser reduzidas às interações entre *dois corpos quaisquer*) levaria a complicações infinitas, poderia ser vista como firmemente estabelecida e confirmada pela experiência em muitas situações.

As partículas materiais a serem levadas em consideração no que diz respeito à interação entre dois elementos de corrente eram agora essencialmente uma partícula elétrica positiva e uma negativa em cada elemento de corrente, resultando em quatro interações entre pares independentes.³⁵⁰ Para a determinação dessas quatro interações tínhamos a lei fundamental de Coulomb-Poisson (modelada com base na lei da gravitação), já que ela havia sido confirmada na eletrostática; contudo, as quatro interações individuais em conjunto não resultam em uma interação resultante, já que elas se cancelam completamente,³⁵¹ e, portanto, a lei fundamental de Ampère para a ação à distância entre elementos de corrente não era redutível à lei fundamental de Coulomb-Poisson para a interação entre pares de partículas elétricas.

A lei de interação fundamental de Coulomb-Poisson entre pares de partículas elétricas havia sido estabelecida apenas para pares de partículas em *repouso mútuo* entre si ou, ao menos, só podia ser justificada como estando de acordo com a experiência para tais partículas mutuamente estacionárias. Em contraste com isso, as quatro partículas elétricas nos dois elementos de corrente formam quatro pares de partículas que não estão em repouso relativo, mas em *movimento relativo*. Portanto, era muito provável que a lei fundamental de Coulomb-Poisson da interação entre duas partículas elétricas, *quando essas partículas estão em movimento relativo*, ainda exigisse uma *correção*, que pode ser denotada por x . Denotando as correções das quatro interações anteriores na ordem x_1, x_2, x_3, x_4 , então a soma delas não deve ser nula e deve ser igual à força determinada pela lei de Ampère.

Dessa maneira foi agora encontrado que — denotando duas partículas elétricas quaisquer em unidade absoluta por e e e' ,³⁵² e a distância, velocidade e aceleração relativa entre elas por $r, dr/dt$, e d^2r/dt^2 , e distinguindo esses quatro valores para os quatro pares considerados nos dois elementos de corrente com os subscritos 1, 2, 3, 4 — a força repulsiva entre dois elementos de corrente determinada pela lei de Ampère, a saber,

³⁴⁷Ver a Nota de rodapé 29 na página 27.

³⁴⁸Hans Christian Ørsted (1777-1851). Ver [Oer20b], [Oer20a], [Oer20c], [Oer65], [Ørs86] e [Ørs98]. Ver também [Fra81], [Mar86] e [Rei13].

³⁴⁹Ver a Nota de rodapé 7 na página 16.

³⁵⁰Seja o elemento de corrente 1 composto de duas partículas eletrizadas com cargas iguais e opostas, e_+ e $e_- = -e_+$. Seja da mesma forma o elemento de corrente 2 composto de duas partículas eletrizadas com cargas iguais e opostas, e'_+ e $e'_- = -e'_+$. A interação entre os elementos de corrente 1 e 2 é então composta de quatro interações independentes entre pares de partículas, a saber, e_+ interagindo com e'_+ , e_+ interagindo com e'_- , e_- interagindo com e'_+ , juntamente com e_- interagindo com e'_- .

³⁵¹Devido à neutralidade de carga dos dois elementos de corrente, a soma dessas quatro interações de Coulomb tem como soma um resultado nulo.

³⁵²Isto é, e e e' são os valores das cargas elétricas de duas partículas expressas no sistema absoluto de unidades introduzido por C. F. Gauss (1777-1855) e Wilhelm Weber, [ARW02], [ARW04] e [Ass21d].

$$\frac{\alpha\alpha'ii'}{r^2} (3 \cos \vartheta \cos \vartheta' - 2 \cos \varepsilon) ,$$

(onde α e α' são os comprimentos dos dois elementos de corrente, i e i' as intensidades de corrente, r a distância entre eles, ϑ e ϑ' os ângulos que α e α' fazem com r , sendo ainda ε o ângulo formado por α e α'), é realmente representada por meio da seguinte soma:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 ,$$

se colocarmos³⁵³

$$x = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{ee'}{r^2} \left(2r \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{dr^2}{dt^2} \right) .$$

A grandeza c denota aqui uma *constante*, a saber, aquela velocidade relativa entre as duas partículas na qual não ocorre qualquer interação, desde que essa velocidade permaneça constante.³⁵⁴

Para provar isso só é necessário expressar as grandezas α , α' , i , i' e os ângulos ϑ , ϑ' e ε relacionados aos elementos de corrente como sendo funções das grandezas e , e' , r , dr/dt , d^2r/dt^2 com relação aos quatro pares de partículas.

Portanto, essa *correção* precisa ser adicionada à força repulsiva determinada pela lei fundamental de Coulomb-Poisson, sempre que ela tiver que ser válida não apenas para pares de partículas em repouso relativo, mas também para tais movimentos que ocorrem nos elementos de corrente para os quais é válida a lei de Ampère.

Mas é claro que essas quatro partículas elétricas também podem ser colocadas em *diversos outros movimentos relativos*, diferentes daqueles que ocorrem dentro dos dois elementos de corrente para os quais é válida a lei de Ampère. Podem ser facilmente feitos arranjos pelos quais as duas partículas de eletricidade positiva e negativa contidas em um elemento de corrente, em vez de se moverem *em direções opostas com a mesma velocidade constante* (como Ampère assumiu), ou se movem em direções opostas à mesma velocidade, mas *variável*, ou se movem com *velocidade desigual* em direções que formam um *ângulo qualquer* entre si. Todos esses diferentes casos podem ser facilmente reproduzidos, em parte permitindo que a corrente presente em um condutor *desapareça* e depois *reapareça*, abrindo e fechando o circuito de corrente, e em parte permitindo que as eletricidades que fluem na direção oposta no condutor se *desloquem juntamente com seu condutor*.

Se agora a *lei corrigida* de Coulomb-Poisson for realmente válida em geral para duas partículas elétricas, não apenas em repouso relativo ou pertencendo a correntes constantes em condutores em repouso, mas também para todos os seus outros movimentos, então a partir disso pode ser prevista e predeterminada a ação entre elementos de corrente assim como no caso de partículas individuais — tanto nos casos que acabaram de ser listados assim como em todos os outros casos nos quais a lei de Ampère não se aplica (os quais ficaram por longo tempo despercebidos e não foram observados) — o que serve como teste e confirmação da validade geral dessa lei. Desta forma todas as leis da indução voltaica³⁵⁵

³⁵³A expressão dr^2/dt^2 deve ser entendida como $(dr/dt)^2$.

³⁵⁴Isto é, se dr/dt permanecer constante e igual a c , então não haverá força resultante entre as duas partículas elétricas caso elas estejam interagindo de acordo com a lei fundamental de Weber.

³⁵⁵A expressão utilizada por Weber, *Volta-induktion*, havia sido sugerida inicialmente pelo próprio Michael Faraday (1791-1867) no parágrafo 26 de seu primeiro artigo sobre indução eletromagnética de 1831 ao definir a expressão *volta-electric induction*, [Far32a, parágrafo 26, pág. 267 do *Great Books of the Western World*]

foram encontradas, em completa concordância com os fenômenos descobertos por Faraday, e foram universalmente confirmadas pelas mais variadas observações e medições.

Em relação a essa lei fundamental geral da interação entre duas partículas elétricas podemos associar considerações adicionais sobre a *essência da interação*.

Durante todas as mudanças nos corpos celestes as *massas* dos corpos sempre permanecem inalteradas, e também a força viva dos corpos permaneceria inalterada pela lei da inércia se não houvesse *interação*. As *interações* são, portanto, a causa de todas as mudanças nas *forças vivas*,³⁵⁶ e surge a questão de saber se, ao contrário, a causa de todas as mudanças nas interações não se encontra nas *forças vivas*, de modo que um aumento na interação só é obtido quando a força viva é perdida e que, ao contrário, a força viva só pode ser ganha se a interação sofrer uma redução. A *interação* entre os corpos seria então equivalente à força viva perdida, e a força viva seria o *equivalente* à interação perdida, por meio da qual os *valores* das interações e das forças vivas seriam levados a uma certa *dependência* entre si.

A lei fundamental geral da interação elétrica mencionada anteriormente corresponde a essa ideia, já que ela estabelece a dependência entre a força resultante da interação mútua e a força viva dos corpos, em contraste com a lei de Coulomb-Poisson de acordo com a qual não há tal dependência.

Se agora a magnitude da interação entre duas partículas é chamada de *energia de interação* e, da mesma forma, a magnitude da força viva relativa de duas partículas é chamada de *energia cinética*,³⁵⁷ então é muito provável que, se uma energia *aumenta* e a outra *diminui* simultaneamente, o ganho em uma energia também compensa *quantitativamente* a perda na outra energia, o que pressupõe a *homogeneidade* das duas magnitudes de energia e significa que *sua soma é constante*. Se denotarmos por Q a força viva relativa entre as duas partículas e por P a energia de sua interação, então teríamos de colocar de acordo com isso

$$P + Q = a ,$$

onde a seria uma *constante* associada a cada *par de partículas*, assim como a massa é uma constante associada a cada *partícula individual*.

Isto determinaria *o que muda na interação entre duas partículas através dos movimentos mútuos*, fornecendo assim uma base para deduzir as *leis dinâmicas a partir das leis estáticas*.

A energia constante total a seria ao mesmo tempo o limite que não pode ser excedido pela energia P , já que de fato a energia Q (isto é, a força viva das partículas) não pode ter um valor menor do que zero.

com tradução para o alemão em [Far32b] e tradução para o português em [Far11, págs. 158-159]:

For the purpose of avoiding periphrasis, I propose to call this action of the current from the voltaic battery, *volta-electric induction*.

Isto é:

Com a finalidade de evitar perífrase, proponho chamar essa ação da corrente da bateria voltaica de *indução eletrovoltaica*.

A palavra “perífrase” significa circunlóquio ou rodeio de palavras. Nessa tradução em português das obras de Weber vou utilizar as expressões *indução eletrovoltaica* ou *indução voltaica* para essa classe de fenômenos que hoje em dia é chamada de lei de indução de Faraday.

³⁵⁶Ver a Nota de rodapé 23 na página 25.

³⁵⁷Em alemão: *Bewegungsenergie*. Essa expressão pode ser traduzida como a energia cinética ou energia do movimento. Ver a Nota de rodapé 171 na página 89 do Capítulo 9.

A conjectura expressa aqui passou por *muitas modificações* e, conseqüentemente, encontrou várias expressões nos pronunciamentos provisórios do *princípio de conservação da energia* , que se tornou o *princípio orientador* de muitas pesquisas nos últimos tempos, especialmente no campo da termodinâmica e da teoria da eletricidade.^{358,359} Dada a importância e o significado que este novo *guia* adquiriu, merecem especial atenção algumas diferenças entre os pontos de vista e as opiniões que dele emergiram.

A formulação provisória anterior para o *princípio de conservação da energia* é fundamentalmente diferente, e poderia facilmente parecer que está em contradição (o que, em uma análise mais detalhada, não é o caso) com a formulação do “ *princípio comum da energia* ”, em relação ao qual C. Neumann afirmou o seguinte no Vol. XI, pág. 320, dos *Mathematische Annalen* :³⁶⁰

³⁵⁸[Nota de Wilhelm Weber:] A designação da soma da *força viva* e do *calor* de um sistema de corpos, juntamente com o trabalho determinado por seu *potencial* , pelo nome de sua *energia mecânica* , ou sua *energia* , para abreviar, deriva de Thomas Young e W. Thomson, e foi então reconhecida e adotada por Clausius como uma escolha muito apropriada.

Thomas Young, *Lectures on Natural Philosophy* , London 1807, Palestra VIII, diz na pág. 78:

O termo energia pode ser aplicado, com grande propriedade, ao produto da massa ou peso de um corpo, com o quadrado do número que expressa sua velocidade.

Young denomina assim apenas a força viva de um corpo (na verdade, o dobro desse valor) com o nome de energia, mas sem acrescentar explicitamente que o corpo possui apenas essa energia e nenhuma outra. Em vez disso, como na página seguinte ele usa a expressão mais completa *energy of its motion — energia de seu movimento* para a força viva de um corpo, parece estar implícito que um corpo, além de seu movimento, também pode ter outra energia.

W. Thomson em *Phil. Magazine and Journal of Science* , IV. Série, [Vol.] 9, Londres 1855, pág. 523, afirma:

Um corpo que está emitindo calor, ou alterando suas dimensões contra forças resistivas, está realizando trabalho sobre a matéria externa a ele. O efeito mecânico desse trabalho em um caso é a excitação de movimentos térmicos, e no outro caso é a superação das resistências. O próprio corpo deve estar se alterando em suas circunstâncias, de modo a conter uma quantidade menor de trabalho dentro dele por uma quantia precisamente igual ao valor agregado dos efeitos mecânicos produzidos; e, inversamente, o valor agregado dos efeitos mecânicos produzidos deve depender unicamente dos estados inicial e final do corpo e é, portanto, o mesmo quaisquer que sejam os estados intermediários pelos quais o corpo passa, desde que os estados *inicial* e *final* sejam os mesmos. — A *energia mecânica* total de um corpo poderia ser definida como o valor mecânico do efeito total que ele produziria em calor emitido e nas resistências superadas, se ele fosse esfriado o máximo possível, e fosse permitido contrair-se indefinidamente ou expandir-se indefinidamente, dependendo se as forças entre suas partículas são atrativas ou repulsivas, quando todos os movimentos térmicos dentro dele forem interrompidos.

Aqui, W. Thomson expressou o princípio de *conservação da energia* com o nome de *energia* ; pois aquilo que um sistema perde de seu estoque de energia é ganho por um outro sistema de corpos, disso segue obviamente a *conservação da energia* em todos os sistemas de corpos considerados em conjunto. — O mesmo princípio foi essencialmente formulado anteriormente, utilizando apenas uma outra expressão, especificamente por Helmholtz com o nome de *princípio de conservação da força* .

³⁵⁹[You07, Palestra 8, pág. 78], [Tho53a, pág. 475 do periódico *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* , pág. 523 da *Philosophical Magazine* e págs. 222-223 dos *Mathematical and Physical Papers*]. Aquilo que Helmholtz denominou de *princípio de conservação da força* [*Princip der Erhaltung der Kraft*], [Hel47] com tradução para o inglês em [Hel66], é chamado hoje em dia de *princípio de conservação da energia* . Ver ainda [Cla57b] com tradução para o inglês em [Cla57a], e [Cla79]. Ver também a discussão que apresentei no Capítulo 8 dessa tradução em português.

³⁶⁰[Neu75, págs. 214-217] e [Neu77, págs. 320-322]. Quando Weber menciona a seguir de onde vem uma certa citação de Helmholtz, ele mencionou [Hel72a], com tradução para o inglês em [Hel72b]. Contudo, a

Este princípio exige que exista uma *função da energia* para cada sistema material, isto é, uma função que depende do estado atual do sistema e que tem a propriedade de aumentar em qualquer período de tempo tanto quanto o trabalho fornecido ao sistema a partir de fora durante este período. Ao mesmo tempo observamos que essa *função da energia* (que chamamos simplesmente de *energia* do sistema), baseada na lei de Weber [palavras acrescentadas por Weber: essa é a terminologia de Neumann para a lei de Coulomb-Poisson corrigida descrita anteriormente], é representada pela soma da força viva e potencial ... Helmholtz, no entanto, assume uma posição ligeiramente diferente sobre essa questão ... como apresentado nas seguintes palavras no artigo (*Monatsber. d. Berl. Akad.*, 18 de abril de 1872):

Nas investigações sobre a validade ou não da lei da conservação da energia para certos processos naturais, geralmente nos contentamos em examinar se, caso possa expressar o resultado analítico de forma prática, um processo circular repetido continuamente até o infinito pode produzir ou destruir trabalho. — Nesse sentido, a suposição de Weber não viola a lei de conservação da energia; mas ela faz isso em um sentido diferente — — —

Neumann continua:

A próxima objeção não lida mais com o princípio comum da energia, mas com um princípio completamente *novo*, um princípio formulado aqui pela primeira vez. A saber, enquanto o princípio comum da energia exige para cada sistema material a existência de uma função da energia, isto é, a existência de uma função que tem a propriedade de aumentar em cada intervalo de tempo pela quantidade exata que é igual ao trabalho fornecido ao sistema nesse intervalo de tempo, — esse novo princípio não exige apenas a *existência* de uma tal função, mas também a condição de que a *parte cinética* dessa função (a parte que depende da velocidade) tem de sempre ser *positiva*.

Neumann acrescenta em uma nota a seguinte observação, já citada anteriormente:^{361,362}

Não há dúvida de que os princípios da física são, por natureza, maleáveis e flexíveis. O *princípio da força viva* expandiu-se gradualmente para o *princípio da energia*, e é possivelmente capaz de uma expansão ainda maior. — Consequentemente, não é de forma alguma impossível a priori que este princípio da energia se expanda gradualmente no novo princípio de Helmholtz. Mas parece-me apropriado, pelo menos por enquanto, chamar os dois princípios por nomes diferentes. —

A última observação se aplica não apenas ao princípio de Helmholtz, mas também ao princípio estabelecido anteriormente, que da mesma forma se desvia do princípio *comum* e assim, para distingui-lo melhor, foi usado o nome de princípio de *conservação* da energia, pois de acordo com ele a *energia total*, a saber, a soma da energia do movimento e da energia de interação, é *conservada*, enquanto que de acordo com o princípio comum da energia

referência correta é: [Hel73, pág. 36 do *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, e pág. 649 dos *Wissenschaftliche Abhandlungen*].

³⁶¹[Neu75, págs. 216-217] e [Neu77, p. 322].

³⁶²Ver a página 186.

existe apenas uma *função da energia*, cujo valor não é conservado de todo, mas que tem a propriedade de aumentar em qualquer intervalo de tempo precisamente pela quantidade de trabalho fornecido ao sistema a partir do exterior. Apenas em dois casos o princípio comum também pode ser considerado como um princípio de *conservação* da energia, a saber, no caso em que o sistema que está sendo considerado contém *todos* os corpos do mundo, e ainda no caso em que o sistema em consideração é para ser visto como estando *completamente isolado*; o motivo sendo que nesses dois casos não existem influências *externas*.

Contudo, dadas essas diferenças, tem de ser provado que não há *contradição* entre o princípio de *conservação* da energia e o princípio *comum* da energia, como definido por Neumann, para o qual, como é facilmente visto, só é necessário mostrar que a energia de interação P aumenta em qualquer intervalo de tempo exatamente pela diferença, nesse intervalo de tempo, do aumento do potencial V e do trabalho S fornecido ao par de partículas a partir de fora, isto é, que vale $dP = dV - dS$, o que, levando em consideração a equação dada pela conservação da energia, a saber, $P + Q = a$, onde a denota uma constante, leva ao princípio *comum* da energia, isto é:

$$d(Q + V) = dS ,$$

onde $(Q + V)$ denota a *função da energia* de Neumann. — Vamos tentar apresentar essa prova na Seção 15.4.

O objetivo que será alcançado com esse novo princípio, diferente tanto do princípio *comum* quanto do princípio da energia formulado por Helmholtz, consiste essencialmente em

obter um princípio pelo qual seja determinado o que muda na interação entre os corpos através de seu movimento.

A *interação* só ocorre entre dois corpos e ela sofre uma alteração *apenas* por meio da força viva relativa de seu movimento. Supondo isso e também que essa *interação* entre dois corpos ou partículas materiais é uma grandeza *homogênea* com a força viva relativa delas, que forma com o valor da força viva a *soma de energia* constante a , então a obviamente significa o valor da interação entre as duas partículas *em repouso*, isto é, a interação *estática* entre elas, e o princípio de conservação da energia é então a lei através da qual é determinado que essa interação *estática*, em consequência de qualquer *movimento* relativo fornecido pela força viva [de valor] Q , é diminuída em Q .

A *lei fundamental geral da interação elétrica* seria então substituída completamente pelo princípio de conservação da energia e transformada em um teorema, que seria deduzido e provado a partir da lei fundamental da *eletrostática* por meio do *princípio de conservação da energia*.

15.2 A Energia de Interação Reduzida às Unidades Absolutas

A partir da equação estabelecida na Seção anterior, na qual o princípio de conservação da energia foi formulado provisoriamente, a saber,

$$P + Q = a ,$$

é óbvio que a *energia cinética* Q pode ser determinada se for dada a *energia de interação* P e vice-versa; ao mesmo tempo, porém, é claro que o significado da equação, como enunciado de um princípio, se baseia no *significado físico*, que deve ser combinado com o conceito de cada energia *individual*, a partir do qual deve ser clara a possibilidade de determinar o valor de cada energia independentemente da outra. Uma tal determinação já foi fornecida há muito tempo para a *energia cinética*; portanto, só é necessária uma determinação similar para a *energia de interação*.

A interação entre duas partículas durante uma mudança de distância consiste em *trabalho*. Sem mudança de distância, ocorre interação, mas não ocorre *trabalho*; contudo, o par de partículas sempre possui uma *capacidade de trabalho*³⁶³ isto é, a propriedade de ser capaz de realizar trabalho através de variações de distância. A partir dessa *capacidade de trabalho* reconhecemos a interação, sendo que seu valor fornece a medida da *energia de interação*.

Uma determinação quantitativa da capacidade de trabalho precisa ser baseada na *medição de trabalho*. Mas o *trabalho* consiste na *anulação* do trabalho oposto, ou na *criação* (ou destruição) da força viva. Os trabalhos que se cancelam mutuamente não podem ser medidos diretamente; por outro lado, o aumento ou a diminuição da força viva em condições adequadas é um objeto de observação e medição direta, ao qual toda *medição de trabalho* pode, em última análise, ser reduzida.

Se de acordo com isso o *trabalho* pode ser determinado a partir da força viva mensurável gerada por ele, quando ele não é cancelado por um trabalho oposto, então para determinar a *capacidade de trabalho* de um par de partículas é suficiente determinar o valor do trabalho que é causado pela *interação* entre as partículas durante uma certa mudança na distância, sendo que essa distância específica ainda precisa ser determinada. Se esta quantidade de trabalho é positiva ou negativa não é levado em consideração, e o *valor absoluto*^{364,365} desta quantidade de trabalho serve, portanto, como uma *medida* da capacidade de trabalho.³⁶⁶

Por outro lado, de acordo com o princípio estabelecido da conservação de energia, a velocidade dr/dt na qual a mudança na distância ocorre deve ser levada em consideração para determinar a capacidade de trabalho, porque a energia cinética Q e, conseqüentemente, de acordo com o princípio estabelecido, a energia de interação P também muda com essa velocidade. A partir disso é claro que a energia P , isto é, a capacidade de trabalho de um par de partículas, só pode ser determinada exatamente para um *valor dado da velocidade* dr/dt , e que esse valor tem de ser suposto *constante* durante a mudança correspondente de distância.

Porém, com um valor constante de dr/dt , não há aumento ou diminuição na força viva que possa servir para medir *diretamente* o trabalho, portanto deve-se procurar um método *indireto* de medição do trabalho para determinar a capacidade de trabalho. Se durante uma

³⁶³Em alemão: *Arbeitsvermögen*. Essa expressão pode ser traduzida como “capacidade de trabalho”, “capacidade para o trabalho” ou “habilidade para realizar trabalho”. Ver a Nota de rodapé 275 na página 149.

³⁶⁴[Nota de Wilhelm Weber:] Disso segue que a validade do princípio $P + Q = a$ está limitada aos casos nos quais Q não excede o valor de a . Contudo, a força viva, Q , de todos os corpos conhecidos é uma fração tão pequena de a , que muito provavelmente não ocorre o caso $Q > a$. De acordo com o nosso conhecimento atual, isso exigiria dois corpos com uma velocidade relativa $> 439\,450$ quilômetros/segundo.

³⁶⁵Ou seja, somente com $dr/dt > 439\,450$ quilômetros/segundo teríamos $Q > a$. Não ocorre essa situação nos casos conhecidos na natureza. Ver [Ass21e] para uma discussão da constante c de Weber e sua relação com a velocidade da luz no vácuo.

³⁶⁶Em alemão: *Maass des Arbeitsvermögens*. Isto é, medida, unidade ou unidade de medida da capacidade de realizar trabalho.

mudança de distância não quisermos causar uma mudança da velocidade relativa através da interação, então o trabalho realizado durante a mudança de distância através da *interação* tem de ser contrabalançado pelo trabalho realizado através de uma influência *externa*, sendo que esse último trabalho pode ser usado — caso ele seja de origem conhecida e, portanto, determinado exatamente, por exemplo, se ele vier de pesos conhecidos que atuam sobre as partículas durante a mudança de distância — para medir *indiretamente* o trabalho realizado pela interação.

O trabalho realizado pela interação durante a mudança de distância dr entre duas partículas e e e' é dado em valor absoluto por $\pm[\partial V/\partial r]dr$,³⁶⁷ onde V denota o *potencial* das duas partículas, sendo que o sinal superior ou inferior é válido dependendo se o produto ee' é positivo ou negativo. Similarmente, o trabalho realizado durante uma mudança maior de distância desde ρ' até ρ'' é dado por

$$\pm \int_{\rho'}^{\rho''} \frac{\partial V}{\partial r} dr .$$

A tarefa de reduzir a energia de interação entre duas partículas e e e' à unidade absoluta, isto é, a determinação de sua capacidade de trabalho em unidade absoluta, fica então dependente da determinação do valor integral $\pm \int_{\rho'}^{\rho''} \frac{\partial V}{\partial r} dr$, na qual apenas precisam ser determinados os limites de integração ρ' e ρ'' .

Uma vez que a *capacidade de trabalho* é entendida como o valor do trabalho realizado pela interação durante uma *mudança de distância a ser determinada exatamente*, fica então claro que os limites de distância ρ' e ρ'' na expressão $\pm \int_{\rho'}^{\rho''} \frac{\partial V}{\partial r} dr$ precisam ter *valores precisamente definidos e constantes*, de onde segue que esses limites de distância não podem ser os mesmos que aqueles do potencial $\int_{\infty}^r \frac{dV}{dr} dr$ para os quais um dos limites, a saber, r , é *variável*.

Além disso, uma vez que se trata de determinar a *capacidade de trabalho total* do par de partículas em consideração através da interação entre suas partículas, é óbvio que estas fronteiras devem ser afastadas tanto quanto possível, sem que isso aconteça contrariando o princípio da conservação da energia, segundo o qual a *soma da energia* associada ao par de partículas deve ser uma constante, a , e esta constante deve ser ao mesmo tempo o valor limite que a *energia da interação* não deve ultrapassar e só deve ser alcançada quando a *energia cinética* é nula.

Disso resulta em primeiro lugar a determinação de uma distância limite $\rho' = \infty$; no que diz respeito ao outro limite ρ'' , seu valor não pode ser menor do que aquele valor para o qual seria válido $\pm \int_{\infty}^{\rho''} \frac{\partial V}{\partial r} dr = a$. O valor de ρ'' assim determinado deve ser denotado por ρ .

Para determinar a *energia P de interação* entre duas partículas e e e' , cujas massas são denominadas por ε e ε' , e cuja energia cinética é³⁶⁸

$$Q = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} ,$$

obtemos então a seguinte equação:

³⁶⁷[Nota de Wilhelm Weber:] O símbolo de *derivada parcial* foi escolhido para indicar que nessa diferenciação dr/dt deve ser considerada constante.

³⁶⁸A expressão a seguir deve ser entendida como:

$$Q = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 .$$

$$P = \pm \int_{\infty}^{\rho} \frac{\partial V}{\partial r} dr .$$

Aqui deve ser observado que, em primeiro lugar, durante a variação de distância, deve haver uma influência *externa* no par de partículas além da interação, através da qual é mantido *constante* o valor dado de $\partial r/\partial t$ em V ; além disso, aplica-se o sinal superior ou inferior, consoante o produto ee' seja positivo ou negativo; e finalmente que $P = a$ quando $Q = 0$, o que serve para determinar ρ .

Essa fórmula para P ainda pode ser transformada como segue. Podemos decompor

$$P = \pm \int_{\infty}^{\rho} \frac{\partial V}{\partial r} dr$$

em duas partes, a saber,

$$P = \pm \int_{\infty}^r \frac{dV}{dr} dr \pm \int_r^{\rho} \frac{\partial V}{\partial r} dr ,$$

onde a *primeira* parte é o valor absoluto do *potencial* V , e onde usamos aqui os símbolos usuais de diferenciação pois não interessa se dr/dt é tratado como variável ou não. Em relação à *segunda* parte, temos de observar que o valor *dado* da velocidade dr/dt tem de ser assumido como constante durante a variação de distância desde r até ρ .

Seja s o trabalho realizado pela influência *externa* durante a mudança de distância de r para ρ . Então, para manter dr/dt constante, tem de valer a seguinte relação:

$$\pm \int_r^{\rho} \frac{\partial V}{\partial r} dr + s = 0 .$$

Obtemos disso a seguinte fórmula para determinar a energia P , a saber,

$$P = \pm V - s ,$$

onde V denota o *potencial* das partículas e e e' , sendo s o trabalho que tem de ser realizado durante a mudança de distância de r para ρ por influência *externa* para que o valor *dado* da velocidade relativa dr/dt permaneça constante.

15.3 Dedução da Lei do Potencial Eletrodinâmico a partir da Lei do Potencial Eletrostático Usando o Princípio da Energia

A partir da definição dada das duas energias no caso de um par de partículas elétricas e e e' cujas massas foram denominadas por ε e ε' , e cuja separação entre elas foi chamada de r , a

saber,^{369,370,371}

$$\text{a energia cinética, } Q = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} ,$$

e

$$\text{a energia de interação, } P = \pm \int_{\infty}^{\rho} \frac{\partial V}{\partial r} dr ,$$

— onde o sinal superior ou inferior é válido dependendo se é positivo ou negativo o produto ee' , e onde o valor da velocidade relativa dr/dt dado pela grandeza Q é assumido *constante* durante a mudança na distância e o mesmo deve ser válido para Q , — onde resulta do princípio da energia apresentado na Seção 15.1, de acordo com o qual $P + Q = a$ forma uma soma *constante*, a seguinte equação entre as duas constantes a e ρ e as duas variáveis Q e V , a saber,

$$\pm \int_{\infty}^{\rho} \frac{\partial V}{\partial r} dr = a - Q . \quad (1)$$

Agora, de acordo com a lei fundamental da *eletrostática*, o potencial para $Q = 0$ é dado por $V = ee'/r$. Inserindo esses valores das variáveis Q e V na Equação (1), obtemos a seguinte equação entre as duas constantes a e ρ , reduzindo uma à outra, a saber,

$$\pm \int_{\infty}^{\rho} \frac{d \frac{ee'}{r}}{dr} dr = a ,$$

de onde encontramos o valor da constante ρ , a saber

$$\rho = \pm \frac{ee'}{a} . \quad (2)$$

³⁶⁹[Nota de Wilhelm Weber:] Se α e β denotam as velocidades da massa ε na direção r e na direção ortogonal a r , enquanto que α' e β' denotam as mesmas velocidades para ε' , de tal forma que $\alpha - \alpha' = dr/dt$ é a velocidade relativa entre as duas partículas, então

$$\frac{1}{2} \varepsilon (\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{2} \varepsilon' (\alpha'^2 + \beta'^2)$$

é a força viva total pertencendo às duas partículas. Se agora, no lugar de α , colocarmos

$$\frac{\varepsilon \alpha + \varepsilon' \alpha'}{\varepsilon + \varepsilon'} + \frac{\varepsilon' (\alpha - \alpha')}{\varepsilon + \varepsilon'} ,$$

e, no lugar de α' , [colocarmos]

$$\frac{\varepsilon \alpha + \varepsilon' \alpha'}{\varepsilon + \varepsilon'} - \frac{\varepsilon' (\alpha - \alpha')}{\varepsilon + \varepsilon'} ,$$

obteremos então a força viva total das duas partículas como sendo a soma de *duas partes*,

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{(\varepsilon \alpha + \varepsilon' \alpha')^2}{\varepsilon + \varepsilon'} + \varepsilon \beta^2 + \varepsilon' \beta'^2 \right] ,$$

de onde a *primeira parte*, a saber, $\frac{1}{2} [\varepsilon \varepsilon' / (\varepsilon + \varepsilon')] \cdot [dr^2 / dt^2]$, é a *força viva relativa* entre as duas partículas, que foi chamada anteriormente de Q . — Ver *Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften*, Vol. X, pág. 12.

³⁷⁰[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. IV, pág. 257.

³⁷¹[Web71, págs. 256-257 das *Obras de Weber*] com traduções para o inglês em [Web72, pág. 9] e [Web21g, pág. 74, Nota 140]. Ver também a Nota de rodapé 170 na página 87 do Capítulo 9.

Inserindo agora esse valor de ρ na Equação (1), obtemos a seguinte equação entre apenas *uma* constante, a saber, a , o valor dado da variável Q , e o valor procurado da variável V , a saber,

$$\pm \int_{\infty}^{\pm \frac{ee'}{a}} \frac{\partial V}{\partial r} dr = a - Q , \quad (3)$$

de onde é para ser determinado o valor de V .

Vemos facilmente que essa Equação (3) é satisfeita pela seguinte determinação de V , a saber,

$$V = \frac{ee'}{r} \left(1 - \frac{Q}{a} \right) ;$$

de fato, substituindo esse valor no primeiro termo da Equação (3) e levando em consideração que, de acordo com a definição dada na Seção 15.2, na fórmula $P = \pm \int_{\infty}^{\rho} \frac{\partial V}{\partial r} dr$, o valor dado da velocidade relativa dr/dt , portanto também $Q = \frac{1}{2}[\varepsilon\varepsilon' / (\varepsilon + \varepsilon')] \cdot [dr^2/dt^2]$, têm de ser *constantes* durante a mudança de distância, encontramos então para um limite, $r = \pm ee'/a$, o valor de $V = \pm a(1 - Q/a)$, e para o outro limite, $r = \infty$, o valor de $V = 0$, e conseqüentemente a diferença desses valores

$$\int_{\infty}^{\pm \frac{ee'}{a}} \frac{\partial V}{\partial r} dr = \pm a \left(1 - \frac{Q}{a} \right) ,$$

portanto,

$$\pm \int_{\infty}^{\pm \frac{ee'}{a}} \frac{\partial V}{\partial r} dr = a \left(1 - \frac{Q}{a} \right) = a - Q ,$$

o que está totalmente de acordo com a Equação (3).

Essa fórmula da *lei do potencial eletrodinâmico* deduzida da lei fundamental da *eletrostática* com o auxílio do *princípio da energia*, a saber,

$$V = \frac{ee'}{r} \left(1 - \frac{Q}{a} \right) , \quad (4)$$

ainda pode ser reescrita da seguinte maneira.

De acordo com o princípio da energia, a *soma constante de energia*, a , é o limite da energia cinética $Q = \frac{1}{2}[\varepsilon\varepsilon' / (\varepsilon + \varepsilon')] \cdot [dr^2/dt^2]$ para valores decrescentes da energia de interação P , isto é, temos $Q = a$ quando $P = 0$. Chamando então de c à velocidade relativa dr/dt entre duas partículas para esse *valor limite* da energia cinética a , obtemos

$$a = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot c^2 .$$

Substituindo agora esses valores de $Q = \frac{1}{2}[\varepsilon\varepsilon' / (\varepsilon + \varepsilon')] \cdot [dr^2/dt^2]$ e $a = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot c^2$ na Equação (4), obtemos a seguinte expressão para a lei do potencial eletrodinâmico:³⁷²

³⁷²A próxima equação deve ser entendida como:

$$V = \frac{ee'}{r} \left[1 - \frac{1}{c^2} \cdot \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] .$$

$$V = \frac{ee'}{r} \left(1 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} \right) .$$

Entre as três *constantes* a , ρ , c aparecendo na dedução da lei do potencial eletrodinâmico de um par de partículas elétricas e e e' , com massas ε e ε' , ocorrem finalmente as seguintes relações:

$$a = \pm \frac{ee'}{\rho} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot c^2 .$$

Para o *potencial eletrodinâmico* V obtemos as seguintes fórmulas ao trocar essas constantes:

$$V = \frac{ee'}{r} \left(1 - \frac{Q}{a} \right) = \frac{ee'}{r} \left(1 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} \right) = \frac{ee'}{r} \mp \frac{\rho}{r} Q ,$$

onde o sinal superior ou inferior é válido dependendo se é positivo ou negativo o produto ee' .

15.4 Dedução do Princípio Comum da Energia a partir do Princípio de Conservação da Energia

O princípio *comum* da energia, como formulado por Neumann, exige que para cada sistema material exista uma *função da energia*, isto é, um função dependendo apenas do estado momentâneo do sistema, que tem a propriedade de aumentar em cada intervalo de tempo precisamente pela quantidade de trabalho fornecida ao sistema do exterior durante esse intervalo. Essa *função da energia* é comumente chamada de *energia*, para abreviar.

No caso de um sistema de duas partículas a uma distância r uma da outra, no qual, durante a mudança de distância dr , é exercido o trabalho *interno* Rdr por interação e o trabalho *externo* dS por ação externa, de acordo com um conhecido *teorema geral da mecânica*, o aumento da força viva Q é tão grande quanto a soma de todo o trabalho *interno* e *externo* exercido no sistema, a saber

$$dQ = Rdr + dS .$$

Portanto, se há uma função dependendo do estado atual do par de partículas e que tem a propriedade de aumentar durante a mudança de distância dr pelo valor $dQ - Rdr = dS$, então é válido para tal par de partículas o princípio *comum* da energia.

Como já foi provado para um par de partículas elétricas e e e' pela *lei do potencial* desenvolvida na Seção anterior sob a suposição do princípio de *conservação da energia* que o trabalho *interno* Rdr é a diferencial completa da função $-(ee'/r)(1 - dr^2/c^2 dt^2)$, que, assim como Q , depende apenas do estado instantâneo do par de partículas, é óbvio que a diferença entre as duas quantidades, que também depende apenas do estado atual do par de partículas, a saber

$$Q + \frac{ee'}{r} \left(1 - \frac{dr^2}{c^2 dt^2} \right) ,$$

tem a propriedade de aumentar durante a mudança de distância dr por $dQ - Rdr = dS$, de onde, conseqüentemente, para um tal par de partículas, é válido não apenas o princípio de

conservação da energia, mas também o princípio *comum* da energia, e sua *função da energia* é

$$Q + \frac{ee'}{r} \left(1 - \frac{dr^2}{c^2 dt^2} \right) .$$

A validade simultânea dos dois princípios, a saber, o princípio de *conservação* da energia afirmando que $P + Q = a$, e o princípio *comum* da energia afirmando que $d(Q + V) = dS$, onde S denota o trabalho realizado por influência *externa*, pressupõe, como já mencionado no final da Seção 15.1, em primeiro lugar que

$$dP = dV - dS ,$$

ou, como $P = \pm V - s$ de acordo com a Seção 15.2, temos então consequentemente:

$$dP = \pm dV - ds ,$$

e também $\pm dV - ds = dV - dS$, que pode ser facilmente provado com o auxílio das equações obtidas nas Seções 15.2 e 15.3:

$$\pm \int_r^\rho \frac{\partial V}{\partial r} dr + s = 0 , \quad (1)$$

$$V = \pm \frac{\rho}{r} (a - Q) , \quad (2)$$

e com o auxílio da equação já citada na Seção 15.1, que serve de expressão do princípio *comum* da energia, [a saber,]

$$dS = d(Q + V) . \quad (3)$$

A partir de (1) e (2) resultam as equações

$$s = (a - Q) \left(\frac{\rho}{r} - 1 \right) ,$$

$$-ds = \rho(a - Q) \frac{dr}{r^2} + \left(\frac{\rho}{r} - 1 \right) dQ ,$$

$$\pm dV = -\rho(a - Q) \frac{dr}{r^2} - \frac{\rho}{r} dQ ,$$

de onde segue

$$\pm dV - ds = -dQ .$$

Mas agora $dV - dS = -dQ$ de acordo com (3), consequentemente, $\pm dV - ds = dV - dS$, o que era para ser demonstrado.

15.5 A Lei Geral da Força Elétrica

O *potencial* de duas partículas elétricas e e e' na distância [de separação] r ,

$$V = \frac{ee'}{r} \left(1 - \frac{Q}{a} \right) ,$$

que foi encontrado na Seção 15.3, é interpretado como o *trabalho* realizado durante a interação entre as duas partículas de cargas e e e' possuindo a força viva relativa Q , sempre que são deslocadas desde uma distância infinita até a distância r . O quociente diferencial dV/dr denota então a *força* exercida pelas duas partículas entre si na separação r , que será atrativa ou repulsiva dependendo se essa expressão é positiva ou negativa.

A força viva relativa Q das duas partículas com massas ε e ε' é representada por

$$Q = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} ,$$

indicando que Q é uma função do tempo t (exceto quando dr/dt é explicitamente assumida como constante), assim como r , e que, conseqüentemente, cada uma dessas duas variáveis r e Q pode ser considerada como uma função da outra [variável].³⁷³

Disso resulta a *força repulsiva*

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{r^2} \left(1 - \frac{Q}{a} \right) + \frac{ee'}{ar} \cdot \frac{\frac{dQ}{dt}}{\frac{dr}{dt}} ,$$

ou, se substituirmos aqui os valores

$$Q = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} \quad \text{e} \quad a = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot c^2 ,$$

de onde segue

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{2a}{c^2} \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d^2r}{dt^2} ,$$

isso resulta então na [seguinte] *força repulsiva*

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{r^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{c^2} \cdot \frac{d^2r}{dt^2} \right) .$$

Mas agora a aceleração relativa d^2r/dt^2 é composta de *duas partes*, a saber, a parte *dependendo* da interação entre as duas partículas, e uma outra parte que é *independente* disso. Se a *última parte* for chamada de f , então a *primeira parte* multiplicada por $\varepsilon\varepsilon'/(\varepsilon + \varepsilon')$ dará a força repulsiva $-dV/dr$, e, portanto, ela pode ser representada pelo quociente $-[(\varepsilon + \varepsilon')/\varepsilon\varepsilon'] \cdot [dV/dr]$. Temos, portanto,

$$\frac{d^2r}{dt^2} = f - \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{dV}{dr} .$$

Substituindo esse valor de d^2r/dt^2 na equação anterior, e colocando

³⁷³Ou seja, como $Q = Q(t)$ e $r = r(t)$, também podemos considerar r como função de Q , ou então Q como função de r .

$$\rho = \pm 2 \left[\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon \varepsilon'} \right] \cdot \left[\frac{ee'}{c^2} \right]$$

de acordo com a Seção 15.3, onde o sinal superior ou inferior depende se é positivo ou negativo o produto ee' , obtemos então

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{r^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{c^2} f \right) \mp \frac{\rho}{r} \cdot \frac{dV}{dr} ,$$

e disso resulta finalmente a seguinte expressão para a *força repulsiva*:

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{r(r \mp \rho)} \cdot \left(1 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{c^2} f \right) ,$$

onde o sinal superior ou inferior depende se é positivo ou negativo o produto ee' . Também podemos escrever essa expressão na forma

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{r(r - \frac{ee'}{a})} \cdot \left(1 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{c^2} f \right) .$$

A expressão da força elétrica nesta forma desenvolvida pode agora servir para fornecer uma visão geral mais clara das forças exercidas entre si pelas duas partículas sob uma ampla variedade de condições, mas deve-se notar que nesta forma as forças não podem ser compostas de acordo com a lei do paralelogramo.^{374,375} Podemos ver que, por exemplo, para valores positivos do produto ee' essa força seria infinitamente grande, não apenas para $r = 0$, mas também para $r = \rho$; mas também podemos ver que na realidade o caso $r = \rho$ nunca vai acontecer já que, não importando quão grande possa ser a velocidade relativa em qualquer distância que se diferencia de ρ por um valor *finito*, $r = \rho$ nunca pode ocorrer.

Como ee' é positivo, a força para $r > \rho$ é *repulsiva*, e ela aumenta para *infinito* quando r diminui e se aproxima do valor limite ρ , de onde fica claro que a velocidade de aproximação, que, embora muito grande, não era infinita, deve ser cancelada por essa *força repulsiva* que cresce até o infinito, mesmo antes de r alcançar ρ , e que então r crescerá novamente. Segue disso que r nunca vai ser igual a ρ , mas que as duas partículas precisam necessariamente de ficar separadas por uma distância maior do que ρ .

Para $r < \rho$ a força é *atrativa* e cresce até o *infinito* à medida que r aumenta e se aproxima do valor limite ρ , do qual fica claro que a velocidade de afastamento, que, embora muito grande, não era infinita, deve ser cancelada pela *força atrativa* que cresce até o infinito, mesmo antes de $r = \rho$, e que r então diminuirá novamente. Nesse caso, as duas partículas sempre permanecerão a uma distância menor que ρ uma da outra.

Se uma restrição similar do movimento, como a restrição para duas partículas por meio da qual elas tinham de se manter a uma distância menor do que ρ uma vez que estivessem tão

³⁷⁴[Nota de Wilhelm Weber:] Como as componentes da aceleração, no caso de forças cujo potencial depende das velocidades dos pontos móveis, são dadas por expressões que contêm as próprias acelerações, de modo que os valores dessas últimas só podem ser obtidos por meio da solução de equações, deve-se ter em mente, de acordo com uma observação de Carl Neumann, que, embora antes dessa solução as expressões das acelerações possam ser compostas de acordo com as regras usuais quando várias forças atuam simultaneamente, essa última propriedade é perdida depois que as expressões são transformadas pela solução das equações. As acelerações indo para infinito são caracterizadas aqui pelo desaparecimento do determinante dos coeficientes das acelerações nas equações individuais. Conferir *Mathematische Annalen*, Vol. 11, pág. 323, Nota.

³⁷⁵[Neu77, Nota na pág. 323]. Ver também [Neu75].

próximas, for encontrada para um número maior de partículas em uma pequena região, de tal forma que todas essas partículas fiquem confinadas dentro dessa região, então tais partículas formariam conjuntamente uma *molécula*, assim como no caso de duas [partículas], e da mesma maneira e sob circunstâncias apropriadas, as partículas fora dessa molécula também podem ser reunidas para formar *moléculas*. É claro que todas essas moléculas precisam ficar separadas entre si por intervalos tendo ao menos o tamanho ρ , e que elas iriam se repelir. Contudo, seriam necessárias pesquisas adicionais para decidir se, e em quais circunstâncias, um *sistema de tais moléculas* poderia se manter em um equilíbrio estável, e, se esse for o caso, de acordo com quais leis seriam propagadas pequenas perturbações do equilíbrio, para com isso decidir a questão se o *éter luminífero*³⁷⁶ e as *ondas de luz*³⁷⁷ no espaço não poderiam ser explicadas por um estado agregado estável de tais *moléculas* distribuídas no espaço celeste e compostas de partículas elétricas.

A força que duas partículas elétricas e e e' exercem uma sobre a outra a uma distância r quando estão em *repouso relativo* é geralmente referida como sua *força eletrostática* e é determinada de acordo com a *lei eletrostática*, a saber, $= ee'/r^2$. Contudo, duas partículas estão em *repouso relativo*, apenas se a velocidade relativa entre elas é $dr/dt = 0$. Mas segue agora da *lei geral* obtida anteriormente para a força repulsiva atuando entre duas partículas elétricas, que a intensidade da força não é dada por $= ee'/r^2$, mas por

$$= \frac{ee'}{r(r \mp \rho)} \cdot \left(1 + \frac{2r}{c^2} f\right),$$

onde f é aquela parte da aceleração relativa entre elas que é *independente* da *interação* entre as duas partículas, isto é, a soma daquela aceleração $= \alpha^2/r$ que surge, em primeiro lugar, da velocidade relativa α entre as partículas ao longo de alguma direção perpendicular a r e, em segundo lugar, daquela aceleração $= [(\varepsilon + \varepsilon')/\varepsilon\varepsilon'] \Delta$, que surge da diferença Δ das forças *externas* decompostas ao longo de r e exercidas sobre as duas partículas e e e' , onde ε e ε' são as massas das duas partículas.

Mas mesmo que as duas partículas não estejam apenas em repouso relativo, mas também que a parte de sua aceleração denotada por f , que é *independente* da interação entre elas, seja $= 0$, a força repulsiva entre elas ainda é diferente do valor ee'/r^2 determinado pela *lei eletrostática*; ou seja, de acordo com a *lei geral* anterior, a força repulsiva é $= [ee'/r(r \mp \rho)]$.

Para obter o valor ee'/r^2 determinado pela *lei estática*, de acordo com essa *lei geral*, a parte da aceleração denominada por f não pode ser $= 0$, mas tem de ser oposta àquela parte que depende da interação entre as duas partículas, ou seja, igual a $[(\varepsilon + \varepsilon')/\varepsilon\varepsilon'] \cdot [ee'/r^2]$, isto é

$$f = -\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{r^2} = \mp \frac{\rho c^2}{2r^2}.$$

Encontramos com esse valor de f de acordo com a *lei geral*, no caso $dr/dt = 0$, o valor da força repulsiva:

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{r(r \mp \rho)} \cdot \left(1 + \frac{2r}{c^2} f\right) = \frac{ee'}{r(r \mp \rho)} \cdot \left(1 \mp \frac{\rho}{r}\right) = \frac{ee'}{r^2},$$

isto é, igual ao valor determinado pela *lei eletrostática*. Portanto, só ocorre um equilíbrio estático real entre duas partículas em repouso relativo, se a aceleração que resulta da ace-

³⁷⁶Em alemão: *Lichtäther*. Isso é, éter de luz, éter da luz, éter luminoso ou éter luminífero

³⁷⁷Em alemão: *Lichtwellen*. Isso é, ondas de luz ou ondas luminosas.

leração entre elas for neutralizada pela aceleração que é independente da interação entre elas.

15.6 Leis do Movimento de Duas Partículas Elétricas Impulsionadas apenas pela Interação

As leis do movimento para duas partículas elétricas impulsionadas apenas pela interação [entre elas], que já foram desenvolvidas nas *Medições Eletrodinâmicas*, Vol. X desses *Abhandlungen*,^{378,379} só serão examinadas com mais detalhe e mostradas graficamente no caso em que estas partículas não têm movimento relativo perpendicular à sua linha de ligação, a fim de servir para refutar conclusões erradas tiradas da lei fundamental.

De acordo com a Seção 15.3 o *potencial geral* de duas partículas elétricas e e e' a uma distância mútua r era

$$V = \frac{ee'}{r} \left(1 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} \right) ,$$

onde a *força repulsiva* entre as duas partículas, como mencionado na Seção anterior, foi representadas por $-dV/dr$; contudo, se essa força repulsiva for representada por $+dV/dr$, então o potencial tem de ficar no seguinte formato:

$$V = \frac{ee'}{r} \left(\frac{dr^2}{c^2 dt^2} - 1 \right) .$$

De acordo com essa última determinação, a aceleração da partícula e na direção r é dada por $= [1/\varepsilon] \cdot [dV/dr]$, e a aceleração da partícula e' na direção oposta é dada por $= [1/\varepsilon'] \cdot [dV/dr]$, onde ε e ε' são as massas das partículas e e e' , de onde resulta a *aceleração relativa* entre as duas partículas,

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'} \right) \cdot \frac{dV}{dr} .$$

Multiplicando isso por $2dr$, obtemos a equação diferencial

$$2 \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d^2r}{dt^2} = 2 \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'} \right) \cdot \frac{dV}{dr} dr ,$$

e ao integrar de $r = r_0$ até $r = r$, onde r_0 denota o valor de r para o qual a velocidade relativa $dr/dt = 0$, obtemos

$$\frac{d^2r}{dt^2} = 2 \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'} \right) \cdot \left[\frac{ee'}{r} \left(\frac{dr^2}{c^2 dt^2} - 1 \right) + \frac{ee'}{r_0} \right] ,$$

ou, se colocarmos $dr/c dt = u$ e $2([1/\varepsilon] + [1/\varepsilon']) = \pm \rho c^2/ee'$,

$$u^2 = \pm \rho \left(\frac{1}{r} (u^2 - 1) + \frac{1}{r_0} \right) ,$$

³⁷⁸[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. IV, pág. 268.

³⁷⁹[Web71, Seção 8, pág. 268 das *Obras de Weber*] com traduções para o inglês em [Web72, Seção 8, pág. 119] e [Web21g, Seção 9.8, pág. 85]. Ver a Seção 9.8 na página 98 do Capítulo 9 dessa tradução em português.

onde o sinal superior ou inferior depende se é positivo ou negativo o produto ee' .

Considerando agora o caso em que ee' é positivo, e expressando as distâncias r e r_0 em termos da constante ρ associada com o par de partículas anteriores, obtemos

$$u^2 = \frac{1}{r}(u^2 - 1) + \frac{1}{r_0} .$$

Se para um tal par de partículas a distância r e a velocidade u forem determinadas em um instante particular, obteremos então da equação anterior,

$$r_0 = \frac{r}{1 - (1 - r)u^2} .$$

Quando as partículas no par estão se deslocando apenas em consequência da interação mútua entre elas, então, em uma distância r_0 na qual $u = 0$, a partir da equação

$$u^2 = \left(1 - \frac{r}{r_0}\right) \frac{1}{1 - r} ,$$

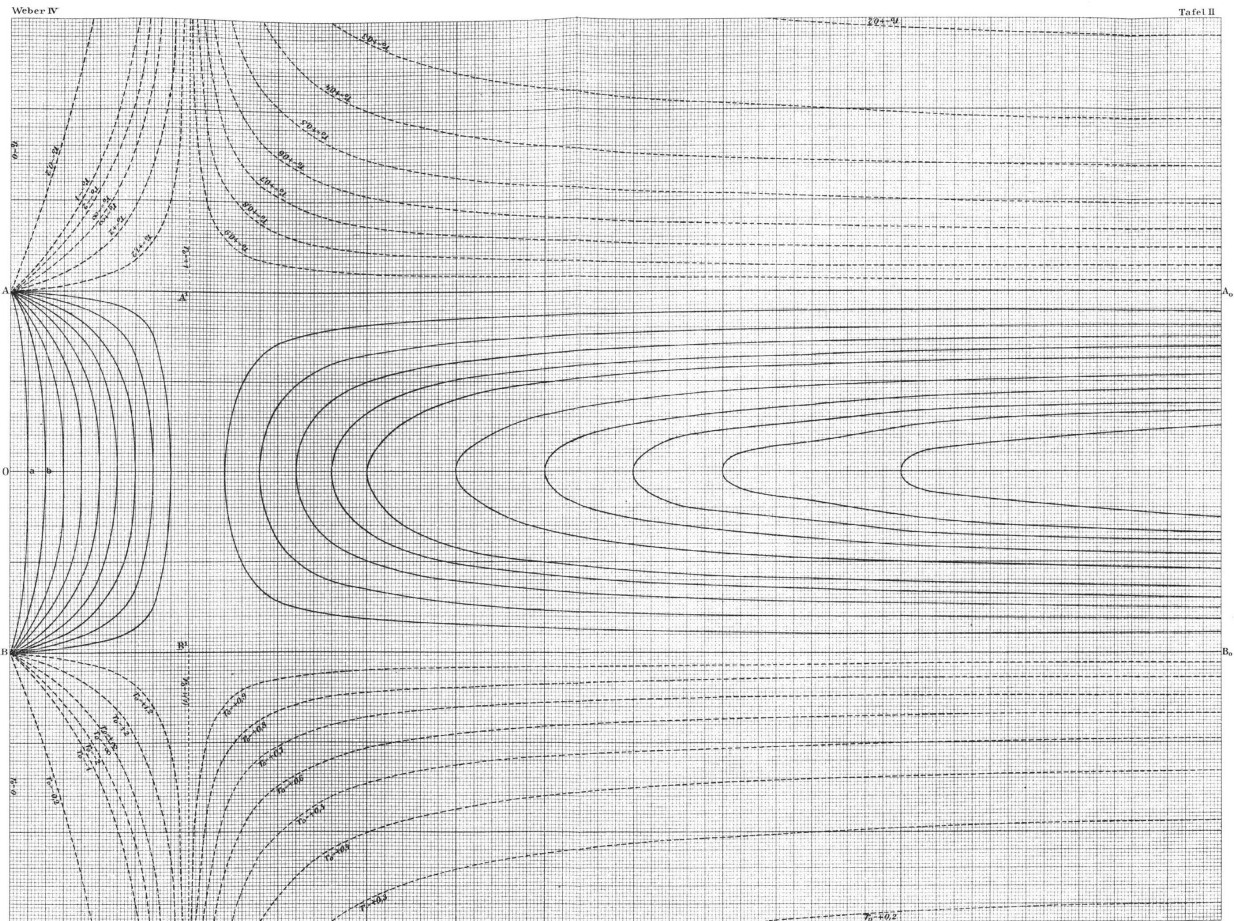
podemos obter todos os valores de r e u a partir do dado valor de r_0 se inserirmos para r qualquer série arbitrária de valores crescentes desde $r = 0$ até $r = \infty$.

Uma tal série de valores relacionados de r e u está representada graficamente por uma curva cuja abscissa e ordenada representam os valores relacionados de r e u .

Contudo, o valor de r_0 para o mesmo par de partículas pode ser bem diferente em instantes diferentes, caso ocorram influências externas no período intermediário além da interação mútua entre elas. Para cada outro valor de r_0 , entretanto, após a remoção da influência externa, surge uma série diferente de valores relacionados de r e u , que são representados graficamente por uma curva diferente.

De acordo com isso obtemos uma Tabela de valores relacionados de r e u para diferentes valores de r_0 , e um sistema correspondente de curvas, como mostrado na [próxima] Figura.³⁸⁰

³⁸⁰Ordenada $\pm u$ em função da abscissa r . Uma imagem maior dessa Figura aparece na página [229](#).



Deve-se observar que, nessa representação gráfica, os valores de r da Tabela de números a seguir são traçados como abscissas, os [valores] de $\pm u$ como ordenadas, ou seja, os [valores] de $+u$ como valores *positivos* e os [valores] de $-u$ como valores *negativos*, para distinguir o *afastamento* das partículas de sua *aproximação*. O sistema de curvas correspondendo à *primeira* seção da Tabela preenche o espaço $AA'B'B$, aquele correspondendo à *segunda* seção preenche o espaço $A'A_0B_0B'$, que tem de ser estendido ao infinito no lado de A_0B_0 .

Valores de $u = \sqrt{\frac{1}{1-r} \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)}$ para valores de r e r_0 entre 0 e 1.											
$r_0 =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$r = 0,0$	0,00	$\pm 1,00$	$\pm 1,00$	$\pm 1,00$	$\pm 1,00$	$\pm 1,00$	$\pm 1,00$	$\pm 1,00$	$\pm 1,00$	$\pm 1,00$	$\pm 1,00$
$r = 0,1$		0,00	$\pm 0,75$	$\pm 0,86$	$\pm 0,91$	$\pm 0,95$	$\pm 0,97$	$\pm 0,98$	$\pm 0,99$	$\pm 0,99$	$\pm 1,00$
$r = 0,2$			0,00	$\pm 0,65$	$\pm 0,79$	$\pm 0,86$	$\pm 0,91$	$\pm 0,94$	$\pm 0,97$	$\pm 0,98$	$\pm 1,00$
$r = 0,3$				0,00	$\pm 0,60$	$\pm 0,75$	$\pm 0,84$	$\pm 0,90$	$\pm 0,94$	$\pm 0,97$	$\pm 1,00$
$r = 0,4$					0,00	$\pm 0,57$	$\pm 0,75$	$\pm 0,84$	$\pm 0,91$	$\pm 0,96$	$\pm 1,00$
$r = 0,5$						0,00	$\pm 0,57$	$\pm 0,75$	$\pm 0,86$	$\pm 0,94$	$\pm 1,00$
$r = 0,6$							0,00	$\pm 0,60$	$\pm 0,79$	$\pm 0,91$	$\pm 1,00$
$r = 0,7$								0,00	$\pm 0,65$	$\pm 0,86$	$\pm 1,00$
$r = 0,8$									0,00	$\pm 0,75$	$\pm 1,00$
$r = 0,9$										0,00	$\pm 1,00$
$r = 1,0$											$\pm 0/0$

Valores de $u = \sqrt{\frac{1}{1-r} \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)}$ para valores de r e r_0 entre 1 e ∞ .													
$r_0 =$	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	5,0	6,0	∞
$r = 1,0$	$\pm 0,0$												
$r = 1,2$	$\pm 1,00$	0,00											
$r = 1,4$	$\pm 1,00$	$\pm 0,65$	0,00										
$r = 1,6$	$\pm 1,00$	$\pm 0,75$	$\pm 0,49$	0,00									
$r = 1,8$	$\pm 1,00$	$\pm 0,79$	$\pm 0,60$	$\pm 0,40$	0,00								
$r = 2,0$	$\pm 1,00$	$\pm 0,82$	$\pm 0,65$	$\pm 0,50$	$\pm 0,33$	0,00							
$r = 2,5$	$\pm 1,00$	$\pm 0,85$	$\pm 0,72$	$\pm 0,61$	$\pm 0,51$	$\pm 0,41$	0,00						
$r = 3,0$	$\pm 1,00$	$\pm 0,86$	$\pm 0,75$	$\pm 0,66$	$\pm 0,57$	$\pm 0,50$	$\pm 0,32$	0,00					
$r = 3,5$	$\pm 1,00$	$\pm 0,88$	$\pm 0,77$	$\pm 0,68$	$\pm 0,62$	$\pm 0,55$	$\pm 0,40$	$\pm 0,26$	0,00				
$r = 4,0$	$\pm 1,00$	$\pm 0,88$	$\pm 0,79$	$\pm 0,71$	$\pm 0,64$	$\pm 0,57$	$\pm 0,45$	$\pm 0,33$	$\pm 0,22$	0,00			
$r = 5,0$	$\pm 1,00$	$\pm 0,89$	$\pm 0,80$	$\pm 0,73$	$\pm 0,66$	$\pm 0,61$	$\pm 0,50$	$\pm 0,41$	$\pm 0,33$	$\pm 0,24$	0,00		
$r = 6,0$	$\pm 1,00$	$\pm 0,89$	$\pm 0,81$	$\pm 0,74$	$\pm 0,68$	$\pm 0,63$	$\pm 0,53$	$\pm 0,45$	$\pm 0,37$	$\pm 0,31$	$\pm 0,20$	0,00	
∞	$\pm 1,00$	$\pm 0,91$	$\pm 0,84$	$\pm 0,79$	$\pm 0,74$	$\pm 0,71$	$\pm 0,63$	$\pm 0,57$	$\pm 0,54$	$\pm 0,50$	$\pm 0,45$	$\pm 0,41$	0,00

A representação gráfica desses valores numéricos na Figura fornece agora uma visão clara do significado do resultado que surge da fórmula, a saber, que a aceleração mútua das duas partículas *é infinita na denominada distância crítica* ρ . Esse aspecto levantou diversas preocupações contra a lei geral da força elétrica na qual essa fórmula se baseia.

De fato, podemos ver pela representação gráfica que na distância ρ , simultaneamente com a aceleração infinita, ocorre um salto na velocidade relativa entre as duas partículas de $-c$ para $+c$, ou vice-versa, que ocorre tão repentinamente, tal que durante ele a distância ρ não sofre a menor alteração.

Antes de se tornar *infinita*, a aceleração muda de sinal e, em consequência disso, a velocidade muda no mesmo instante e sem qualquer perda de tempo, de $-c$ para $+c$, ou vice-versa. Antes que a distância ρ possa sofrer até mesmo a menor mudança finita, já ocorreu a transição da velocidade c para a velocidade oposta.

A fórmula anterior nos informa que em princípio há uma reflexão abrupta das partículas entre si no instante em que alcançam a distância ρ , assim como a fórmula da mecânica para duas esferas elásticas em colisão, que também são jogadas para trás uma da outra, e quanto menores forem as esferas e maior for o seu coeficiente de elasticidade, mais repentinamente elas são jogadas para trás uma da outra. A reflexão *instantânea* é o *caso limite*, que nunca ocorre na realidade, mas que até os dias de hoje não é considerado estranho nem absurdo de acordo com os princípios da mecânica. Finalmente, deve ser dada atenção especial ao fato de que de acordo com a fórmula, para o caso de $r = \rho$, a aceleração seria infinita, mas que o caso $r = \rho$ *nunca acontece de fato*, assim como nunca existe realmente um corpo elástico com um coeficiente de elasticidade infinito.

Além disso, podemos ver que a totalidade de todas as curvas representáveis de acordo com a fórmula mencionada forma dois grupos completamente separados entre si, a saber, em primeiro lugar, um grupo no qual todas as distâncias mútuas entre as partículas são menores do que ρ e, em segundo lugar, um grupo no qual elas são maiores do que ρ . Os dois grupos se distinguem um do outro porque, como mostrado anteriormente, o caso em que a distância seria $= \rho$ não ocorre realmente, nem pode ocorrer.

Os dois grupos em conjunto cobrem o intervalo inteiro de todos os valores da abscissa desde $r = 0$ até $r = \infty$ e para todos os valores da ordenada desde $u = -c$ até $u = +c$, e nenhuma dessas curvas permite a continuação além dos limites desse espaço. Segue disso que as duas partículas elétricas, que são impelidas apenas pela interação mútua e cuja velocidade relativa nunca é maior do que $+c$ e nunca menor do que $-c$, permanecem dentro dos limites

mencionados.^{381,382}

15.7 Feixes Elétricos, Especialmente Reflexão e Espalhamento de Feixes

Os movimentos de duas partículas elétricas impelidas apenas pela interação mútua, deslocando-se uma em relação à outra ao longo da linha que as conecta e ortogonal a essa linha, foram considerados nas *Medições Eletrodinâmicas*, Vol. X desses *Abhandlungen*, e para suas determinações foram encontradas as seguintes equações:^{383,384}

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{r - r_0}{r - \rho} \left(\frac{\rho}{r_0} + \frac{r + r_0}{r} \cdot \frac{\alpha_0^2}{c^2} \right), \quad (1)$$

$$r\alpha = r_0\alpha_0, \quad (2)$$

onde r é a distância de separação entre as duas partículas, sendo u e α suas velocidades relativas na direção de r e ortogonal a essa direção; além disso, r_0 denota o valor de r para o qual $u = 0$, α_0 o valor de α para o qual $r = r_0$, e finalmente ρ é uma constante que depende da natureza e das massas ε e ε' das duas partículas e e e' , a saber,

$$\rho = 2 \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon \varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{c^2},$$

onde ρ é positiva ou negativa conforme o produto ee' [seja positivo ou negativo]. — Se ρ tiver o significado de uma distância entre as duas partículas, que *só pode ser positiva*, assim como r e r_0 , teremos então

$$\rho = \pm 2 \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon \varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{c^2},$$

onde se aplica o sinal superior ou inferior, dependendo se é positivo ou negativo o produto ee' . Temos então de colocar para a Equação (1)

³⁸¹[Nota de Wilhelm Weber:] Seria diferente se ocorresse o caso excluído na definição da capacidade de trabalho, no qual duas partículas elétricas já possuísem inicialmente uma velocidade $> +c$ ou $< -c$, ou se as duas partículas se movessem não apenas por interação, mas também fossem impulsionadas por ação *externa* e, assim, obtivessem tal velocidade, seja $> +c$ ou $< -c$. Se esse caso realmente ocorresse, os movimentos de duas dessas partículas, se elas continuassem a se mover a partir daquele momento, movidas apenas por interação, seriam representados por curvas bastante diferentes, que seriam totalmente excluídas da região do sistema de curvas considerado anteriormente. Todas essas outras curvas formariam um sistema fechado que preencheria todo o espaço. Todas as curvas desse segundo tipo estão representadas na Figura por linhas tracejadas. Também esses tipos de movimento, ou suas curvas representativas, são decompostos em dois grupos separados entre si no ponto determinado pela distância crítica ρ . A saber, um grupo no qual todas as distâncias entre as partículas são sempre menores do que ρ , e um outro grupo no qual elas são sempre maiores do que ρ . Além disso, novamente há uma *simetria* perfeita entre os braços da curva com ordenadas $> +c$ e $< -c$. Ambos os braços da curva estão ainda conectados um ao outro em $r = \rho$ como resultado da mudança repentina na velocidade de $\pm\infty$ para $\mp\infty$.

³⁸²Ver a Nota de rodapé 275 na página 149.

³⁸³[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. IV, pág. 273.

³⁸⁴[Web71, pág. 273 das *Obras* de Weber] com traduções para o inglês em [Web72, pág. 124] e [Web21g, pág. 89]. Ver a Seção 9.11 do Capítulo 9 dessa tradução em português.

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{r - r_0}{r \mp \rho} \left(\frac{r + r_0}{r} \cdot \frac{\alpha_0^2}{c^2} \pm \frac{\rho}{r_0} \right),$$

com a mesma determinação para os sinais. — Como daqui por diante só serão consideradas partículas do *mesmo tipo*,³⁸⁵ serão sempre os sinais superiores que serão válidos. — A equação $r\alpha = r_0\alpha_0$ nos informa que $\alpha = 0$ para $r = \infty$, dados valores finitos de r_0 e α_0 , o que implica a existência de uma assíntota em linha reta, com a qual a órbita coincide no infinito.

Vamos considerar agora o caso de duas partículas elétricas *iguais* e e e' se aproximando com uma grande velocidade u que está diminuindo em consequência da repulsão mútua, e onde o maior valor de u , a saber, para $r = \infty$, será representado por u_0 . Por simplicidade e será considerada como estando parada durante o movimento relativo entre elas. Suponha que ao longo da trajetória de e' e com a mesma velocidade relativa em relação a e , há uma série de partículas idênticas e'' , e''' , ..., em intervalos tais que a interferência mútua entre elas não precise ser levada em consideração.³⁸⁶

A partir da lei representada pela Equação (1) anterior resulta o valor de u para $r = \infty$, a saber,

$$u_0 = c \sqrt{\frac{\alpha_0^2}{c^2} + \frac{\rho}{r_0}}. \quad (3)$$

Agora, como ρ é igual para partículas idênticas, e como também se assumiu que u_0 é igual, uma diferença só pode ocorrer em relação ao valor de r_0 e ao valor de α_0 resultante dele, de acordo com a Equação (3).

O sistema de todas essas partículas é chamado de um *feixe elétrico*,³⁸⁷ e a assíntota, na qual as partículas estão localizadas quando estão muito distantes de e , serve para determinar a *direção* do feixe.

Se tivéssemos para todas as partículas $r_0 = \rho[c^2/u_0^2]$, de onde seguiria que $\alpha_0 = 0$, então todas elas se moveriam ao longo da mesma linha até a distância r_0 , de onde todas elas retornariam ao longo da mesma linha. Contudo, se α_0 for diferente de zero, e de fato, simultaneamente com r_0 , for diferente para todas as partículas e' , e'' , ..., para as quais u_0 é igual, mas muito pequena para todas elas, cada partícula se desviará dessa assíntota quando r se aproximar do valor r_0 . O ângulo que a linha reta, por exemplo, ee' , forma com a direção do feixe como resultado desse desvio será denotado por φ . Seja $\varphi = \varphi_0$ quando a distância decrescente $e'e$ torna-se igual a r_0 , ou seja, quando a velocidade na direção $e'e$ é igual a zero, sendo igual a α_0 na direção perpendicular a $e'e$.

Desse momento em diante, quando a distância torna-se $r = r_0$, as partículas e e e' começam a se afastar e a linha que as conecta se aproxima de uma outra linha que forma um ângulo $= \varphi_0$ com a direção que ee' tinha quando a distância era igual a r_0 . Já com a direção do feixe original, ela forma o ângulo igual a $2\varphi_0$, que será chamado de *ângulo de reflexão*. Contudo, esse ângulo de reflexão é bem diferente para pares diferentes de partículas ee' , ee'' , ..., que pertencem ao mesmo feixe, de acordo com a diferença dos valores de α_0 ou r_0/ρ , o que nos informa que tal feixe refletido também fica simultaneamente *espalhado*. Esse

³⁸⁵Isto é, as duas partículas com cargas positivas ou então as duas partículas com cargas negativas.

³⁸⁶Ou seja, tal que a distância entre elas seja grande o suficiente para que as perturbações mútuas possam ser desprezadas.

³⁸⁷Em alemão: *Elektrischer Strahl*. Essa expressão pode ser traduzida como feixe elétrico, raio elétrico, jato elétrico ou feixe de partículas elétricas.

espalhamento dos feixes elétricos³⁸⁸ será determinado agora mais detalhadamente de acordo com as leis anteriores.

Para começar, a partir da lei (2) anterior, isso resulta no crescimento do ângulo φ , a saber,

$$d\varphi = \frac{\alpha dt}{r} = \frac{\alpha_0 r_0}{r^2} dt . \quad (4)$$

Além disso, se substituirmos na Equação (1) o valor de $\alpha_0^2 = u_0^2 - [\rho/r_0] c^2$ resultante da Equação (3), obteremos então

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{dr^2}{c^2 dt^2} = \frac{r - r_0}{r - \rho} \left(\frac{r + r_0}{r} \cdot \frac{u_0^2}{c^2} - \frac{\rho}{r} \right) , \quad (5)$$

consequentemente, se r diminuir com o crescimento de t ,

$$dt = -dr \sqrt{\frac{r(r - \rho)}{(r - r_0)(u_0^2(r + r_0) - \rho c^2)}} . \quad (6)$$

Disso segue que

$$d\varphi = \frac{\alpha_0 r_0}{r^2} dt = -\frac{\alpha_0 r_0}{u_0} \cdot \frac{dr \sqrt{r^2 - r\rho}}{r^2 \sqrt{r^2 - \frac{c^2}{u_0^2} \rho r - \left(r_0^2 - \frac{c^2}{u_0^2} \rho r_0 \right)}} ,$$

ou, se colocarmos $1/r = s$,

$$d\varphi = +\frac{\alpha_0 r_0}{u_0} \cdot ds \sqrt{\frac{1 - \rho s}{1 - \frac{c^2}{u_0^2} \rho s - \left(r_0^2 - \frac{c^2}{u_0^2} \rho r_0 \right) s^2}} , \quad (7)$$

de onde vemos que φ pode ser representado por *funções elípticas*.

Se agora restringirmos nossa atenção àqueles casos para os quais o valor de α_0^2 é igual a $u_0^2 - [\rho/r_0] c^2$, e, portanto, também o valor de $(r_0^2 - [c^2/u_0^2] \rho r_0) s^2$, ou desaparece completamente ou é muito pequeno, então no *primeiro* caso, a equação anterior vai se reduzir a

$$d\varphi = +\frac{\alpha_0 r_0}{u_0} \cdot ds \sqrt{\frac{1 - \rho s}{1 - r_0 s}} , \quad (8)$$

e no *último* caso, onde se supõe que α_0 é muito pequeno, embora não desapareça completamente, será colocado $r_0 [\alpha_0^2/u_0^2] = r_0 - [c^2/u_0^2] \rho = \beta$, e β será suposto tão pequeno, que na Equação (7), a qual pela introdução de β fica na forma

$$d\varphi = \frac{\alpha_0 r_0}{u_0} \cdot ds \sqrt{\frac{1 - \rho s}{(1 - r_0 s)(1 + \beta s)}} ,$$

podemos colocar $(1 - \frac{1}{2}\beta s)$ no lugar do fator $\sqrt{1/(1 + \beta s)}$, então a Equação (7) vai ficar no seguinte formato:

³⁸⁸Em alemão: *Zerstreuung elektrischer Strahlen*. A palavra *Zerstreuung* pode ser traduzida como espalhamento, dispersão ou dissipação.

$$d\varphi = \frac{\alpha_0 r_0}{u_0} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\beta s\right) ds \sqrt{\frac{1-\rho s}{1-r_0 s}}, \quad (9)$$

de onde, se colocarmos $S = 1 - (\rho + r_0)s + \rho r_0 s^2$, vai seguir que

$$\int d\varphi = \frac{\alpha_0 r_0}{u_0} \left[\int \frac{ds}{\sqrt{S}} - \left(\frac{1}{2}\beta + \rho\right) \int \frac{s ds}{\sqrt{S}} + \frac{1}{2}\beta\rho \int \frac{s^2 ds}{\sqrt{S}} \right].$$

Se colocarmos $b = -(\rho + r_0)$ e $c = \rho r_0$, então ao realizar a integração obteremos:³⁸⁹

$$\begin{aligned} & \frac{u_0}{\alpha_0 r_0} \int d\varphi = \\ & \left[1 + \frac{b}{4c}(\beta + 2\rho) + \frac{\beta\rho}{4c} \left(\frac{3b^2}{4c} - 1 \right) \right] \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \log \left(\sqrt{S} + s\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}} \right) \\ & - \frac{1}{c} \left(\rho + \frac{\beta}{2} \left(1 + \frac{3b}{4c} \rho \right) - \frac{\beta\rho}{4} s \right) \sqrt{S}, \end{aligned}$$

de onde, colocando $m = \rho/r_0$, $n = c/u_0$ e assim $\alpha_0/u_0 = \sqrt{1-mn^2}$ de acordo com a Equação (3), obtemos:

$$\begin{aligned} \varphi_0 = \int_{s=0}^{s=\frac{1}{r_0}} d\varphi = \\ \sqrt{1-mn^2} \cdot \left[\frac{1-m}{2} \left(1 - \frac{1+3m}{8m}(1-mn^2) \right) \sqrt{\frac{1}{m}} \cdot \log \frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} \right. \\ \left. + 1 + \frac{1-3m}{8m}(1-mn^2) \right]. \quad (10) \end{aligned}$$

Com base nisso foi calculada a seguinte Tabela de valores de φ_0 , para diferentes valores de m e n .³⁹⁰

³⁸⁹[Nota de Wilhelm Weber:] A saber,

$$\begin{aligned} \int \frac{ds}{\sqrt{S}} &= \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \log \left(\sqrt{S} + s\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}} \right), \\ \int \frac{s ds}{\sqrt{S}} &= -\frac{b}{2c\sqrt{c}} \cdot \log \left(\sqrt{S} + s\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}} \right) + \frac{\sqrt{S}}{c}, \\ \int \frac{s^2 ds}{\sqrt{S}} &= \frac{3b^2-4c}{8c^2\sqrt{c}} \cdot \log \left(\sqrt{S} + s\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}} \right) + \frac{1}{2c} \left(s - \frac{3b}{2c} \right) \sqrt{s}. \end{aligned}$$

³⁹⁰[Nota de Heinrich Weber:] W. Weber posteriormente alterou os valores 1,2500 listados no Tratado original para $m = 0$, $n = 1$ e $n = 2$ para aqueles valores dados aqui.

	$n = 1$	$n = 2$
$m = 1$	0	
$m = 1/2$	0,9658	
$m = 1/3$	1,1269	
$m = 1/4$	1,1479	0
$m = 1/5$	1,2272	0,7776
$m = 1/6$	1,2486	0,9688
$m = 1/7$	1,2629	1,0690
$m = 1/8$	1,2732	1,1302
$m = 0$	1,3750 (ver a Nota de rodapé 390)	1,3750 (ver a Nota de rodapé 390)

Segue daqui que para todas as partículas de um feixe elétrico e' , e'' , $\dots$, que se *aproximam* da partícula e de uma grande distância com velocidade u_0 , que uma vez que tenham alcançado a distância r_0 , elas voltam e se afastam de e novamente, com uma velocidade que aumenta novamente até u_0 a uma grande distância. Contudo, as duas direções nas quais ambas as partículas se aproximaram e depois se afastaram com a velocidade u_0 formam um ângulo $2\varphi_0$ entre si, que é muito diferente para os diferentes pares, de acordo com a diferença no valor de r_0 .

A diversidade do ângulo $2\varphi_0$, que é chamado de *ângulo de reflexão*, para os diferentes pares de partículas de acordo com os valores diferentes de r_0 , forma o fenômeno que é denominado de *espalhamento* dos feixes elétricos por reflexão.³⁹¹ Além disso, a lei da dependência do ângulo de reflexão $2\varphi_0$ em relação a m e n , que foi descoberta anteriormente, fornece uma determinação precisa desse espalhamento, se levarmos em consideração que n tem o mesmo valor para todas as partículas do mesmo feixe, que depende de u_0 de acordo com a equação $n = c/u_0$, além disso, que para cada par de partículas, m pode ser determinado para qualquer distância r — usando as três equações $m = \rho/r_0$, $\alpha_0^2 = u_0^2 - [\rho/r_0]c^2$, e $\alpha_0 r_0 = \alpha r$, após a eliminação de r_0 e α_0 — a partir da velocidade relativa α das duas partículas na direção ortogonal à linha que as conecta, a saber, através da equação:

$$m^2 + \frac{\rho^2 c^2}{r^2 \alpha^2} m = \frac{\rho^2 u_0^2}{r^2 \alpha^2}.$$

15.8 Aplicação da Teoria da Reflexão e Espalhamento dos Feixes Elétricos ao Éter Luminífero e aos Gases de acordo com a Teoria das Colisões Moleculares Devida a Krönig e Clausius

A reflexão e espalhamento dos feixes elétricos consistindo em pares de partículas elétricas de mesmo tipo³⁹² que se aproximam e se afastam entre si no espaço vazio com velocidade igual, leva a um estado agregado similar de todo o sistema de partículas como aquele atribuído aos gases na teoria de Krönig e Clausius,³⁹³ apenas com a diferença de que as partículas dos gases em movimento balístico³⁹⁴ são partículas ponderáveis, enquanto que as partículas

³⁹¹Ver a Nota de rodapé 388 na página 210.

³⁹²Em alemão: *Elektrisch gleichartigen Theilchenpaaren*. Cada par é composto de partículas eletrizadas com cargas do mesmo tipo, ou seja, do mesmo sinal.

³⁹³[Krö56], [Cla57b] com tradução para o inglês em [Cla57a], e [Cla79].

³⁹⁴Ver a Nota de rodapé 319 na página 174.

elétricas são usualmente descritas como imponderáveis, porque a validade da lei geral da gravitação ainda não foi comprovada para elas. Apenas de acordo com a teoria da gravitação de Mossotti (ver Zöllner, *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Vol. 1, No. 2, Leipzig 1878),³⁹⁵ na qual todas as forças gravitacionais resultam de forças elétricas de repulsão e atração, todas as interações, tanto de partículas ponderáveis quanto de elétricas, seriam incluídas em determinações comuns, em que cada partícula ponderável seria então uma *partícula elétrica binária* (como uma estrela binária), ou seja, uma partícula elétrica positiva e uma negativa girando uma em torno da outra.

É um resultado natural da representação de Mossotti que quando essas partículas ponderáveis se encontram no espaço vazio em movimento balístico, como se supõe que ocorre para os gases na teoria de Krönig e Clausius, as leis da interação elétrica resultariam em leis similares para a reflexão e espalhamento desses partículas ponderáveis deslocando-se no espaço vazio como foi encontrado na Seção anterior para partículas elétricas de mesmo tipo deslocando-se em movimento balístico. Isso é facilmente reconhecido, quando observamos que aquelas leis aplicam-se particularmente para pares de partículas de carga do mesmo tipo que se aproximam, em consequência do movimento relativo entre elas, até uma distância r_0 , maior do que ρ . Afinal de contas, duas moléculas ponderáveis contêm dois pares de partículas do mesmo tipo,³⁹⁶ e para cada um desses pares há uma distância ρ que as partículas do par não podem alcançar, já que a força repulsiva entre elas seria infinita, o que só é evitado pelo fato de que a sempre crescente força repulsiva vai fazer com que as duas partículas atinjam o repouso (bem antes de elas alcançarem a distância ρ), de onde, devido a essa persistente força repulsiva que resulta da interação entre elas, elas começam novamente a se distanciar, assim como antes haviam se aproximado.

Isso nos permite transferir as leis de reflexão e espalhamento para feixes de partículas elétricas de mesmo tipo, encontradas na Seção anterior, para os feixes de partículas ponderáveis compostas de acordo com a representação de Mossotti. E caso essas moléculas ponderáveis sejam agora as moléculas de um gás, vai ser formado um estado agregado do gás correspondendo totalmente ao estado agregado atribuído ao gás na teoria de Krönig e Clausius — exceto que não há necessidade de atribuir a essas moléculas ponderáveis de gás, com Krönig, uma forma e elasticidade especiais, ou, com Clausius e Maxwell, forças repulsivas especiais inversamente proporcionais a uma potência maior da distância.³⁹⁷

Mas se houver um espaço, por exemplo, o espaço sideral,³⁹⁸ no qual não existam moléculas ponderáveis, então é, no entanto, possível que nesse espaço existam partículas de uma das duas partes constituintes dessas moléculas ponderáveis, ou seja, as partículas elétricas positivas ou negativas, que, em movimento balístico, também formariam um corpo de um estado especial de agregação, que, no entanto, por consistir apenas de partículas elétricas de mesmo

³⁹⁵Ottaviano Fabrizio Mossotti (1791-1863) foi um físico italiano. Ver [Mos36] com tradução para o inglês em [Mos66]; [Zöl78] e [Zöl82]. Weber escreveu o nome de Mossotti como Mosotti. Corrigi isso.

³⁹⁶Cada molécula ponderável seria composta de duas partículas orbitando uma ao redor da outra. Essas partículas teriam cargas elétricas opostas de mesma intensidade. Ver [Web94d, Seção 1] com traduções para o inglês em [Web08, Seção 1] e [Web21b, Seção 1], ver também a Seção 18.1 do Capítulo 18 dessa tradução em português. A molécula ponderável 1 teria duas partículas, uma com carga $q_1 > 0$ e outra com carga oposta $-q_1 < 0$. A molécula ponderável 2 teria duas partículas, uma com carga $q_2 > 0$ e outra com carga oposta $-q_2 < 0$. Essas duas moléculas ponderáveis conteriam então dois pares de partículas com cargas do mesmo tipo, a saber, (q_1, q_2) e $(-q_1, -q_2)$.

³⁹⁷Ver a Nota de rodapé 393 na página 212. Ver também [Max67], [Max65c] e [AW03].

³⁹⁸Em alemão: *den Weltraum*. Essa expressão pode ser traduzida como “o espaço sideral”, “o cosmos”, “o universo” ou “o espaço profundo”.

tipo, não poderia ser chamado de corpo ponderável, mas de um *éter* imponderável, para o qual, no entanto, as leis de movimento para *meios dinâmicos* desenvolvidas por Maxwell (*Philos. Transact.* 1867),³⁹⁹ ou seja, as leis de *propagação de ondas* correspondentes às leis de propagação de ondas de luz, também se aplicariam. Essa ideia de um meio que preenche o espaço, consistindo de partículas que se repelem mutuamente, parece ser possível sem um limite espacial fixo apenas sob a suposição de uma extensão completamente ilimitada ao infinito. Contudo, a limitação desse meio a um espaço finito sem um limite fixo parece ser possível, de acordo com Mossotti, pelo fato de que esse meio envolveria um corpo ponderável do tipo de Mossotti, que teria uma ação atrativa sobre ele e, portanto, o manteria unido.⁴⁰⁰

15.9 Leis do Movimento de Duas Partículas Elétricas Impelidas pela Interação Mútua e Influência *Externa*

Só iremos considerar o caso simples no qual a influência *externa* sobre a partícula e consiste em uma força constante na direção da linha prolongada $e'e$, a qual dividida pela soma $\varepsilon + m$ entre a própria massa da partícula e e a massa ponderável ligada fortemente a ela, fornece o quociente g .⁴⁰¹ — Suponha que a influência *externa* sobre a partícula e' seja uma força que é *igual e oposta* à força que atua sobre e' em consequência da *interação mútua* entre e e e' .

De acordo com a Seção 15.5, o *potencial* V das duas partículas e e e' na distância r — onde V é aquela função cuja quociente diferencial dV/dr representa a *força repulsiva* — é dado por

$$V = \frac{ee'}{r} \left(\frac{dr^2}{c^2 \cdot dt^2} - 1 \right) .$$

Disso segue agora a *aceleração devida à interação* da partícula e na direção r , a saber, $= [1/(\varepsilon + m)] \cdot [dV/dr]$, e aquela da partícula e' na direção oposta, a saber, $= [1/\varepsilon'] \cdot [dV/dr]$, de onde resulta a aceleração relativa entre as duas partículas *devida à interação mútua entre elas*:

$$= \left(\frac{1}{\varepsilon + m} + \frac{1}{\varepsilon'} \right) \cdot \frac{dV}{dr} .$$

Além disso, deve ser levada em consideração a *aceleração devida à influência externa*. Para e , ela é $= g$ na direção r , e para e' ela é $= [1/\varepsilon'] \cdot [dV/dr]$ na mesma direção, portanto segue que a *aceleração relativa* entre as duas partículas *devida à influência externa* é

$$= g - \frac{1}{\varepsilon'} \cdot \frac{dV}{dr} .$$

³⁹⁹Ver a Nota de rodapé 397.

⁴⁰⁰Ou seja, o corpo ponderável atrairia o meio ao seu redor, mantendo o meio unido. O meio aqui seria composto por partículas eletrizadas de um único tipo (por exemplo, apenas partículas eletricamente positivas, ou apenas partículas eletricamente negativas).

⁴⁰¹Considere uma partícula de carga e e massa ε ligada a uma massa ponderável m . Se há uma força constante F atuando nesse sistema então, de acordo com a segunda lei do movimento de Newton, esse sistema vai se deslocar com uma aceleração g em relação a um referencial inercial. Essa aceleração é dada por $g = F/(\varepsilon + m)$.

Portanto, a aceleração relativa total é:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{1}{\varepsilon + m} \cdot \frac{dV}{dr} + g .$$

Multiplicando essa equação por $2dr$ obtemos

$$2 \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{2}{\varepsilon + m} \cdot \frac{dV}{dr} + 2g dr ,$$

e a partir disso, pela integração de $r = r_0$ até $r = r$, onde r_0 denota o valor de r no instante em que $dr/dt = 0$, obtemos

$$\frac{dr^2}{dt^2} = \frac{2}{\varepsilon + m} \left[\frac{ee'}{r} \left(\frac{dr^2}{c^2 \cdot dt^2} - 1 \right) + \frac{ee'}{r_0} \right] + 2g(r - r_0) .$$

Denotando $dr/c dt$ por u e levando em consideração que $\pm[ee'/\rho] = a = \frac{1}{2}[\varepsilon\varepsilon'/(\varepsilon + \varepsilon')]c^2$, obtemos então

$$u^2 = \pm \frac{\varepsilon\varepsilon'\rho}{(\varepsilon + m)(\varepsilon + \varepsilon')} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} + \frac{1}{r} u^2 \right) + \frac{2g}{c^2}(r - r_0) ,$$

e a partir disso:

$$u^2 = \frac{\pm \frac{\varepsilon\varepsilon'\rho}{(\varepsilon+m)(\varepsilon+\varepsilon')} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) + \frac{2g}{c^2}(r - r_0)}{1 \mp \frac{\varepsilon\varepsilon'\rho}{(\varepsilon+m)(\varepsilon+\varepsilon')} \cdot \frac{1}{r}} .$$

Colocando agora $\varepsilon\varepsilon' \cdot [\rho/(\varepsilon + m)(\varepsilon + \varepsilon')] = \rho'$, segue então que:

$$\text{para valores positivos de } ee', \quad u^2 = \frac{\rho'}{\rho' - r} \left(1 - \frac{r}{r_0} \right) \left(1 + \frac{2g}{c^2} \cdot \frac{rr_0}{\rho'} \right) , \quad (1)$$

$$\text{para valores negativos de } ee', \quad u^2 = \frac{\rho'}{\rho' + r} \left(1 - \frac{r}{r_0} \right) \left(1 - \frac{2g}{c^2} \cdot \frac{rr_0}{\rho'} \right) , \quad (2)$$

ou, se expressarmos r e r_0 como partes de ρ' :

$$\text{para valores positivos de } ee', \quad u^2 = \frac{1}{1 - r} \left(1 - \frac{r}{r_0} \right) \left(1 + \frac{2g\rho'}{c^2} \cdot rr_0 \right) , \quad (3)$$

$$\text{para valores negativos de } ee', \quad u^2 = \frac{1}{1 + r} \left(1 - \frac{r}{r_0} \right) \left(1 - \frac{2g\rho'}{c^2} \cdot rr_0 \right) . \quad (4)$$

Quando colocamos $g = 0$, obtemos as equações encontradas na Seção 15.6 para duas partículas impelidas apenas *pela interação mútua*. Se, ao contrário, colocarmos $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon' = 0$, onde então $\rho' = 0$, obteremos então de (1) e (2) a seguinte relação:

$$u^2 c^2 = \frac{dr^2}{dt^2} = 2g(r - r_0) ,$$

isto é, a *lei de queda livre*, onde $(r - r_0)$ denota o *espaço de queda*.

A representação *gráfica* desses modos de movimento de um par de partículas elétricas *por interação e ação externa* é facilmente obtida para valores positivos de ee' a partir da representação *gráfica* dos modos de movimento de um par de partículas *apenas por interação*, sem ação externa, dada na Figura da página 206. Na Figura anterior, com abscissas r inalteradas, todas as ordenadas $\pm u$ da curva dada por um certo valor da constante precisam apenas ser ampliadas na proporção de $1 : \sqrt{1 + [2g\rho'/c^2] r_0 r}$ para obter a curva que representa os movimentos do par de partículas sob as influências externas dadas, sendo necessário apenas observar que r_0 e r são representadas em partes de ρ' em vez de ρ , e que $\rho' : \rho = [\varepsilon\varepsilon' / (\varepsilon + \varepsilon')] : \varepsilon + m$, isto é, aproximadamente $= \varepsilon : m$, para pequenos valores de ε .

A partir disso podemos ver que, mesmo com *influência externa* como mencionado anteriormente, para uma *certa distância* ρ' entre partículas do mesmo tipo, a aceleração relativa entre elas devida à interação mútua é infinita de acordo com a fórmula, mas que a distância ρ' nunca pode ocorrer pelo motivo mencionado na Seção anterior, que também é válido aqui. De fato, se a distância ρ' alguma vez ocorresse realmente, então as partículas teriam de estar se *aproximando* ou se *afastando*. Se há uma *repulsão* durante a aproximação e uma *atração* durante o afastamento, e se essa repulsão e essa atração crescem de acordo com a lei mencionada de tal forma que elas se tornariam infinitas para a distância ρ' , então em nenhum dos dois casos as partículas vão alcançar a distância ρ' , mas serão forçadas a parar e retornar antes de chegar lá. Isto ocorre de acordo com nossa lei, e fica claro a partir disso que o caso de aceleração infinita nunca pode realmente ocorrer de acordo com essa lei.

Portanto, nada discutido nessa Seção relacionado à combinação de *interação mútua* e influência *externa* está em contradição com a lei estabelecida. Logo não é necessário, para defender essa lei tendo em vista o caso de aceleração infinita nas distâncias moleculares ρ ou ρ' , buscar refúgio na hipótese de que, como ρ e ρ' são distâncias moleculares, ainda precisariam ser levadas em consideração *forças moleculares especiais*.

É importante observar que as distâncias ρ e ρ' sempre permanecerão como distâncias moleculares já que, embora ρ possa ser aumentada ao crescer as massas elétricas que estão em interação mútua, ao menos uma das massas elétricas que estão em interação mútua estará ligada a uma massa *ponderável*, que precisa ser movida juntamente com ela, como no caso que acabou de ser considerado, sendo que por esse motivo ocorre uma *redução* no valor de ρ , na razão da massa total $\varepsilon + m$ para a [massa da partícula] elétrica ε , onde m denota uma massa ponderável em relação à qual ε desaparece.

O caso considerado nessa Seção de duas partículas elétricas impelidas pela interação mútua e pela influência *externa* é aquele ao qual se refere a objeção levantada por Helmholtz, que Neumann submeteu a um exame mais detalhado em seu Tratado, página 91 e seguintes deste volume.⁴⁰²

Na página 92, em relação ao que Helmholtz considerou como sendo o “resultado absurdo da aceleração infinita” na denominada distância crítica,⁴⁰³ Neumann adotou o argumento alternativo de que minha lei fundamental elétrica exigiria apenas (similar ao que ocorre com a lei de Newton) uma certa modificação para distâncias extraordinariamente pequenas, mas ele mesmo objetou que esse caso de aceleração infinita poderia ser configurado de tal forma

⁴⁰²[Neu74, pág. 91 e seguintes].

⁴⁰³[Nota de Wilhelm Weber:] Uma *aceleração infinita* ocorre frequentemente ao considerar corpos em colisão e isso não é considerado absurdo na mecânica, mas apenas como um *caso limite* de elasticidade crescente. Se esse *caso limite* nunca ocorre, então o mesmo ocorre na situação que estamos considerando, como será mostrado agora.

que apenas *grandes* distâncias poderiam ser consideradas, o que excluiria uma modificação do resultado por forças moleculares.

Neumann observa que para esses casos nos quais apenas são levadas em consideração grandes valores das distâncias críticas, a *realidade* ou a *possibilidade de realização* não foi provada, sem o que esses casos não podem ser usados como um teste da lei física, e que a objeção de Helmholtz não seria *considerada seriamente* até que tivesse sido fornecida essa evidência.

Por outro lado, a prova já foi dada nesta e na Seção anterior de que a *possibilidade do caso* em que, de acordo com Helmholtz, o “resultado absurdo da aceleração infinita” ocorreria, é inteiramente excluída *pelo fato* de que as duas partículas, antes que possam atingir a distância crítica, devem primeiro ter se aproximado dela, seja de uma distância *menor* ou *maior*, mas que, na aproximação, devido à aceleração *para trás*, que aumenta ao infinito, ou seja, à *desaceleração*, que ocorre tanto quando as partículas se aproximam da distância crítica de uma distância *menor* quanto quando se aproximam de uma distância *maior*, elas *nunca podem alcançar* a distância crítica, de onde se conclui que o “resultado absurdo da aceleração infinita” criticado por Helmholtz *não existe de forma alguma*, e que apenas um erro cometido por Helmholtz e ainda não refutado levou a isso. — A propósito, o tamanho da distância crítica é irrelevante aqui. —

Contudo, nas próximas duas Seções serão discutidos alguns casos nos quais se acreditou que podia ser alcançado um aumento significativo da assim chamada distância crítica e esses casos atraíram interesse particular devido às consequências a eles relacionadas.

15.10 Leis do Movimento de uma Partícula Elétrica Dentro de uma *Casca Esférica Eletrizada* e Impulsionada pela Interação Elétrica e Influência *Externa*

C. Neumann chamou atenção nas páginas 103–106 desse Volume dos *Abhandlungen*, ao seguinte caso:⁴⁰⁴

Considere uma casca esférica fixa (de raio α) coberta uniformemente com eletricidade. Dentro dessa casca existe um cilindro (de raio $= a$ e momento de inércia $= \mathfrak{M}$) que está coberto com eletricidade e pode girar em torno de seu eixo horizontal fixo. Seja um fio enrolado ao redor desse cilindro em cuja extremidade livre está preso um peso Mg . — O movimento que o cilindro assumirá sob a influência da casca esférica eletrizada, por um lado, e sob a influência do peso Mg , por outro lado, será examinado com mais detalhes.

Vamos supor que o cilindro está conectado *rigidamente e inseparavelmente* à matéria elétrica nele presente, e que o mesmo também ocorre com a casca esférica.⁴⁰⁵

⁴⁰⁴[Neu74, págs. 103-106].

⁴⁰⁵Carl Neumann apresentou a Figura mostrada nessa Nota de rodapé para descrever essa configuração, [Neu74, págs. 103-106], a saber:

Para esse caso, na página 106,⁴⁰⁶ supondo *constantes* as cargas elétricas do cilindro e da casca esférica, Neumann chegou à seguinte equação:

$$L\vartheta'^2 = Mga\vartheta + \text{constante},$$

ou, diferenciado com relação a t ,

$$2L\vartheta'' = Mga ,$$

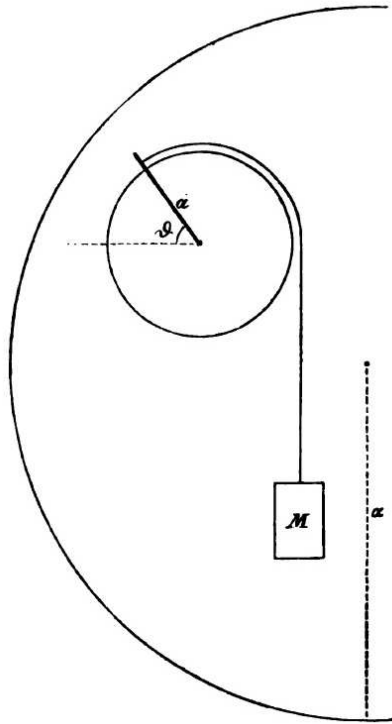
onde ϑ denota o ângulo de rotação, ϑ' a velocidade angular, e ϑ'' a aceleração angular do cilindro, e, se H denota a densidade [superficial] de eletricidade sobre a casca esférica e Σe a carga da superfície do cilindro, [a seguinte grandeza] é definida e considerada *constante*:⁴⁰⁷

$$L = \frac{Ma^2 + \mathfrak{M}}{2} - \frac{4\pi\alpha H \cdot a^2 \Sigma e}{3c^2} .$$

A isso Neumann vinculou agora a seguinte declaração:

Se a *constante* L for positiva, então o peso anexado Mg cairá com uma velocidade acelerada. Se $L = 0$, ocorre uma aceleração infinitamente grande. Por fim, se L for negativo, esse peso será *levantado* com velocidade acelerada. Nesse último caso, se supusermos um fio infinitamente longo, o peso poderia ser levantado até uma altura infinita, portanto seria realizado um trabalho infinitamente grande.

Contudo, se investigarmos se podem ou não ocorrer os casos $L = 0$ e L sendo negativo, encontraremos então as mesmas dificuldades que anteriormente.



⁴⁰⁶[Neu74, pág. 106].

⁴⁰⁷Ou seja, supondo que L é constante no tempo.

Destas *dificuldades* aqui indicadas por Neumann, devem ser particularmente enfatizadas as duas seguintes, a saber, *em primeiro lugar*, aquelas que decorrem dos limites impostos pela *natureza dos corpos* às forças de separação elétrica,⁴⁰⁸ *em segundo lugar*, as dificuldades associadas à suposição de um *valor constante* de L , que consistem no fato de esta suposição estar associada à suposição de *certas cargas imutáveis sobre a esfera e o cilindro*.

15.10.1 Dificuldades Decorrentes dos Limites Impostos às Forças de Separação Elétricas pela Natureza dos Corpos

Denotando para abreviar a eletricidade do cilindro e da casca esférica por e e e' (em vez de Σe e $4\pi\alpha^2 H$), e colocando o momento de inércia do cilindro como $\mathfrak{M} = ma^2$, então

$$L = \left(\frac{M + m}{2} - \frac{ee'}{3\alpha c^2} \right) a^2 ;$$

consequentemente para $L = 0$:

$$ee' = \frac{3}{2} \alpha c^2 (M + m) .$$

Agora $2e'/\alpha$ é a necessária *força de separação* da carga e' de uma casca esférica;^{409,410} contudo, a intensidade dessa *força de separação* é limitada e depende dos *meios de separação* presentes na natureza, já que embora seja enorme a variedade desses meios, ainda não foram encontradas maneiras de [gerar] *forças de separação infinitamente grandes*.

Se agora $L = 0$, então de acordo com a equação anterior segue que

⁴⁰⁸Em alemão: *Elektrischen Scheidungskräften*. Ver a Nota de rodapé 202 na página 114.

⁴⁰⁹[Nota de Wilhelm Weber:] A força de separação exercida por uma casca esférica de raio α coberta uniformemente com eletricidade e' atuando sobre um condutor linear *externo* de comprimento ilimitado ℓ , localizado ao longo da extensão de um raio, é a *diferença* entre a *força repulsiva* $= e' \int_0^\ell \frac{dx}{(\alpha+x)^2}$, exercida sobre uma unidade de eletricidade *positiva* contida em cada unidade de comprimento do condutor, e a *força atrativa* $= -e' \int_0^\ell \frac{dx}{(\alpha+x)^2}$, exercida sobre uma unidade de eletricidade *negativa* contida em cada unidade de comprimento do condutor; consequentemente

$$= 2e' \int_0^\ell \frac{dx}{(\alpha+x)^2} = 2e' \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+\ell} \right) ,$$

de onde, para um valor ilimitado de ℓ , segue que a *força de separação* $= 2e'/\alpha$, como afirmado anteriormente.

Se neste condutor for ligada uma bateria, através da qual a carga sobre a esfera se mantém inalterada, então fica comprovado que as forças de separação exercidas no condutor pela carga na esfera e as exercidas pela bateria são opostamente iguais, o que também determina a força de separação da bateria, ou seja, $-2e'/\alpha$.

Mas também é claro que se a casca esférica ainda não estivesse carregada, ela ficaria eletrizada pela bateria, e que essa carga crescerá até que ela ficasse $= e'$, supondo uma esfera de raio $= \alpha$, isto é, até que a *força de separação da carga sobre a esfera* tivesse se tornado $= 2e'/\alpha$ e *cancelado a força de separação da bateria*.

Além disso, daqui segue que duas cascas esféricas com cargas e' e ne' , cujos raios são α e $n\alpha$, e cujos *potenciais* para todos os pontos do interior, a saber, e'/α e $ne'/n\alpha$, são consequentemente iguais, podiam ser ligadas por um condutor sem que qualquer parte da carga fosse de uma casca para a outra, em conformidade com o teorema de que no caso da igualdade dos *potenciais* no interior de dois condutores, não ocorre transferência de eletricidade [entre eles]. —

Deve ainda ser observado que as *forças de separação* anteriores estão expressas em *unidade mecânica* e devem ser multiplicadas por $155\,370 \cdot 10^6 = [c/(2\sqrt{2})]$ para expressá-las em *unidade magnética*.

⁴¹⁰A palavra *Säule*, que pode ser traduzida como célula, coluna, pilha ou bateria, parece referir-se aqui a uma pilha ou bateria elétrica, sendo por isso traduzida como “bateria” nessa Nota de rodapé.

$$\frac{2e'}{\alpha} = 3c^2 \cdot \frac{M+m}{e},$$

ou, como⁴¹¹ $c = 439\,450 \cdot 10^6$, deve valer que

$$\frac{2e'}{\alpha} \cdot \frac{e}{2(M+m)} = 289\,670 \cdot 10^{18}.$$

— Será difícil encontrar um cilindro com eixo fixo de rotação, eletrizado, tal que sua carga e em *unidade absoluta* seja maior do que a massa ponderável $2m$ expressa em *miligramas*; porém se adicionarmos a $2m$ o dobro da massa do peso, a saber, $2M$, certamente poderemos assumir que $e/2(M+m)$ será uma fração *própria*.⁴¹² De onde segue que para carregar a casca esférica, quando L é igual a zero, seria necessária uma força de separação que, em *unidade mecânica*, deve ser $= 2e'/\alpha > 289\,670 \cdot 10^{18}$, isto é, uma força de separação que excederia em pelo menos 261 *trilhões* de vezes a maior daquelas medidas nas *Medições Eletrodinâmicas*, Vol. V desses *Abhandlungen*, páginas 243-250,^{413,414} a saber, $= 2\frac{6410,5}{11,567} = 1108$. Pode-se duvidar, com razão, que existam corpos na natureza que ainda são desconhecidos por nós e que permitiriam forças de separação tão grandes. Não ajudaria em nada aumentar os dois coeficientes $e/(M+m)$ e e'/α por um fator de 10 ou de 100; se a *natureza dos corpos* não permitir que o produto desses dois coeficientes seja ampliado muitos *trilhões* de vezes, então sempre permanecerá *impossível* a produção do caso $L = 0$.

Porém, mesmo que a natureza dos corpos seja tal que exista a possibilidade de tais grandes forças de separação, então até mesmo com essas forças de separação não poderiam ser produzidas as cargas necessárias, já que não existe *isolante* que seja forte o suficiente para resistir às forças expansivas devidas a essas cargas, que explodiriam com mais força do que as cargas de pólvora e destruiriam tudo.

Contudo, mesmo que existissem tais isolantes perfeitos e sólidos, que pudessem resistir às tremendas forças expansivas de tais cargas, e supondo que pudéssemos carregar a esfera até a intensidade desejada, teríamos alcançado então $L = 0$, mas mesmo nesse caso a aceleração ϑ'' *não seria infinita*, ao menos não de acordo com a lei que embasou o cálculo anterior, como será provado na próxima Seção.

15.10.2 Dificuldades Associadas com a Suposição de um Valor Constante de L

Além da dúvida discutida na Seção anterior sobre se $L = 0$ pode ser alcançado, dados os limites impostos pela *natureza dos corpos* às *forças de separação elétricas*, resta ainda discutir se o produto das duas cargas e e e' , que é determinado com precisão para $L = 0$, pode ser *mantido constante*, o que deve ser assumido se L for *constante* e igual a zero. Coloca-se também a questão de saber qual a influência que teria se uma das duas cargas fosse *variável*.

⁴¹¹Ver [Ass21e] para uma discussão da constante c de Weber e sua relação com a velocidade da luz no vácuo.

⁴¹²Uma fração própria é a fração onde o numerador é menor que o denominador e que representa parte do inteiro, isto é, representa um valor maior que zero e menor que um. Exemplos: $1/2$, $1/4$, $2/3$ etc.

⁴¹³[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, págs. 631-638.

⁴¹⁴[KW57, Seções 9-11, págs. 631-638 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [KW21, Seções 7.9 a 7.11, págs. 160-167].

O valor de L depende das cargas e e e' do cilindro e da casca esférica e , de fato, se o valor de $L = 0$ deve ser *constante*, ele depende não apenas da *magnitude* das cargas e e e' , mas também da *maneira* pela qual um valor determinado com precisão é *produzido*.

Mesmo que uma das duas cargas, nomeadamente a carga do cilindro e , fosse *constante*, a carga da casca esférica e' teria de permanecer *variável* para atingir o ponto onde $L = 0$ através do seu crescimento gradual. Porém, mesmo nesse caso a carga e' não pararia abruptamente de se modificar e permaneceria *completamente constante*. Sem dúvida ela continuaria a oscilar dentro de certos limites, já que não é possível de forma alguma a produção *com absoluta precisão* da carga necessária, mas apenas dentro de certos limites mais amplos ou mais estreitos. Consequentemente, a carga e' sempre teria de ser considerada como sendo uma função do tempo, a qual para qualquer intervalo curto de tempo pode ser representada por $e' = p + qt$.

Agora *nesse caso em que e' é variável*, é válida a equação estabelecida por Neumann na página 105 desse Volume,^{415,416} a saber,

$$T = P - U + Mga\vartheta + \text{constante},$$

onde $T = [(M + m)/2] \cdot a^2\vartheta'^2$, $P = [ee'/3\alpha c^2] \cdot a^2\vartheta'^2 + \text{constante}$, e $U = ee'/\alpha$, que, portanto, muda [de intensidade] juntamente com e' .

Colocando agora $e' = p + qt$ e $L = ([(M + m)/2] - [ee'/3\alpha c^2]) a^2$, obtemos então

$$L\vartheta'^2 = Mga\vartheta - \frac{e}{\alpha}(p + qt) + \text{constante},$$

ou, diferenciado com relação a t ,

$$2L\vartheta'' = Mga - \frac{eq}{\alpha\vartheta'} ,$$

de onde para $L = 0$ segue que *ou* $\vartheta'' = \infty$, *ou* (se ϑ'' não for infinito), $\vartheta' = eq/Mga\alpha$.

Esta alternativa é agora decidida quando se considera que L varia com o tempo t . Calculamos então o tempo t a partir daquele instante no qual de acordo com a equação $e' = p + qt$ teríamos $L = 0$, de onde segue que

$$\frac{M + m}{2} = \frac{ep}{3\alpha c^2} .$$

Segue que após o elemento de tempo δ ,

$$L = -\frac{eq\delta}{3\alpha c^2} a^2 ,$$

consequentemente, se colocarmos esse valor para L na equação anterior,

$$2L\vartheta'' = -\frac{2eq\delta}{3\alpha c^2} a^2 \cdot \vartheta'' = Mga - \frac{eq}{\alpha\vartheta'} .$$

Como para o caso de $L = 0$ e $t = 0$ com um valor finito de ϑ'' encontrou-se agora que

$$\vartheta' = \frac{eq}{Mga\alpha} ,$$

⁴¹⁵[Nota de Heinrich Weber:] *Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse*, Vol. 11.

⁴¹⁶[[Neu74](#), pág. 105].

e o valor de ϑ' para $t = \delta$, se δ for *infinitamente pequeno*, não é perceptivelmente diferente do valor de ϑ'' para $t = 0$, obtém-se assim:

$$2L\vartheta'' = -\frac{2eq\delta}{3\alpha c^2} a^2 \cdot \vartheta'' = Mga - \frac{eq}{\alpha} \cdot \frac{Mga\alpha}{eq} = 0 ,$$

sendo que de acordo com isso $\vartheta'' = 0$.

Agora como vale esse valor $\vartheta'' = 0$ não importando quão pequeno q possa ser, ele também vai se aplicar, consequentemente, quando $q = 0$.

Vemos disso que sempre que ocorre o caso $L = 0$, as únicas transições são de valores menores para maiores ou vice-versa, de tal forma que a aceleração ϑ'' para $L = 0$ não é de forma alguma infinita, mas $= 0$, o que elimina todas as objeções levantadas pela alegada *aceleração infinita*.

15.11 Conclusão

Mesmo antes que Neumann percebesse e investigasse o caso considerado na Seção anterior, Helmholtz já havia chamado atenção para um caso similar, a saber, no qual uma massa elétrica pontual ε está localizada no *interior* de uma casca esférica eletrizada, e ele encontrou o resultado simples surpreendente que as *componentes da força exercida sobre ε pela casca esférica eletrizada são iguais à aceleração x'' , y'' , z'' multiplicada por um fator constante*.

Além disso, Helmholtz (*Journal de Borchardt*, Vol. 75)⁴¹⁷ desenvolveu a equação da força viva a partir da lei fundamental da interação elétrica que resulta para o caso de apenas *uma* massa pontual μ com a carga elétrica ε ⁴¹⁸ que se desloca em algum espaço que é limitado pela casca esférica de raio R coberta uniformemente com eletricidade, a saber, a equação:^{419,420,421}

$$\frac{1}{2} \left(\mu - \frac{8\pi}{3c^2} \cdot R\varepsilon\varepsilon' \right) q^2 - V + C = 0 ,$$

onde ε' denota a quantidade de eletricidade por unidade de área sobre a casca esférica,⁴²² q a velocidade da massa pontual μ ao longo de sua trajetória s , portanto, $q = ds/dt$, e V é o potencial das forças *que não são elétricas*. Segue dessa equação através da diferenciação com relação a s que:

$$\mu q \frac{dq}{ds} - \left(\frac{8\pi}{3c^2} \cdot R\varepsilon\varepsilon' \cdot q \frac{dq}{ds} + \frac{dV}{ds} \right) = 0 ,$$

onde $[8\pi/3c^2] \cdot R\varepsilon\varepsilon' \cdot q[dq/ds]$ é a força *elétrica* exercida sobre μ ao longo da direção da trajetória s , enquanto dV/ds é a força *não-elétrica* exercida sobre μ na mesma direção.

⁴¹⁷[Hel73]. Ver também a Nota de rodapé 27 na página 27.

⁴¹⁸Em alemão: *mit dem elektrischen Quantum ε* . Isto é, com a quantidade, quantum, conteúdo, carga elétrica ou quantidade de carga elétrica ε . Ver ainda a Nota de rodapé 288 na página 161.

⁴¹⁹[Nota de Wilhelm Weber:] O fator $\frac{1}{2}q^2$ nessa equação não é $(\mu - [4\pi/3c^2]R\varepsilon\varepsilon')$, como afirmado por Helmholtz, mas $(\mu - [8\pi/3c^2]R\varepsilon\varepsilon')$. Conferir Neumann, parágrafos 3 e 7 de seu Tratado nesse Volume.

⁴²⁰[Nota de Heinrich Weber:] *Abhandlungen bei der Begründung der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse*, Vol. 11.

⁴²¹[Neu74, parágrafos 3 e 7]. Ver ainda a Nota de rodapé 290 na página 161.

⁴²²Isto é, ε' é a quantidade de carga por unidade de área sobre a casca esférica, ou seja, a densidade superficial de carga.

Como $q = ds/dt$ denota a velocidade do ponto μ em sua trajetória s e $q[dq/ds] = dq/dt = d^2s/dt^2$ é a aceleração de μ em sua trajetória, segue que a força *elétrica* $[8\pi/3c^2] \cdot R\varepsilon\varepsilon' \cdot q[dq/ds]$ exercida sobre μ encontrada a partir da equação anterior, é o produto dessa aceleração $q[dq/ds]$ multiplicada pelo fator constante $[8\pi/3c^2] \cdot R\varepsilon\varepsilon'$, completamente de acordo com o resultado mencionado anteriormente.

Se agora a força *elétrica* exercida sobre μ for proporcional à aceleração $q[dq/ds]$ do ponto μ , sobre o qual são exercidas *duas* forças, a saber, a mencionada força *elétrica* $[8\pi/3c^2] \cdot R\varepsilon\varepsilon' \cdot q[dq/ds]$, e a força *não-elétrica* dV/ds , então é claro que $q[dq/ds]$ será obtida ao dividir a soma dessas *duas* forças por μ , isto é:

$$q \frac{dq}{ds} = \frac{\frac{8\pi}{3c^2} \cdot R\varepsilon\varepsilon' \cdot q \frac{dq}{ds} + \frac{dV}{ds}}{\mu},$$

de onde vem que

$$q \frac{dq}{ds} = \frac{\frac{1}{\mu} \cdot \frac{dV}{ds}}{1 - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{8\pi}{3c^2} \cdot R\varepsilon\varepsilon'}.$$

Substituindo esse valor para $q[dq/ds]$ na expressão para a força *elétrica* exercida sobre μ , obtemos então uma expressão para essa força que é independente da aceleração, a saber:

$$\frac{8\pi}{3c^2} \cdot R\varepsilon\varepsilon' \cdot q \frac{dq}{ds} = \frac{\frac{8\pi}{3c^2} \cdot R\varepsilon\varepsilon'}{\mu - \frac{8\pi}{3c^2} \cdot R\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{dV}{ds},$$

de onde facilmente reconhecemos que a força *elétrica* ao longo da trajetória s estará direcionada para o mesmo lado que a força *não-elétrica* dV/ds , desde que $[8\pi/3c^2] \cdot R\varepsilon\varepsilon' < \mu$, mas que ela terá a direção oposta, tão logo $[8\pi/3c^2] \cdot R\varepsilon\varepsilon' > \mu$. Porém, enquanto $[8\pi/3c^2] \cdot R\varepsilon\varepsilon'$ torna-se $= \mu$, *na medida em que cresce*, a força *elétrica* cresce simultaneamente até $+\infty$, pulando abruptamente de $+\infty$ para $-\infty$, e cresce com $[8\pi/3c^2] \cdot R\varepsilon\varepsilon'$, que torna-se $> \mu$, de novo continuamente de $-\infty$ até 0. Se, por outro lado, $[8\pi/3c^2] \cdot R\varepsilon\varepsilon'$ torna-se $= \mu$, *na medida em que diminui*, então simultaneamente a força *elétrica* diminui continuamente até $-\infty$, saltando abruptamente de $-\infty$ para $+\infty$, e diminui, após $[8\pi/3c^2] \cdot R\varepsilon\varepsilon'$ tornar-se $< \mu$, de novo continuamente desde $+\infty$ até 0.

Tanto o crescimento de tal força até infinito, quanto a mudança em sua direção, no instante em que ela torna-se infinita, podem parecer como uma violação da continuidade encontrada na natureza e poderiam ser consideradas como uma base de objeção em relação à validade geral dessa lei, a partir da qual foram deduzidas tais violações de continuidade. No entanto, é fácil provar que essas conclusões não podem ser tiradas corretamente dessa lei, porque essas conclusões ainda estão vinculadas a condições completamente impossíveis de serem cumpridas, como já foi observado nos *Annalen* de Poggendorff, Vol. 156, pág.

29,^{423,424,425} o que parece exigir uma explicação mais detalhada, que finalmente será dada aqui.

A aceleração de μ obtida por Helmholtz através das forças *elétrica* e *não-elétrica* mencionadas anteriormente a partir da lei fundamental da ação elétrica resultou na seguinte equação:

$$q \frac{dq}{ds} = \frac{dV/ds}{\mu - \frac{8\pi}{3c^2} \cdot R\varepsilon\varepsilon'} ,$$

na qual a aceleração de μ , em vez de ser representada por $q[dq/ds]$, também pode ser representada por dq/dt ou d^2s/dt^2 .

A aceleração é infinitamente grande quando o valor de $\varepsilon' = 3c^2\mu/8\pi R\varepsilon$. A determinação desse valor de ε' , que será chamado de η , pressupõe que o valor de ε já foi determinado anteriormente. Pode parecer que, inversamente, η também poderia ser determinado de antemão, tornando a determinação de ε dependente do conhecimento de η , mas é claro que após a casca esférica ser carregada e η ter sido determinado, nenhuma carga poderia ser adicionada dentro da esfera, incluindo a carga ε da partícula μ .

Portanto, se for dada a carga ε da partícula μ no interior da casca esférica, então a carga superficial da casca esférica, para a qual a força torna-se infinita, pode ser calculada de antemão, a saber, para qualquer unidade de superfície, como já foi afirmado anteriormente:

$$\eta = \frac{3c^2}{8\pi} \cdot \frac{\mu}{R\varepsilon} ;$$

contudo, a produção *real* dessa carga estaria necessariamente ligada ao crescimento *gradual* da carga desde $\varepsilon' = 0$ até $\varepsilon' = \eta$.

Assumindo isso, chamaremos de $t = 0$ ao instante no qual $\varepsilon' = \eta$ e de $t = -\vartheta$ ao instante no qual $\varepsilon' = 0$. Se além disso colocarmos agora o crescimento da carga ε' como sendo proporcional ao tempo, isto é,

$$\varepsilon' = \eta \left(1 + \frac{t}{\vartheta} \right) ,$$

e se assumirmos, para simplificar a análise, o centro da casca esférica como o ponto inicial da trajetória s , onde a partícula μ no instante $t = -\vartheta$ (isto é, no instante em que $\varepsilon' = 0$) está em repouso, então com $\varepsilon' = 0$ temos simultaneamente $s = 0$ e $q = 0$, e se assumirmos finalmente que a força *não-elétrica* $dV/ds = a$ exercida sobre μ é *constante*, então a partir da equação mencionada, ou seja, a partir de

⁴²³[Nota de Wilhelm Weber:] Está afirmado no local mencionado:

Tal salto da força elétrica em *intensidade* e *direção*, a saber, de $+\infty$ para $-\infty$, não ocorre de fato de acordo com a lei, pois a massa μ com sua carga e não pode, em consequência da aceleração sempre crescente, permanecer por um tempo longo o suficiente no interior da casca esférica, até que ocorra $[8\pi/3c^2] \cdot R\varepsilon\varepsilon' = \mu$, mas já teria sido impelida mais cedo em direção à superfície da esfera formada pelo isolante *rígido*, sendo que através de sua resistência o repouso teria sido restaurado, e assim não se aplicariam mais as relações pressupostas no cálculo.

⁴²⁴[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. IV, pág. 333.

⁴²⁵[Web75, págs. 333-334 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web24g] e tradução para o português no Capítulo 13. Ver, em particular, a página 162.

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\frac{dV}{ds}}{\mu - \frac{8\pi}{3c^2} \cdot R\varepsilon\varepsilon'} ,$$

seguirá a [seguinte] equação após as substituições $\varepsilon' = \eta(1 + [t/\vartheta])$, $\mu = [8\pi/3c^2] \cdot R\varepsilon\eta$, e $dV/ds = a$:

$$dq = -\frac{a\vartheta}{\mu} \cdot \frac{dt}{t} .$$

A integral dessa equação pode ser escrita como:

$$q = -\frac{a\vartheta}{2\mu} \cdot \log c^2 t^2 .$$

Daqui segue, como $q = 0$ para $t = -\vartheta$, que $c^2 = 1/\vartheta^2$.

Se substituirmos esse valor para c^2 na equação anterior e se colocarmos ds/dt no lugar de q , obteremos então

$$ds = -\frac{a\vartheta}{2\mu} \cdot \log \frac{t^2}{\vartheta^2} \cdot dt .$$

Disso segue por integração que

$$s = \frac{a\vartheta t}{\mu} \left(1 - \frac{1}{2} \log \frac{t^2}{\vartheta^2} \right) + C .$$

Como s é agora igual a zero para $t = -\vartheta$, resulta então que $C = a\vartheta^2/\mu$; conseqüentemente

$$s = \frac{a\vartheta^2}{\mu} \left[1 + \frac{t}{\vartheta} \left(1 - \frac{1}{2} \log \frac{t^2}{\vartheta^2} \right) \right] .$$

As duas fórmulas obtidas que, quando denominamos a força *não-elétrica* atuando sobre μ por $a = g\mu$, podem ser escritas como

$$\begin{aligned} q &= -\frac{g\vartheta}{2} \cdot \log \frac{t^2}{\vartheta^2} , \\ s &= g\vartheta^2 \left[1 + \frac{t}{\vartheta} \left(1 - \frac{1}{2} \log \frac{t^2}{\vartheta^2} \right) \right] , \end{aligned}$$

podem agora ser representadas facilmente em forma tabular da seguinte maneira, na qual e é a base dos logaritmos naturais:⁴²⁶

⁴²⁶Devido a um erro de impressão, o número na primeira coluna da segunda linha apareceu como 1 em vez do valor correto -1 apresentado aqui.

$\frac{t}{\vartheta}$	$\frac{s}{g\vartheta^2}$	$\frac{q}{g\vartheta}$	$\frac{\varepsilon'}{\eta} = (1 + \frac{t}{\vartheta})$
-1	0	0	0
$-e^{-1}$	$1 - 2e^{-1}$	1	$1 - e^{-1}$
$-e^{-2}$	$1 - 3e^{-2}$	2	$1 - e^{-2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	1	∞	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$+e^{-2}$	$1 + 3e^{-2}$	2	$1 + e^{-2}$
$+e^{-1}$	$1 + 2e^{-1}$	1	$1 + e^{-1}$
+1	2	0	2
+e	1	-1	$1 + e$
$+e^2$	$1 - e^2$	-2	$1 + e^2$

Pode-se observar nesta visão geral que a partícula μ , que teria percorrido a distância $\frac{1}{2}g\vartheta^2$ no tempo ϑ devido à aceleração g resultante da força *não-elétrica*, percorre o dobro da distância com o auxílio da força elétrica, e, enquanto sem a força elétrica teria atingido a velocidade $g\vartheta$, com a força elétrica atinge uma velocidade infinita.

Contudo, tendo alcançado velocidade infinitamente grande, ela não percorre o menor elemento de distância finito, devido ao fato de que então a aceleração *positiva* infinita transforma-se abruptamente em aceleração *negativa* infinita, e que, em consequência disso, as velocidades são iguais entre si para o mesmo período de tempo *antes* e *após* esse instante, sendo que de acordo com isso a velocidade q no tempo $t = +\vartheta$ (isto é, após ter transcorrido o intervalo de tempo 2ϑ contado a partir do início do movimento) é igual à velocidade no tempo inicial $t = -\vartheta$, a saber, $q = 0$, onde a trajetória s , se a casca esférica for grande o suficiente para acomodar s , teria aumentado novamente em $g\vartheta^2$, alcançando então $s = 2g\vartheta^2$. A carga ε' teria alcançado 2η nesse processo. Mas daqui em diante, com o crescimento contínuo do tempo e da carga, a distância s da partícula μ em relação ao centro da casca esférica diminuiria rapidamente de novo até $s = 0$, tornando-se então negativa até $s = -R$, quando a partícula μ colidiria com a casca esférica, no tempo t , que pode ser determinado a partir da equação $-R = g\vartheta^2[1 + [t/\vartheta](1 - \frac{1}{2}\log[t^2/\vartheta^2])]$, e com velocidade q , a qual, após ter determinado t , é encontrada como sendo $= [g\vartheta/2] \log[t^2/\vartheta^2]$.

Até agora, como já observado, foi assumido que o raio R da casca esférica é maior do que o valor máximo $2g\vartheta^2$, que s alcança no tempo $t = +\vartheta$. Caso R fosse menor do que isso, então é claro que a partícula μ colidiria mais cedo com a casca esférica, a saber, no instante t em que $s = R$, que pode ser determinado a partir da equação $R = g\vartheta^2[1 + [t/\vartheta](1 - \frac{1}{2}\log[t^2/\vartheta^2])]$.

Agora, porém, não consideraremos um crescimento contínuo da carga elétrica, mas o caso em que a carga permanece *constante* após ter excedido ligeiramente o valor η . Suponha-se, por exemplo, essa carga constante $\varepsilon' = \eta(1 + [1/e^2])$, onde μ tem a velocidade $q = 2g\vartheta$ e está à distância $s = (1 + [3/e^2])g\vartheta^2$ do centro da esfera.

Se colocarmos na equação de Helmholtz

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\frac{dV}{ds}}{\mu - \frac{8\pi}{3c^2} \cdot R\varepsilon'}$$

o valor $\eta(1 + [1/e^2])$ para ε' , então

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\frac{dV}{ds}}{\mu - \frac{8\pi}{3c^2} \cdot R\varepsilon\eta \left(1 + \frac{1}{e^2}\right)} .$$

Coloque agora aqui, assim como anteriormente, $dV/ds = a$ e $[8\pi/3c^2] \cdot R\varepsilon\eta = \mu$, para obter a equação diferencial

$$dq = -\frac{ae^2}{\mu} \cdot dt ,$$

e através de sua integração:

$$q = -\frac{ae^2}{\mu}t + C .$$

Se começarmos a medir o tempo a partir do instante em que $\varepsilon' = \eta(1 + [1/e^2])$, então para $t = 0$ o valor de $q = 2g\vartheta$ já foi encontrado anteriormente, logo, como foi colocado anteriormente $a = g\mu$, [teremos:]

$$C = 2g\vartheta ,$$

portanto,

$$q = 2g\vartheta - e^2gt ,$$

ou

$$ds = (2g\vartheta - e^2gt) dt ,$$

de onde, por integração:

$$s = 2g\vartheta t - \frac{e^2}{2}gt^2 + C' .$$

Agora, se o tempo for calculado a partir do momento em que tínhamos $\varepsilon' = \eta(1 + [1/e^2])$, para $t = 0$ foi encontrado $s = (1 + [3/e^2])g\vartheta^2$, conseqüentemente

$$C' = \left(1 + \frac{3}{e^2}\right) g\vartheta^2 ,$$

portanto,

$$s = \left(1 + \frac{3}{e^2}\right) g\vartheta^2 + 2g\vartheta t - \frac{e^2}{2}g \cdot t^2 .$$

Essa fórmula, juntamente com a equação anterior:

$$q = 2g\vartheta - e^2gt ,$$

podem ser agora facilmente e claramente arranjadas, assim como as fórmulas anteriores para s e q , no formato da seguinte Tabela:

$\frac{t}{\vartheta}$	$\frac{s}{g\vartheta^2}$	$\frac{q}{g\vartheta}$	$\frac{\varepsilon'}{\eta}$
0	$1 + \frac{3}{e^2}$	2	$1 + \frac{1}{e^2}$
1	$3 + \frac{3}{e^2} - \frac{e^2}{2}$	$2 - e^2$	$1 + \frac{1}{e^2}$
2	$5 + \frac{3}{e^2} - 2e^2$	$2 - 2e^2$	$1 + \frac{1}{e^2}$

Essa Tabela pode ser facilmente estendida; contudo, podemos ver dela que a partir de $t = 2\vartheta/e^2$, após a carga ter ficado constante, a distância s da partícula μ em relação ao centro da casca esférica diminui e logo torna-se negativa, até que eventualmente a partícula μ , quando s torna-se $= -R$, colide com a casca esférica no tempo t com velocidade q , sendo que essas duas grandezas podem ser determinadas a partir das duas equações, [a saber:]

$$\begin{aligned} -R &= \left(1 + \frac{3}{e^2}\right) g\vartheta^2 + 2g\vartheta t - \frac{e^2}{2}gt^2, \\ q &= 2g\vartheta - e^2gt. \end{aligned}$$

Pode-se perceber dessa apresentação de todo o processo em seu *contexto*, que nenhuma das consequências “inconsistentes ou absurdas”, através das quais Helmholtz pretendia refutar a lei fundamental, realmente ocorre.

A objeção (A) de Helmholtz publicada no *Journal* de Borchardt, Vol. 72, pág. 61 e Vol. 75, pág. 38 ainda não foi discutida.⁴²⁷ Ela consiste na afirmação de que a lei fundamental estabelecida da interação elétrica, ou melhor, as equações diferenciais de Kirchhoff decorrentes dessa lei,⁴²⁸ levam a um equilíbrio instável da matéria elétrica, ou melhor, a um movimento dessa matéria cuja velocidade aumenta até o infinito com o tempo. Contudo, Neumann já provou nos *Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft*, Outubro de 1871, pág. 477,⁴²⁹ que as equações diferenciais de Kirchhoff se baseiam não apenas nessa lei fundamental, mas também em várias outras suposições periféricas e que, conseqüentemente, essa lei não pode ser duvidada com base em preocupações gerais apresentadas contra essas equações diferenciais.

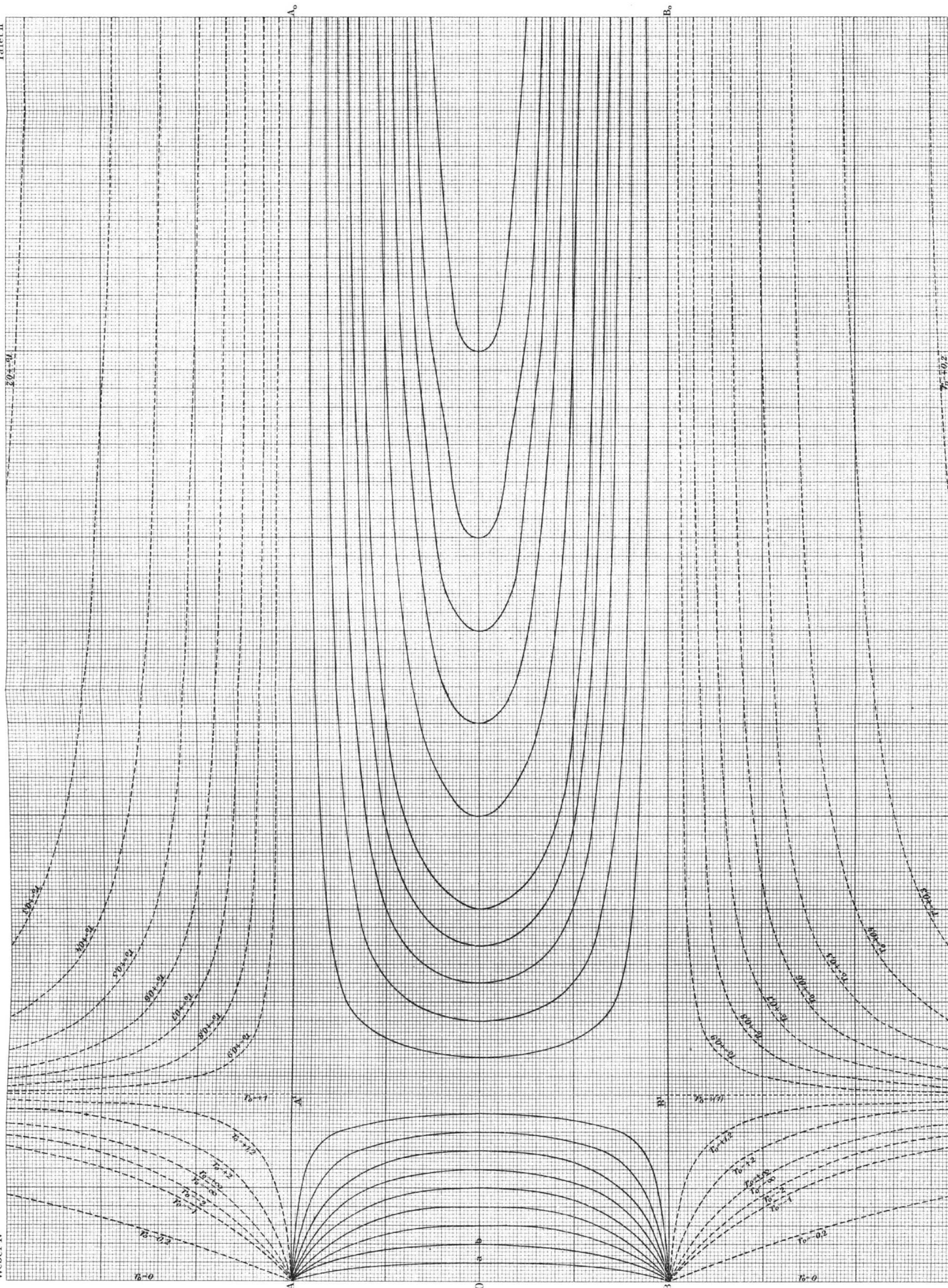
Após essa correção já feita por Neumann, que está discutida mais detalhadamente em seu trabalho, nas páginas 128-149 do presente Volume,⁴³⁰ não é necessária uma discussão adicional dessa objeção. Tal discussão, que lidaria principalmente apenas com essas suposições periféricas, está completamente fora do escopo do presente Tratado.

⁴²⁷[Hel70, pág. 61] e [Hel73, pág. 38].

⁴²⁸[Kir57c] com traduções para o inglês em [GA94] e [Kir21a].

⁴²⁹[Neu71b, págs. 477-478].

⁴³⁰[Neu74, págs. 128-149].



Capítulo 16

[Weber, 1878b] Sobre a Energia de Interação

Wilhelm Weber^{431,432}

(Excerto do autor do tratado sobre *Medições Eletrodinâmicas* no Volume XVIII da *Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften*.)^{433,434,435}

⁴³¹[Web78b] com tradução para o inglês em [Web21l].

⁴³²As Notas de Heinrich Weber, o Editor do Volume 4 das *Obras* de Weber, são representadas por [Nota de Heinrich Weber:]; todas as outras Notas são de minha autoria.

⁴³³[Nota de Heinrich Weber:] *Annalen der Physik und Chemie*, editado por G. Wiedemann, Vol. 4, Leipzig, 1878, págs. 343-373.

⁴³⁴[Nota de Heinrich Weber:] Como os parágrafos 1 a 5 desse extrato correspondem, em conteúdo e redação, aos parágrafos 1 a 5 do Tratado anterior, ou seja, até a página 382, linha 10 a partir do topo, apenas o último parágrafo do extrato, parágrafo 6, foi reproduzido aqui.

⁴³⁵Esse trabalho é um extrato da Sétima Memória principal de Weber sobre *Medições Eletrodinâmicas*, [Web78a] com tradução em inglês em [Web21f] e tradução para o português no Capítulo 15. As páginas 343-365 de [Web78b] coincidem com as páginas 645-664, até a linha 12 a partir do topo, dos *Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften (Leipzig)*, [Web78a], e com as páginas 364-382, até a linha 10 a partir do topo, do Volume 4 das *Obras* de Weber, [Web94g].

16.6. Uma Partícula Contida em uma Casca Esférica Elettrizada e Impulsionada por uma Força Elétrica e por uma Força Não-Elétrica

Finalmente, das aplicações da lei fundamental elétrica, apenas a aplicação ao movimento de uma massa pontual μ (com a carga elétrica ε)⁴³⁶ contida em uma *casca esférica eletrizada* será considerada aqui, se, além da força *elétrica*, uma força constante a , *não-elétrica*, age sobre ela, a fim de mostrar que nenhuma das consequências “inconsistentes e absurdas” pelas quais Helmholtz queria refutar essa lei fundamental realmente ocorre.⁴³⁷

Helmholtz deduziu dessa lei fundamental, no *Journal* de Borchardt, [Volume] LXXV,⁴³⁸ a seguinte equação da força viva⁴³⁹ para esse ponto material μ com carga elétrica ε , [dentro] de uma casca esférica de raio R coberta uniformemente com eletricidade:⁴⁴⁰

$$\frac{1}{2} \left(\mu - \frac{8\pi}{3c^2} \cdot R\varepsilon\varepsilon' \right) q^2 - V + C = 0 ,$$

onde ε' denota a quantidade de eletricidade por unidade de área na superfície da casca esférica, q a velocidade do ponto material μ , e V o potencial da força *não-elétrica*.⁴⁴¹

Foi concluído a partir dessa equação, havendo uma *diferença entre o potencial V da força não-elétrica e a constante C* , que quando ε' tivesse crescido de 0 até que $[8\pi/3c^2]R\varepsilon \cdot \varepsilon' = \mu$, então a força viva do ponto material μ teria aumentado de $\frac{1}{2}\mu q^2 = V - C$ até $\frac{1}{2}\mu q^2 = \infty$, o que seria uma *produção infinitamente grande de trabalho*.⁴⁴² A remoção dessa objeção pode agora ser obtida a partir da apresentação completa de todo o processo de movimento em seu contexto, como indicado anteriormente nesses *Annalen*, [Volume] XLVI, pág. 29.^{443,444}

Seja η aquela carga ε' sobre a unidade de área da casca esférica para a qual a velocidade q da massa μ seria infinita, coloque então $\eta = [3c^2\mu/8\pi R\varepsilon]$, e suponha que ε tem um certo valor constante, enquanto que ε' cresce uniformemente de 0 no tempo $t = -\vartheta$ até η no tempo $t = 0$, sendo esse último valor alcançado gradualmente. Além disso, para simplificar

⁴³⁶Em alemão: *mit dem elektrischen Quantum* ε . Ver a Nota de rodapé 288 na página 161.

⁴³⁷Weber está se referindo aqui à sua lei de força eletrodinâmica que apresentou em 1846, [Web46] com tradução parcial para o francês em [Web87] e traduções completas para o inglês em [Web07] e [Web21d].

Nesse artigo de 1878 Weber considera o movimento de uma partícula de massa μ e carga elétrica ε deslocando-se dentro de uma casca esférica uniformemente eletrizada. Ele considera duas forças atuando sobre a partícula, a saber, a força elétrica exercida pela casca esférica e uma força não-elétrica constante, que designou pela letra a . Ele considera essa força constante a como sendo o peso da partícula próxima à superfície da Terra, ou seja, $a = \mu g$, onde g é a aceleração de queda livre. Ele está respondendo às críticas apresentadas por Helmholtz em 1873, [Hel73], ver também [Hel72a] com tradução para o inglês em [Hel72b].

⁴³⁸[Hel73]; ver também [Hel72a] com tradução para o inglês em [Hel72b]. Ver ainda a Nota de rodapé 27 na página 27.

⁴³⁹Ver a Nota de rodapé 23 na página 25.

⁴⁴⁰[Hel73, Seção 12, págs. 48-54], ver também [Neu74, parágrafos 3 e 7].

⁴⁴¹Aqui ε' representa a densidade superficial de carga. A carga total espalhada sobre toda a superfície da casca esférica de raio R é então dada por $4\pi R^2\varepsilon'$.

⁴⁴²Em alemão: *eine unendlich grosse Arbeitsleistung*. Essa expressão pode ser traduzida como uma produção infinitamente grande de trabalho, uma quantidade infinitamente grande de trabalho, ou um trabalho realizado infinitamente grande.

⁴⁴³[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. IV, pág. 333.

⁴⁴⁴[Web75, pág. 29 dos *Annalen der Physik und Chemie* e pág. 333 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web24g] e tradução para o português no Capítulo 13. Ver, em particular, a página 162.

a análise, considere o centro da esfera como sendo o ponto inicial da trajetória ⁴⁴⁵ onde a partícula μ no tempo $t = -\vartheta$ (onde $\varepsilon' = 0$) está em repouso, isto é, com $\varepsilon' = 0$ ⁴⁴⁶ temos $s = 0$ e $q = 0$. Então, com o auxílio dos valores

$$\varepsilon' = \eta \left(1 + \frac{t}{\vartheta} \right) , \quad \mu = \frac{8\pi}{3c^2} \cdot R\varepsilon\eta \quad \text{e} \quad \frac{dV}{ds} = a ,$$

(ver a Seção 12 dos *Abhandlung*) ^{447,448} é obtida a seguinte equação:

$$dq = -\frac{a\vartheta}{\mu} \cdot \frac{dt}{t} .$$

A integral dessa equação pode ser escrita como: ⁴⁴⁹

$$q = -\frac{a\vartheta}{2\mu} \cdot \log C^2 t^2 ,$$

onde $C^2 = 1/\vartheta^2$, já que para $t = -\vartheta$ deve ocorrer $q = 0$. Portanto, como $q = ds/dt$:

$$ds = -\frac{a\vartheta}{2\mu} \cdot \log \frac{t^2}{\vartheta^2} \cdot dt .$$

Segue disso por integração:

$$s = \frac{a\vartheta}{\mu} \left(1 - \frac{1}{2} \log \frac{t^2}{\vartheta^2} \right) \cdot t + C' .$$

Como agora $s = 0$ para $t = -\vartheta$, vem que $C' = a\vartheta^2/\mu$, portanto:

$$s = \frac{a\vartheta^2}{\mu} \left(1 + \frac{t}{\vartheta} \left(1 - \frac{1}{2} \log \frac{t^2}{\vartheta^2} \right) \right) .$$

Essas fórmulas, que podem ser escritas como

$$\frac{dq'}{dt} = -\frac{1}{t} ,$$

⁴⁴⁵Weber vai considerar o movimento de uma partícula ao longo de uma linha reta começando no centro da casca esférica. Podemos representar esse movimento como ocorrendo ao longo do eixo x , com $x = 0$ no centro da casca, de tal forma que o caminho ou trajetória $s = x$ possa ter valores positivos ou negativos. Quando $s = \pm R$, a partícula teria alcançado a casca esférica de raio R .

⁴⁴⁶Devido a um erro de impressão, essa expressão apareceu no trabalho original como $\varepsilon = 0$.

⁴⁴⁷[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. IV, pág. 408.

⁴⁴⁸[[Web78a](#), pág. 408 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [[Web21f](#), pág. 158] e com tradução em português na Seção 15.11 do sétimo Tratado principal de Weber sobre Medições Eletrodinâmicas, página 222.

⁴⁴⁹Aquilo que Weber denomina aqui como sendo o “log” de uma grandeza θ , ou seja, $\log \theta$, deve ser entendido como o logaritmo natural de θ tendo como base a constante de Euler, $e = 2,718\dots$, isto é, $\log \theta = \log_e \theta = \ln \theta$. Sua integração pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\int_{q=0}^q dq = -\frac{a\vartheta}{\mu} \int_{t=-\vartheta}^t \frac{dt}{t} = -\frac{a\vartheta}{\mu} [\ln |t|]_{t=-\vartheta}^t = -\frac{a\vartheta}{\mu} \ln \sqrt{\frac{t^2}{\vartheta^2}} ,$$

de tal forma que

$$q = -\frac{a\vartheta}{2\mu} \ln \frac{t^2}{\vartheta^2} .$$

$$q' = -\frac{1}{2} \log \frac{t^2}{\vartheta^2} ,$$

$$s' = 1 + \frac{t}{\vartheta} \left(1 - \frac{1}{2} \log \frac{t^2}{\vartheta^2} \right) ,$$

se a força *não-elétrica* que atua em μ for colocada como $a = g\mu$, e se, além disso, a velocidade q for expressa em partes de $g\vartheta$ como q' , e [a trajetória] s for expressa em partes de $g\vartheta^2$ como s' ,⁴⁵⁰ podem ser usadas agora para a obtenção de todos os movimentos da partícula μ quando a carga ε' [sobre a casca esférica] cresce uniformemente e podem ser representadas de forma tabular, onde e representa a base dos logaritmos naturais.⁴⁵¹

$\frac{t}{\vartheta}$	s'	q'	$\frac{dq'}{dt}$	$\frac{\varepsilon'}{\eta}$
-1	0	0	+1	0
$-e^{-1}$	$1 - 2e^{-1}$	1	+e	$1 - e^{-1}$
$-e^{-2}$	$1 - 3e^{-2}$	2	+e ²	$1 - e^{-2}$
$-e^{-3}$	$1 - 4e^{-3}$	3	+e ³	$1 - e^{-3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	1	∞	$\pm\infty$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
+e ⁻³	$1 + 4e^{-3}$	3	-e ³	$1 + e^{-3}$
+e ⁻²	$1 + 3e^{-2}$	2	-e ²	$1 + e^{-2}$
+e ⁻¹	$1 + 2e^{-1}$	1	-e	$1 + e^{-1}$
+1	2	0	-1	2
+e	1	-1	-e ⁻¹	$1 + e$
+e ²	$1 - e^2$	-2	-e ⁻²	$1 + e^2$

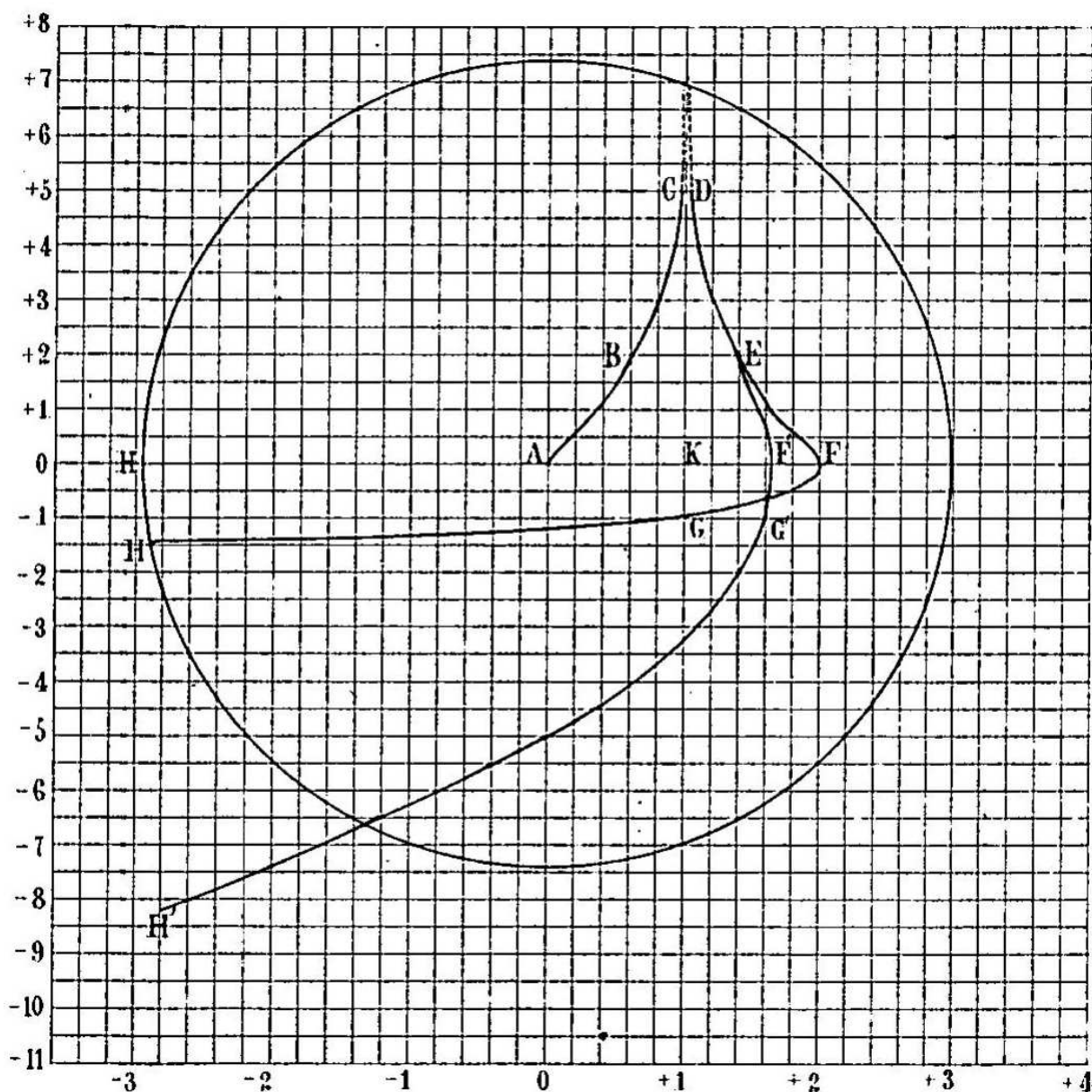
A curva *ABCDEFGH* na próxima Figura representa, de acordo com essa informação, a dependência da velocidade q' em função do comprimento de trajetória s' , ou seja, s' como abscissa e q' como ordenada. Essa curva parte do centro *A* da esfera como ponto inicial das coordenadas até *B* e *C*, se aproximando assintoticamente da *ordenada* para $s' = 1$, retornando então de lá para *D*, *E*, *F*, onde ela intersecta o eixo das abscissas no ponto $s' = 2$, indo então para *G* e *H*, onde s torna-se $= -R$ e μ colide com a casca esférica.⁴⁵²

⁴⁵⁰Weber está assumindo aqui que a força constante a é o peso da partícula de massa μ próxima à superfície da Terra, ou seja, $a = \mu g$, com g sendo a aceleração de queda livre. Além disso, ele está definindo o deslocamento adimensional $s' = s/(g\vartheta^2)$ e a velocidade adimensional $q' = q/(g\vartheta) = (ds/dt)/(g\vartheta)$.

⁴⁵¹Em vez de dq'/dt , a expressão na quarta coluna da primeira linha da próxima Tabela deveria ser a aceleração adimensional dada por:

$$\frac{1}{g} \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{1}{g} \frac{dq}{dt} = \vartheta \frac{dq'}{dt} = -\frac{\vartheta}{t} .$$

⁴⁵² Ordenada q' em função da abscissa s' . Quando a ordenada $q' = 0$, as letras da esquerda para a direita ao longo da abscissa s' são as seguintes: H° , *A*, *K*, F' e *F*. Devido a um erro de impressão, o primeiro ponto H° foi escrito como sendo *H*. Quando a ordenada $q' = -1$, as letras ao longo da abscissa da esquerda para



Podemos ver dessa visão geral que a partícula μ , que teria percorrido a distância $\frac{1}{2}g\vartheta^2$ no tempo ϑ devido à aceleração g proveniente da força *não-elétrica*, percorre o dobro dessa trajetória devido à ação conjunta da força *elétrica*; e que, enquanto sem a força elétrica ela teria atingido a velocidade $g\vartheta$, com a [ação conjunta da] força elétrica ela atinge uma *velocidade infinitamente alta*.

Contudo, com essa *velocidade infinitamente grande* alcançada, a partícula μ não percorre o *menor elemento finito de trajetória*, devido ao fato de que no mesmo instante a *aceleração* dq/dt , que também tornou-se infinitamente grande, muda repentinamente de $+\infty$ para $-\infty$, isto é, muda para uma *desaceleração* infinitamente grande, fazendo com que as *velocidades* sejam iguais durante o mesmo período de tempo antes e depois desse instante, por exemplo, a velocidade q no tempo $t = +\vartheta$ (isto é, após o intervalo de tempo 2ϑ calculado a partir do início do movimento) é igual à velocidade no início, no tempo $t = -\vartheta$, ou seja, $q = 0$, de

a direita são G e G' . Próximo de $q' = -1,5$ e $s' = -3$ temos a letra H , enquanto que perto de $q' = -8,5$ e $s' = -2,8$ temos a letra H' .

modo que a trajetória s , se a casca esférica for grande o suficiente para que s ainda encontre espaço nela, teria crescido novamente em $g\vartheta^2$, ou seja, teríamos $s = 2g\vartheta^2$. A carga ε' teria aumentado para 2η . Contudo, a partir desse instante, com o tempo e a carga [da casca esférica] continuando a crescer, o deslocamento da partícula μ em relação ao centro da esfera diminuiria rapidamente até $s = 0$, e então ficaria negativo até $s = -R$, onde a partícula μ colidiria com a casca esférica no tempo t , que pode ser determinado através da equação

$$-R = g\vartheta^2 \left[1 + \frac{t}{\vartheta} \left(1 - \frac{1}{2} \log \frac{t^2}{\vartheta^2} \right) \right] ,$$

e [atingiria a casca] com a velocidade q obtida a partir da equação $q = [g\vartheta/2] \log[t^2/\vartheta^2]$, após t ter sido determinado.

Até agora assumiu-se que o raio R da esfera é maior do que o maior valor que s alcançou no tempo $t = +\vartheta$, a saber, $2g\vartheta^2$. Se R fosse menor do que esse valor, então é evidente que a partícula μ teria colidido mais cedo contra a casca esférica, a saber, no instante em que $s = R$, que pode ser determinado a partir da equação

$$R = g\vartheta^2 \left[1 + \frac{t}{\vartheta} \left(1 + \frac{1}{2} \log \frac{t^2}{\vartheta^2} \right) \right] .$$

Agora, finalmente, quando não há aumento contínuo da carga elétrica ε' [sobre a casca esférica], como assumido anteriormente, mas quando, ao contrário, essa carga ε' permanece *constante* após ela ter alcançado o valor η e o ultrapassado por qualquer suposto valor arbitrariamente pequeno, então denotamos essa carga constante como $\eta(1 + e^{-n})$, consequentemente, o instante no qual isso ocorre é designado como $t = +e^{-n}\vartheta$, a velocidade da partícula μ nesse instante como $q = ng\vartheta$, e a distância da partícula ao centro da esfera como $s = (1 + (1 + n)e^{-n})g\vartheta^2$. Isso resulta na seguinte equação diferencial:

$$dq = -\frac{ae^n}{\mu} \cdot dt ,$$

e através de sua integração:

$$q = -\frac{ae^n}{\mu} t + C .$$

Agora se o tempo for calculado a partir do instante em que a carga [sobre a casca esférica] tornou-se constante, onde a velocidade $q = ng\vartheta$, fornecendo assim $C = ng\vartheta$, portanto, como [a força constante] a foi colocada $= g\mu$, [obtemos:]

$$q = \frac{ds}{dt} = -ge^n \cdot t + ng\vartheta .$$

Dessa equação a partir de uma segunda integração obtemos:

$$s = ng\vartheta t - \frac{1}{2}ge^n \cdot t^2 + C' ,$$

e nela, como já foi mencionado, para $t = 0$ temos o valor de $s = (1 + (1 + n)e^{-n})g\vartheta^2$, de onde resulta:

$$C' = (1 + (1 + n)e^{-n})g\vartheta^2 ,$$

consequentemente:

$$s = ng\vartheta \cdot t - \frac{1}{2}ge^n \cdot t^2 + (1 + (1+n)e^{-n})g\vartheta^2 .$$

Essa fórmula para o deslocamento s e a fórmula obtida para a velocidade, a saber:

$$q = -ge^n \cdot t + ng\vartheta ,$$

são usadas agora, *com a carga ε' permanecendo constante*, para determinar todos os movimentos da partícula μ . Elas podem ser apresentadas em uma visão tabular, por exemplo, na seguinte Tabela para o caso em que $n = 2$, se for colocado como anteriormente $s/(g\vartheta^2) = s'$ e $q/(g\vartheta) = q'$:

$\frac{t}{\vartheta}$	s'	q'	$\frac{\varepsilon'}{\eta}$
0	$1 + \frac{6}{2e^2}$	2	$1 + \frac{1}{e^2}$
$\frac{1}{e^2}$	$1 + \frac{9}{2e^2}$	1	—
$\frac{2}{e^2}$	$1 + \frac{10}{2e^2}$	0	—
$\frac{3}{e^2}$	$1 + \frac{9}{2e^2}$	-1	—
$\frac{4}{e^2}$	$1 + \frac{6}{2e^2}$	-2	—
$\frac{5}{e^2}$	$1 + \frac{1}{2e^2}$	-3	—
$\frac{6}{e^2}$	$1 - \frac{6}{2e^2}$	-4	—

Essa Tabela pode ser facilmente continuada; contudo, já podemos observar a partir dela, após a carga [sobre a casca esférica] ter ficado constante, do instante $t = 2\vartheta/e^2$ em diante, o deslocamento da partícula μ em relação ao centro da casca diminui e logo torna-se negativo, até que finalmente a partícula μ , quando $s = -R$, colide com a casca esférica, no instante t e com velocidade q determinadas a partir das duas equações a seguir:

$$-R = \left(1 + \frac{3}{e^2}\right)g\vartheta^2 + 2g\vartheta \cdot t - \frac{e^2}{2}g \cdot t^2 ,$$

$$q = 2g\vartheta - e^2g \cdot t .$$

Podemos ver dessa apresentação de todo o processo em seu *contexto*, que não ocorrem de fato nenhuma das consequências “inconsistentes ou absurdas” pelas quais Helmholtz quis refutar a lei fundamental estabelecida.

A curva $ABCDE$ na página 235 representa a dependência da velocidade q em função do deslocamento s da partícula μ em relação ao centro da esfera, *com uma carga ε' crescendo uniformemente*, até o instante em que essa carga torna-se maior do que η , a saber, $= \eta(1 + [1/e^2])$. Essa curva pode agora ser continuada de duas maneiras, *ou para uma carga*

[sobre a casca esférica] *continuando a crescer* uniformemente como antes, que é representada pela curva $EFGH$ e que já foi considerada, ou para uma carga $\varepsilon' = \eta(1 + [1/e^2])$ que permanece *constante* daqui por diante, que está relacionada com as determinações na Tabela que acabamos de mencionar, de acordo com a qual a curva $EF'G'H'$ forma a continuação da curva $ABCDE$.

Nos dois casos a partícula μ desloca-se em uma trajetória contínua, a saber, no primeiro caso ao longo de uma linha reta de A até F e de lá ela vem de volta para A e posteriormente para H° ,⁴⁵³ onde a partícula colide com a casca esférica rígida; no segundo caso, de A em linha reta até F' e daí ela vem de volta para A e H° .

A velocidade da partícula ao longo de sua trajetória sempre muda continuamente nos dois casos, exceto em *um* ponto K , no meio da trajetória AF , onde a velocidade da partícula torna-se infinitamente grande, e ao mesmo tempo o mesmo acontece com o trabalho realizado desde o início do movimento. Entretanto, se esse trabalho realizado for descrito como *positivo*, ele é imediatamente seguido por um trabalho realizado *negativo* que também é infinitamente grande.

Cada um desses dois trabalhos realizados pode ser dividido em duas partes, a saber, a *primeira* [parte], ou [parte] *positiva*, no trabalho realizado no caminho de A até um ponto a uma distância $= [(n+1)/e^n] \cdot g\vartheta^2$ antes de K , e no trabalho realizado ao longo dessa última distância *antes* de $K = [(n+1)/e^n]g\vartheta^2$;⁴⁵⁴ a *última* [parte] ou [parte] *negativa*, no trabalho realizado no caminho *atrás* de $K = [(n+1)/e^n]g\vartheta^2$, e no *restante do caminho até* F ou F' .

Dessas quatro realizações de trabalho, as duas na trajetória $= [(n+1)/e^n]g\vartheta^2$ *na frente* e *atrás* de K são *infinitamente grandes*, mas *opostamente iguais*, enquanto as outras duas são opostamente iguais, mas têm *valores finitos*. Como n agora pode ser considerado tão grande que o [intervalo de] tempo dos dois primeiros trabalhos realizados infinitamente grandes, a saber, $2\vartheta/e^n$, pode ser visto como infinitamente pequeno, então temos dois trabalhos realizados infinitamente grandes, mas opostamente iguais, em um período de tempo infinitamente pequeno, que, como é evidente, não tem ação física nem significado algum.

Em vez do exemplo anterior, em que $n = 2$, pode-se escolher outro exemplo em que n seja muito maior, de modo que a diferença entre a carga constante ε' e η se torne infinitesimalmente pequena; isso não provoca qualquer mudança essencial, e pode-se ver, a partir de toda a apresentação contextualizada do processo, que nenhuma das consequências “inconsistentes e absurdas”, pelas quais Helmholtz queria refutar a lei fundamental estabelecida, realmente ocorre.

⁴⁵³Ver a Nota de rodapé 452 na página 234.

⁴⁵⁴Essa equação apareceu no texto original da seguinte forma: $K = [(n+1)/n^n]g\vartheta^2$. Substituí n^n por e^n .

Capítulo 17

Prefácios de 1892 a 1894 dos Seis Volumes das Obras Coletadas de Wilhelm Weber

Apresento aqui as traduções dos Prefácios dos seis volumes das Obras Coletadas de Wilhelm Weber que foram publicadas entre 1892 e 1894.⁴⁵⁵

17.1 [Voigt, 1892] Prefácio do Primeiro Volume

W. Voigt⁴⁵⁶

Este Primeiro Volume das Obras Coletadas de W. Weber contém trabalhos das áreas de acústica, mecânica, óptica e termodinâmica. A maioria dessas obras data de uma época *anterior* à que Weber foi conduzido por Gauss ao campo de trabalho no qual sua força se desenvolveria plenamente e sua personalidade científica cresceria até atingir a importância que hoje é geralmente reconhecida.

Os tratados coletados aqui são principalmente de interesse histórico; eles contêm apenas parcialmente trabalhos independentes e, mesmo nesses casos, alguns deles devem ser rejeitados como incorretos. Mas em uma edição que tem como objetivo principal ser um memorial de honra ao grande físico, não podem faltar esses marcos do início de seu desenvolvimento.

A ordem cronológica dos tratados não poderia ser o único critério para sua organização, pois muitas vezes separaria obras relacionadas entre si. Em vez disso, pareceu apropriado formar grupos de obras com conteúdo relacionado, introduzir uma ordem cronológica dentro deles e, por sua vez, organizar os próprios grupos nas duas Partes do Volume, aproximadamente de acordo com a data do tratado que abriu os grupos.

A Primeira Parte (Acústica) é aberta pelos tratados I-XIII, escritos sob a influência direta de Chladni, que, em parte, relatam criticamente o trabalho acústico de outros, em parte repetem e continuam os experimentos realizados por eles.⁴⁵⁷ A série termina com uma

⁴⁵⁵Todas as Notas são de minha autoria.

⁴⁵⁶[Voi92] com tradução para o inglês em [Voi24]. Woldemar Voigt (1850-1919) foi um físico alemão.

⁴⁵⁷Ernst Chladni (1756-1827) foi um físico e músico alemão. Ele é especialmente conhecido pelas assim chamadas figuras ou padrões de Chladni, isto é, os modos de vibração sobre uma superfície rígida e elástica. Elas são visualizadas utilizando um pó sobre a superfície em vibração.

biografia de Chladni e um artigo sobre sua acústica.

Uma Segunda Série é formada pelos tratados sobre os tons dos tubos de palheta,⁴⁵⁸ nos quais Weber compartilha observações verdadeiramente novas e fundamentais sobre uma área que quase não havia sido tratada antes, e por várias publicações mais curtas sobre questões individuais de acústica; ela é concluída pela breve pesquisa de toda a acústica escrita em 1835 para o *Universalexikon der Tonkunst* (Léxico Universal de Música).

Anexada a essa Parte está uma das resenhas que Chladni fez à tese de habilitação de seu jovem amigo, impressa no tratado XIV.

Você procurará em vão pela *tese de doutorado* de W. Weber entre os documentos compilados aqui; de acordo com os resultados de minhas investigações, ela não foi impressa e não foi encontrada em forma manuscrita em seu espólio. O título “Theoria efficaciae laminarum maxime mobiliū arctequē tubos aërem sonantem continentes claudentium” (A teoria da eficiência das palhetas altamente móveis e dos tubos contendo ar ressonante) sugere com certeza que ela serviu, em uma forma ampliada, como tese de habilitação.

Se os tratados coletados na Primeira Parte testemunham a ocupação contínua com uma área fechada da física, os tratados compilados na Segunda Parte (mecânica, óptica, termodinâmica) fornecem informações sobre problemas que são tratados mais ocasionalmente e por um período de tempo mais curto.

As sementes para um desenvolvimento maior estão aqui, especialmente nos tratados V-VII, nos quais os fenômenos do efeito elástico retardado⁴⁵⁹ são submetidos a uma investigação exata pela primeira vez, de acordo com um método engenhoso de Gauss.

De particular interesse é também o tratado XVI, no qual o autor compartilha e aplica um método muito útil para observar a diferença entre a dilatação adiabática e isotérmica de corpos sólidos, que ele, no entanto, ainda sob o ponto de vista da antiga teoria do calor, utiliza de uma maneira substancialmente diferente da atual.

Além da correção de alguns erros aritméticos e de impressão óbvios, a presente edição coletada segue estritamente as publicações originais. Com relação à forma, deve-se observar que as citações que se referem a uma passagem no *mesmo* tratado foram simplesmente alteradas de acordo com a nova edição — as citações que se referem a outros tratados de Weber foram mantidas em sua forma original, com exceção da introdução de uma numeração consistente dos volumes dos *Annalen* de Poggendorff;⁴⁶⁰ no último caso, uma referência à passagem correspondente na edição coletada foi adicionada entre colchetes abaixo da página. Outras adições feitas pelo editor são identificadas como tal pelo mesmo símbolo.

Göttingen, julho de 1892.

W. Voigt.

17.2 [Riecke, 1892] Prefácio do Segundo Volume

E. Riecke⁴⁶¹

⁴⁵⁸Em alemão: *Zungenpfeifen*. Essa expressão pode ser traduzida como tubos ou flautas de palheta.

⁴⁵⁹Em alemão: *der elastischen Nachwirkung*. Essa expressão pode ser traduzida como efeito elástico retardado ou residual. Esse efeito foi descoberto por Weber em 1835, [Web35] e [Dör91].

⁴⁶⁰Ver a Nota de rodapé 234 na página 135.

⁴⁶¹[Rie92a] com tradução para o inglês em [Voi24]. Eduard Riecke (1845-1915) foi um físico experimental alemão que estudou com Weber na Universidade de Göttingen, sucedendo-o em 1881.

O Segundo Volume das Obras Coletadas de Wilhelm Weber contém seus trabalhos na área do magnetismo. Gauss havia desenvolvido meios de observação novos e altamente sofisticados para o estudo do magnetismo da Terra e havia mostrado como a força do magnetismo terrestre poderia ser expressa nas unidades gerais de comprimento, massa e tempo, independentemente da intensidade variável da agulha magnética vibrante.⁴⁶² Após sua nomeação para a cátedra de física em Göttingen, Weber participou com entusiasmo e sucesso na continuação do caminho assim aberto. Ele uniu forças com Gauss na publicação dos “Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins” (Resultados das Observações da Associação Magnética), dos quais seis volumes foram publicados de 1836 a 1841.⁴⁶³ Esses volumes não deveriam conter apenas as observações correspondentes dos inúmeros lugares que haviam se juntado à Associação Magnética, suas representações gráficas e as explicações anexadas a elas; mas também deveriam incluir todos os trabalhos relacionados ao amplo tema do geomagnetismo e, assim, fornecer o impulso para novos avanços na ciência. A importância daquilo que Gauss e Weber criaram na década de seu trabalho conjunto vai, de fato, muito além do objetivo que eles inicialmente buscavam. Uma grande parte de nossa atual arte de observação se desenvolveu a partir dos problemas com os quais eles lidaram e, acima de tudo, é mérito de Weber ter estendido os princípios rigorosos introduzidos por Gauss às medições do galvanismo. A maioria dos tratados incluídos neste Segundo Volume das Obras Coletadas são contribuições de Weber para os *Resultate*. As notas explicativas às datas combinadas das observações, que foram escritas por Weber para os últimos quatro volumes, servem aos propósitos diretos da Associação Magnética. Elas são reproduzidas apenas em extratos, contendo comentários que caracterizam toda a atividade da Sociedade [Magnética] ou se referem a resultados importantes das observações. Essas explicações são seguidas pelos ensaios dedicados à descrição do Observatório Magnético de Göttingen e dos instrumentos ali instalados. Eles não são apenas de grande interesse histórico, mas ainda hoje têm importância prática direta devido às teorias dos instrumentos, dos erros e das correções neles contidas. Weber se esforçou com grande sucesso para construir instrumentos para determinar durante as viagens os elementos do magnetismo da Terra que fossem abrangentes e ainda assim garantissem um alto grau de precisão. Vários ensaios são dedicados à descrição desses instrumentos, alguns dos quais ainda usamos atualmente em uma forma pouco modificada, e à apresentação das observações feitas com eles.

As exigências e experiências que surgiram com esse trabalho inevitavelmente levaram a questões de importância mais geral. Isso inclui o estudo da dependência do magnetismo em barra em relação à temperatura, cujos resultados foram confirmados desde então, mas dificilmente ampliados. Dos tratados relacionados à teoria do magnetismo induzido (IX, XX e XXIII deste Volume), podemos considerar o primeiro como o precursor das investigações

⁴⁶²O trabalho de Gauss sobre a medição absoluta da força magnética terrestre foi anunciado na Sociedade Real de Ciências de Göttingen em dezembro de 1832, [Gau32], com traduções para o inglês em [Gau33a], [Gau37] e [Gau21b], ver ainda [Rei02, págs. 138-150]. O artigo original em latim só foi publicado em 1841, embora ele tenha circulado em pequena edição já em 1833, [Gau41] e [Rei19]. Já foram publicadas várias traduções. Existem duas versões em alemão, uma traduzida por J. C. Poggendorff e publicada em 1833, a segunda traduzida por A. Kiel com notas de E. Dorn e publicada em 1894; uma versão em francês por F. J. D. Arago (1786-1853) publicada em 1834; duas versões em russo, uma por A. N. Drašusov publicada em 1836 e outra de A. N. Krylov publicada em 1952; uma versão em italiano de P. Frisiani publicada em 1837; um resumo em inglês foi publicado em 1935, com uma tradução completa em inglês de S. P. Johnson (1995) que foi publicada em 2003 e outra revisada e com Notas adicionais publicada em 2021; além de uma versão em português publicada em 2003: [Gau33b], [Gau34], [Gau36], [Gau39], [Gau94], [Gau35], [Gau52], [Gau75], [Gau03], [Ass03] e [Gau21c]. Ver ainda [Mer84].

⁴⁶³[GW37], [GW38], [GW39], [GW40b], [GW41] e [GW43]. Ver também [GW40a].

apresentadas no tratado XXVIII deste Volume e no terceiro tratado sobre *elektrodynamische Maassbestimmungen* (Medições Eletrodinâmicas). Esse trabalho anterior leva a resultados gerais, tanto mais que Weber parece não estar familiarizado com os aspectos da teoria de Poisson quando o escreveu.⁴⁶⁴ O segundo tratado descreve as ações da força coercitiva, que estão intimamente relacionadas àquelas ações recentemente descritas como “histerese”. No artigo convite de Leipzig, as propriedades magnéticas do aço são explicadas com a suposição de que ele é composto de partes de maior e menor força coercitiva. O tratado sobre atrito magnético ainda contém quase tudo o que sabemos sobre esse assunto atualmente.

Os tratados no campo da magnetoelétricidade são de particular interesse, não apenas por sua própria importância, mas também por sua relação com a [série de tratados sobre as] *elektrodynamische Maassbestimmungen* (Medições Eletrodinâmicas). Eles formam a ponte entre o magnetismo e a eletrodinâmica, área à qual Weber deu uma nova forma por meio de uma série de obras clássicas que marcaram época. Alguns desses tratados podem, por si só, ser considerados com o mesmo direito como pertencentes ao galvanismo ou à eletrodinâmica; eles foram incluídos no presente Volume devido à sua estreita relação com outros trabalhos de conteúdo puramente magnético.

O tratado sobre indução unipolar forma o ponto de partida para sua própria literatura extensa e inúmeras controvérsias. O próprio Weber deu origem a elas. Inicialmente ele explicou o fenômeno com a ajuda de um conceito peculiar, que, no entanto, estava ligado à suposição da existência real de fluidos magnético; mais tarde, ele enfatizou a contradição de sua teoria [anterior da indução unipolar] com as leis da eletrodinâmica e a possibilidade de outra explicação em uma Nota para o terceiro tratado sobre *elektrodynamische Maassbestimmungen* (Medições Eletrodinâmicas), mas sem desenvolver o tema.⁴⁶⁵ A primeira aplicação da indução magnética à medição de resistências galvânicas pode ser encontrada no sétimo tratado deste Volume. O inclinômetro de indução⁴⁶⁶ descrito por Weber já em 1837 também é interessante porque o princípio engenhoso subjacente à sua construção foi usado posteriormente em um dos métodos de Weber de medição absoluta da resistência; e quando, mais tarde, ele deu ao indutor terrestre a forma na qual ele permaneceu essencialmente inalterado desde então como um dos instrumentos mais importantes da física, ele não se limitou a aplicações magnéticas na ilustração do novo método de medição, mas acrescentou a importante prova de como a atenuação pode ser usada como uma medida da sensibilidade de um multiplicador,⁴⁶⁷ o que forneceu uma nova solução para a tarefa fundamental da gal-

⁴⁶⁴Ver a Nota de rodapé 320 na página 178.

⁴⁶⁵[Web52a, Nota de rodapé 1, pág. 536 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21h, Nota de rodapé 59, pág. 67].

⁴⁶⁶Em alemão: *Induktionsinklinatorium*. O inclinômetro, inclinatório ou bússola de inclinação, é um instrumento para medir o ângulo de inclinação de uma bússola em relação à horizontal. Ele consiste essencialmente em uma agulha magnética que pode girar em um círculo vertical graduado ao redor de um eixo horizontal passando pelo centro de gravidade da agulha. O inclinômetro de indução de Weber é um novo instrumento que ele introduziu em 1837, [Web38]. Ele apresentou uma nova maneira de superar os dois principais problemas das bússolas de inclinação, a saber, o efeito da gravidade e a necessidade de inverter a polaridade da agulha, [WSH03].

⁴⁶⁷Um multiplicador é um galvanômetro usado para medir a intensidade da corrente elétrica passando por ele. Dependendo do contexto essa palavra também pode se referir à bobina de um galvanômetro ou a uma bobina genérica com seus enrolamentos ou espiras. Algumas vezes também o multiplicador ou bobina pode ser usado como um indutor de correntes elétricas em outros circuitos ou para produzir torques eletrodinâmicos sobre outros circuitos. O instrumento recebeu esse nome “multiplicador” do químico, físico e matemático alemão Johann Schweigger (1779-1857) que construiu o primeiro galvanômetro em 1820. Ele amplificou o efeito que Oersted observou pela primeira vez em 1820 ao formar uma bobina com várias espiras enroladas

vanometria, a medição absoluta da resistência. A importância desse trabalho para a física experimental não precisa ser enfatizada. O fato de Weber ter reconhecido a importância das forças magneto-elétricas nessa direção em um estágio inicial é evidente em seus ensaios sobre o indutor de rotação e as máquinas magneto-elétricas, que não podem ser considerados sem interesse como os precursores da literatura eletrotécnica que hoje é tão difundida.

Os tratados que tentamos caracterizar brevemente no texto anterior estão impressos em ordem cronológica no presente Volume, com exceção de dois rearranjos exigidos pelo contexto; uma separação em grupos individuais não pareceu conveniente em vista das múltiplas relações entre eles. Tal como no Primeiro Volume, os tratados são impressos estritamente de acordo com a publicação original. As citações que se referem a uma passagem no mesmo tratado foram alteradas de acordo com a nova edição, enquanto as citações que se referem a outros tratados de Weber foram mantidas em sua forma original. No último caso, uma referência à passagem correspondente nas Obras Coletadas foi adicionada abaixo da página. Da mesma forma, as frequentes citações a tratados de Gauss são complementadas por uma referência à edição coletada das obras de Gauss. Essas e todas as outras adições feitas pelo editor são indicadas por colchetes.

Göttingen, julho de 1892.

Eduard Riecke.

17.3 [Heinrich Weber, 1893] Prefácio do Terceiro Volume

Heinrich Weber⁴⁶⁸

O Terceiro Volume contém os tratados publicados por Wilhelm Weber até o final de 1857 nas áreas do galvanismo e da eletrodinâmica, na mesma ordem em que foram publicados. Como resultado desse arranjo, os sete tratados aos quais Weber deu o título comum “Elektrodynamische Maassbestimmungen” (Medições Eletrodinâmicas) aparecem aqui separados uns dos outros, sendo que os quatro primeiros são impressos neste Volume sob os números V, X, XI e XV, enquanto os três últimos estão incluídos no Quarto Volume.

Teria sido desejável unir esses sete tratados de importância fundamental, que se sucedem harmoniosamente e aparecem como um todo completo, em um único Volume. No entanto, a divisão dos tratados em dois Volumes teria sido tão desigual que pareceu aconselhável abster-se de fazer esse agrupamento de todos os sete tratados. Em vez disso, o arranjo estritamente cronológico garantiu que, com apenas algumas exceções, os tratados de conteúdo relacionado se seguissem uns aos outros, dando ao leitor uma visão do desenvolvimento do trabalho de W. Weber nas áreas do galvanismo e da eletrodinâmica.

Os tratados I a IV tratam especificamente da corrente galvânica; em particular, no tratado II, página 9, a unidade de medida absoluta das intensidades de corrente é determinada

ao redor de uma estrutura retangular, no centro da qual estava suspensa uma agulha imantada, [Sch20] e [Sch21d]; [Sch21c] com tradução para o francês em [Sch21a]; e [Sch21b]. Ver também [Chi64] e [LSN21].

⁴⁶⁸[Web93a] com tradução para o inglês em [Voi24]. Heinrich Weber (1839-1928) foi um físico alemão. Ele era sobrinho de Wilhelm Eduard Weber (filho de seu irmão mais velho, o fisiologista Ernst Heinrich Weber (1795-1878)). Ele foi professor de física na Universidade Técnica de Brunswick de 1866 até sua aposentadoria em 1906.

pela primeira vez com precisão, o que Weber provavelmente usou pela primeira vez no tratado sobre atrito magnético (Volume II, páginas 202 e 203).⁴⁶⁹ Os tratados II e IV contêm a teoria do galvanômetro tangente e, no tratado III, o equivalente eletroquímico da água é medido precisamente pela primeira vez com base na introdução da unidade absoluta de intensidade [de corrente].

Sua preocupação simultânea com as correntes galvânicas e os fenômenos magnéticos logo levou Weber a um estudo detalhado das investigações de Ampère,⁴⁷⁰ cujo resultado é apresentado no primeiro tratado publicado sob o título *Elektrodynamische Maassbestimmungen* (Medições Eletrodinâmicas), que é reproduzido aqui no artigo V. Com a ajuda de vários instrumentos recém-inventados por ele, Weber prova a exatidão da lei de Ampère da maneira mais rigorosa e, em seguida, estabelece sua lei fundamental de ação elétrica, pela qual os fenômenos eletrostáticos, eletrodinâmicos e de indução são rastreados até uma base comum.

Nos artigos VII e XI, Weber volta-se para o estudo do diamagnetismo, que logo após sua descoberta por Faraday em 1846 tornou-se de grande importância para a teoria do magnetismo, na medida em que a explicação dos fenômenos diamagnéticos trouxe simultaneamente uma decisão entre as hipóteses até então igualmente válidas sobre a natureza do magnetismo.⁴⁷¹ Weber não só conseguiu comparar a magnitude das forças diamagnéticas e magnéticas, mas também gerar correntes de indução diamagnética e determinar a relação entre sua intensidade e aquela das correntes de indução magnética. Essas investigações deram origem a uma concepção precisa sobre a natureza do magnetismo e do diamagnetismo.

A construção do indutor terrestre, que inicialmente era usado apenas para medições de inclinação [magnética], levou Weber a estabelecer uma unidade de medida absoluta para as forças eletromotrizes. Ao mesmo tempo, porém, isso também forneceu a unidade absoluta para a resistência galvânica com a ajuda da unidade absoluta de intensidade [de corrente] estabelecida anteriormente de acordo com a lei de Ohm.⁴⁷² O tratado X discute detalhadamente as unidades de medida e os métodos de medição de resistência de acordo com a unidade absoluta. Esse sistema de unidades, que se baseia em ações magnéticas, tornou-se geralmente aceito atualmente, com apenas pequenas modificações.

A lei fundamental estabelecida por Weber contém uma constante cujo valor numérico foi determinado por ele em conjunto com Rudolph Kohlrausch e publicado no tratado XV.⁴⁷³ O conhecimento dessa constante torna possível expressar grandezas medidas em unidades magnéticas ou eletrodinâmicas em termos de unidades mecânicas ou vice-versa.

Essas poucas palavras podem ser suficientes para dar uma ideia da riqueza do trabalho intelectual contido nos seguintes tratados, que, além de sua importância teórica, também formam um modelo para a pesquisa experimental. Como nos dois Primeiros Volumes, as observações e citações que não se originam do próprio Weber são indicadas por colchetes; somente no caso de algumas citações, o número da página do texto original foi substituído diretamente pelo número da página correspondente do Volume atual para a conveniência do leitor. Os tratados de Gauss frequentemente citados no texto foram acompanhados por uma referência ao local em que se encontram nas Obras Coletadas de Gauss.

Brunswick, janeiro de 1893.

Heinrich Weber.

⁴⁶⁹[Web41].

⁴⁷⁰Ver a Nota de rodapé 7 na página 16.

⁴⁷¹Michael Faraday (1791-1867). Ver [Far46b] e [Far46c] com tradução para o alemão em [Far46d] e [Far47].

⁴⁷²Ver a Nota de rodapé 200 na página 112.

⁴⁷³[KW57] com tradução para o inglês em [KW21]. Ver também [Ass21e].

17.4 [Heinrich Weber, 1894] Prefácio do Quarto Volume

Heinrich Weber⁴⁷⁴

O Quarto Volume dá continuidade direta ao Terceiro Volume em termos de conteúdo. Ele contém todos os tratados e ensaios no campo do galvanismo e da eletrodinâmica que Wilhelm Weber publicou no período de 1858 a 1880, bem como uma série de tratados e ensaios que foram encontrados em seu espólio. Um ensaio com observações sobre o Observatório Magnético de Munique, que só foi descoberto após a publicação dos três Primeiros Volumes e, portanto, não pôde mais entrar no Segundo Volume, ao qual pertence em termos de conteúdo, também foi incluído como um Apêndice.

Os tratados, com exceção dos que formam o espólio e o Apêndice, foram organizados em ordem cronológica, pelos mesmos motivos que levaram à mesma disposição no Terceiro Volume. Os três últimos dos sete tratados publicados sob o título conjunto “*Elektrodynamische Maassbestimmungen*” (Medições Eletrodinâmicas), dos quais os quatro primeiros foram impressos no Terceiro Volume, podem ser encontrados nos artigos V, VIII e XII, e um oitavo tratado pertencente a eles, que ainda não foi publicado, está incluído como o primeiro tratado do espólio.

Enquanto os quatro primeiros tratados das *Elektrodynamische Maassbestimmungen* (Medições Eletrodinâmicas) tratam principalmente da pesquisa das forças recíprocas que as partículas elétricas exercem umas sobre as outras ou sobre outros corpos, os tratados seguintes, incluídos neste Volume, tratam principalmente dos movimentos das partículas elétricas causados por essas forças. Foi uma coincidência curiosa que, quando Wilhelm Weber estava prestes a publicar seu primeiro artigo sobre esse assunto, Kirchhoff, que estava trabalhando nas leis das correntes galvânicas na mesma época, já havia apresentado ao editor dos *Annalen für Physik und Chemie* um tratado sobre o mesmo assunto pouco tempo antes.⁴⁷⁵ A observação de J. C. Poggendorff incluída no tratado número VI, à qual o próprio Wilhelm Weber se refere (*Obras de Wilhelm Weber*, Volume IV, página 130), refere-se a isso. Foi somente seis anos mais tarde que Wilhelm Weber publicou seu tratado sobre oscilações elétricas (artigo número V), no qual ele combinou o conteúdo do tratado retirado anteriormente com uma investigação experimental abrangente, da qual Rudolph Kohlrausch participou até sua morte em 1858. Nesse tratado, Wilhelm Weber introduziu pela primeira vez a massa dos fluidos elétricos e, em seguida, desenvolveu as equações para o movimento da eletricidade nos fios, especialmente naqueles de formato circular, de acordo com as leis gerais da mecânica, sem presumir, como fez Kirchhoff, que a lei de Ohm também é válida nos casos em que é diferente a intensidade da corrente nos elementos individuais da corrente, estando sujeita a mudanças rápidas.

Nos tratados seguintes VIII e XII da série *Elektrodynamische Maassbestimmungen* (Medições Eletrodinâmicas), para os quais os tratados VII, IX e, acima de tudo, o tratado X “*Ueber die Bewegung der Elektrizität in Körpern von molekularer Konstitution*” (Sobre o

⁴⁷⁴[Web94a] com tradução para o inglês em [Voi24].

⁴⁷⁵[Kir57b] com traduções para o inglês em [Kir57a] e [Kir21b], [Pog57] com tradução para o inglês em [Pog21], e [Web64] com tradução para o inglês em [Web21c]. Ver ainda [Ass21a], [Ass21e] e a Seção 4.1 na página 21.

Movimento da Eletricidade em Corpos de Constituição Molecular),⁴⁷⁶ publicado nos *Annalen* de Poggendorff, devem ser considerados como elos de conexão, W. Weber entra em investigações baseadas no princípio da energia. Em particular, no tratado VIII, é atentamente examinada a relação da lei fundamental da ação elétrica com o princípio da energia, e é demonstrado que não há contradição entre a lei fundamental e o princípio da energia, como foi alegado por outros, a menos que sejam feitas suposições sobre estados iniciais cuja compatibilidade com a natureza existente exija prova especial. No início dos tratados X e XII, Wilhelm Weber passa então a considerações detalhadas do princípio da energia, mostrando que o princípio da energia formulado da maneira usual, para o qual Carl Neumann havia chamado a atenção, é capaz de extensões que, dependendo de sua natureza, levam a resultados diferentes.⁴⁷⁷ A extensão que Wilhelm Weber fornece a esse princípio consiste na suposição de que a energia de interação e a força viva relativa entre duas partículas são grandezas homogêneas cuja soma é sempre igual a uma constante. Se essa extensão for válida, então as condições iniciais não podem mais ser consideradas completamente arbitrárias; pelo contrário, todas as suposições que contradizem o princípio subjacente são excluídas desde o início. Wilhelm Weber também deduz o princípio da energia comum a partir do princípio da conservação da energia formulado por ele e mostra como a lei do potencial eletrodinâmico resulta de seu princípio e da lei do potencial eletrostático.

A partir das leis do movimento de duas partículas sujeitas apenas à sua interação mútua, que já foram desenvolvidas no tratado VIII, casos especiais são discutidos em detalhes no artigo XII. Também são de particular importância as investigações realizadas no tratado X, sobre o movimento da eletricidade em corpos de constituição molecular, no qual são levadas em consideração as ações galvânicas, magnéticas e térmicas que podem ocorrer simultaneamente em corpos ponderáveis. Ao fazer isso, Wilhelm Weber abandona sua visão anterior da corrente galvânica como uma corrente dupla⁴⁷⁸ e, seguindo as considerações anteriores (*Obras* de Wilhelm Weber, Volume III, página 403), fornece uma ideia clara da geração de energia térmica pela corrente galvânica e da causa da resistência em condutores metálicos.

Os tratados mencionados anteriormente são agora organicamente unidos pelo primeiro tratado incluído no espólio, que ainda não foi publicado e que, de acordo com o título dado a ele pelo próprio W. Weber, é o oitavo dos sete tratados publicados sob o título “Elektrodynamische Maassbestimmungen” (Medições Eletrodinâmicas). Wilhelm Weber pode muito bem ter suspeitado que não seria capaz de entrar nos detalhes do vasto campo de fenômenos abordados nesse tratado e, portanto, as seções individuais aparecem como indicadores dos caminhos que levam a uma maior expansão do campo de pesquisa.

Com base na suposição de que todas as moléculas ponderáveis são meros compostos de quantidades iguais de eletricidade positiva e negativa, e que a força atrativa de quantidades iguais de eletricidade de tipo diferente é maior do que a força repulsiva das mesmas quantidades de eletricidade de mesmo tipo, Wilhelm Weber passa da área da teoria pura da eletricidade para aquela dos corpos ponderáveis. Ele mostra como os vários tipos de moléculas ponderáveis, especialmente aquelas dos elementos, podem ser consideradas como compostas de moléculas elétricas, além de mostrar como os condutores metálicos diferem dos

⁴⁷⁶[Web75] com tradução para o inglês em [Web24g]. Esse trabalho está traduzido no Capítulo 13.

⁴⁷⁷[Web75] com tradução para o inglês em [Web24g] e tradução para o português no Capítulo 13; [Web78a] com tradução para o inglês em [Web21f] e tradução para o português no Capítulo 15. Ver ainda a Seção 4.1 na página 21.

⁴⁷⁸Ver o Capítulo 5 (A Evolução da Concepção de Weber sobre uma Corrente Elétrica — Começando com uma Corrente Dupla até Chegar em uma Corrente Simples) de [AWW14], [AWW11] e [AWW18].

corpos vítreos e cristalinos e como, com base nessa diferença, a propagação da eletricidade e do calor nos primeiros corpos ocorre de uma maneira diferente, ou seja, por movimento balístico, do que a propagação da luz e do calor nos últimos corpos, ou seja, por movimento ondulatório. De acordo com a visão de Wilhelm Weber apresentada aqui, o éter luminoso é um meio estático composto de moléculas elétricas positivas.

O manuscrito original deste tratado contém, além das Seções incluídas aqui, quatro outras Seções cujos títulos são fornecidos em uma Nota anexada ao final do tratado. Como o próprio Wilhelm Weber excluiu posteriormente essas Seções do tratado, foi necessário abster-se de publicá-las. Deve-se observar, no entanto, que todo o espólio foi entregue à Biblioteca Real de Göttingen para ser guardado, preservando, assim, a possibilidade de se obter informações sobre o conteúdo dessas Seções.

Além desses tratados sobre a natureza da eletricidade e dos corpos ponderáveis, o presente Volume contém mais dois trabalhos de particular importância, a saber, o tratado III “Zur Galvanometrie” (Sobre a galvanometria) e o tratado XIV, publicado em cooperação com Zöllner, sendo este o último trabalho experimental de Wilhelm Weber.⁴⁷⁹ No primeiro, são discutidos os métodos de medições absolutas de resistência, é fornecida uma teoria completa e a construção mais vantajosa de galvanômetros, e os métodos de cópia são submetidos a um exame detalhado, enquanto o último tratado lida com o estabelecimento de um condutor padrão cuja resistência pode ser determinada a qualquer momento de acordo com unidades absolutas, o que deve facilitar a aplicação geral de unidades absolutas em eletrodinâmica. Wilhelm Weber não conseguiu mais realizar a comparação originalmente planejada da resistência desse condutor padrão com a unidade prática de resistência geralmente aceita atualmente, o *Ohm*.

Além do tratado mencionado anteriormente sobre *elektrodynamische Maassbestimmungen* (Medições Eletrodinâmicas), o espólio também contém ensaios e tratados, alguns dos quais originários de períodos muito diferentes da vida de Wilhelm Weber. Alguns deles foram, sem dúvida, destinados à publicação, embora talvez em uma forma diferente, mas, por razões desconhecidas, não foram publicados; outros, por outro lado, são transcrições, entrelaçadas com várias observações que Wilhelm Weber fez rapidamente para apoiar sua memória, cuja compilação, muitas vezes, só pôde ser realizada com a superação de grandes dificuldades. Desses, deve ser particularmente enfatizado aqui o tratado maior “Über Massbestimmungen” (Sobre medições), o qual não perdeu sua importância até hoje, após a aceitação geral do sistema absoluto de unidades. Embora esse tratado só tenha sido escrito depois de 1864, as anotações póstumas de Wilhelm Weber de 1834, mostram que naquela época ele já havia reduzido em termos das unidades absolutas as grandezas físicas mais importantes utilizando as unidades fundamentais de comprimento, tempo e massa. O ensaio “über die Einrichtung des Bifilargalvanometers” (Sobre a configuração do galvanômetro bifilar) é, de qualquer forma, de origem muito anterior ao acréscimo feito a ele em 1864, que trata da medição simultânea do geomagnetismo e da intensidade de corrente em unidades absolutas. Por fim, os dois ensaios “Bemerkungen zu der Abhandlung: Untersuchungen über den galvanischen Lichtbogen, von Edlund” (Comentários sobre o artigo: ‘Investigação sobre o arco elétrico’ do Prof. E. Edlund) e “elektroskopische und elektrodynamische Wirkungen der freien Elektrizität geschlossener Ketten” (Ações eletroscópicas e eletrodinâmicas da eletricidade livre em circuitos fechados) levam a uma área diferente, pois ambos se referem à carga elétrica na superfície de condutores nos quais a eletricidade está em movimento.

⁴⁷⁹[Web62] com tradução para o inglês em [Web24d]; e [WZ80]. Johann Karl Friedrich Zöllner (1834-1882) foi um astrofísico alemão.

Evitamos publicar alguns dos ensaios que também foram encontrados no espólio, em parte porque eles datam do início da vida de Wilhelm Weber e não oferecem mais nada de novo atualmente, e em parte porque seu conteúdo foi incluído em tratados posteriores. Para confirmar isso, os documentos podem ser listados e seu conteúdo essencial indicado.

O primeiro ensaio aqui pertencente, intitulado “Der Dämpfer” (O amortecedor), foi planejado para ser incluído no *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins* (Resultados das Observações da Associação Magnética), de 1837. Depois de explicar a finalidade de um amortecedor, é considerada em mais detalhes a ação de um anel metálico fechado como multiplicador e depois como indutor e, finalmente, quando as duas ações são combinadas, como amortecedor. O artigo conclui com um cálculo da redução da vibração da agulha [magnetizada] e uma comparação da ação de amortecimento com a ação de uma haste estabilizadora. Um segundo ensaio, “über die Einrichtung der Multiplikatoren” (Sobre a configuração dos multiplicadores), é o precursor das considerações detalhadas apresentadas posteriormente no tratado “Zur Galvanometrie” (Sobre a galvanometria). O terceiro ensaio, “über ein neues Galvanometer” (Sobre um novo galvanômetro), trata da configuração, instalação e teste do galvanômetro bifilar e seu uso para medições absolutas de intensidade [de corrente] e para determinar o equivalente eletroquímico de oxigênio e hidrogênio, uma aplicação que Wilhelm Weber discute em detalhes no ensaio sobre o equivalente eletroquímico da água (*Obras de Wilhelm Weber*, Volume III, página 13). O quarto ensaio, com apenas algumas páginas, “die absolute Messung der in einer Leidener Flasche vorhandenen freien Elektrizität,” lida com a medição absoluta da eletricidade livre presente em uma garrafa de Leiden. A medição baseia-se em experimentos de oscilação e deflexão de uma placa de Franklin carregada e suspensa de forma móvel, sobre a qual outra placa de Franklin carregada atua à distância. Essa tarefa foi resolvida de maneira mais completa no tratado *Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere Zurückführung der Stromintensität auf mechanisches Maass* (Medições eletrodinâmicas, especialmente atribuindo unidades mecânicas às medidas de intensidade de corrente) (*Obras de Wilhelm Weber*, Volume III, página 618). Por fim, a conclusão é um documento composto por 11 páginas in-quarto sem título, que contém a proposta de produzir uma unidade de medida arbitrária para a resistência galvânica a fim de facilitar as medições galvânicas, especialmente para aplicações técnicas, e distribuir um grande número de cópias desse padrão. Entretanto, essa unidade prática de medição [de resistência] deve ser medida com precisão em unidades absolutas. Em seguida, é feita a dedução da equação de oscilação de uma agulha magnética em um multiplicador, se a autoindução for levada em consideração.

Os escritos compilados neste Volume sob o título “Espólio” só podem ser entregues ao público com todas as reservas, uma vez que deve parecer duvidoso que Wilhelm Weber os tenha destinado à impressão, especialmente na forma em que foram encontrados no espólio. Embora fosse óbvio fazer alterações na redação e na apresentação em vários lugares, como o próprio Wilhelm Weber sem dúvida teria feito no caso de publicação, isso não foi feito em todos os casos, como já indica suficientemente o título espólio “manuscrito”. Todas as citações e adições que não se originam do próprio Wilhelm Weber também são indicadas neste Volume por colchetes, assim como havia ocorrido nos Volumes anteriores.

Brunsvique, janeiro de 1894.

Heinrich Weber.

17.5 [Eduard Riecke, 1893] Prefácio do Quinto Volume

Eduard Riecke⁴⁸⁰

Três dos filhos do teólogo de Wittenberg, Michael Weber, se dedicaram ao estudo das ciências naturais e a estreita comunidade intelectual que os uniu ao longo de suas vidas foi comemorada em duas obras que marcaram época, uma das quais, a *Wellenlehre* (Teoria Ondulatória), foi o resultado do trabalho conjunto de Wilhelm Weber e seu irmão mais velho, Ernst Heinrich, e a outra, *Mechanik der Gewerzeuge* (Mecânica do Aparelho de Caminhada [Humana]), surgiu do trabalho conjunto de Wilhelm e seu irmão mais novo, Eduard.⁴⁸¹ No Prefácio da *Wellenlehre*, os irmãos relatam uma razão externa casual para suas investigações. No entanto, pode-se presumir que a atenção deles já havia se concentrado nos problemas da teoria ondulatória em um estágio anterior. Em primeiro lugar, por meio de seu relacionamento amigável com Chladni, o fundador da acústica experimental, a quem o trabalho é dedicado.⁴⁸² O irmão mais velho, no entanto, que já era professor em Leipzig na época do trabalho conjunto, também tinha as aplicações fisiológicas da teoria ondulatória como pano de fundo de seus pensamentos. Dois anos após a publicação do trabalho conjunto, ele publicou o primeiro dos tratados que o tornaram o fundador de uma teoria física exata da circulação sanguínea.

A *Wellenlehre* (Teoria Ondulatória) é uma das obras clássicas da literatura física, sobretudo por causa de suas belas e fundamentais investigações sobre as ondas de fluidos incompressíveis. O que é dito sobre isso na primeira parte principal da obra deve ser lido ainda hoje por qualquer pessoa que queira se familiarizar mais profundamente com essa parte da hidrodinâmica. As numerosas observações e as medições realizadas com meios tão simples e da maneira mais significativa ainda contêm estímulo suficiente para outras investigações experimentais e teóricas. A tentativa peculiar de construir uma ponte entre as leis descobertas do movimento ondulatório e os fenômenos dos vórtices estava, é claro, fadada ao fracasso, já que o progresso posterior da ciência revelou uma diferença essencial entre os dois tipos de movimento. Contudo, no contexto geral os três parágrafos sobre a origem dos vórtices não poderiam ser suprimidos.

A segunda parte principal da obra trata das ondas em relação ao som e à luz; ela é menos extensa que a primeira e não é mais tão diretamente relevante quanto a primeira parte. A alusão no parágrafo 249 a uma conexão entre o som de uma corda e a forma que ela assume alternadamente à medida que vibra foi substituída por uma teoria abrangente de sobretons e sons vocálicos; foram criados novos métodos de observação, novos auxílios instrumentais de grande perfeição e os resultados da pesquisa se tornaram mais acessíveis em geral por meio de excelentes obras. Entretanto, a *Wellenlehre* (Teoria Ondulatória) de Weber sempre contém uma série de observações fundamentais, mesmo na parte dedicada à acústica, à qual toda apresentação de acústica ainda se refere. Com relação a isso, lembramos as medições da velocidade das ondas em cordas, as investigações sobre os tubos de palheta⁴⁸³ e a ocorrência do silêncio nas proximidades de diapasões vibratórios.

⁴⁸⁰[Rie93] com tradução para o inglês em [Voi24].

⁴⁸¹Ernst Heinrich Weber (1795-1878) foi um dos fundadores da fisiologia experimental. Eduard Friedrich Weber (1806-1871) foi um anatomista e fisiologista alemão. Ver [WW25] e [WW36] com tradução para o inglês em [WW92].

⁴⁸²Ver a Nota de rodapé 457 na página 239.

⁴⁸³Ver a Nota de rodapé 458 na página 240.

Apenas alguns parágrafos são dedicados à teoria ondulatória da luz; a óptica estava muito distante do trabalho experimental dos autores e Fresnel só havia aberto a série de suas obras alguns anos antes; no mesmo ano da *Wellenlehre*, apareceu pela primeira vez nos *Annalen der Physik* de Poggendorff a tradução de um tratado de Fresnel.⁴⁸⁴

Nesta nova edição da *Wellenlehre*, foram aplicados os mesmos princípios que na reimpressão dos tratados coletados nos Volumes anteriores. O símbolo para o início de um novo parágrafo foi omitido em alguns lugares da obra original, por exemplo, no parágrafo 3 e no parágrafo 143, e foi usado duas vezes o símbolo para o parágrafo 219; esses erros podem ser facilmente corrigidos com o uso do índice detalhado impresso antes da obra. Houve várias discrepâncias entre o texto e as figuras, com partes das figuras ou letras individuais faltando. Na maioria dos casos, não havia dúvidas sobre as pequenas alterações e acréscimos que precisavam ser feitos para obter consistência. Em todos esses casos, o texto ou a figura foi alterado ou complementado de acordo com as circunstâncias. Uma Nota nas páginas 96 e 98 chama a atenção para um desvio importante que só poderia ser completamente eliminado por uma mudança mais radical no texto. Na Figura 15, as letras que faltam não foram adicionadas porque as indicações necessárias não foram fornecidas; incidentalmente, isso não afeta a compreensão do relevante parágrafo 94. As medidas de comprimento em pés parisienses não foram convertidas para o sistema métrico. As observações não se referem à determinação de constantes físicas absolutas, mas à medição de fenômenos cujo curso depende das condições específicas do experimento. Por outro lado, foi adicionado o valor em gramas para os pesos que são fornecidos em peso medicinal, que é estranho aos físicos; uma visão geral das unidades do peso medicinal usadas pelos autores é dada em uma Nota na página 128. Os títulos das colunas do original tiveram de ser alterados devido às diferenças na composição tipográfica. Como regra geral, o conteúdo de toda a seção é apresentado na página da esquerda, enquanto o título da página da direita segue a versão original o mais próximo possível. Os extratos das obras de Laplace, La Grange, Gerstner, Poisson e Cauchy contidos na terceira seção foram comparados com os originais e o texto e as fórmulas foram melhorados em alguns pontos.⁴⁸⁵ Os acréscimos e comentários do editor estão indicados entre colchetes. No índice, os números entre colchetes indicam as páginas relevantes do original.

Göttingen, março de 1893.

Eduard Riecke.

17.6 [Merkel e Fischer, 1894] Prefácio do Sexto Volume

F. Merkel e O. Fischer⁴⁸⁶

O presente Sexto Volume das obras coletadas de Weber foi editado por W. Braune, em Leipzig, que não só era ligado com a família Weber, mas também tinha que ser considerado o editor mais profissional da “*Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge*” (Mecânica do

⁴⁸⁴Augustin-Jean Fresnel (1788-1827). Ver [Fre25].

⁴⁸⁵Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Franz Josef von Gerstner (1756-1832), Siméon Denis Poisson (1781-1840) e Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).

⁴⁸⁶[MF94] com tradução para o inglês em [Voi24]. Friedrich Sigmund Merkel (1845-1919) foi um anatomista alemão. Otto Fischer (1861-1916) foi um fisiologista e matemático alemão.

Aparelho de Caminhada Humana) em termos de todo o seu campo de trabalho.⁴⁸⁷ Como em vários outros trabalhos, ele pediu a Otto Fischer, em Leipzig, que colaborasse com ele. No entanto, W. Braune foi afastado da ciência por uma morte prematura antes que qualquer um deles pudesse começar a trabalhar.⁴⁸⁸ Ele foi substituído por um membro titular da *Königl. Gesellschaft der Wissenschaften* (Sociedade Real de Ciências [de Göttingen]), Fr. Merkel, em Göttingen, que agora ficou encarregado da edição juntamente com O. Fischer.

Outubro de 1893.

Fr. Merkel (em Göttingen) e O. Fischer (em Leipzig).

⁴⁸⁷[WW36] com tradução para o inglês em [WW92].

⁴⁸⁸Christian Wilhelm Braune (1831-1892) foi um anatomista alemão. Ele era genro do irmão mais velho de Wilhelm Weber, o médico Ernst Heinrich Weber (1795-1878).

Parte II

Espólio Manuscrito

Capítulo 18

[Weber, 1894a, ME8] Medições Eletrodinâmicas, Oitava Memória, Relacionada Especialmente com a Conexão entre a Lei Fundamental da Eletricidade e a Lei da Gravitação

Wilhelm Weber^{489,490,491}

⁴⁸⁹[Web94d] com traduções para o inglês em [Web08] e [Web21b].

⁴⁹⁰As Notas de Wilhelm Weber são representadas por [Nota de Wilhelm Weber:]; as Notas de Heinrich Weber, o Editor do Volume 4 das *Obras* de Weber, são representadas por [Nota de Heinrich Weber:]; todas as outras Notas são de minha autoria.

⁴⁹¹Essa é a última das oito Memórias principais de Weber com o título geral de *Medições Eletrodinâmicas*. Essa oitava Memória, que se acredita ter sido escrita na década de 1880, só foi publicada postumamente em 1894.

18.1 Redução das Diferenças Qualitativas dos Corpos a Diferenças Quantitativas, de Acordo com a Suposição de que Todas as Moléculas Ponderáveis São Compostas de Moléculas Elétricas Positivas e Negativas

Dos *corpos ponderáveis* do universo nos estados de agregação sólido, líquido e gasoso, foram distinguidos *corpos imponderáveis*, especialmente a *substância luminosa*, a *substância térmica*, *duas substâncias elétricas* e *duas substâncias magnéticas*,⁴⁹² e toda a física foi dividida a seguir na mecânica dos corpos ponderáveis *sólidos*, *líquidos* e *gasosos* e nas teorias da *luz*, do *calor*, da *eletricidade* e do *magnetismo*.⁴⁹³

Contudo, no desenvolvimento dessas doutrinas, a teoria do *magnetismo* juntamente com sua extensão na teoria do diamagnetismo, foi totalmente absorvida pela *teoria da eletricidade*, de tal forma que foi descartada a *suposição de duas substâncias magnéticas especiais*. Da mesma forma, a distinção entre um *éter luminífero* para raios de luz e um *éter de calor* para raios de calor foi abandonada;⁴⁹⁴ o que permanece, no entanto, é um *éter* para raios de luz e calor e uma *substância térmica* como transportadora de calor no interior de corpos ponderáveis, especialmente condutores metálicos de calor.

É interessante acompanhar este desenvolvimento da pesquisa física considerando:

Em primeiro lugar, que a *teoria do magnetismo* só pode ser absorvida pela teoria da eletricidade com a *suposição de partes móveis no interior* de todos os corpos magnéticos e magnetizáveis, a saber, *moléculas elétricas positivas*, que formam *correntes moleculares* ao redor de moléculas ponderáveis carregadas com eletricidade *negativa* dentro de todos os corpos magnetizáveis.⁴⁹⁵

⁴⁹²Em alemão: *Lichtstoff*, *Wärmestoff*, *zwei elektrische und zwei magnetische Stoffe*. A palavra alemã *Stoff* pode ser traduzida como substância, material ou matéria. Portanto, *Lichtstoff* pode ser traduzida como luz, substância luminosa ou material luminoso. A palavra *Wärmestoff* pode ser traduzida como substância térmica, material térmico, matéria térmica ou calórico. As duas substâncias elétricas podem ser as eletricidades positiva e negativa, os fluidos elétricos positivo e negativo, as partículas eletrizadas positivamente e negativamente, ou as cargas elétricas positiva e negativa. As duas substâncias magnéticas são os fluidos magnéticos Norte e Sul, ou os fluidos magnéticos austral e boreal. De acordo com Möller, [Möl20, Tabela 1.2], Antoine Lavoisier (1743-1794) apresentou uma nomenclatura francesa das substâncias simples, ou que ainda não haviam sido decompostas, incluindo *Lumière* e *Calorique*. Essas duas expressões foram traduzidas em alemão como *Lichtstoff* e *Wärmestoff*. Em inglês elas foram traduzidas como *light* e *caloric*. Na época de Lavoisier, a luz (*Lichtstoff*, *lumière*) e o calórico (*Wärmestoff*, *calorique*) eram assumidos como sendo substâncias materiais por muitos cientistas.

⁴⁹³Ver ainda a Nota de rodapé 44 na página 32.

⁴⁹⁴Em alemão: *Lichtäther* e *Wärmeäther*. Essas expressões podem ser traduzidas como éter luminífero, éter luminoso, éter de luz ou éter da luz; e éter de calor ou éter térmico. Ver ainda a Nota de rodapé 376 na página 203.

⁴⁹⁵Os sinais das cargas estão invertidos nessa suposição de Weber quando comparados com a concepção atual. Para Weber a partícula de carga positiva orbita ao redor de um corpo central carregado negativamente. Hoje em dia consideramos um elétron carregado negativamente orbitando ao redor de um núcleo carregado positivamente. Deve ser observado que Weber está adiante de seu tempo em 30 ou 40 anos ao propor um átomo elétrico. A concepção atual só passou a ser aceita na década de 1910. Além disso, o próprio Weber ficou em dúvida se deveríamos ter partículas leves carregadas positivamente orbitando ao redor de núcleos pesados carregados negativamente, como afirmado aqui, ou se deveríamos ter, ao contrário, partículas leves carregadas negativamente orbitando ao redor de núcleos pesados carregados positivamente. O elétron só foi descoberto ao final da década de 1990. Ver ainda o livro *O Modelo Planetário de Weber para o Átomo*

Em segundo lugar, observando ainda que a *teoria do galvanismo e do calor*, para ser igualmente absorvida pela teoria da eletricidade, deve também pressupor a presença de partes móveis no interior de todos os condutores galvânicos e condutores de calor; mas que não é necessário que haja *partes diferentes* cujo movimento *dentro de corpos ponderáveis* produza *magnetismo*, *outras partes* cujo movimento produza *galvanismo* e ainda outras partes cujo movimento produza *calor*, mas que *as mesmas partes*, dependendo da diferença em seus movimentos, produzam *magnetismo*, *galvanismo* e *calor*, algumas vezes juntos, algumas vezes separadamente, e que essas partes móveis dentro dos corpos ponderáveis são *moléculas de uma eletricidade*, que deve ser chamada de *eletricidade positiva*.

Em terceiro lugar, deve ser considerado que os movimentos dessas moléculas elétricas positivas ao redor das *moléculas ponderáveis* dos corpos com carga elétrica negativa formam órbitas fechadas *ou* órbitas espirais que diferem apenas ligeiramente das órbitas circulares com raios *periodicamente* crescentes e depois decrescentes, *ou* finalmente órbitas espirais com raios continuamente crescentes, por meio das quais elas finalmente se transformam em trajetória balística,⁴⁹⁶ efetuando assim a transferência dessa molécula elétrica de *uma molécula ponderável* para *uma outra molécula ponderável vizinha*, o que é parcialmente a base da *condução de calor* e parcialmente a formação de *correntes galvânicas* em condutores metálicos.

Em quarto lugar, deve também notar-se que por meio da *indução magnética ou eletrodinâmica externa*, podem ser excitadas correntes circulares em torno das *moléculas ponderáveis* de um corpo, ou as correntes circulares já existentes podem ser *reforçadas, enfraquecidas ou direcionadas de forma diferente*.

É evidente que *todos os condutores metálicos de calor e eletricidade* pertencem àqueles corpos ponderáveis em torno de cujas moléculas as *moléculas elétricas positivas* se movem em órbitas circulares, mas com raio crescente, que fazem uma transição para trajetória balística e, assim, são levadas das moléculas *ponderáveis* em torno das quais giram para as *moléculas ponderáveis* vizinhas; que, por outro lado, todos os corpos transparentes, como vidro e cristais,⁴⁹⁷ pertencem aos *corpos ponderáveis* em torno de cujas moléculas as moléculas elétricas positivas se movem, mas apenas em *círculos mais estreitos, sem passar para o movimento balístico* (que, portanto, não são nem condutores de calor nem condutores de eletricidade), enquanto a maior parte restante do espaço entre as *moléculas ponderáveis* (como o espaço cósmico)⁴⁹⁸ é preenchida com moléculas elétricas positivas que estão em movimento balístico ou movimento ondulatório, formando o éter luminífero.

No que diz respeito às correntes moleculares formadas por *moléculas elétricas* [orbitando] ao redor de *moléculas ponderáveis*, é óbvio que uma força atrativa atuando a partir das moléculas ponderáveis é necessária para a continuação dessas correntes circulares, e a única pergunta é: de onde vem essa força atrativa? É necessária uma carga elétrica oposta nas moléculas ponderáveis para isso, ou a molécula ponderável localizada em cada centro pode exercer essa atração por si só? Acontece que esta atração pode ser exercida pela molécula *ponderável* por si só, sem qualquer carga elétrica adicional, tanto em uma molécula elétrica *positiva* orbitando em torno dela quanto em uma molécula elétrica *negativa* [orbitando em torno dela], desde que as duas suposições seguintes, que foram expressas pela primeira vez

disponível em inglês, português e alemão, [AWW11], [AWW14] e [AWW18].

⁴⁹⁶Ver a Nota de rodapé 319 na página 174.

⁴⁹⁷Em alemão: *Krystalle*. No contexto desse artigo, essa palavra pode ser entendida como “cristais” ou “sólidos transparentes” em geral.

⁴⁹⁸Ver a Nota de rodapé 398 na página 213.

de forma clara e definitiva por Zöllner,⁴⁹⁹ sejam atendidas, a saber:

1. *Que todas as moléculas ponderáveis são meros compostos de quantidades iguais de eletricidade positiva e negativa, e que*
2. *A força de atração de quantidades iguais de eletricidade de tipos diferentes é maior do que a força de repulsão de quantidades iguais de eletricidade do mesmo tipo.*⁵⁰⁰

Estas duas suposições formam a base para a *teoria dos corpos ponderáveis*, segundo a qual a *lei da gravitação* que se aplica a todos estes corpos surge como uma consequência necessária da lei elétrica fundamental.

É fácil ignorar o grande significado que a confirmação das suposições acima teria para toda a física, se considerarmos a extraordinária diversidade das *diferenças qualitativas* dos corpos ponderáveis, que poderiam ser rastreadas até meras diferenças *quantitativas* derivadas da lei elétrica fundamental.

18.2 Dedução da Lei da Gravitação a partir da Lei Fundamental da Eletricidade de acordo com Zöllner

A dedução da lei da gravidade a partir da lei fundamental da ação elétrica de acordo com Zöllner precisa de um desenvolvimento mais aprofundado para que se possa continuar a construir sobre ela.

De acordo com Zöllner, assume-se que toda molécula ponderável consiste em uma ou mais moléculas de eletricidade positiva e uma ou mais moléculas de eletricidade negativa, das quais a primeira é denotada por $+e$ ou $+ne$, a última por $-e$ ou $-ne$. O valor numérico de e (exceto o sinal) é usado para determinar a *quantidade de eletricidade* de uma molécula, independentemente do *tipo de eletricidade*, que pode ser positiva ou negativa, porque e depende apenas da escolha da *unidade de comprimento* e da *unidade de força*, já que $e \cdot e$ denota a *força repulsiva* de uma molécula elétrica positiva ou negativa $\pm e$ em uma molécula igual na unidade de distância.⁵⁰¹

Além disso, supõe-se que a quantidade e , que é chamada de *quantidade de eletricidade* e se distingue da *massa* ε da molécula, é *igual para todas as moléculas elétricas* e que, conseqüentemente, a molécula ponderável composta de $+e$ e $-e$ é sempre *neutra*, ou seja, ela se comporta exatamente da mesma maneira em relação a uma [partícula com carga] $+e$ e a uma [partícula com carga] $-e$. O mesmo se aplica a moléculas ponderáveis compostas por $+2e$ e $-2e$, ou por $+3e$ e $-3e$, e assim por diante.

⁴⁹⁹Johann Karl Friedrich Zöllner (1834-1882), [Zöl178]. Ver também [Zöl182] e [Mos36] com tradução para o inglês em [Mos66].

⁵⁰⁰Isso é, supondo que a força atrativa entre as partículas eletrizadas com cargas $+e$ e $-e$ seja maior do que a força repulsiva entre as partículas eletrizadas com cargas $+e$ e $+e$, sendo também maior do que a força repulsiva entre as partículas eletrizadas com cargas $-e$ e $-e$.

⁵⁰¹De acordo com o sistema absoluto de unidades de Gauss e Weber, a força de uma partícula eletrizada com carga $\pm e$ sobre uma outra partícula igual com carga $\pm e$, separada da primeira por uma distância r , é dada por ee/r^2 . Logo, quando $r = 1$ unidade de medida de comprimento, a força é dada por e^2 .

Dessa igualdade das quantidades de eletricidade, que, de acordo com Zöllner, se aplica a *todas as moléculas elétricas simples*, na qual se baseia a *neutralidade das moléculas ponderáveis* formadas por um número igual de moléculas elétricas positivas e negativas, segue-se que todas as moléculas *elétricas positivas* têm a *mesma massa*, assim como todas as moléculas *elétricas negativas* têm a *mesma massa*; mas isso não significa, de forma alguma, que *as massas das moléculas elétricas positivas e negativas sejam iguais*, mas que a decisão sobre a igualdade ou desigualdade de suas massas deve ser deixada para a experiência, seja por meio da realização de medições diretas de massa ou indiretamente pela investigação de sua conexão com outros fenômenos mensuráveis.

A força com a qual duas moléculas ponderáveis, cada uma delas composta por $+e$ e $-e$, agem uma sobre a outra resulta da *lei fundamental da ação elétrica*⁵⁰² como a soma de quatro forças, que as duas partes constituintes $+e$ e $-e$ de *uma molécula ponderável* exercem sobre as duas partes constituintes $+e$ e $-e$ da *outra molécula ponderável* a partir de qualquer distância r , em repouso ou movimento relativo. Ou seja, *em primeiro lugar*, as duas *forças repulsivas* entre as *moléculas elétricas do mesmo tipo*⁵⁰³ contidas nas moléculas ponderáveis:

a *força repulsiva* entre $+e$ e $+e$

$$= \frac{ee}{r^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2r}{c^2} \frac{d^2r}{dt^2} \right),$$

a *força repulsiva* entre $-e$ e $-e$

$$= \frac{ee}{r^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2r}{c^2} \frac{d^2r}{dt^2} \right).$$

Em segundo lugar, as duas *forças de atração* entre as *moléculas elétricas de tipos diferentes* contidas nas mesmas moléculas ponderáveis, que, de acordo com a suposição de Zöllner,

⁵⁰²O que Weber chama de *lei fundamental da ação elétrica* é a expressão que ele introduziu em 1846 para a força entre duas partículas eletrizadas com cargas e e e' separadas por uma distância r , isto é:

$$\frac{ee'}{r^2} \left[1 - \frac{a^2}{16} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{a^2}{8} r \frac{d^2r}{dt^2} \right],$$

ver [Web46] com tradução parcial para o francês em [Web87] e traduções completas para o inglês em [Web07] e [Web21d]. Em 1852 ele substituiu a constante $a^2/16$ por $1/c^2$ obtendo:

$$\frac{ee'}{r^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2}{c^2} r \frac{d^2r}{dt^2} \right],$$

ver [Web52b, pág. 366 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21e]. Na formulação de Weber a força entre as partículas dependia não apenas da distância r entre elas, mas também da *velocidade relativa* e da *aceleração relativa* entre elas, isto é, de dr/dt e de d^2r/dt^2 . Essa constante c que Weber introduziu em 1852 representa a velocidade relativa uniforme entre as duas partículas para que a força entre elas vá a zero de acordo com sua lei. A constante c de Weber, conhecida durante o século XIX como a *constante de Weber*, não é a mesma grandeza que hoje em dia também é representada pela letra c e cujo valor é $c = 2,998 \times 10^8$ m/s. A constante c de Weber é dada por $\sqrt{2}$ vezes a constante c de hoje em dia, isto é, $c_{Weber} = 4,24 \times 10^8$ m/s. A *constante de Weber*, c , foi medida pela primeira vez por Weber e Kohlrausch entre 1854 e 1856. Eles obtiveram $c = 4,39 \times 10^8$ m/s. Ver [Web55] com tradução para o inglês em [Web21i]; [WK56] com traduções para o inglês em [WK03] e [WK21], e tradução para o português em [WK08]; e [KW57] com tradução para o inglês em [KW21]. Ver também [Ass21e].

⁵⁰³Em alemão: *gleichartig elektrischen Moleküle*. Isto é, partículas eletrizadas com cargas de mesmo sinal.

devem ser maiores, na proporção de $1 : 1 + \alpha$, a saber,

a *força atrativa* entre $+e$ e $-e$

$$= -(1 + \alpha) \frac{ee}{r^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2r}{c^2} \frac{d^2r}{dt^2} \right) ,$$

a *força atrativa* entre $-e$ e $+e$

$$= -(1 + \alpha) \frac{ee}{r^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2r}{c^2} \frac{d^2r}{dt^2} \right) .$$

Isto resulta em *um valor negativo da força de repulsão* (isto é, uma atração) entre as *duas moléculas ponderáveis*, cada uma das quais consiste em uma [partícula com carga] $+e$ e uma [partícula com carga] $-e$, nomeadamente o valor

$$-2\alpha \frac{ee}{r^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2r}{c^2} \frac{d^2r}{dt^2} \right) ,$$

em que o valor desconhecido de α pode ser determinado igualando a força anterior, da qual α é um fator, à *força gravitacional* conhecida exercida entre si pelas duas moléculas ponderáveis.

Supõe-se aqui que as duas *moléculas elétricas* pertencentes a uma *molécula ponderável* sempre permanecem a uma distância muito pequena uma da outra.

Se denotarmos agora com V ao *potencial* das duas moléculas ponderáveis e, consequentemente, sua *força repulsiva* com

$$\frac{dV}{dr} = -2\alpha \frac{ee}{r^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2r}{c^2} \frac{d^2r}{dt^2} \right) ,$$

isso resultará em um *potencial*

$$V = -2\alpha \frac{ee}{r^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{dr^2}{dt^2} \right) .$$

Se, além disso, denotarmos a massa de $+e$ por ε e a massa de $-e$ por $a\varepsilon$, obteremos a aceleração de *uma* molécula ponderável na direção r , $= 1/\varepsilon \cdot [dV/dr]$, e a [aceleração] da *outra* [molécula ponderável] na direção oposta $= 1/a\varepsilon \cdot [dV/dr]$; portanto, a aceleração relativa da primeira molécula em relação à segunda

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{1+a}{a\varepsilon} \cdot \frac{dV}{dr} .$$

Multiplicando essa equação por $2dr$, obtemos a seguinte equação diferencial:

$$2 \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d^2r}{dt^2} = 2 \frac{1+a}{a\varepsilon} dV ,$$

e por integração desde $r = r_0$ até $r = r$, se r_0 representa o valor de r para o qual $[dr/dt] = 0$,

$$\frac{dr^2}{dt^2} = \left(1 + \frac{1}{a} \right) \cdot \frac{4\alpha ee}{\varepsilon} \left[\frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{dr^2}{dt^2} \right) - \frac{1}{r_0} \right] ,$$

ou, quando $dr^2/dt^2 = c^2u^2$ e quando é definida a constante

$$\frac{4(1+a)}{a\varepsilon} \cdot \alpha ee = c^2\rho ,$$

então

$$u^2 = \rho \left[\frac{1}{r} (1 - u^2) - \frac{1}{r_0} \right] ,$$

a mesma equação encontrada na Sétima Memória sobre *Medições Eletrodinâmicas*, pág. 668,^{504,505} para duas moléculas elétricas de tipos diferentes e e e' , exceto que aqui, onde se trata da interação de moléculas *ponderáveis*, o fator 2α foi adicionado ao valor de ρ , sendo $-e$ e $a\varepsilon$ aplicados no lugar de e' e ε' .^{506,507}

Portanto, disso resulta para a interação entre duas moléculas relativamente em repouso, que consistem em *quantidades iguais* de eletricidade positiva e negativa, a mesma lei como para duas moléculas sujeitas à lei da gravitação para todas as distâncias contra as quais ρ pode ser considerada como desaparecendo; somente para *distâncias moleculares*, para as quais esse não é o caso, surgem desvios da lei de Newton,⁵⁰⁸ que, se confirmados, serviriam como a melhor prova de que as moléculas ponderáveis *realmente* consistem em *quantidades iguais* de eletricidade positiva e negativa.

Tais *distâncias moleculares* são agora particularmente importantes para *moléculas ponderáveis de gás*, de acordo com a *teoria dinâmica dos gases*. Maxwell (“On the Dynamical Theory of Gases — Sobre a Teoria Dinâmica dos Gases,” *Philos. Transact.*, Vol. 157, Parte

⁵⁰⁴[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. IV, pág. 385.

⁵⁰⁵[Web78a, pág. 385 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21f] e tradução para o português no Capítulo 15. Ver, em particular, a página 204.

⁵⁰⁶[Nota de Wilhelm Weber:] Da equação dada anteriormente, na qual a velocidade u é expressa em partes da velocidade c conhecida pela lei elétrica fundamental, ou seja, de

$$u^2 = \rho \left(\left[\frac{1}{r} \right] (1 - u^2) - \frac{1}{r_0} \right) ,$$

obtém-se

$$u = \pm \sqrt{\left[\frac{\rho}{r_0} \right] \cdot \left[\frac{r_0 - r}{r + \rho} \right]} ,$$

ou seja, para cada distância r obtemos dois valores opostamente iguais de u , a saber, um *positivo* para o caso de afastamento mútuo as moléculas, e um *negativo* no caso de aproximação. Se considerarmos aqui $r_0 - r = s$ como um *espaço de queda* a partir do repouso, em que uma molécula ponderável é representada pela massa da Terra que se imagina estar concentrada em um ponto, a outra molécula pela pedra em queda, e u como a velocidade v de queda da pedra expressa em partes de c , ou seja, $cu = v$, obtemos

$$\frac{v^2}{s} = \frac{\rho c^2}{[r_0(r_0 + \rho)]} ,$$

ou seja, a *lei da queda de Galileu*, na qual a constante

$$\frac{\rho c^2}{[r_0(r_0 + \rho)]}$$

tem o significado da *constante* normalmente denotada por $2g$ na lei de queda de Galileu.

⁵⁰⁷Galileu Galilei (1564-1642) foi um astrônomo e físico italiano. Sua lei de queda livre foi apresentada no livro *Duas Novas Ciências*. Ver [Gal54] e [Gal85].

⁵⁰⁸Ver a Nota de rodapé 29 na página 27.

I, pág. 49 e seguintes)⁵⁰⁹ já descobriu que a lei de reflexão e espalhamento⁵¹⁰ das moléculas de gás em movimento balístico durante seus encontros, que é necessária para explicar o comportamento dos gases de acordo com esta teoria (que não pode ser explicado com base na lei da gravitação de Newton), pode ser baseada em uma força repulsiva proporcional à quinta potência da distância entre as moléculas, que deve ser assumida para o propósito dessa explicação, mas esta suposição não pode ser justificada de nenhuma outra forma. — Contudo, qualquer suposição arbitrária desse tipo é agora completamente eliminada se todas as moléculas ponderáveis e, conseqüentemente, todas as moléculas de gás, forem compostas de *quantidades iguais de eletricidade positiva e negativa*, porque para essas moléculas a lei da gravitação se aplica apenas a distâncias maiores, enquanto que para distâncias moleculares a *lei da reflexão e espalhamento* surge de maneira semelhante àquela para duas moléculas *elétricas de mesmo tipo* em movimento balístico que se encontram, de acordo com a teoria desenvolvida na Sétima Memória sobre *Medições Eletrodinâmicas*, Seção 7.^{511,512}

O que merece atenção especial nessa interação entre *duas moléculas ponderáveis* formadas por quantidades iguais de eletricidade positiva e negativa, é que *forças iguais*, ou seja, *forças de atração*, são exercidas por uma molécula exerce sobre as *duas componentes* da outra [molécula], tanto na componente positiva quanto na negativa, cuja soma fornece a *força gravitacional* exercida por uma molécula sobre a outra.

Em virtude da força atrativa exercida por cada molécula *ponderável*, não apenas sobre outra molécula *idêntica*, mas também sobre cada uma de suas duas *componentes*, todas aquelas moléculas ponderáveis que *primeiro* entraram em contato com moléculas *elétricas positivas* as teriam ligado a si mesmas como *satélites elétricos positivos*, por outro lado, outras moléculas ponderáveis exatamente idênticas que primeiro entraram em contato com *moléculas elétricas negativas*, as teriam ligado como *satélites elétricos negativos*, após o que *todas as moléculas ponderáveis* se dividiriam em três classes, que poderiam ser distinguidas como *ponderáveis positivas*, *ponderáveis negativas*, e [*ponderáveis*] *neutras*, das quais as últimas seriam moléculas ponderáveis que ainda não atraíram nenhum satélite para si.⁵¹³

Se todos esses satélites permanecessem sempre conectados às moléculas ponderáveis da mesma forma, eles teriam que ser considerados como pertencentes a elas, de acordo com o que *suas massas teriam que ser adicionadas à massa da molécula ponderável* à qual eles pertencem, e a força exercida pelos satélites de *duas* moléculas ponderáveis um sobre o outro, bem como a força exercida por cada um dos dois satélites sobre cada uma das duas moléculas ponderáveis à qual ele não pertence, teria de ser adicionada ou subtraída da *força gravitacional entre o par de moléculas* de acordo com a diferença de sinal.

⁵⁰⁹[Max67]. Ver [AW03] para uma discussão de todas as citações feitas por Weber em relação aos trabalhos de Maxwell.

⁵¹⁰Em alemão: *Gesetz der Zurückwerfung und Zerstreuung*. Ver a Nota de rodapé 388 na página 210.

⁵¹¹[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. IV, pág. 389.

⁵¹²[Web78a, Seção 7, pág. 389 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21f, Seção 7]. Ver, em particular, a Seção 15.7 do Capítulo 15 da tradução em português desse trabalho.

⁵¹³Ou seja, Weber está introduzindo aqui a noção íons positivos, íons negativos e moléculas neutras eletricamente. Todas as moléculas dessas três classes teriam peso. Ver ainda a Nota de rodapé 197 na página 108.

18.3 Sobre a Inadequação de Experimentos Diretos para Decidir Se, Dadas as Mesmas Quantidades de Eletricidade, a Força Atrativa entre Duas Moléculas Elétricas de Tipos Diferentes É Realmente Maior do que a Força Repulsiva entre Duas Moléculas Elétricas de Mesmo Tipo

Podem ser constituídos condutores metálicos, por exemplo, esferas ocas de cobre, carregados com quantidades iguais de eletricidade positiva ou negativa, e as forças repulsivas ou atrativas exercidas por dois deles à mesma distância podem ser medidas com grande precisão. Se a precisão dessas medições não fosse limitada, é óbvio que seria possível decidir se a *força atrativa entre condutores com cargas de tipos diferentes* é maior ou não do que a *força repulsiva entre condutores com cargas de mesmo tipo*.

Os instrumentos e experimentos mais precisos que foram realizados com o propósito de medições semelhantes foram descritos na Quarta Memória sobre *Medições Eletrodinâmicas*,^{514,515} e a questão é, portanto, se os mesmos instrumentos também poderiam ser usados para realizar as medições para decidir a pergunta anterior.

Com essa balança de torção, conforme descrito, é possível medir tanto as *forças repulsivas* entre *duas esferas com cargas elétricas de mesmo tipo* quanto a *força atrativa* entre duas esferas com cargas *elétricas de tipos opostos*; mas é fácil ver que, no último caso, se uma esfera tiver carga positiva e a outra carga negativa, a *igualdade de intensidade* das duas cargas só poderá ser testada com precisão pela descarga completa quando elas entrarem em contato uma com a outra. Portanto, para garantir a *mesma intensidade de carga* imediatamente antes da descarga, o que é essencial aqui, pode-se usar apenas simultaneamente *duas balanças de torção totalmente idênticas*, carregando a esfera giratória de uma balança de torção *positivamente* e a [esfera giratória] da outra [balança de torção] *negativamente*. Entretanto, a esfera giratória de cada balança de torção é acompanhada por uma *esfera fixa estacionária* completamente idêntica, que foi tocada pela esfera giratória durante o carregamento, garantindo assim que ambas as esferas de cada par tenham a mesma carga. Agora, a intensidade da carga do par carregado *positivamente* pode ser diferente daquela do par carregado *negativamente*; no entanto, esta diferença pode ser determinada com precisão medindo as suas *forças repulsivas*. Se essas forças repulsivas entre as [esferas] carregadas positivamente forem iguais às [forças repulsivas] entre as [esferas] carregadas negativamente, segue-se que *os valores absolutos dessas cargas positivas e negativas serão iguais*.

Essas duas *esferas estacionárias* também devem estar firmemente conectadas uma à outra por uma *haste de goma-laca bem isolada*, e essa haste de goma-laca deve ter um pino transversal fixo em seu centro, em torno do qual possa ser girada de modo que, após meia rotação, as duas esferas estacionárias tenham trocado de lugar, de modo que as distâncias das duas esferas estacionárias em relação às esferas giratórias das duas balanças de torção permaneçam inalteradas.

Se as cargas iguais da esfera giratória e da esfera fixa estacionária da *primeira balança de torção* forem designadas por $+e$ e a distância entre elas for representada por r , e as mesmas

⁵¹⁴[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. III, pág. 670.

⁵¹⁵[KW57] com tradução para o inglês em [KW21], ver também [WK68].

quantidades para a *segunda balança de torção* por $-e'$ e r' , então *antes da troca das esferas estacionárias*, obteremos as duas *forças repulsivas* f e f' , medidas com as duas balanças de torção, iguais a ee/r^2 e $e'e'/r'^2$; *depois da troca das esferas estacionárias*, entretanto, as *forças atrativas* g e g' medidas serão iguais a $-(1 + \alpha) \cdot ee'/r^2$ e $-(1 + \alpha)e'e'/r'^2$, resultando na razão entre o produto das duas *forças repulsivas medidas* e o produto das duas *forças atrativas medidas*, sendo dada por $ff' : gg' = 1 : (1 + \alpha)^2$, de acordo com a qual α pode ser determinado pelas grandezas medidas $ff'gg'$, ou seja, $\alpha = \sqrt{gg'/ff'} - 1$.

Contudo, mesmo com a maior perfeição das *balanças de torção* fabricadas para essas medições e a maior precisão na execução de todas as medições, não será possível provar com certeza, para cargas iguais, uma diferença na magnitude da *força atrativa de cargas elétricas de tipos diferentes* em relação à magnitude da *força repulsiva de cargas elétricas de mesmo tipo*, porque essa diferença é muito pequena.^{516,517}

Se, no entanto, todas as medições feitas no futuro, mesmo com os instrumentos mais perfeitos, mostrarem que o valor de α é muito pequeno para permitir uma determinação segura, restaria ainda um outro fator contido na lei fundamental da ação elétrica, que poderia ser usado para testar e confirmar a dedução de Zöllner da lei da gravitação a partir da lei fundamental da ação elétrica, a saber, o fator

$$\left(1 - \left[\frac{1}{c^2} \right] \left[\frac{dr^2}{dt^2} \right] + \left[\frac{2r}{c^2} \right] \left[\frac{d^2r}{dt^2} \right] \right) ,$$

para o qual seria de grande interesse a prova de que ainda é mensurável sua influência no movimento de alguns corpos celestes, mesmo que muito pequena.

C. Seegers⁵¹⁸ foi o primeiro a lidar com esse assunto no trabalho *De motu perturbatio-nibusque planetarum secundum legem electrodynamicam Weberianam solem ambientium* —

⁵¹⁶[Nota de Wilhelm Weber:] Se, portanto, todas as medições realizadas até mesmo com as *balanças de torção* mais perfeitas realmente mostrarem que o valor de α é muito pequeno para permitir uma determinação confiável a partir dessas observações, a questão ainda permaneceria se não é possível determinar a magnitude de α com base em *outros fenômenos e observações*, por exemplo, com base nos fenômenos e observações tão diversos e altamente interessantes apresentados pelos *radiômetros* de Crookes.

Ainda não se sabe exatamente a diferença entre a parte frontal e traseira das hélices desses radiômetros, o que é essencial e necessário para que o radiômetro possa ser acionado por raios de luz. Sem diferença, ainda que muito pequena, entre os dois lados das hélices, seja na sua natureza ou forma (convexa ou côncava), não ocorre rotação.

Seria agora possível, por exemplo, que a *diferença necessária* entre a parte da frente e a parte de trás de cada hélice nos radiômetros de Crookes, se baseasse em uma *diferença elétrica*, por exemplo que a parte da frente fosse mais *positiva eletricamente*, e a parte traseira fosse *negativa eletricamente*, e que o feixe de luz causasse a rotação agindo como um condutor carregado positivamente, que *repele a parte frontal eletricamente positiva* de uma hélice voltada para ele e *atrai a parte traseira eletricamente negativa* da outra hélice voltada para ele.

Se este fosse o caso, é claro que seria necessário apenas conectar um segundo par de hélices ao primeiro par, que seria girado junto com o primeiro em torno do mesmo eixo vertical. Se o segundo par estivesse verticalmente acima do primeiro, mas voltado para o lado oposto ao raio de luz, então com simetria perfeita nenhuma rotação ocorreria se a *força atrativa* de cargas elétricas *de tipos diferentes*, com a *mesma intensidade de carga*, fosse igual à força repulsiva de cargas elétricas de mesmo tipo; mas a rotação ocorreria se a força atrativa de *cargas elétricas de tipos diferentes*, com a mesma intensidade de carga, fosse maior que a força repulsiva de *cargas elétricas de mesmo tipo*.

Com a extraordinária precisão e sensibilidade de que os radiômetros são capazes, pode-se esperar realmente observar o *efeito rotacional* desse excesso de atração, por menor que seja, e determinar a magnitude de α a partir dele.

⁵¹⁷O radiômetro de Crookes também é chamado de moinho de luz. Ver [Cro74] e [Woo66].

⁵¹⁸Carl Wilhelm Seegers, de Munique. Ver [See64] com tradução para o alemão em [See24].

Sobre o movimento e as perturbações dos planetas quando se movem em torno do Sol de acordo com a lei eletrodinâmica de Weber. Scripsit C. Seegers, Gott. 1864, sendo que em seguida o Prof. Scheibner em Leipzig encontrou oito anos mais tarde,⁵¹⁹ que, se o valor numérico da constante de Weber c fosse mantido, uma diferença poderia ser observada, no máximo, no movimento de Mercúrio, pois aqui seria produzida uma mudança secular no periélio de 6,73 segundos de arco [por século]. — Finalmente, Tisserand, em 30 de setembro de 1872, apresentou um trabalho para a Academia Francesa, “Sur le mouvement des planetes autour du Soleil d’après la loi electrodynamique de Weber — Sobre o Movimento dos Planetas ao Redor do Sol de Acordo com a Lei Eletrodinâmica de Weber.” *Compt. rend.* 1872, 30 de setembro,⁵²⁰ onde ele encontrou o valor de 6,28 segundos [de arco por século] para a variação secular do periélio no caso de Mercúrio, e o valor de 1,32 segundos [de arco por século] para Vênus. Por menores que sejam essas correções, ainda é possível confirmá-las ou refutá-las através de observações precisas.

Para comparar a *lei da gravitação deduzida de acordo com Zöllner da lei fundamental da ação elétrica*, de acordo com a qual duas moléculas ponderáveis iguais, cada uma das quais consiste em uma [partícula com carga] $+e$ e uma [partícula com carga] $-e$ (cada uma das quais exerceria a unidade de força em uma molécula igual a ela em repouso relativo na unidade de distância), exercem uma sobre a outra a qualquer velocidade e aceleração relativa uma *força atrativa*

$$= 2\alpha \frac{ee}{r^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2r}{c^2} \frac{d^2r}{dt^2} \right) ,$$

com a *lei* de Newton, segundo a qual *duas massas ponderáveis iguais* m , expressas em partes da massa que exerce sobre outra massa na unidade de distância a unidade de força de aceleração, exercem uma sobre a outra uma *força de atração*

$$= \frac{mm}{r^2} ,$$

deve-se acrescentar também que, se n denota o número de moléculas ponderáveis compostas de uma [partícula com carga] $+e$ e uma [partícula com carga] $-e$, que estão contidas na *mesma unidade de massa* segundo a qual m é expresso, [obteremos] $2\alpha nnee/r^2 = mm/r^2$, resultando em

$$n = \frac{m}{e} \sqrt{\frac{1}{2\alpha}} .$$

⁵¹⁹O resultado de W. Scheibner foi apresentado por Zöllner, [Zöl72, pág. 334], [Zöl76a, pág. 216] e [Zen21, pág. 46]. O trabalho de Scheibner só foi publicado em 1897, [Sch97].

⁵²⁰[Tis72] com traduções para o inglês em [Tis17a], [Tis21] e [Tis24a]; [Tis90] com traduções para o inglês em [Tis17b] e [Tis24b]; e [Tis96, Cap. XXVIII, Seções 225 e 226, págs. 499-503]. Esse trabalho de 1872 de Tisserand está traduzido no Capítulo 11. Ver também o Capítulo 10.

18.4 Preenchimento Elétrico do Espaço, Especialmente Através da Existência de um Éter Constituído Apenas por Moléculas Elétricas de Mesmo Tipo, o Éter Luminífero, em Todos os Espaços Não Ocupados por Corpos Ponderáveis. Diversidade dos Corpos Ponderáveis

A suposição da existência de um *éter imponderável* constituído apenas por moléculas elétricas de mesmo tipo, distribuídas em todos os espaços que não são ocupados por *corpos ponderáveis*, está, como já mencionado na Seção anterior, essencialmente ligada à suposição de que todas as *moléculas ponderáveis* são compostas de moléculas elétricas positivas e negativas, em *quantidades iguais*. Pois disso decorreria que, se no mundo as moléculas elétricas negativas não existissem na mesma quantidade que as moléculas elétricas positivas, o *excedente de moléculas elétricas positivas* (além dos *satélites* possivelmente existentes de moléculas ponderáveis mencionados no final da primeira Seção, que, no entanto, podem ser formados pelos *dois tipos* de moléculas elétricas, sem que haja qualquer razão para a maioria de um tipo) deve necessariamente ser distribuído em todos os espaços ou intervalos não ocupados por corpos ponderáveis e que, como resultado das repulsões, reflexões e espalhamentos mútuos em todos os seus encontros, elas sempre deveriam estar *distribuídas quase uniformemente*.

Se, no entanto, cada molécula *ponderável* contiver *quantidades iguais* de eletricidade *positiva e negativa*, que podem ser rotuladas como $+e$ e $-e$, a *igualdade das quantidades* não implica, de forma alguma, a *igualdade das massas*, que devem ser diferenciadas, e, portanto, a massa da *quantidade* $+e$ pode ser rotulada como ε e a massa da *quantidade* $-e$ pode ser rotulada como $a\varepsilon$.

Se, no entanto, as duas *quantidades iguais* de duas moléculas elétricas de tipos diferentes $+e$ e $-e$ puderem se combinar para formar uma molécula ponderável, não haverá união *em um ponto*, mas, por mais que as duas moléculas se aproximem uma da outra, elas sempre permanecerão separadas uma da outra, girando uma em torno da outra; ambas, que juntas têm a massa $(1 + a)\varepsilon$, no entanto, sempre permanecerão juntas em um espaço muito pequeno, que não muda se a velocidade angular permanecer inalterada, de modo que uma certa *densidade* $d = [(1 + a)/v] \cdot \varepsilon$ pode ser atribuída a essa *molécula ponderável*.⁵²¹

Se essa união de *todas* as moléculas *elétricas negativas* com moléculas *elétricas positivas* tivesse realmente ocorrido, todas as moléculas *ponderáveis* resultantes ocupariam um determinado *espaço*, e todo o espaço restante estaria vazio, a menos que uma das duas eletricidades, que pode ser considerada *positiva*, estivesse presente em excesso considerável. No caso desse *excesso*, entretanto, todo o espaço restante seria preenchido pelas moléculas *repulsivas* desse excesso de eletricidade, distribuídas uniformemente por toda parte.

Todas essas moléculas elétricas que preenchem uniformemente o espaço vazio do mundo são chamadas de *éter imponderável*, enquanto todas as moléculas que estão *conectadas em pares* e reduzidas a um espaço mais estreito formam o mundo corporal *ponderável*, de acordo com o qual, como todas as moléculas têm *massa*, as *massas ponderáveis* e as *massas imponderáveis* no mundo devem ser diferenciadas umas das outras.

⁵²¹Seja v o volume ocupado pela molécula ponderável composta por duas moléculas de cargas opostas enquanto giram uma ao redor da outra. A densidade de massa d dessa molécula ponderável é então dada por $d = [(1 + a)/v] \cdot \varepsilon$, sendo $(1 + a)\varepsilon$ a massa da molécula ponderável.

A *lei da gravitação* também foi chamada de *lei da atração de massas indiferentes*, mas isso não se justificaria. Pois se também existem moléculas elétricas positivas que não estão combinadas com moléculas elétricas negativas para formar moléculas *ponderáveis*, ou seja, que não pertencem ao mundo de *corpos ponderáveis*, mas que também têm *massa*, então a *lei da gravitação* de Newton não se aplicará às *massas dessas últimas moléculas*, mas [valerá] uma lei completamente diferente, a saber, a *lei fundamental da interação elétrica*, segundo a qual nem sempre ocorre atração, mas com a mesma frequência ocorre repulsão, e a validade da lei da gravitação deve ser limitada às massas dessas moléculas elétricas positivas e negativas *conectadas em pares*, que foram chamadas de *moléculas ponderáveis*. Essas *moléculas elétricas positivas*, que existem separadamente das moléculas elétricas negativas e preenchem, em distribuição uniforme, o espaço vazio de corpos ponderáveis, formam o chamado *éter* — éter luminífero.

Se a *lei da gravitação* não se aplica nem às moléculas elétricas positivas por si só, nem às moléculas negativas por si só, mas a todas as *moléculas ponderáveis* formadas pela combinação desses dois tipos de moléculas, então é óbvio que, como todas as propriedades das moléculas *combinadas* devem ser baseadas nas propriedades das moléculas *não combinadas*, a lei da gravitação para todas as moléculas ponderáveis deve ser baseada na lei geral da interação elétrica, como já foi demonstrado na Seção 18.2.

Porém, se todos os corpos ponderáveis fossem realmente meros compostos de moléculas elétricas positivas e negativas, a questão seria como a *variedade e a diversidade infinitas* de todos os corpos ponderáveis poderiam ser explicadas, dada a sua composição essencialmente idêntica. A *razão para todas essas diferenças* só poderia ser encontrada no diferente *número, agrupamento espacial e energia cinética* das moléculas elétricas de ambos os tipos unidas em grupos menores, que não precisam estar sujeitos a nenhuma mudança devido a influências externas. A influência do *número* e do *agrupamento*, desde que estes permanecessem inalterados, seria mais fácil de observar e determinar do que a influência das diferentes *energias cinéticas* das moléculas unidas em um grupo agindo umas sobre as outras, cujas leis ainda não foram completamente desenvolvidas a partir da lei fundamental conhecida, mesmo quando limitadas a apenas três moléculas.

18.5 Classificação das Moléculas Materiais de Acordo com a Composição e a Capacidade de Separação

Se houver agora dois tipos de partículas materiais *simples*, a saber, partículas simples *elétricas positivas* e partículas simples *elétricas negativas*, então é possível que, ao combinar várias partículas elétricas de um tipo entre si ou do outro tipo entre si, ou mesmo de partículas de um tipo com partículas de outro tipo, sejam formados muitos tipos de moléculas de *composição* diferente e, antes de tudo, *moléculas indivisíveis*.⁵²²

Em primeiro lugar, deve-se presumir que todas as partículas elétricas positivas e negativas têm a mesma *quantidade e* ⁵²³ e a mesma *massa ε* , de acordo com a qual *ee* é a força com a qual duas partículas de mesmo tipo, que estão em repouso na unidade de distância, se repelem,⁵²⁴ enquanto que *ee/ε* é a velocidade que essa força conferiria a cada uma das duas

⁵²²Em alemão: *unscheidbarer Moleküle*. Essa expressão pode ser traduzida como moléculas indivisíveis ou moléculas inseparáveis.

⁵²³Isto é, todas elas possuem uma carga elétrica *e* e de mesma intensidade.

⁵²⁴Ver a Nota de rodapé 501 na página 258.

partículas na unidade de tempo.

Essa *molécula composta indivisível* é formada por *duas partículas elétricas positivas ou negativas simples* que estão a uma distância menor uma da outra do que sua distância crítica ρ ,⁵²⁵ pois elas se atraem mutuamente com uma força que se tornaria *infinitamente* grande à medida que a distância aumentasse até ρ , o que deixa claro que nenhuma força externa finita é capaz de afastá-las uma da outra até ρ e, portanto, não além de ρ . Portanto, as duas partículas devem sempre permanecer a distâncias menores que ρ uma da outra.

No entanto, entre essas moléculas compostas *indivisíveis*, podem existir muitos outros tipos, pois se uma simples partícula elétrica positiva, por exemplo, fosse encontrada junto com mais de uma outra partícula semelhante em um espaço tão pequeno que as distâncias entre elas fossem menores que ρ , *todas essas partículas juntas formariam uma molécula tão indivisível* quanto no caso de duas delas. Se dessa pluralidade, por exemplo, de *três* partículas a , b , c , quaisquer duas a e b se aproximassem primeiro da distância ρ , onde sua *força de atração* mútua se tornaria infinitamente grande, só seria possível para a terceira partícula c cancelar essa força de atração infinitamente grande se essa terceira partícula estivesse localizada no lado oposto à mesma distância, ou seja, a uma distância $= 2\rho$ de a , o que seria contrário à premissa.

De acordo com a mesma suposição para partículas *elétricas negativas* que acabou de ser feita para partículas *elétricas positivas*, haveria agora tantos casos de moléculas indivisíveis compostas por partículas elétricas *negativas* simples quanto casos de moléculas indivisíveis compostas por partículas elétricas *positivas* simples.

Além disso, não apenas duas ou três, mas um número muito maior de *partículas elétricas de mesmo tipo* podem ficar juntas em um espaço tão pequeno, sem que a distância entre uma partícula e outra seja $\geq \rho$, de modo que todas essas partículas juntas formam uma *molécula igualmente indivisível que permanece unida para sempre*. Finalmente, deve-se acrescentar que essas partículas encerradas no espaço estreito de uma molécula não precisam permanecer em repouso mais do que aquelas originalmente distribuídas em espaços maiores, mas podem fazer os mais variados movimentos, parcialmente *juntas*, em estreita conexão umas com as outras, no espaço cósmico, em parte também umas *contra* as outras, dentro do espaço estreito em que estão situadas, sem deixar de formar um *grupo inseparável* ou uma *única molécula composta*. Cada uma dessas moléculas compostas forma um mundo próprio e, de acordo com a diferença no número de partículas elétricas simples que ela contém e seus movimentos mútuos, essa molécula composta pode exercer efeitos muito diferentes em todas as outras moléculas fora dela, de acordo com as quais elas podem ter *propriedades muito diferentes*. Se acrescentarmos que o *número* de partículas elétricas simples que podem ser unidas dessa forma, embora não seja ilimitado, pode ser muito grande, pode-se pensar que essas partículas ou moléculas elétricas eternamente invariáveis, parcialmente positivas e parcialmente negativas, podem novamente se combinar para formar tipos muito *diferentes de corpos ponderáveis*, por exemplo, de densidade ou dureza muito diferentes e assim por diante, pois esses *grupos* que consistem em um número maior de *partículas elétricas de mesmo tipo*, *algumas positivas*, *outras negativas*, cada uma ocupando apenas um espaço esférico de diâmetro ρ , devem obviamente se atrair e se combinar com uma *força muito maior* do que uma simples molécula elétrica positiva com uma simples molécula elétrica negativa.

⁵²⁵Ou seja, uma molécula composta indivisível seria formada por duas partículas elétricas positivas orbitando uma ao redor da outra a uma distância menor do que a distância crítica ρ . Uma outra molécula composta indivisível seria formada por duas partículas elétricas negativas orbitando uma ao redor da outra a uma distância menor do que a distância crítica ρ .

No caso de todas essas *moléculas indivisíveis* compostas por mais de duas partículas elétricas de mesmo tipo, três casos podem ser distinguidos, a saber: *primeiro*, o caso em que todas essas moléculas estão tão próximas umas das outras, que, por ações à distância, podem ser consideradas como unidas em um ponto; *segundo*, o caso em que duas moléculas giram em torno uma da outra; e *terceiro*, o caso em que um número maior de moléculas se move em torno uma da outra em órbitas diferentes no espaço ocupado por elas. Diferentes propriedades das moléculas também podem ser baseadas nessas diferenças.

Isso resulta na seguinte classificação das moléculas materiais: primeiro as moléculas *elétricas indivisíveis* e depois as moléculas *ponderáveis*. As *partículas elétricas positivas ou negativas* contidas em uma molécula são designadas por seu número precedido por + ou –, e o fato de que juntas formam uma *molécula indivisível* é indicado por colchetes.

1. Moléculas elétricas simples:

molécula *elétrica positiva* (+1),

molécula *elétrica negativa* (–1).

2. Moléculas elétricas indivisíveis compostas

de [partículas] *elétricas positivas*:

de duas (+2),

de três (+3),

de quatro (+4),

de cinco (+5),

de seis (+6), etc.

de [partículas] *elétricas negativas*:

de duas (–2),

de três (–3),

de quatro (–4),

de cinco (–5),

de seis (–6), etc.⁵²⁶

3. Moléculas *ponderáveis* compostas por números iguais de moléculas *elétricas positivas e negativas*, que podem ser claramente organizadas da seguinte maneira.

⁵²⁶[Nota de Wilhelm Weber:] As moléculas (+ n) e (– n), em que n seria um número maior, raramente serão encontradas individualmente devido à sua maior atração mútua, mas geralmente apenas no composto $\left[\begin{array}{c} +n \\ -n \end{array} \right]$, ou seja, como *moléculas ponderáveis*.

ser decompostos ainda mais, esses últimos corpos ponderáveis foram chamados de *corpos elementares*, mas isso não exclui a *possibilidade* de sua decomposição em moléculas elétricas positivas e negativas.

As moléculas *mais difíceis de separar* serão aquelas moléculas ponderáveis nas quais muitas partículas *elétricas de mesmo tipo* estão localizadas a distâncias menores do que ρ umas das outras, ou seja, todas as moléculas rotuladas com $\begin{bmatrix} +n \\ -n \end{bmatrix}$ nas quais n é um número grande. As moléculas ponderáveis $\begin{bmatrix} +n \\ -n \end{bmatrix}$ com valores numéricos n grandes se comportarão, portanto, como *corpos elementares ponderáveis*, enquanto as moléculas ponderáveis nas quais n é um número pequeno, por exemplo, 1, serão as mais fáceis de se decompor em *elementos elétricos*.

Se agora considerarmos o peso da molécula ponderável $\begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$ como a unidade de peso atômico, então n seria o peso atômico da molécula $\begin{bmatrix} +n \\ -n \end{bmatrix}$. O menor peso atômico de moléculas ponderáveis que conhecemos é o do hidrogênio e geralmente é definido como = 1. De acordo com isso, os pesos atômicos dos outros corpos ponderáveis que ainda não foram decompostos e sua composição a partir de partículas elétricas elementares positivas e negativas seriam obtidos da seguinte forma:

	Peso atômico	Composição elétrica
Hidrogênio	1	$\begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}$
Carbono	12	$\begin{pmatrix} +12 \\ -12 \end{pmatrix}$
Lítio	13	$\begin{pmatrix} +13 \\ -13 \end{pmatrix}$
Berílio	14	$\begin{pmatrix} +14 \\ -14 \end{pmatrix}$
Nitrogênio	14	$\begin{pmatrix} +14 \\ -14 \end{pmatrix}$
Oxigênio	16	$\begin{pmatrix} +16 \\ -16 \end{pmatrix}$
Flúor	19	$\begin{pmatrix} +19 \\ -19 \end{pmatrix}$
Bromo	20	$\begin{pmatrix} +20 \\ -20 \end{pmatrix}$
Boro	22	$\begin{pmatrix} +22 \\ -22 \end{pmatrix}$
Magnésio	25	$\begin{pmatrix} +25 \\ -25 \end{pmatrix}$
Alumínio	27	$\begin{pmatrix} +27 \\ -27 \end{pmatrix}$
etc.	etc.	etc.

O caso em que dois corpos ponderáveis completamente diferentes têm o mesmo peso atômico ocorre cinco vezes, e há até um caso em que três desses corpos têm o mesmo peso

atômico, ou seja,

1. berílio e nitrogênio $\begin{pmatrix} +14 \\ -14 \end{pmatrix}$

2. cobalto e níquel $\begin{pmatrix} +59 \\ -59 \end{pmatrix}$

3. ródio e rutênio $\begin{pmatrix} +104 \\ -104 \end{pmatrix}$

4. tório e urânio $\begin{pmatrix} +119 \\ -119 \end{pmatrix}$

5. bário e vanádio $\begin{pmatrix} +137 \\ -137 \end{pmatrix}$

finalmente, ouro, platina e irídio, todos $\begin{pmatrix} +197 \\ -197 \end{pmatrix}$.

Qual é a diferença entre esses corpos elementares ponderáveis de mesmo peso atômico? Essa diferença poderia consistir apenas na diferença entre as órbitas e velocidades nas quais as partículas *elétricas positivas* unidas de uma molécula ponderável, cujas distâncias entre si são menores que ρ , se movem, e as órbitas e velocidades nas quais as partículas *elétricas negativas* unidas da mesma molécula ponderável, cujas distâncias entre si são menores que ρ , se movem. Quanto mais rápido essas órbitas forem percorridas, maior será a resistência à penetração de outras partículas, ou seja, maior será a dureza das moléculas.

No que diz respeito aos desvios de alguns pesos atômicos em relação aos múltiplos do peso atômico do hidrogênio, eles provavelmente se devem, pelo menos em parte, aos *satélites* de algumas moléculas ponderáveis, cuja ocorrência parece estar ligada a certas condições que serão discutidas em mais detalhes.

Uma molécula *ponderável* composta de $+e$ e $-e$ (em que e também pode ser substituída por uma pluralidade de moléculas elétricas de mesmo tipo) exerce duas forças sobre uma molécula *elétrica positiva* $+e'$, ou seja, uma força repulsiva exercida por $+e$ sobre $+e'$

$$= + \left(\frac{ee'}{r^2} \right) \cdot \left(1 - \left[\frac{1}{c^2} \right] \left[\frac{dr^2}{dt^2} \right] + \left[\frac{2r}{c^2} \right] \left[\frac{d^2r}{dt^2} \right] \right) ,$$

e uma *força atrativa* exercida por $-e$ sobre $+e'$

$$= -(1 + \alpha) \left(\frac{ee'}{r^2} \right) \cdot \left(1 - \left[\frac{1}{c^2} \right] \left[\frac{dr^2}{dt^2} \right] + \left[\frac{2r}{c^2} \right] \left[\frac{d^2r}{dt^2} \right] \right) ,$$

em resumo, uma *força atrativa*

$$= -\alpha \frac{ee'}{r^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{c^2} \frac{d^2r}{dt^2} \right) .$$

Essa *força de atração* exercida por uma *molécula ponderável* sobre a *molécula elétrica positiva* permite que esta última seja mantida em um *movimento giratório* contínuo ao redor da *molécula ponderável*.

A mesma *molécula ponderável* consistindo em $+e$ e $-e$ também exerce duas forças sobre uma molécula *elétrica negativa* $-e'$, a saber, uma *força atrativa*

$$= -(1 + \alpha) \left(\frac{ee'}{r^2} \right) \cdot \left(1 - \left[\frac{1}{c^2} \right] \left[\frac{dr^2}{dt^2} \right] + \left[\frac{2r}{c^2} \right] \left[\frac{d^2r}{dt^2} \right] \right) ,$$

e uma *força repulsiva*

$$= + \left(\frac{ee'}{r^2} \right) \cdot \left(1 - \left[\frac{1}{c^2} \right] \left[\frac{dr^2}{dt^2} \right] + \left[\frac{2r}{c^2} \right] \left[\frac{d^2r}{dt^2} \right] \right) ,$$

assim, portanto, também uma *força atrativa* e da *mesma magnitude* que a *força atrativa* exercida sobre $+e'$, de modo que a molécula *elétrica negativa* também pode ser mantida em um *movimento de rotação em torno da molécula ponderável*.

Dessa forma, a maioria das *moléculas ponderáveis*, com o tempo, terá recebido como satélite uma molécula *elétrica positiva* ou uma molécula *elétrica negativa*, e as moléculas ponderáveis se dividiriam em *três classes*, a saber, a classe de moléculas acompanhadas por *satélites elétricos positivos*, a classe de moléculas acompanhadas por *satélites elétricos negativos* e a classe de moléculas que até o momento permaneceram *sem satélites*.⁵²⁸

Se as *composições de moléculas ponderáveis* pudessem agora ocorrer a partir de *partículas elétricas* até o número de cinco partículas positivas [juntamente] com cinco negativas, isso resultaria em 53 substâncias básicas ponderáveis,⁵²⁹ de acordo com o esquema anterior, das quais resultaria a possibilidade de $53 \cdot 54/2 = 1431$ *corpos ponderáveis compostos de forma binária*.

Se considerarmos também a extraordinária diversidade que pode ocorrer em cada uma dessas moléculas *ponderáveis* em relação às órbitas e forças vivas⁵³⁰ das partículas elétricas individuais das quais são compostas, surge a possibilidade de um *número infinito de tipos diferentes dessas moléculas*.

18.6 Eletricidade em Condutores Metálicos

No tratado “Zur Galvanometrie — Sobre a Galvanometria” no 10º Volume dos *Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (1862),^{531,532} a Seção 33 trata da “conversão de trabalho elétrico em calor”.⁵³³ Lá é afirmado o seguinte: O *trabalho elétrico* está vinculado ao movimento dos fluidos elétricos e, de acordo com a teoria mecânica do calor, o *calor* também está vinculado ao movimento de um corpo, que, no entanto, é normalmente distinguido dos fluidos elétricos e chamado de material térmico,⁵³⁴ mas sem determinar essa diferença com mais precisão. Uma visão mais detalhada da maneira pela qual o *trabalho elétrico* é convertido em *calor* parece, portanto, exigir que a identidade da substância térmica com o fluido elétrico seja provada ou, se esse não for o caso, que os movimentos do fluido elétrico sejam rastreados até o ponto em que ocorre a transição dos movimentos do *fluido elétrico* para a *substância térmica*. No último caso, entretanto, a coexistência de muitas substâncias nas menores partes do condutor teria que ser assumida,

⁵²⁸Ver a Nota de rodapé 513 na página 262.

⁵²⁹Em alemão: *ponderabele Grundstoffe*. Essa expressão pode ser traduzida como substâncias básicas ponderáveis, elementos ponderáveis, bases ponderáveis ou matérias-primas ponderáveis.

⁵³⁰Ver a Nota de rodapé 23 na página 25.

⁵³¹[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. IV, pág. 17.

⁵³²[Web62] com tradução para o inglês em [Web24d].

⁵³³Em alemão: *von der Umsetzung der Stromarbeit in Wärme*. Ver a Nota de rodapé 302 na página 166.

⁵³⁴Em alemão: *Wärmestoff*. Ver a Nota de rodapé 492 na página 256 para uma discussão dessa expressão.

ou seja, a *substância condutora ponderável*, juntamente com os *dois fluidos elétricos*, e agora também a chamada *substância térmica*. Para evitar esse acúmulo de substâncias no mesmo espaço, primeiro foi feita uma tentativa de eliminar a *substância condutora ponderável* tanto quanto possível, supondo que ela, por exemplo, o cobre, estivesse concentrada em *pontos individuais separados espacialmente*, ou seja, as chamadas *moléculas ponderáveis*, em vez de estar *continuamente* distribuída *por todo o espaço*, e supondo ainda que a superfície de cada uma dessas moléculas esteja firmemente conectada a uma camada de moléculas elétricas negativas em sua superfície, e também que *moléculas elétricas positivas fluem ao redor delas*, sendo que, no caso de uma corrente galvânica, movem-se sucessivamente *de uma molécula ponderável para a outra*.

Não importa de quais forças o *trabalho* depende quando essa molécula *elétrica positiva* deixa a esfera de atração de uma molécula ponderável *carregada negativamente*, a mesma molécula elétrica sempre realizará um *trabalho opostamente igual* quando entrar na esfera de atração da próxima molécula ponderável igualmente *carregada negativamente*, de modo que essas *duas quantidades de trabalho* se compensem. Entretanto, depois que a molécula elétrica for separada de *uma* molécula ponderável, ela, impulsionada pela força eletromotriz f , passará pelo espaço intermediário α até a *próxima* molécula ponderável e, assim, realizará o trabalho $f\alpha$. A soma de todas essas quantidades de trabalho $\sum f\alpha$ forma o trabalho elétrico no condutor. Cada molécula elétrica, portanto, ao passar *de uma molécula ponderável para outra*, entra na região da última com uma *força viva aumentada em $f\alpha$* , em comparação com a força viva com a qual havia deixado a região da molécula anterior, de modo que o valor das forças vivas em todo o circuito fechado deve, portanto, ter aumentado em uma quantidade equivalente a todo o *trabalho elétrico*. No entanto, de acordo com a *teoria mecânica do calor*, um *aumento nas forças vivas* em todas as partes do condutor fechado que é *equivalente a este trabalho elétrico* é também o *calor* gerado pela corrente, e a única questão é, portanto, se ele é idêntico a ela, ou se a força viva pertencente ao fluido elétrico deve primeiro ser transferida desse fluido para outro meio (para a chamada *substância térmica*), para aparecer como *calor*.

Foi demonstrado no local indicado anteriormente que não há razão alguma para supor tal transmissão, mas que, com a cessação dessa transmissão, qualquer razão para supor uma *substância térmica* especial ou um *meio térmico* particular também deixa de existir, porque ele seria representado pela *eletricidade*.

Mas para que essa substituição de uma substância térmica pela eletricidade seja perfeita, também deve ser possível derivar as leis de *condução de calor*, *radiação de calor* e *absorção de calor*, bem como as leis dependentes de *equalização de temperatura* em corpos ponderáveis, a partir das leis de movimento da *eletricidade* em corpos ponderáveis e no espaço vazio.

No tratado “Ueber die Bewegungen der Elektrizität in Körpern von molekularer Konstitution — Sobre o Movimento da Eletricidade em Corpos de Constituição Molecular”,^{535,536} publicado nos *Annalen* de Poggendorff, 1875, Vol. 156, já foi feita uma tentativa de atribuir todos os fenômenos do *calor*, bem como aqueles do *magnetismo* e *galvanismo* em tais corpos, aos movimentos da *eletricidade* nesses corpos.

Distingue-se agora entre a estática e a dinâmica dos corpos ponderáveis, dependendo se eles são considerados em um estado de repouso ou em um estado de movimento; no entanto, ao falar do estado de repouso na estática desses corpos, não se designa, de forma alguma, a um estado de repouso de todas as partes contidas dentro dos limites desses corpos, mas

⁵³⁵[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. IV, pág. 312.

⁵³⁶[Web75] com tradução para o inglês em [Web24g] e tradução para o português no Capítulo 13.

apenas das partes *ponderáveis* contidas dentro desses limites. Sem essa restrição, nunca seria possível falar do estado de repouso de um corpo ponderável, porque todo corpo desse tipo contém, além de suas partes ponderáveis, outras partes que nunca entram em repouso.

Pois, *em primeiro lugar*, como vimos, a investigação mais exata de todos os fenômenos *elétricos* observados em corpos *ponderáveis* levou à conclusão de que em todos esses corpos há partes móveis, ou seja, *partículas elétricas*, cujos deslocamentos e movimentos na superfície e no interior desses corpos são a causa de todos os fenômenos de *cargas elétricas* e *correntes galvânicas*, bem como de todos as *ações eletrodinâmicas* em geral.

Da mesma forma, a investigação mais precisa de todos os fenômenos *magnéticos* observados em corpos ponderáveis, tanto paramagnéticos quanto diamagnéticos, levou à conclusão de que havia partes móveis dentro de todos esses corpos, que por muito tempo as pessoas tentaram distinguir das primeiras [partes], ou seja, das [partes] *elétricas*, sob o nome de *fluidos magnéticos*. Afirmava-se que esses *fluidos magnéticos* podiam ser distribuídos de forma diferente dentro dos corpos, de acordo com as diferentes condições, mas que permaneciam em repouso e equilíbrio sob condições constantes. A razão para os fenômenos magnéticos foi buscada na *distribuição* desses fluidos magnéticos, sem a necessidade de seus movimentos contínuos. Mas uma investigação mais aprofundada mostrou que a causa de *todos os fenômenos magnéticos* (paramagnéticos e diamagnéticos) não pode estar nesses fluidos magnéticos em repouso, não importando como estejam distribuídos; mas que *todos* esses fenômenos podem ser explicados pela presença de partes em *movimento contínuo* dentro dos corpos ponderáveis, ou seja, as mesmas partes cujos movimentos são a causa de todos os fenômenos galvânicos, ou seja, *partículas elétricas*.

Em *terceiro e último lugar*, a pesquisa sobre a *temperatura* de cada corpo ponderável levou à conclusão de que há partes móveis dentro de todos esses corpos e que a causa de todos os fenômenos térmicos observados nesses corpos, ou seja, o *calor*, deve ser procurada nos movimentos dessas partes. A *identidade* presumida dessas partes com as partes *elétricas* também foi confirmada por fatos, em particular pela *igualdade real da força viva gerada pelas forças eletromotrizes nos condutores de eletricidade e calor, com o calor gerado pela corrente*.

A partir das investigações sobre a geração de calor pela corrente galvânica no condutor de corrente, verificou-se que o *equivalente mecânico do calor gerado* no elemento de tempo dt é igual ao produto de dt com a intensidade da corrente i e com a força eletromotriz e , onde no lugar de e também pode ser colocado o produto de i com a resistência w do condutor, ou seja, $eidt = wi^2dt =$ ao *equivalente mecânico do calor gerado*.⁵³⁷

Agora $eidt$ é o produto da força que atua sobre a eletricidade em movimento, contida na unidade de comprimento do condutor, com a distância percorrida por ela no tempo dt na direção dessa força, ou seja, o trabalho realizado no tempo dt pela *eletricidade em movimento* contida na unidade de comprimento do condutor, que é igual ao *calor* gerado no tempo dt na unidade de comprimento do condutor. Consequentemente, esse *calor* é igual ao *trabalho realizado pela eletricidade em movimento*, e a *própria substância térmica é idêntica à eletricidade em movimento* no condutor.

Limitar-nos-emos aqui a considerar o comportamento da *eletricidade*, do *galvanismo* e do *calor* em *condutores metálicos* e deixaremos para decidir se o comportamento deles em *condutores úmidos*, por exemplo, em ácidos diluídos, é o mesmo ou diferente; para diferenciá-los, pode-se afirmar apenas que a corrente no primeiro caso, ou seja, nos *condutores metálicos*, é formada somente pelo fluido elétrico, sem qualquer participação das moléculas ponderáveis,

⁵³⁷ Ver a Nota de rodapé 294 na página 164.

enquanto no segundo caso (ou seja, nos *condutores úmidos*) *substâncias ponderáveis*, como hidrogênio e oxigênio, participam do movimento.

Uma visão clara dessas relações entre os fluidos elétricos e as moléculas ponderáveis em *condutores metálicos durante correntes galvânicas*, no entanto, requer primeiro um conhecimento mais detalhado do comportamento dos fluidos elétricos em *condutores metálicos sem corrente galvânica*. Se não houver corrente galvânica em um condutor metálico, a eletricidade contida nele não está de forma alguma em repouso, mas em movimento e, portanto, há uma força viva no condutor metálico, que é chamada de *calor*. Uma visão clara do comportamento dos fluidos elétricos em condutores metálicos requer, portanto, uma separação e uma diferenciação precisa entre os *movimentos* da eletricidade presente no condutor metálico, que são meramente a causa dos *fenômenos de calor*, daqueles movimentos que formam a *corrente galvânica* no condutor metálico.

Primeiramente, no que diz respeito aos movimentos da eletricidade presente no condutor metálico, que são a causa dos *fenômenos térmicos* no mesmo, primeiro dividimos o espaço pertencente a esse condutor em duas partes, a saber, o espaço ocupado pelas *moléculas ponderáveis* e o espaço ocupado por nenhuma molécula ponderável, o chamado *espaço intermediário vazio*.⁵³⁸ As *moléculas elétricas positivas* estão localizadas e se movem nesse último espaço, enquanto todas as *moléculas elétricas negativas* estão presentes, em parte, como componentes permanentes das *moléculas ponderáveis* e, em parte, como *cargas* temporariamente conectadas a elas.

Os movimentos das *moléculas elétricas positivas* no espaço vazio que circunda uma *molécula metálica ponderável* não estão, no entanto, confinados a esse espaço, mas essa molécula pode passar da vizinhança dessa molécula *ponderável* para a vizinhança de uma molécula *ponderável* vizinha; mas essas transições devem ocorrer de todas as moléculas ponderáveis (se não houver corrente galvânica) indiferentemente em todas as direções, se não simultaneamente, então sucessivamente. Em corpos nos quais esse não seria o caso, é fácil ver que não haveria *radiação recíproca de calor*, na qual, como é bem conhecido, a lei da *condução de calor* se baseia, ou seja, a lei da *transferência* da força viva do calor de uma molécula ponderável para as moléculas circundantes, que é a propriedade característica dos *condutores metálicos*. *Condutores metálicos* são, portanto, entendidos como corpos nos quais moléculas elétricas positivas giram em torno de *moléculas ponderáveis carregadas negativamente* e são lançadas em todas as direções sem diferenciação.

Todos esses movimentos de moléculas elétricas no espaço vazio entre as *moléculas metálicas* ponderáveis seguem leis que podem ser deduzidas da *lei fundamental da ação elétrica*. Essa dedução já está descrita no tratado citado nos *Annalen* de Poggendorff, 1875, Vol. 156, Seção VI,^{539,540} “Ueber die Bewegung der Elektrizität in Konduktoren - Sobre o Movimento da Eletricidade em Condutores”, página 39 e seguintes.⁵⁴¹

⁵³⁸Em alemão: *leeren Zwischenraum*. Essa expressão pode ser traduzida como espaço vazio, espaço intermediário vazio, intervalo vazio ou espaçamento vazio. Weber está se referindo aqui ao espaço vazio entre as moléculas ponderáveis de um corpo.

⁵³⁹[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. IV, pág. 339.

⁵⁴⁰[Web75, pág. 339 e seguintes das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web24g] e tradução para o português no Capítulo 13. Ver especialmente a Seção 13.6.

⁵⁴¹[Nota de Wilhelm Weber:] Essa dedução foi baseada na observação dos movimentos de duas *moléculas elétricas de tipos diferentes*, uma das quais (elétrica negativa) está ligada a uma molécula *ponderável*, enquanto a *outra* (elétrica positiva) pode se mover livremente, e nas diferenças resultantes nas *constituições moleculares dos corpos*.

Se nos restringirmos aqui a esses sistemas que consistem em pares de moléculas, das quais uma ($-e$) é

A partir da equação dada na parte inferior da Nota⁵⁴² para um par de *moléculas elétricas de tipos diferentes*, que é deduzida da *lei fundamental da ação elétrica*, segue-se, conforme declarado, que para $u = 0$ temos $r = r_0$ ou $r = [n/(1 - n)] r_0$.

Disso resulta que esses pares de moléculas se dividem em duas classes, a saber, pares de moléculas cuja rotação em torno uma da outra é *persistente*, e pares de moléculas cuja rotação em torno uma da outra *não é persistente*. O fato de um par de moléculas pertencer a uma ou outra dessas duas classes depende do valor de $n = -r_0\alpha_0^2/\rho c^2$ associado a ele, em que r_0 denota o menor valor de r para o qual a velocidade relativa das duas moléculas é $u = 0$, e α_0 [denota] a velocidade angular da molécula elétrica em torno da [molécula] ponderável à distância r_0 .

A *persistência* da rotação da partícula elétrica em torno da molécula ponderável *ocorre* quando o valor da grandeza n está entre $1/2$ e 1 , *mas não ocorre* quando o valor da grandeza n está entre 0 e $1/2$.

Como aqui são considerados apenas pares de moléculas elétricas de tipos diferentes que podem girar uma em torno da outra, de onde ρ sempre tem um valor *negativo*, segue-se que n deve sempre ter um valor *positivo*. Se este valor for maior que 1 , então $r_0 = -n\rho \cdot [c^2/\alpha_0^2]$ é o único valor de r para o qual $u = 0$. Se, por outro lado, este valor for menor que 1 , mas maior que $1/2$, então além do valor $r_0 = -n\rho \cdot [c^2/\alpha_0^2]$, existe outro valor de r para o qual $u = 0$, ou seja, o valor onde $n([r_0/r] + 1) = 1$, isto é, o valor $[n/(1 + n)] \cdot r_0 = r^0$, do qual se segue que quando n é menor que 1 , mas maior que $1/2$, a distância entre as duas moléculas aumenta e diminui alternadamente, de r_0 para r^0 e de r^0 para r_0 e assim por diante, o que resulta em uma *rotação contínua* de ambas as moléculas uma em torno da outra.

Esta *rotação persistente* das moléculas uma em torno da outra quando n é menor que 1 , mas maior que $1/2$, se opõe agora à rotação das moléculas uma em torno da outra quando n é menor que $1/2$, mas maior que 0 , onde existe apenas um único valor de $r = r_0$, para o qual $u = 0$, a partir do qual r crescerá continuamente *até o infinito*, se não fosse impedido por influências externas adicionais.

Esse crescimento de r (ou a diminuição da curvatura da trajetória da molécula) é agora muito acelerado quando a molécula *elétrica positiva* que passa para um movimento balístico se aproxima de uma molécula *ponderável* vizinha, onde a trajetória molecular passa primeiro para uma trajetória balística reta e, em seguida, à medida que se aproxima da molécula *ponderável* seguinte, finalmente volta para uma órbita em torno dessa última molécula ponderável.

Como resultado das diferentes direções dos movimentos balísticos, através dos quais é

elétrica negativa e ligada a uma molécula ponderável, a outra (+e) é elétrica positiva e se move em torno da primeira, então a seguinte equação foi encontrada para elas no Sexto Tratado sobre *Medições Eletrodinâmicas* (*Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss.*, Leipzig 1871, Seção 11, pág. 32) [Nota de Heinrich Weber: *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. IV, pág. 273] [[Web71, pág. 273 das *Obras de Weber*] com traduções para o inglês em [Web72, pág. 125] e [Web21g, pág. 89]; e tradução para o português na Seção 9.11 do Capítulo 9]:

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{r - r_0}{r - \rho} \left(\frac{\rho}{r_0} + \frac{r + r_0}{r} \cdot \frac{\alpha_0^2}{c^2} \right),$$

onde ρ , r_0 , e α_0 são constantes dadas, r é a distância entre as duas moléculas, e u a velocidade relativa entre elas. Se for colocado aqui $\alpha_0^2/c^2 = -n\rho/r_0$, obteremos:

$$\frac{\rho - r}{\rho} \cdot \frac{u^2}{c^2} = \left(\frac{r}{r_0} - 1 \right) \left[n \left(\frac{r_0}{r} + 1 \right) - 1 \right],$$

de onde segue que para $u = 0$, teremos $r = r_0$ ou $r = [n/(1 - n)] r_0$.

⁵⁴²Ver a Nota de rodapé 541 e a Seção 9.11 do Capítulo 9.

mediada a transição dessas moléculas *elétricas positivas* de uma molécula *ponderável* para as moléculas vizinhas *ponderáveis*, ocorre uma distribuição dessas moléculas elétricas positivas entre todas as moléculas vizinhas *ponderáveis*, bem como, inversamente, as moléculas *elétricas positivas* ejetadas de todas as moléculas vizinhas *ponderáveis* passam para a primeira molécula *ponderável*.

Este movimento balístico de moléculas elétricas positivas de todas as moléculas vizinhas *ponderáveis* para todas as moléculas vizinhas *ponderáveis* e vice-versa, de todas essas últimas para as primeiras, é chamado de *radiação recíproca*. Fourier⁵⁴³ provou que a partir dessa *radiação mútua* entre todas as *moléculas ponderáveis* de um condutor de calor surgem as leis da *condução de calor*, por meio das quais os fenômenos de distribuição e movimento da eletricidade estão intimamente ligados com os fenômenos de distribuição e movimento do calor.

Isso se baseia, *em primeiro lugar*, na suposição de que os *metais* são corpos cujas *moléculas ponderáveis* carregadas *negativamente* são cercadas por *moléculas elétricas positivas*, mas que não estão em *rotação constante* ao seu redor, mas em uma *rotação que se transforma em um movimento balístico*, pelo qual essas *moléculas elétricas positivas* são espalhadas em todas as direções. De fato, para essas *moléculas elétricas positivas*, deve-se assumir apenas o valor indicado anteriormente para n em condutores metálicos, ou seja, menores que $1/2$ e maiores que 0 .

Em segundo lugar, pode-se fundamentar a suposição de que os *corpos sólidos ponderáveis*, que diferem dos metais por *não serem condutores de eletricidade e calor*, por exemplo, vidros ou cristais, são corpos cujas *moléculas ponderáveis* também possuem uma carga *elétrica negativa* e são cercadas por *partículas elétricas positivas*, mas que estão em *rotação persistente* em torno dessas *moléculas ponderáveis*, ou seja, não se transformam em movimentos balísticos, porque para eles o valor denotado acima por n é maior que $1/2$ e menor que 1 .

A propagação da eletricidade e do calor nos *condutores metálicos* por meio do movimento balístico é substituída nos corpos *vítreos* e *cristalinos* pela propagação do calor e da luz por meio do *movimento ondulatório* do *éter* ou do *meio luminífero* presente neles, que é formado pelas moléculas elétricas positivas localizadas entre as moléculas *ponderáveis*.

De acordo com as disposições anteriores, as *leis das correntes galvânicas em condutores metálicos* devem agora ser deduzidas da *lei fundamental geral da ação elétrica*. Essa dedução foi apresentada no tratado mencionado anteriormente, “Ueber die Bewegungen der Elektrizität in Körpern von molekularer Konstitution — Sobre o Movimento da Eletricidade em Corpos de Constituição Molecular” (*Annalen* de Poggendorff, 1875, Vol. 156, Seção VI),^{544,545} a qual será desenvolvida aqui.

Portanto, supõe-se uma *constituição molecular dos condutores metálicos*, ou seja, um sistema de moléculas *ponderáveis* e carregadas *eletricamente de forma negativa*, separadas umas das outras por interstícios e em equilíbrio estável. Esse *equilíbrio estável* do *sistema molecular ponderável* que forma o *condutor metálico* resulta, da maneira descrita por Mossotti,⁵⁴⁶

1. da *repulsão mútua* entre essas moléculas *ponderáveis* como resultado de suas cargas de mesmo tipo, a saber, *cargas elétricas negativas*, contra a qual desaparece

⁵⁴³Ver a Nota de rodapé 213 na página 123.

⁵⁴⁴[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. IV, pág. 339.

⁵⁴⁵[Web75] com tradução para o inglês em [Web24g] e tradução para o português no Capítulo 13.

⁵⁴⁶Ver a Nota de rodapé 395 na página 213.

sua atração mútua devido à gravitação;⁵⁴⁷

2. da *repulsão* mútua entre todas as *moléculas elétricas positivas* girando ao redor das *moléculas ponderáveis*;

3. da *atração* mútua entre essas *moléculas ponderáveis* com suas cargas elétricas negativas e as *moléculas elétricas positivas* que preenchem os interstícios.

Mossotti tentou demonstrar a *possibilidade* de tal sistema molecular ponderável em equilíbrio estável em seu tratado: *Sur les forces qui regissent la constitution intérieure des corps, aperçu pour servir à la détermination de la cause et des lois de l'action moléculaire* — *Sobre as forças que regem a constituição interna dos corpos, uma visão geral para servir na determinação da causa e das leis da ação molecular*. Turin 1836.⁵⁴⁸

Mossotti supõe que, no espaço de um corpo ponderável, há *moléculas ponderáveis* a certas distâncias umas das outras, que se repelem mutuamente — assim como as *moléculas ponderáveis carregadas negativamente* de um condutor metálico considerado anteriormente — e cujos interstícios são preenchidos por um *fluido elástico* cujos átomos também se repelem mutuamente, mas são atraídos pelas *moléculas ponderáveis*, o que também é verdade para as *moléculas carregadas positivamente* mencionadas anteriormente que preenchem os interstícios de um condutor metálico e que passaram para um movimento balístico, na medida em que também se repelem, mas são atraídas pelas *moléculas ponderáveis* carregadas *negativamente*.

Mossotti prova, então, que em uma determinada proporção de forças repulsivas e atrativas, essas *moléculas ponderáveis* a *distâncias maiores* umas das outras, se comportam como se estivessem sozinhas, e se atraem de acordo com a lei da gravitação; por outro lado, em *distâncias menores*, chamadas de *moleculares*, elas se comportam como se estivessem sozinhas no espaço e se mantivessem em *equilíbrio estável* por meio da ação conjunta de forças atrativas e repulsivas.

A analogia entre o nosso caso e o considerado por Mossotti parece levar à mesma conclusão, ou seja, que é possível obter um equilíbrio estável em nosso sistema molecular *ponderável* que forma o *condutor metálico*.

Portanto, também se aplicaria aos *condutores metálicos* o fato de que duas de suas *moléculas ponderáveis* a uma distância maior uma da outra se comportariam exatamente como se estivessem presentes sozinhas no espaço e se atraíssem mutuamente de acordo com a lei da gravitação, ao passo que, em distâncias menores uma da outra, chamadas de *distâncias moleculares*, elas se comportariam exatamente como se formassem um sistema molecular em *equilíbrio estável* por conta própria.

18.7 Teoria da Resistência Galvânica dos Condutores Metálicos

(Ver os *Annalen* de Poggendorff, Vol. 156, págs. 49-55.)^{549,550}

⁵⁴⁷Ou seja, a repulsão elétrica entre as cargas negativas das moléculas é muito maior do que a atração gravitacional entre as moléculas.

⁵⁴⁸Ver a Nota de rodapé 395 na página 213.

⁵⁴⁹[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. IV, págs. 348-353.

⁵⁵⁰[Web75, págs. 49-55 dos *Annalen der Physik und Chemie* e págs. 348-353 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web24g] e tradução para o português no Capítulo 13. Ver especialmente a Seção 13.9.

Em vez da suposição de Mossotti sobre a constituição interna de corpos sólidos mencionada na Seção anterior, para simplificar a consideração da *resistência galvânica de condutores metálicos*, é agora assumida uma *conexão rígida das moléculas elétricas ponderáveis negativas* dos condutores metálicos, separadas umas das outras por lacunas, e representada por *linhas rígidas* que não impedem os movimentos das *moléculas elétricas positivas* em torno de todas as moléculas ponderáveis individuais e sua transição para o movimento balístico.

A *coesão realmente muito forte* das moléculas ponderáveis dos *condutores metálicos* provavelmente se deve ao fato de que cada molécula *elétrica positiva* em sua órbita não apenas envolve uma *molécula elétrica negativa* de uma molécula ponderável vizinha, mas também a *outra molécula elétrica negativa* da *outra molécula ponderável vizinha*. O mesmo se aplica à órbita de cada molécula *elétrica negativa* e duas moléculas vizinhas elétricas positivas.

No ponto A, Figura 1, há uma *molécula ponderável* do condutor metálico carregada eletricamente de forma negativa, em torno da qual se movem *moléculas elétricas positivas imponderáveis*, conforme descrito anteriormente.

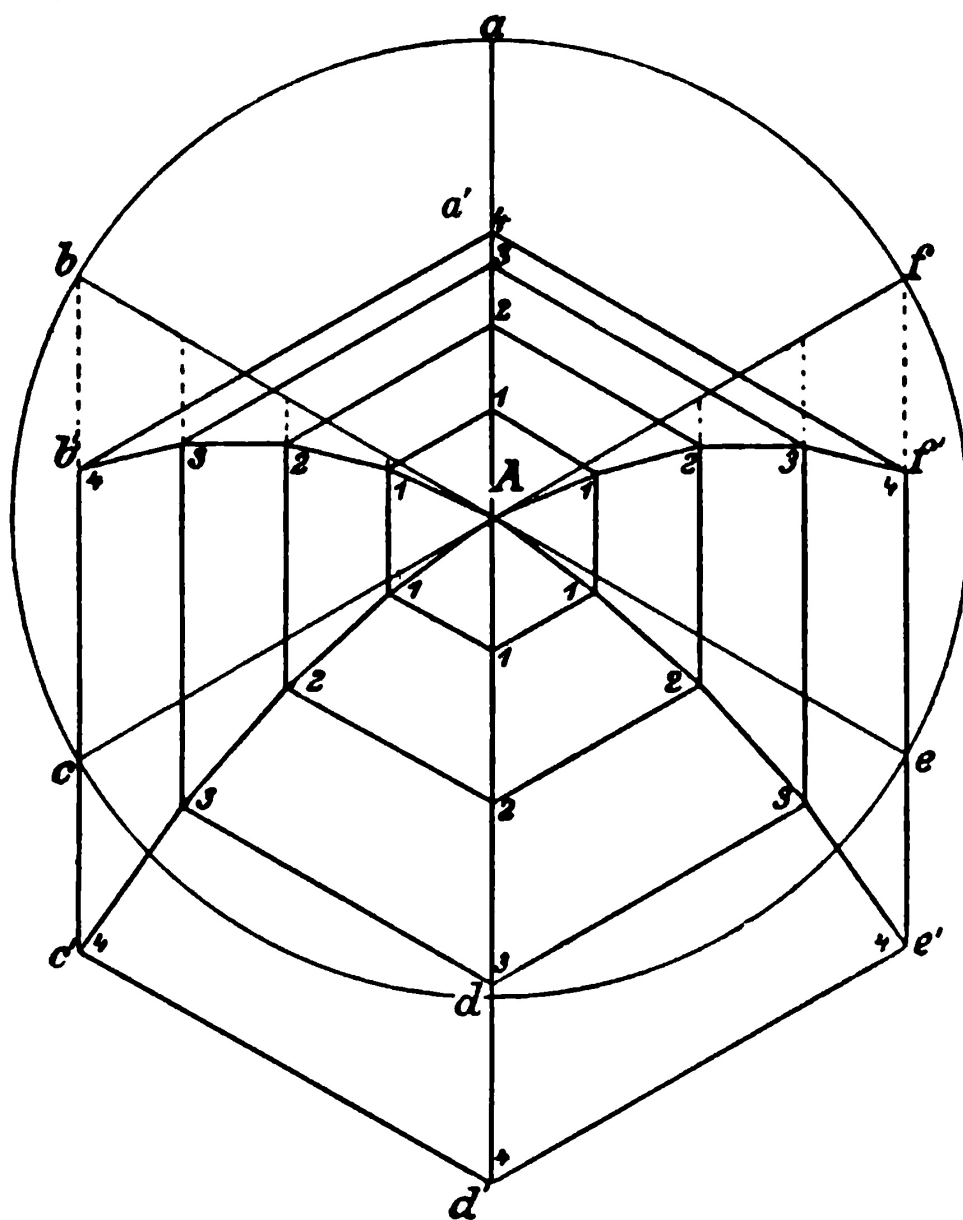


Fig. 1.

Se *nenhuma força eletromotriz* estivesse presente, então, de acordo com as suposições feitas, as moléculas *elétricas positivas*, tendo feito a transição para movimento balístico, iriam se deslocar, vistas a partir de A , em todas as direções indiferentemente, o que é indicado na Figura por seis direções cardiais, a saber, pelos raios Aa , Ab , Ac , Ad , aos quais os dois raios Ae e Af perpendiculares ao plano da Figura podem ser adicionados para cima e para baixo.⁵⁵¹ A velocidade desses movimentos balísticos em todas essas direções também seria considerada a mesma, e *cada uma dessas trajetórias* se estenderia até a região da próxima molécula ponderável, cujo comprimento seria, em média, $= r'$, e deveria ser considerado como o *comprimento de um elemento condutor*.

No entanto, se uma *força eletromotriz* agir agora sobre todas essas moléculas *elétricas positivas* que estão sendo lançadas em diferentes direções, por exemplo, na Figura 1, na direção vertical, de cima para baixo; então todas essas moléculas serão desviadas de sua trajetória retilínea de maneira semelhante àquela que as pedras arremessadas são desviadas pela gravidade e devem descrever trajetórias curvas, que são mostradas na Figura sob essas trajetórias retilíneas, a saber, Ab' sob Ab , Ad' sob Ad , às quais devem ser adicionados Ae' sob Ae e Af' sob Af .

No que diz respeito ao movimento de corrente resultante, é óbvio que os *movimentos balísticos* originais sem os movimentos adicionados pela *força eletromotriz*, por ocorrerem simetricamente em todas as direções, não contribuem em nada para esse *movimento de corrente*, de modo que se pode abstrair completamente desses movimentos balísticos ao determinar o movimento de corrente. Para os movimentos de corrente das moléculas ejetadas, de acordo com as suposições feitas, apenas permanecem os caminhos $aa' = bb' = cc' = dd' = ee' = ff' = r'$.

Além disso, para fins de determinação da corrente, todas as moléculas elétricas positivas ejetadas pelas outras *moléculas ponderáveis* contidas no mesmo *elemento condutor* $= r'$, juntamente com as *moléculas elétricas positivas* ejetadas por A , podem ser consideradas como estando unidas em A e, da mesma forma, todas as [moléculas elétricas positivas ejetadas] das *moléculas ponderáveis* contidas no *próximo elemento condutor* $= r'$ [podem ser consideradas como estando unidas] em A' , e assim por diante, onde $AA' = A'A'' \dots = r'$ denota a *distância média* entre duas moléculas *ponderáveis* entre as quais ocorre a *radiação recíproca direta*. [A distância] r' é, portanto, o comprimento médio do caminho que as moléculas elétricas positivas ejetadas pelas moléculas ponderáveis precisam percorrer até chegarem à região da próxima molécula ponderável, em torno da qual começam a girar novamente.

Se denotarmos por E à quantidade de eletricidade positiva emitida ou irradiada por uma molécula ponderável na unidade de tempo e por n ao número de tais moléculas contidas na *unidade de comprimento* de um condutor *fechado*, então r' é a distância média que cada partícula com a quantidade de eletricidade E tem de percorrer do local da molécula *emissora* até o local da molécula *absorvente* no condutor l , portanto, $nr'E$ é o *valor limite da intensidade da corrente* para uma *força eletromotriz* crescente, expresso em *unidades mecânicas*, e a *intensidade de uma corrente galvânica*, que é produzida em um tal condutor fechado por uma *força eletromotriz mais fraca*, será *igual a apenas uma fração de* $nr'E$.

Para determinar essa fração, a *velocidade balística* das moléculas elétricas positivas que emanam de uma molécula *ponderável* em A , Figura 2, é denotada por α , AB é a direção na qual essa molécula se move e ξ é a distância percorrida nessa velocidade no tempo t , [ou seja,] $\xi = \alpha t$.

⁵⁵¹[Nota de Heinrich Weber:] Nessa Figura, desenhada pelo próprio W. Weber, as direções Ae e Af estão marcadas na lateral.

De acordo com as suposições feitas, esse movimento balístico chega ao fim quando a molécula ejetada por A percorreu a distância r' e, assim, atingiu a região da *próxima molécula ponderável do condutor metálico*.

Se denotarmos com y' o valor de y para $r = r'$, obteremos a equação:

$$y' = \cot \psi \cdot \sqrt{r'^2 - y'^2} + \frac{a}{\sin \psi^2} \cdot (r'^2 - y'^2) ,$$

do que se conclui que, para valores crescentes da *força eletromotriz* a , y' se aproxima de um *valor limite*, ou seja, o valor r' .

Deixe E denotar agora a quantidade de eletricidade positiva emitida pela *molécula ponderável* em A na unidade de tempo e n o número de *moléculas ponderáveis* contidas na unidade de comprimento do condutor, de acordo com o qual $nr'E$ seria a quantidade de eletricidade positiva que passa pela seção transversal do condutor no *caso limite* dado na unidade de tempo e o máximo da intensidade de corrente para a força eletromotriz que cresce até o infinito de acordo com a *unidade mecânica*. Portanto, a *intensidade da corrente* nem sempre cresceria proporcionalmente à força *eletromotriz*, mas se aproximaria do valor limite $nr'E$ à medida que a força eletromotriz crescesse até o infinito.

Se, por outro lado, a *força eletromotriz*, ou a grandeza a proporcional a essa força eletromotriz, for *muito pequena*, nesse caso $r' \cos \psi$ será um valor aproximado de y' , que pode ser substituído no lugar de y' no *último termo multiplicado por a* da equação dada anteriormente, a saber

$$y' = \cot \psi \sqrt{r'^2 - y'^2} + \frac{a}{\sin \psi^2} (r'^2 - y'^2) ,$$

obtemos então a equação

$$y' = \cot \psi \sqrt{r'^2 - y'^2} + ar'^2 ,$$

ou

$$(y' - ar'^2)^2 \sin \psi^2 = (r'^2 - y'^2) \cos \psi^2 .$$

Se for adicionado $y'^2 \cos \psi^2 - a^2 r'^4 \sin \psi^2 = y'^2 \cos \psi^2 - a^2 r'^4 \sin \psi^2$, o resultado será:

$$y'^2 - 2y'ar'^2 \sin \psi^2 = r'^2 \cos \psi^2 - a^2 r'^4 \sin \psi^2 ,$$

ou

$$y' - ar'^2 \sin \psi^2 = \pm r' \cos \psi .$$

Isso resulta *na média* para cada duas moléculas que são emitidas de A nas direções determinadas pelos dois ângulos ψ e $\pi - \psi$:

$$y' = ar'^2 \sin \psi^2 .$$

O valor médio das trajetórias de todas as moléculas emitidas por A , na direção da força eletromotriz que atua sobre elas, é obtido da seguinte forma

$$y = \cot \psi \cdot \sqrt{r^2 - y^2} + \frac{a}{\sin^2 \psi} \cdot (r^2 - y^2) .$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} 2\pi y' \sin \psi d\psi = ar'^2 \int_0^{\pi/2} \sin \psi^3 d\psi = \frac{2}{3} ar'^2 .$$

Se esse valor fosse $= r'$, a *intensidade da corrente* seria igual ao *valor limite* considerado anteriormente, ou seja, $= nr'E$, de acordo com a unidade mecânica; no entanto, a *intensidade real da corrente* para valores pequenos de a , como foram assumidos aqui, é apenas uma pequena fração desse valor, ou seja, $\frac{2}{3}ar'$, de acordo com o qual a *intensidade real da corrente* é obtida em *unidades mecânicas*, ou seja

$$i^0 = \frac{2}{3} ar' \cdot nr'E \cdot \left[\sqrt{\frac{MR^3}{T^4}} \right] ,$$

se as *medidas* subjacentes de *massa*, *comprimento* e *tempo* forem denotadas por M , R e T . Somente a requer uma determinação mais precisa, que é obtida da seguinte forma. A *força eletromotriz em unidade mecânica* que atua em cada *unidade eletrostática* de eletricidade que emana de A é denotada por e^0 . Se a massa da unidade eletrostática for definida como $= [1/\sigma]M$, a *força de aceleração* será $= \sigma e^0$ e a distância percorrida no tempo t como resultado dessa aceleração a partir de A será

$$\eta = \frac{1}{2} \sigma e^0 t^2 = a \xi^2 = a \cdot \alpha^2 t^2 ;$$

consequentemente

$$a = \frac{1}{2} \frac{\sigma e^0}{\alpha^2} .$$

De acordo com isso, a *intensidade de corrente em unidade mecânica* é:⁵⁵⁴

$$i^0 = \frac{1}{3} \frac{\sigma e^0 r'}{\alpha^2} \cdot nr'E \left[\sqrt{\frac{MR^3}{T^4}} \right] .$$

Após essa determinação da *intensidade da corrente* i^0 em *unidade mecânica*, resta determinar a *força eletromotriz em unidade mecânica* atuando em todo o circuito fechado, cujo comprimento deve ser denotado por l , e onde cada unidade de comprimento contém n moléculas ponderáveis, cada uma delas sendo igual à molécula A , emitindo E unidades elétricas positivas a cada segundo, denotando e^0 , como já foi mencionado, à *força eletromotriz em unidade mecânica* que atua em cada unidade *eletrostática* (cuja massa deve ser definida $= [1/\sigma]M$).

Portanto, nlE é o número de *unidades eletrostáticas* presentes em todo o circuito em movimento balístico. A *força eletromotriz* e^0 atua agora em cada unidade dessa eletricidade, mas não durante 1 segundo, no qual essa partícula percorreria a distância α devido à sua velocidade balística já existente, mas somente durante a fração r'/α de um segundo, ou seja, durante o tempo em que ela percorreria a distância r' com a velocidade α .

⁵⁵⁴[Nota de Wilhelm Weber:] Esse valor de i^0 é o mesmo dado nos *Annalen* de Poggendorff, Volume 156, pág. 53 [*Obras* de Wilhelm Weber, Volume IV, pág. 352] [[Web75] com tradução para o inglês em [Web24g] e tradução para o português no Capítulo 13], onde apenas o valor limite da intensidade da corrente, designado aqui como $nr'E$, foi denotado por $n\epsilon\sigma$. A determinação subsequente da força eletromotriz $e^0 = \gamma/\sigma \left[\sqrt{MR^{-1}T^{-2}} \right]$ no local indicado, por outro lado, exige a seguinte correção, a saber, $e^0 = 2\alpha^2 a/\sigma \left[\sqrt{MR^{-1}T^{-2}} \right]$.

Isso resulta na força eletromotriz para todo o circuito de acordo com a unidade mecânica $= nlEe^0$, que, no entanto, não age *continuamente* sobre a totalidade das partículas ejetadas simultaneamente em qualquer momento por todas as nl moléculas ponderáveis do circuito fechado, mas somente durante r'/α segundos, o que, no entanto, é repetido a cada emissão subsequente, ou seja, em cada segundo E vezes, o que deve ser considerado como tendo o mesmo efeito como se a *força eletromotriz para todo o circuito, em unidades mecânicas*, fosse

$$E^0 = nlE \cdot \frac{r'}{\alpha} e^0 .$$

O quociente dessa *força eletromotriz* dividido pela *intensidade da corrente em unidade mecânica* $i^0 = \frac{1}{3} [\sigma e^0 r' / \alpha^2] \cdot nr' E$ fornece então a *resistência da corrente em unidade mecânica*:

$$w^0 = nlE \cdot \frac{r'}{\alpha} \cdot \frac{e^0}{\frac{1}{3} \frac{\sigma e^0 r'}{\alpha^2} \cdot nr' E} ,$$

$$w^0 = \frac{3\alpha l}{\sigma r'} ,$$

onde r'/α denota o tempo tT , expresso em uma unidade de medida T , que cada partícula ejetada precisa para cobrir seu caminho r' . Além disso, l é o comprimento de todo o circuito fechado $= lL$ expresso em termos da unidade de medida de comprimento L . Por fim, $3/\sigma$ é um número puro, ou seja, σ é a razão numérica pura da massa da unidade eletrostática para a massa de 1 miligrama. A *resistência da corrente* de acordo com a *unidade mecânica de resistência* é, portanto, determinada da seguinte forma

$$w^0 = \frac{3}{\sigma} \cdot \frac{\alpha l}{r'} \left[\frac{R}{T} \right] ,$$

ou seja, a resistência de uma corrente de acordo com a unidade mecânica é *diretamente proporcional ao comprimento l* da corrente e *inversamente proporcional ao tempo r'/α* em que uma molécula elétrica ejetada por uma molécula ponderável com sua velocidade balística α percorre o comprimento médio r' do caminho até a próxima molécula ponderável, de acordo com a qual deve ser corrigida a informação dada nos *Annalen* de Poggendorff, Volume 156, pág. 54.^{555,556}

18.8 Algumas Tarefas que ainda Precisam ser Resolvidas de Acordo com a Lei Fundamental da Ação Elétrica em Conexão com a Suposição da Composição das Moléculas Ponderáveis a Partir de Moléculas Elétricas Positivas e Negativas

Todos os *estados persistentes de agregação* de moléculas elétricas e ponderáveis devem ser deduzidos da *lei fundamental da ação elétrica*, assumindo que as moléculas ponderáveis são

⁵⁵⁵[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. IV, pág. 352.

⁵⁵⁶[[Web75](#), pág. 54 dos *Annalen der Physik und Chemie* e pág. 352 das *Obras de Weber*] com tradução para o inglês em [[Web24g](#)] e tradução para o português no Capítulo 13. Ver, em particular, a página 177.

compostas de moléculas elétricas positivas e negativas, de onde deve resultar a *mecânica de todos os corpos em tal estado de agregação*.

De acordo com isso teriam primeiro que ser desenvolvidas,

1. a *mecânica dos fluidos expansíveis (gases)*,
2. a *mecânica dos fluidos inexpandíveis*, e
3. a *mecânica dos corpos elásticos sólidos*.

Ao explicar a mecânica dos corpos no *primeiro dos três estados de agregação* mencionados, a saber, os *gases*, seria preciso presumir que eles consistem em *núcleos ponderáveis*, localizados a distâncias maiores uns dos outros e cada um acompanhado por um *satélite* elétrico positivo. Em *cada tipo de gás*, presume-se que *todos os núcleos sejam iguais*, mas diferentes daqueles de qualquer outro tipo de gás; os *satélites*, por outro lado, também seriam os *mesmos para todos os tipos de gás*, ou seja, apenas as mesmas moléculas elétricas positivas. Duas moléculas de qualquer gás com seus satélites, portanto, se atrairiam em virtude da *força gravitacional entre seus núcleos*, mas se repeliriam em virtude da *força elétrica repulsiva entre seus satélites* e, de fato, a *distâncias iguais das moléculas de gás*, ocorreriam *forças repulsivas iguais entre os satélites para todos os tipos de gás*, mas *forças atrativas diferentes entre os núcleos para tipos diferentes de gás*. Além disso, para cada duas moléculas de gás haveria uma atração mútua entre o núcleo de uma molécula e o satélite da outra molécula, que é a mesma para todos os pares de moléculas, mas é muito pequena em relação às forças de repulsão mencionadas anteriormente.

A igualdade resultante das forças de repulsão entre as moléculas de gás nas mesmas distâncias para todos os gases é de grande importância para a mecânica dos fluidos expansíveis (gases) e merece consideração ainda mais detalhada no futuro.

Para explicar a *mecânica dos corpos no segundo dos três estados de agregação* mencionados, a saber, o dos *fluidos inexpandíveis*, seria necessário presumir que eles consistem em *moléculas ponderáveis sem satélites*, que giram em torno umas das outras em virtude da *força gravitacional* que exercem umas sobre as outras.

Por fim, para a justificativa da *mecânica dos corpos no terceiro dos três estados de agregação* mencionados, ou seja, corpos elásticos sólidos, deve ser inicialmente considerada a diferença entre condutores e *não condutores elétricos*, uma diferença que deve ser essencialmente baseada na constituição interna desses corpos, como já pode ser visto nas Seções 18.6 e 18.7 que tratam de *condutores metálicos*.

A conexão entre a lei elétrica fundamental e a lei da gravitação dos corpos ponderáveis exige, antes de tudo, uma explicação dos *três estados de agregação*, a saber, os estados *sólido*, *líquido* e *gasoso* e sua dependência em relação ao calor, com base na lei elétrica fundamental, pois, de acordo com essa conexão, todo o mundo dos corpos ponderáveis deve ser resolvido em moléculas elétricas positivas e negativas, sendo que de acordo com isso não apenas a *lei da gravitação dos corpos ponderáveis*, mas também todos os *estados de agregação* desses corpos e todas as leis de sua variabilidade devem ser derivadas da *lei elétrica fundamental*, onde o foco principal seria *explicar o calor* e sua influência no *estado de agregação*.

É feita uma distinção entre os estados agregados *sólido*, *líquido* e *gasoso* dos corpos ponderáveis e, no caso dos *corpos sólidos*, é feita uma distinção em particular entre *os metais e os cristais*, sendo os *primeiros* caracterizados pela condução de correntes galvânicas e os *segundos* pela propagação da luz.

No que diz respeito aos corpos do primeiro estado, ou seja, o estado sólido de agregação, a consideração dos metais pertencentes a ele e sua *condutividade elétrica, que está intimamente ligada à condutividade térmica*,⁵⁵⁷ levou à suposição de uma constituição *molecular*, de acordo com a qual as moléculas elétricas positivas nesses corpos se movem em torno das moléculas ponderáveis individuais com um raio em constante mudança, cada [movimento de rotação com raio crescente] até que se transforme em um movimento balístico e, assim, [a molécula positiva] seja conduzida da esfera de ação de *uma molécula ponderável para a esfera de ação de outra [molécula ponderável]*. Essa é a base da *condução de calor* dos metais por meio da *radiação* recíproca das moléculas ponderáveis e da *condutividade galvânica* dos metais. Entretanto, como as moléculas elétricas positivas que giram em torno das moléculas ponderáveis não estão em um equilíbrio estável, nenhum movimento ondulatório pode ocorrer neles e, conseqüentemente, nenhuma propagação de luz.

Além disso, no que diz respeito ao *estado sólido de agregação*, a consideração de *cristais* com *propagação de luz* através deles e como *isolantes elétricos*, leva ao *estado sólido de agregação estabelecido* por Mossotti, segundo o qual as moléculas a certas distâncias umas das outras estão em um *equilíbrio estável*, esse equilíbrio é provocado pelas *forças repulsivas* entre essas próprias moléculas, também pelas *forças repulsivas* entre as moléculas de um fluido (elétrico positivo) contido nos interstícios e, finalmente, pelas *forças atrativas* entre essas moléculas ponderáveis e essas moléculas (elétricas positivas).

No estado normal de equilíbrio do fluido elétrico que preenche os interstícios, ele é ao mesmo tempo o éter luminífero através do qual a luz é propagada, que, devido à sua composição molecular, tem três eixos de elasticidade. O estado normal e estável de equilíbrio também explica por que não há condução de calor e eletricidade nos cristais mediada pela radiação mútua das moléculas, mas, em vez disso, como resultado de todo distúrbio de equilíbrio, [ocorrem] movimentos ondulatórios, ou seja, propagação da luz no meio imponderável que preenche todos os interstícios das moléculas ponderáveis, a saber, o *éter luminífero*.

18.9 Continuação

Além da *mecânica dos corpos de acordo com a diferença em seus estados de agregação*, também deve ser possível derivar *todas as propriedades químicas dos corpos* dependendo de sua constituição molecular, por exemplo, *todas as propriedades químicas do hidrogênio, oxigênio e água*, a partir da *lei fundamental da ação elétrica* sob as mesmas condições da Seção anterior.

Supõe-se, por exemplo, que cada molécula de *oxigênio* seja composta de 160 moléculas elétricas positivas e o mesmo número de moléculas elétricas negativas *simples* (cujas distâncias entre si, tanto positivas quanto negativas, são menores que a distância crítica ρ), às quais, no estado gasoso de agregação, uma molécula elétrica positiva é adicionada como *satélite*; que, além disso, cada molécula de *hidrogênio* é composta por 10 moléculas elétricas simples positivas e o mesmo número de moléculas elétricas simples negativas, às quais é adicionada, também no estado gasoso de agregação, uma molécula elétrica positiva como *satélite*; e, por fim, da mesma forma, que uma molécula de *nitrogênio* é composta por 140 moléculas elétricas positivas e o mesmo número de moléculas elétricas negativas, às quais é adicionada, no estado gasoso, uma molécula elétrica positiva como *satélite*.

⁵⁵⁷Em alemão: *ihres mit Wärmeleitungsvermögen eng verbundenen elektrischen Leitungsvermögens*.

Na mesma pressão (na qual essas diferentes moléculas compostas ocupam o mesmo espaço, as densidades se comportariam, portanto, como os números dos pares de moléculas elétricas simples que elas contêm, além de seus satélites, ou seja, como $160 : 10 : 140 = 16 : 1 : 14$), na qual é igual o número de moléculas de gás no mesmo volume desses gases, essa pressão igual resultaria apenas da interação entre os *satélites*, cujas distâncias entre si seriam iguais na mesma pressão. A rigor, a essa pressão resultante da interação dos satélites teria de ser adicionada uma correção resultante da gravitação recíproca das moléculas de gás ponderáveis e da interação de cada molécula de gás com os satélites das moléculas de gás vizinhas, mas isso pode ser considerado insignificante.

Quando o hidrogênio e o oxigênio se combinam para formar a água, os *satélites* elétricos positivos das moléculas ponderáveis de oxigênio e hidrogênio escapam; essas moléculas ponderáveis, no entanto, são colocadas em rotação uma em torno da outra, formando a *água*; se, por outro lado, não houvesse esse escape dos satélites elétricos positivos, o *vapor de água* seria formado pela mesma combinação.

A *força viva* que essas moléculas ponderáveis de oxigênio e hidrogênio possuem em virtude de sua rotação uma em torno da outra é o *calor latente da água*; se isso for removido da água, essas moléculas ponderáveis não formarão mais *água*, mas sim *gelo*. As moléculas que giram em torno umas das outras na água se alinham firmemente no gelo como resultado da conexão estreita entre a molécula *elétrica positiva* de uma molécula ponderável e a molécula *elétrica negativa* de uma molécula ponderável vizinha, e assim por diante.

Todos os corpos ponderáveis, através dos quais passam os raios de luz e calor, consistem em *moléculas ponderáveis* isoladas, cujos espaços intermediários são preenchidos com um *éter de luz ou calor* imponderável. Não há razão para não supor que esse *éter de luz ou calor* seja formado por moléculas elétricas positivas, que também preenchem o espaço vazio do universo,⁵⁵⁸ mesmo que o éter contido nesses espaços intermediários entre as moléculas ponderáveis sofra uma modificação de seu estado agregado por meio delas.

Todas as forças vivas são produtos das massas com os quadrados de suas velocidades, e são divididas naquelas em que podemos observar tanto as massas quanto suas velocidades, e naquelas cuja observação não nos permite obter conhecimento direto das massas ou das velocidades das quais são produtos. As forças vivas desse último tipo são chamadas de *luz* e *calor*, porque todas as sensações de luz e calor são ações de forças vivas, por meio das quais não obtemos conhecimento direto das massas nem de suas velocidades, das quais são produtos.

As moléculas elétricas idênticas separadas entre si por distâncias menores que ρ podem ter movimentos muito diferentes sem exceder a distância ρ e esses movimentos também podem exercer uma variedade de ações externas, de acordo com as quais o calor é transferido para essas moléculas de mesma composição elétrica, às vezes transferido de fora para elas e às vezes transferido delas para fora.

⁵⁵⁸Em alemão: *von welchen auch der leere Weltenraum erfüllt wird*. Essa expressão pode ser traduzida como “que preenchem o espaço vazio do universo”, “que preenchem o espaço vazio do mundo” ou “que preenchem o espaço vazio do espaço cósmico”.

18.10 Sobre Vários Movimentos em Moléculas de Corpos Ponderáveis Formadas a partir de Moléculas Elétricas Positivas e Negativas e as Propriedades Térmicas Dependentes Deles

Se realmente existirem no mundo apenas moléculas elétricas que, por meio de seus compostos, formam todas as moléculas ponderáveis e, desconectadas, todos os meios imponderáveis — que geralmente são designados pelo nome de cargas elétricas, ou como éter de luz e calor — é evidente que todas as leis de equilíbrio e movimento, bem como todos os fenômenos de luz e calor, desses corpos ponderáveis e desses meios imponderáveis, poderiam ser deduzidos da lei fundamental da ação elétrica, se fossem dados a qualquer momento a posição e o movimento de todas as moléculas elétricas, pelas quais esses corpos ponderáveis e esses meios imponderáveis são formados.

Mesmo que não se espere uma solução geral para esse problema, ainda assim seria possível, dada a infinita variedade de corpos ponderáveis, adivinhar a composição de *um ou alguns* desses corpos, bem como sua posição e movimento mútuos em um determinado momento e, ao desenvolver suas leis de equilíbrio e movimento, bem como seus fenômenos de luz e calor, compará-los com os fenômenos observados desses corpos e testá-los. Por meio de tais golpes de sorte particulares, seria aberto o caminho para um exame decisivo e para a firme comprovação da hipótese apresentada ou para sua refutação.

Representaria um progresso nessa direção, por exemplo, se fosse possível demonstrar a existência de um meio elétrico positivo imponderável no espaço a partir do excedente de eletricidade positiva de fato existente no mundo como um todo, derivar as leis do movimento ondulatório desse meio a partir da lei fundamental da ação elétrica, e demonstrar a concordância dessa lei com as leis da propagação da luz e da radiação do calor no espaço.

Também representaria progresso nessa direção, se fosse possível considerar os corpos no *estado gasoso* de agregação como consistindo de moléculas ponderáveis conectadas com moléculas elétricas positivas como satélites, de modo que as moléculas ponderáveis seriam diferentes para diferentes tipos de gás, mas seus satélites elétricos seriam os mesmos para todos os tipos de gás, e se fosse possível derivar todas as leis de equilíbrio e movimento, incluindo a propagação da luz e do calor em todos esses gases, da lei fundamental da ação elétrica. Sem alguns desses resultados decisivos, não se pode esperar que a teoria da composição elétrica das moléculas ponderáveis seja firmemente estabelecida. Em particular, não parece haver razão suficiente para as grandes diferenças nas relações químicas entre os diferentes tipos de moléculas ponderáveis.

Nesse caso, isso dependeria principalmente da diferença das moléculas ponderáveis, da qual dependeria a diferença dos pesos específicos dos gases na mesma pressão. Em cada molécula de gás, além do mesmo satélite para todas [as moléculas de gás], teria de ser feita uma distinção entre uma molécula elétrica positiva e uma molécula elétrica negativa, cada uma das quais pode ser simples ou composta de várias [moléculas], e essas últimas podem ser constituídas de forma divisível ou indivisível,⁵⁵⁹ o que poderia servir de base para as diversas diferenças entre os gases.

Além disso, os movimentos das moléculas elétricas em torno umas das outras, que formam

⁵⁵⁹Em alemão: *scheibar oder unscheidbar zusammengesetzt*. Essa expressão pode ser traduzida como “constituídas de forma divisível ou indivisível” ou “constituídas de forma separável ou inseparável”.

os *núcleos ponderáveis* das moléculas de gás, dependeriam de influências externas de acordo com as leis de indução e, portanto, seriam variáveis, mas sempre seriam restaurados após a remoção dessas influências externas, de modo que, além dessas mudanças temporárias, elas formariam diferenças permanentes nos gases.

18.11 Gelo, Água, Vapor

No caso do gelo, da água e do vapor, supondo que as moléculas ponderáveis sejam compostas de moléculas elétricas positivas e negativas, surge o caso interessante de que diferenças essenciais como as dos estados agregados do gelo, da água e do vapor sejam produzidas meramente pelo calor, ou seja, meramente por diferenças no movimento das moléculas.

Aqui, a primeira coisa a se considerar é que uma força de repulsão mútua deve ser atribuída às moléculas ponderáveis de vapor, que as moléculas ponderáveis de gelo e água não possuem. Entretanto, essa força repulsiva mútua só pode ser atribuída a essas moléculas ponderáveis como resultado de satélites elétricos (positivos) de mesmo tipo em sua companhia, que as moléculas ponderáveis de água devem ter recebido durante sua transformação em vapor de água. Disso também decorre que o vapor de água deve se comportar eletricamente *de forma positiva* em relação à água da qual foi formado, o que parece ser confirmado pelas ações elétricas das máquinas elétricas⁵⁶⁰ representadas pelas caldeiras a vapor. Portanto, não é necessário fazer referência ao *atrito do vapor* nas paredes dos tubos de descarga ao explicar a eficácia dessas máquinas elétricas a vapor.⁵⁶¹

As⁵⁶² moléculas ponderáveis (núcleos ponderáveis) dos gases e vapores não exercem uma força repulsiva umas sobre as outras, de onde se conclui que a causa das forças expansivas dos gases e vapores não pode estar em suas moléculas ponderáveis. No entanto, toda molécula ponderável, incluindo toda molécula ponderável de gás ou vapor, atrai uma molécula *elétrica positiva*, que, portanto, só pode permanecer na esfera de ação de uma molécula ponderável se girar em torno dela a uma determinada velocidade e, assim, formar um *satélite* da molécula ponderável. As moléculas ponderáveis de gases e vapores, quando acompanhadas por esses *satélites* formados por moléculas elétricas positivas imponderáveis, exercem, por meio de seus satélites, *forças repulsivas* umas sobre as outras que são muito maiores do que as *forças atrativas* que suas próprias moléculas ponderáveis exercem umas sobre as outras. As forças expansivas de todos os gases e vapores derivam dessas forças repulsivas de tais satélites. Além disso, na mesma pressão e temperatura, os pesos específicos dos gases e vapores são quase proporcionais aos pesos de suas moléculas ponderáveis, porque o peso dos satélites é pequeno em comparação com o peso das moléculas ponderáveis.

A transformação da *água em gelo* pela remoção do calor, ou seja, pela desaceleração da rotação das moléculas elétricas positivas e negativas em torno uma da outra, deve resultar primeiro na *formação de um filamento*, já que as ações dos polos elétricos positivos e negativos que cada molécula ponderável possui, são mais proeminentes com a *rotação lenta* do que com a *rotação rápida*. Como resultado dessa ação dos polos elétricos, que é mais proeminente com a rotação lenta, duas moléculas vizinhas com seus polos de tipos diferentes se unirão mais firmemente em fileiras, nas quais ficarão penduradas como as partes de um fio.

Mas de onde vêm esses satélites na água quando ela evapora quando o calor penetra?

⁵⁶⁰Em alemão: *Elektrisirmaschinen*.

⁵⁶¹Em alemão: *Dampf-Elektrisirmaschinen*. Ver [Gre94] e [Far43].

⁵⁶²[Nota de Heinrich Weber:] O parágrafo seguinte, relativo às “forças expansivas de gases e vapores”, é encontrado no final do tratado original, mas foi inserido aqui por uma questão de contexto.

18.11.1 Ponto de Fusão do Gelo e Ponto de Ebulição da Água

Embora toda molécula ponderável seja composta por uma molécula elétrica positiva e uma molécula elétrica negativa, ainda assim podem ocorrer grandes diferenças entre as moléculas elétricas positivas e negativas em diferentes moléculas ponderáveis, conforme as moléculas elétricas sejam simples ou múltiplas, apenas as últimas, tanto as elétricas positivas quanto as elétricas negativas, devem ser *indivisíveis* de acordo com a seção 18.5, ou seja, elas podem consistir em qualquer número de moléculas elétricas de mesmo tipo, nenhuma das quais, no entanto, está a uma distância $> \rho$ de qualquer uma das outras. Assim, uma molécula ponderável pode ser formada por n moléculas elétricas indivisíveis positivas, e por n moléculas elétricas negativas igualmente indivisíveis, que, ao girarem uma em torno da outra, são mantidas juntas por sua atração mútua. Essas moléculas são chamadas de *elementos materiais ponderáveis* ou *átomos químicos*, cujos pesos são proporcionais aos números n .

Elas devem conter todos os átomos químicos descobertos até o momento. Se, por exemplo, o *hidrogênio* fosse um corpo constituído de *partículas elementares ponderáveis*, a saber, aquele para o qual $n = 1$, seria fácil concluir que o *corpo elementar ponderável* para o qual $n = 12$ teria de ser o *carbono*, aquele para o qual $n = 14$ teria de ser o *nitrogênio*, aquele para o qual $n = 16$ teria de ser o *oxigênio*, e assim por diante até o *ouro*, para o qual $n = 197$, e a *prata*, para a qual $n = 216$. Isso resultaria, portanto, em um grande número de substâncias elementares ponderáveis que não podem ser decompostas em outras substâncias elementares ponderáveis, mas possivelmente em moléculas elétricas positivas e negativas, ou seja, em n moléculas elétricas simples, similares e indivisivelmente compostas, onde n denota um número inteiro, ao qual não seria atribuído *peso*, mas uma *massa* que nem sempre deve ser considerada infinitesimal.

No entanto, agora surge a pergunta: qual é a mudança real que ocorre no *gelo no ponto de fusão* e também qual é a mudança que ocorre na *água no ponto de ebulição*?

É essencial que o calor flua para o corpo sem alterar sua temperatura. O calor que entra aumenta a força viva no corpo; entretanto, as partículas ponderáveis não participam desse aumento da força viva; esse aumento da força viva deve, portanto, ocorrer nas partículas elétricas de mesmo tipo localizadas entre as partículas ponderáveis e que se movem independentemente delas.

Nos *condutores metálicos*, supõe-se que as partículas elétricas positivas estejam em movimento circular em torno das moléculas ponderáveis para as quais são atraídas, e que esse movimento circular seja acelerado quando o calor penetra e possa ser propagado pelo movimento balístico da vizinhança de uma molécula ponderável para a vizinhança de outra.

Nos *condutores úmidos*, especialmente na água, a mesma suposição é feita com a diferença de que o movimento circular das partículas elétricas positivas ao redor de cada molécula ponderável, *acelerado* pelo calor que penetra, não se transforma em um movimento balístico e, portanto, *não se propaga de forma alguma* da vizinhança de uma molécula ponderável para a vizinhança de uma molécula vizinha, mas persiste com a molécula anterior e, por meio do aumento das forças centrífugas, afrouxa a conexão firme entre essa molécula e as *moléculas de gelo* vizinhas, de acordo com Mossotti, o que provoca a transformação do gelo em água.

Entretanto, as moléculas de água ponderáveis com seus *satélites* formados por moléculas elétricas positivas se repelem como moléculas de ar e, conseqüentemente, se espalhariam em um espaço maior se uma certa *pressão externa* não fosse exercida sobre elas. Entretanto, se essa *pressão externa* permanecer constante enquanto as forças centrífugas dos satélites

continuarem a aumentar devido ao influxo contínuo de calor, a *pressão externa* será superada e a água, que foi transformada em vapor de água, se espalhará como o ar.

18.11.2 Formações Cristalinas de Corpos Sólidos

Todas as moléculas ponderáveis e seus satélites exercem forças de impulsão e forças direcionais ou rotacionais entre si, que são de particular importância para a formação de cristais.⁵⁶³

A grande variedade e diversidade dessas formações cristalinas, entretanto, provavelmente se deve principalmente às diferenças nas próprias moléculas ponderáveis, ou seja, às diferenças no *número* de moléculas elétricas positivas e negativas pelas quais elas são formadas. As moléculas ponderáveis, que são formadas por uma molécula elétrica positiva e uma negativa, são bem diferentes daquelas formadas por 10 ou 100 moléculas elétricas positivas e negativas de cada tipo.

Todas as moléculas elétricas positivas, bem como todas as elétricas negativas, que formam uma molécula ponderável, devem estar contidas no espaço de uma esfera de diâmetro $< \rho$, de modo que a distância entre duas delas seja sempre menor que ρ . O número de moléculas elétricas de mesmo tipo que podem ser contidas em tal espaço depende, obviamente, da razão entre seu diâmetro e ρ . Se essa proporção for uma fração muito pequena, então o número de moléculas elétricas de mesmo tipo nesse espaço pode ser muito grande, o que torna óbvia a possibilidade de que esse número exceda 10 ou 100.

A essa diferença no *número*, tanto de moléculas elétricas positivas quanto negativas, das quais as moléculas ponderáveis são formadas, acrescenta-se agora a multiplicidade de diferentes órbitas e velocidades de todas essas moléculas em suas trajetórias, que elas podem realizar no espaço esférico limitado ao diâmetro ρ , o que naturalmente deve ter uma grande influência nas interações das moléculas ponderáveis às quais elas pertencem e na cristalização dependente delas, porque uma molécula elétrica movendo-se em círculo em torno de uma molécula ponderável representa um ímã em sua ação sobre moléculas semelhantes, e essa ação, mesmo que desapareça a uma distância mensurável, pode ser muito grande a distâncias moleculares, completamente de acordo com as forças químicas que se pretende representar aqui, já que a limitação a distâncias moleculares é característica de todas as forças químicas.

18.12 O Éter Luminífero é um Meio Estático Formado por Moléculas Elétricas Positivas

As moléculas elétricas positivas podem estar em repouso se estiverem em um espaço *com fronteiras rígidas* e distribuídas de tal forma que cada molécula, na medida em que estiver cercada por outras moléculas, esteja no centro de todos os pares de moléculas, de modo que as duas moléculas de cada par estejam simetricamente localizadas a distâncias iguais em lados opostos.

Se essa molécula fosse deslocada um pouco em qualquer direção, por exemplo, do Norte para o Sul, e assim se aproximasse das moléculas do lado Sul, mas se afastasse das moléculas do lado Norte, ela seria levada de volta do Sul para o Norte, o que deixa claro que ela estava em *equilíbrio estável* sem esse deslocamento.

⁵⁶³Em alemão: *Krystallbildung*. Essa expressão pode ser traduzida como “formação de cristais” ou “formação cristalina”.

O mesmo que se aplica às moléculas em um espaço *firmente limitado*, também se aplica a incontáveis moléculas que preenchem de igual modo um espaço ilimitado, e qualquer perturbação do equilíbrio dessas moléculas seria propagada pelo movimento ondulatório, como é facilmente visto.

Mas apenas as ondas de luz e de calor se propagam no espaço cósmico, por isso, se apenas as moléculas elétricas positivas podem ser distribuídas no espaço cósmico da maneira indicada, então parece que estas moléculas elétricas positivas no espaço cósmico devem formar o *éter luminífero*.

Para uma determinada massa molecular, a velocidade com que as ondas de luz se propagam nesse meio elétrico depende da magnitude da força que atua sobre a molécula empurrada em um determinado deslocamento. Essa força é tanto maior quanto maior o número de moléculas na unidade de volume.

Cada uma dessas ondas, mesmo que se origine de um único ponto, se propaga para uma superfície e a direção de oscilação das moléculas individuais nesta superfície pode então ser perpendicular à superfície (ondas longitudinais) ou coincidir com a superfície (ondas transversais). Como o comprimento de todas as ondas de luz é muito pequeno, mas deve estender-se por um grande número de camadas moleculares, segue-se que o número de moléculas deve ser muito grande, mesmo em pequenas partes do volume, do que concluímos que o volume das moléculas é muito pequeno, se apenas *ações à distância* ocorrerem entre moléculas do éter luminífero, no qual as dimensões dos corpos que agem uns sobre os outros desaparecem em comparação com as distâncias entre eles.

A conhecida alta velocidade de propagação das ondas luminosas prova ainda que a distância média entre as moléculas no éter luminífero pode ser apenas ligeiramente maior que ρ , onde a menor mudança nesta distância está associada a uma mudança muito grande nas forças de repulsão, porque para a distância ρ esta força repulsiva torna-se infinitamente grande.

Com o grande número de moléculas resultantes disso, mesmo em partes muito pequenas do espaço, a massa de *cada* molécula elétrica positiva *individual*, devido à massa infinitesimal de todas essas moléculas tomadas em conjunto, *torna-se infinitesimal em um grau muito maior*.

18.13 Nota [de Heinrich Weber, o Editor do Vol. 4 das *Obras de Weber*]

O manuscrito original de Wilhelm Weber contém, além das Seções apresentadas aqui, quatro outras Seções com os seguintes títulos:

1. A teoria da reflexão e espalhamento dos feixes elétricos⁵⁶⁴ não é aplicável à fundamentação de uma teoria dos meios dinâmicos.
2. Teoria do éter luminífero no espaço cósmico como um meio estático.

⁵⁶⁴Em alemão: *Die Theorie der Zurückwerfung und Zerstreung elektrischer Strahlen*. Essas palavras também podem ser traduzidas como “a teoria da reflexão e dispersão dos raios elétricos”, ver as Notas de rodapé 387 e 388 nas páginas 209 e 210. Esse assunto foi discutido por Weber em 1878, [Web78a, Seções 7 e 8, págs. 389-395], com tradução para o inglês em [Web21f, Seções 7 e 8]. Ver, em particular, as Seções 15.7 e 15.8 do Capítulo 15 com a tradução em português desse artigo de 1878. Cada feixe elétrico seria um sistema de partículas eletrizadas (com massas iguais e cargas iguais) seguindo uma à outra na mesma trajetória. Weber estudou a reflexão e o espalhamento de dois feixes elétricos.

3. Sobre as teorias ondulatórias dos chamados meios dinâmicos.
4. Leis de reflexão e espalhamento das moléculas de gás que se encontram em movimento balístico de acordo com a teoria dinâmica dos gases quando elas colidem, assumindo que as moléculas de gás são compostos de moléculas elétricas positivas e negativas.

Essas Seções estavam destinadas a encontrar o seu lugar entre as Seções 18.4 e 18.5. No entanto, Wilhelm Weber excluiu posteriormente estas Seções do tratado, razão pela qual elas não são publicadas aqui. Note-se, no entanto, que todo o espólio foi entregue à *Königlichen Bibliothek zu Göttingen* — *Biblioteca Real de Göttingen* para guarda, preservando assim a possibilidade de conhecer o conteúdo destas Seções.

Capítulo 19

[Weber, 1894b] Sobre a Galvanometria (Resumo)

Wilhelm Weber^{565,566}

(Do 10º Volume dos *Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* — *Tratados da Sociedade Real de Ciências de Göttingen*)^{567,568}

19.1 Primeira Parte

A Primeira Parte deste Tratado lida com a determinação precisa da resistência de um determinado *padrão de resistência* em unidades absolutas.

A determinação de uma *resistência* em unidades absolutas baseia-se na determinação de uma *força eletromotriz* e de uma *intensidade de corrente* em unidades absolutas; de acordo com a lei de Ohm,⁵⁶⁹ a resistência de uma corrente é igual ao quociente da força eletromotriz que atua na corrente dividida pela intensidade da corrente gerada por essa força no circuito.

No entanto, a *força eletromotriz* exercida pela força geomagnética T em um condutor fechado enquanto ele está em movimento pode agora ser determinada com mais precisão em unidades absolutas. Se denotarmos por S a área delimitada pela projeção do condutor fechado no plano normal a T e por dS a alteração dessa área no elemento de tempo dt como resultado do movimento, então a força eletromotriz exercida por T no condutor fechado é,

⁵⁶⁵[Web94h] com tradução para o inglês em [Web24e]. Esse trabalho só foi publicado postumamente em 1894.

⁵⁶⁶As Notas de Wilhelm Weber são representadas por [Nota de Wilhelm Weber:]; as Notas de Heinrich Weber, o Editor do Volume 4 das *Obras* de Wilhelm Weber, são representadas por [Nota de Heinrich Weber:]; todas as outras Notas são de minha autoria.

⁵⁶⁷[Nota de Heinrich Weber:] Esse ensaio é um resumo do tratado “Zur Galvanometrie — Sobre a Galvanometria”, *Obras* de Wilhelm Weber, Volume IV, página 17, que provavelmente foi planejado para ser publicado nos *Annalen* de Poggendorff.

⁵⁶⁸Ver [Web62] com tradução para o inglês em [Web24d].

⁵⁶⁹Ver a Nota de rodapé 200 na página 112.

em unidades absolutas

$$e = \frac{TdS}{dt} .$$

Não é necessário que todas as partes do condutor fechado participem do movimento; uma parte do condutor pode permanecer em repouso, se apenas o movimento da parte restante for tal que os valores de S sempre possam ser determinados com exatidão.

Além disso, a *intensidade da corrente produzida por essa força eletromotriz no condutor fechado* seria fácil de determinar em unidades absolutas com o auxílio de um *galvanômetro tangente*⁵⁷⁰ se a ação da corrente na bússola fosse forte o suficiente para ser medida com precisão. Como esse não é o caso, no entanto, o galvanômetro tangente, no qual o multiplicador forma um círculo largo em torno de uma bússola muito pequena,⁵⁷¹ deve ser trocado por um *galvanômetro muito sensível*, no qual o multiplicador envolve a bússola de forma muito apertada.

Esse galvanômetro sensível pode agora ser construído de forma que, assim como ocorre com o galvanômetro tangente, *no equilíbrio*, a tangente da deflexão da bússola em relação ao meridiano [magnético] seja proporcional à intensidade da corrente; no entanto, o *fator* pelo qual essa tangente deve ser multiplicada para fornecer a intensidade da corrente em unidades absolutas, que tem o valor conhecido $rT/2\pi$ para o galvanômetro tangente quando r é o raio do círculo multiplicador, é *desconhecido* para um galvanômetro sensível no qual os enrolamentos do multiplicador estão muito próximos da bússola.

No entanto, mesmo que esse fator tivesse sido determinado, o que é possível medindo o *amortecimento* exercido pelo multiplicador na bússola em movimento quando o circuito está fechado,^{572,573,574} não seria possível fazer uso dessa determinação porque a bússola nunca atinge o *equilíbrio* presumido sob a influência da corrente gerada pela força eletromotriz

⁵⁷⁰Em alemão: *Tangenten-Boussole*. O galvanômetro tangencial (também denominado galvanômetro tangente ou galvanômetro de tangente) foi inventado por Johan Jakob Nervander (1805-1848), [Ner33], [Pou37], [VS08] e [Sih21]. Friedrich Kohlrausch discutiu medições de correntes com esse galvanômetro, [Koh83, Capítulos 64 e 65, págs. 188-192].

⁵⁷¹Ver a Nota de rodapé 467 na página 242.

⁵⁷²[Nota de Wilhelm Weber:] Se denotarmos por e a base dos logaritmos naturais e por $e^\lambda : 1$ a razão entre dois arcos de oscilação sucessivos da bússola sob a influência do *amortecimento* exercido sobre a bússola pelo multiplicador quando o circuito está fechado, onde λ é chamado de decremento logarítmico e é determinado a partir das observações da bússola oscilante; se t denota o período de oscilação da bússola sem amortecimento e k seu momento de inércia, então o fator procurado é

$$= \pi \sqrt{\frac{k\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}{2w\lambda t^3}} .$$

Aqui, w tem o significado de resistência da corrente, à qual o multiplicador pertence, de acordo com as unidades absolutas, sendo que a determinação de seu valor é precisamente a tarefa de medição da resistência, para a qual é necessária a determinação da intensidade da corrente de acordo com as unidades absolutas. No entanto, mesmo que essa intensidade de corrente i só possa ser representada com o auxílio desse fator como uma função de w , equacionar o quociente e/i de acordo com a lei de Ohm com a resistência w leva a uma equação na qual w é a única quantidade desconhecida cujo valor é determinado por ela. Entretanto, uma vez que w tenha sido encontrado dessa forma, o fator acima também é determinado e pode ser usado para medir todas as intensidades de corrente no mesmo circuito.

⁵⁷³O decremento logarítmico (em alemão: *das logarithmische Dekrement*) é definido como o logaritmo da razão entre quaisquer dois picos sucessivos. Por exemplo, se o decremento logarítmico é $\log(x_{n-1}/x_n) = 0,17887$, então $x_{n-1}/x_n = 10^{0,17887} = 1,50963$.

⁵⁷⁴Ver a Nota de rodapé 191 na página 105 para ver como Gauss e Weber definiam o período de oscilação.

$e = TdS/dt$, mas *sempre oscila* devido à variabilidade de e .

Contudo, a regularidade dessas oscilações depende do fato de que a ação da corrente produzida pela força eletromotriz $e = TdS/dt$ sobre a bússola está concentrada em um intervalo de tempo no meio da oscilação, que corresponde apenas a uma parte muito pequena do período de oscilação. Para aumentar essa ação momentânea o máximo possível, o condutor fechado é movido em um curto período de tempo de forma que o valor de S mude do mínimo S_0 para o máximo S^0 ou vice-versa. Esse movimento do condutor fechado é chamado de *impulso de indução*,⁵⁷⁵ e a soma da força eletromotriz exercida por ele, de acordo com a lei de Ohm, é dada por

$$\int edt = \pm (S^0 - S_0) T ;$$

portanto, se w denota a resistência constante desconhecida do condutor fechado, a soma da corrente produzida por ele é

$$\int idt = \frac{1}{w} \int edt = \pm \frac{S^0 - S_0}{w} T ,$$

de acordo com a qual é encontrada a resistência desconhecida

$$w = \frac{e}{i} = \frac{\int edt}{\int idt} = \pm \frac{(S^0 - S_0)T}{\int idt} .$$

Se a alteração na velocidade angular⁵⁷⁶ da bússola causada por esse choque de indução for denotada por γ , então, no caso de um galvanômetro sensível e adequadamente construído, γ seria proporcional à soma de corrente $\int idt$ causada pelo choque de indução, exatamente como no caso do galvanômetro tangente; no entanto, o fator pelo qual γ deve ser multiplicado para fornecer $\int idt$ em unidades absolutas, que no caso do galvanômetro tangente tem o valor conhecido $[r/2\pi] \cdot [k/m]$, é desconhecido no caso desse galvanômetro sensível, em que os enrolamentos do multiplicador estão muito próximos da bússola; no entanto, esse fator também pode ser determinado medindo-se o amortecimento exercido pelo multiplicador sobre a bússola em movimento quando o circuito está fechado. Se, como na Nota anterior, o decremento logarítmico resultante desse amortecimento for denotado por λ , esse fator será

$$= \sqrt{\frac{k\tau}{2w\lambda}} ,$$

se τ denotar o período de oscilação da bússola sob a influência do amortecimento, ou, se t denotar o período de oscilação com o circuito aberto, [neste caso esse fator será dado por:]

$$= \sqrt{\frac{kt\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}}}{2w\lambda}} .$$

No entanto, com um galvanômetro tão sensível quanto o necessário para esses experimentos, é de grande importância que esse fator seja válido exatamente no mesmo instante em que são feitas as outras observações do galvanômetro necessárias para a medição da resistência.

⁵⁷⁵Em alemão: *Induktionsstoss*. Essa expressão pode ser traduzida como impulso de indução, impulso indutivo, choque indutivo, choque de indução, pulso indutivo ou pulso de indução.

⁵⁷⁶Em alemão: *Drehungsgeschwindigkeit*.

Portanto, é particularmente importante *organizar os impulsos de indução* de modo que as duas quantidades γ e λ possam ser determinadas simultaneamente a partir das oscilações observadas da bússola.

O método mais simples que fornece isso é o *método de retorno* descrito por Gauss nos *Abhandlungen über elektrodynamische Maassbestimmungen, Widerstandsmessungen — Tratados sobre Medições Eletrodinâmicas, Medições de Resistência*, Apêndice C.^{577,578,579} De acordo com isso, a bússola é colocada em oscilações tais que um alongamento maior a sempre se alterna com um menor b , onde a e b podem ser observados com muita precisão. O resultado é então

$$\lambda = \log \frac{a}{b} ,$$

$$\gamma = \frac{\pi}{t} \left(\frac{a^2 + b^2}{\sqrt{ab}} \right) \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\lambda}{\pi}} ,$$

ou, mais precisamente, se considerarmos o valor do decremento logarítmico λ_0 , que também permanece quando o circuito é aberto, e colocarmos $\lambda_0 + \lambda = \lambda_1$, $t_0 = t\sqrt{1 + \lambda_0^2/\pi^2}$, em que t_0 denota o período de oscilação observado com o decremento logarítmico λ_0 ,

$$\lambda_1 = \log \frac{a}{b} ,$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{\pi^2 + \lambda_0^2}}{t_0} \cdot \left(\frac{a^2 + b^2}{\sqrt{ab}} \right) \cdot e^{-\frac{\lambda_1}{\pi} \arctan \frac{\lambda_1}{\pi}} .$$

Se as equações encontradas anteriormente forem adicionadas, ou seja, se λ_0 for levado em consideração,

$$\int idt = \gamma \cdot \sqrt{\frac{kt\sqrt{1 + \frac{\lambda_0^2}{\pi^2}}}{2w(\lambda_1 - \lambda_0)}} ,$$

$$w = \frac{(S^0 - S_0)T}{\int idt} ,$$

será fácil calcular a resistência w a partir dos valores observados:

$$a, b, \lambda_0, t_0, k, \frac{1}{2}(S^0 - S_0), T.$$

A certeza e a precisão dos resultados das observações feitas de acordo com essas regras dependem, no entanto, como é evidente, principalmente do *arranjo* do galvanômetro usado para esse fim e da outra parte do circuito fechado que pode ser movida para fins de impulsos de indução. A solução dessa tarefa mais sutil da galvanometria, que diz respeito ao arranjo mais adequado de tal aparelho de medição, forma, portanto, o assunto principal desta Parte [do artigo].

⁵⁷⁷Em alemão: *Zurückwerfungsmethode*. Essa expressão pode ser traduzida como método de retorno, de retrocesso, de retrospectiva, de recuo ou retroativo. Ver [Gau38], [Web39], [Max54a, Vol. 2, Artigo 750, págs. 388-390] e [WK68, pág. 108, Nota 13].

⁵⁷⁸[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. III, pág. 441.

⁵⁷⁹[Web52b, pág. 441 das *Obras de Weber*] com tradução para o inglês em [Web21e, Apêndice C, pág. 404].

É fácil perceber que não se trata apenas de uma questão de grande *sensibilidade* do galvanômetro, que deve ser tão grande que a corresponda a um número muito grande de divisões de escala, de modo que o valor de a possa ser obtido de forma confiável a partir das observações feitas na escala até uma fração muito pequena dela; mas também é importante que b esteja em uma proporção conveniente com a , para que o valor de λ também seja obtido com certeza até uma fração muito pequena. Além disso, a precisão da observação de acordo com o método de retorno exige que, como a duração de um choque de indução não pode ser facilmente reduzida a menos de 1 segundo, o período de oscilação da bússola seja de cerca de 20 a 30 segundos e, por fim, que a bússola seja fornecida com haste transversal⁵⁸⁰ e pesos adequados para que seja possível determinar seu momento de inércia com toda a precisão e exatidão.

Se apenas a sensibilidade do galvanômetro fosse levada em consideração, seria importante identificar a menor e, ainda assim, precisamente observável bússola, que poderia ser cercada bem de perto pelo multiplicador, e então determinar a força do fio⁵⁸¹ e a seção transversal do multiplicador adequadamente; no entanto, a *atenuação* não seria grande o suficiente para determinar λ com precisão.

Como $\lambda = \log(a/b)$, e a pode ser considerado como determinado pelas exigências feitas sobre a sensibilidade do galvanômetro, é óbvio que, para obter com certeza o valor de λ até a menor fração dessa grandeza, a seguinte condição deve ser atendida, a saber

$$\left(\frac{\lambda db}{d\lambda}\right)^2 = b^2 \left(\log \frac{a}{b}\right)^2 = \text{máximo},$$

consequentemente $\lambda = 1$ ou $a/b = e = 2,718\dots$

No entanto, a exigência de um amortecimento tão forte só pode ser atendida se o *magnetismo da bússola for mais intenso*, o que pode ser facilmente obtido aumentando as dimensões da bússola proporcionalmente em comprimento e espessura sem reduzir significativamente a sensibilidade.

Mas como, com relação à sensibilidade, esse aumento da bússola não deve ir além do necessário para fins de amortecimento, uma bússola tão fortemente magnética ainda teria um período de oscilação muito curto. Para elevar esse período de oscilação para 20 a 30 segundos, é mais conveniente formar com a bússola do multiplicador um *sistema astático* conectando firmemente um ímã completamente idêntico com um eixo direcionado opostamente acima do multiplicador e suspendendo-o através de um fio metálico elástico que seja tão forte que o período de oscilação do sistema seja produzido da maneira prescrita.⁵⁸²

Depois disso, é essencialmente apenas uma questão de regulamentações apropriadas para a *força do fio* e para a *seção transversal do multiplicador*.

É fácil perceber que é mais vantajoso se a resistência do multiplicador for igual à resistência da parte restante do circuito fechado, de acordo com isso a *razão l/s* do comprimento l do fio do multiplicador e sua seção transversal s pode ser considerada como dada de

⁵⁸⁰No texto original: *virga transversalis*.

⁵⁸¹Em alemão: *die Stärke des Drahts*. Essa expressão pode ser traduzida como a força ou espessura do fio.

⁵⁸²O adjetivo “astático” é utilizado na física com o significado de não ter tendência a assumir uma posição ou direção definida. Uma agulha astática pode ser uma combinação de duas agulhas magnetizadas paralelas que possuem momentos magnéticos iguais, mas com seus polos voltados para os lados opostos, isto é, em posição antiparalela. Essa montagem protege o sistema da influência do magnetismo terrestre. Ele foi inventado por Ampère, [Amp21] e [LA98]. Um sistema anterior composto de uma única agulha magnetizada também havia sido criado por Ampère, [Amp20c, pág. 198] com tradução para o português em [CA09, pág. 133], [Amp20a, pág. 239] e [Amp20b, pág. 2], ver também [AC11, págs. 60-63] e [AC15, pág. 57].

acordo com a lei de Ohm.

Além disso, com relação ao enrolamento regular do fio, pode-se presumir que a *forma retangular da seção transversal do multiplicador* seja a mais adequada, que é determinada pelos dois lados retangulares a e b , sendo que o último é o horizontal, que é dividido ao meio pelo meridiano da bússola.

No entanto, os valores de a e b também devem satisfazer agora à condição de que, para uma dada área ab , qualquer alteração na proporção de a para b enfraqueceria a sensibilidade, supondo que a posição do lado retangular interno voltado para a bússola permaneça inalterada e apenas os lados retangulares externos possam ser deslocados. Essa condição leva à igualdade do valor médio do torque exercido sobre a bússola por todos os elementos de corrente na superfície externa do multiplicador correspondente ao lado horizontal do retângulo com o valor médio do torque exercido sobre a bússola por todos os elementos de corrente nas superfícies laterais do multiplicador correspondentes ao lado vertical do retângulo.

Se, para simplificar a equação entre a e b resultante dessa condição, considerarmos o caso em que a bússola ocupa apenas um espaço muito pequeno no centro do multiplicador e as superfícies externa e interna do multiplicador formam cilindros concêntricos ao seu redor; então, se definirmos o raio do cilindro menor como $= 1$, a seguinte equação entre a e b será obtida, a saber:

$$\log \frac{1 + a + \sqrt{(1 + a)^2 + b^2}}{1 + \sqrt{1 + b^2}} = \frac{3(1 + a)^2 - 1}{2(1 + a)\sqrt{(1 + a)^2 + b^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}} .$$

Por fim, outra condição é obtida ao permitir que a e b cresçam simultaneamente, respeitando a relação especificada entre a e b , e com a posição do lado interno do retângulo voltado para a bússola permanecendo inalterada, e calculando assim o crescimento associado do volume do multiplicador $ls = v$. Se a razão l/s dada anteriormente como constante for então denotada por c , de acordo com a qual se encontra a seção transversal do fio $s = \sqrt{v/c}$, o resultado será o *número* crescente de *enrolamentos do multiplicador* $2ab/s = 2ab\sqrt{c/v}$. A magnitude do torque exercido na bússola por uma determinada corrente que passa pelo multiplicador pode agora ser calculada como uma função do valor de a ou b , e segue-se daí que, à medida que a ou b aumenta, esse torque também aumenta no início, mas depois se torna máximo e, se a ou b aumentasse ainda mais, ele diminuiria novamente. Portanto, daí surge a condição adicional de considerar para a ou b o valor para o qual esse torque é máximo.

Se, para simplificar a equação resultante, nos atermos ao caso de um multiplicador circular descrito anteriormente, obteremos a seguinte equação para a :

$$\log \frac{(1 + a)\sqrt{(1 + a)^2 - 1} + (1 + a)^2 + 1}{\sqrt{(1 + a)^2 - 1} + 2(1 + a)} = \frac{[(1 + a)^2 - 1]^{3/2}}{(1 + a)[(1 + a)^2 + 1]} ,$$

de onde segue $a = 2,0951$ e então, de acordo com as relações anteriores, se encontra:

$$b = 1,86178 ,$$

$$v = 100,364 ,$$

$$l = 10,0182 \cdot \sqrt{c} .$$

Se o raio do cilindro menor, que foi colocado $= 1$, for denotado por ε , obtém-se:

$$a = 2,0951 \cdot \varepsilon ,$$

$$b = 1,86178 \cdot \varepsilon ,$$

$$v = 100,364 \cdot \varepsilon^3 ,$$

$$l = 10,0182 \cdot \sqrt{c\varepsilon^3} .$$

Por fim, as observações fornecidas como exemplos no Tratado comprovam a grande precisão dos resultados que podem ser alcançados com instrumentos cuja configuração corresponde, mesmo que aproximadamente, às regulamentações fornecidas. Para cumprir exatamente todas as normas, todos os instrumentos teriam de ser completamente reprojitados. Pareceu suficiente ter mostrado que a parte *galvanométrica* das observações poderia ser realizada com tanta precisão de acordo com essas normas que não era de forma alguma inferior à parte *magnética* das observações para determinar o magnetismo T da Terra e que a incerteza inevitável da determinação da resistência absoluta resultante dessa parte das observações acabou sendo ainda menor do que a resultante da última parte.

Todo o *aparato de medição* necessário para a determinação absoluta da resistência mediria, no entanto, ser construído da maneira mais completa e perfeita durante todo o tempo, se fosse uma questão de determinação definitiva de um *padrão normal de resistência*, com *cópias de padrão* geralmente distribuídas e utilizadas, das quais seria necessário o conhecimento mais exato de seu valor em *unidades absolutas*, a fim de poder transferir esse conhecimento para todas as outras resistências comparadas com ele. Seria, então, muito conveniente configurar o próprio *aparelho de medição* de modo que o circuito fechado do mesmo formasse o *padrão normal*, porque somente repetindo a *medição absoluta* de tempos em tempos é possível obter a certeza total de que o padrão normal realmente permaneceu inalterado. — A realização do objetivo principal de tal determinação dependeria, no entanto, das *cópias do padrão*, em particular da distribuição geral e da aplicação que elas encontrariam, bem como de sua igualdade garantida com o padrão normal. Para esse último propósito, foram discutidas a precisão dos métodos de cópia e o complemento mais apropriado ao aparelho de medição.

19.2 Segunda Parte

A Segunda Parte do Tratado discute a possibilidade de que as medições absolutas de resistência possam ser realizadas *de diferentes maneiras*, de acordo com princípios completamente diferentes.

A *resistência* é uma propriedade do corpo ponderável pelo qual a corrente passa. Essa propriedade deve ter sua origem na constituição peculiar do próprio corpo e, portanto, deve, com pleno conhecimento dessa constituição, ser diretamente determinável a partir dela, independentemente da consideração de todas as circunstâncias que não afetam diretamente a constituição do corpo, portanto, independentemente, *em primeiro lugar*, da consideração das forças variáveis que agem sobre os fluidos elétricos contidos no corpo, *em segundo lugar*, da consideração dos movimentos nos quais esses fluidos são colocados por essas forças, *em terceiro lugar*, da consideração das ações produzidas por esses movimentos.

Como não é possível tal determinação *direta* da resistência devida à natureza do próprio corpo, por falta de conhecimento dessa natureza, essa resistência só pode ser conhecida *indiretamente a partir da experiência*, por meio da observação cuidadosa do comportamento dos corpos (em relação à eletricidade) sob diferentes condições e pela determinação do que é *constante* neles.

Se o corpo forma um anel ou um circuito fechado no qual uma corrente i é *produzida* — uma força eletromotriz e atua sobre os fluidos elétricos contidos nele e, assim, a corrente i é produzida no corpo, — a observação exata dessa força eletromotriz e e dessa intensidade de corrente i mostra, mesmo nos casos em que ambas têm valores muito diferentes, que cada corpo tem um valor definido e constante da *razão* e/i . — A propriedade do corpo que lhe fornece esse valor constante de e/i é chamada de *resistência*.

Se, no entanto, o corpo forma um circuito fechado no qual a corrente i está *presente*, então a continuidade da corrente está ligada a certas ações que podem ser designadas pelo nome de *trabalho elétrico* A ,⁵⁸³ e a observação exata das intensidades de corrente i e dos trabalhos elétricos A mostra que cada corpo tem um valor certo e constante da razão A/i^2 . A propriedade do corpo, em virtude da qual ele tem esse valor constante, poderia agora, com igual direito, ser chamada de *resistência*; a única questão é se esse valor constante é *idêntico* ao anterior.

Se esse fosse o caso, o que pressupõe que as duas propriedades com nomes idênticos tivessem a mesma base na natureza do corpo, então seria possível realizar medições de resistência de duas maneiras diferentes, de acordo com dois princípios bastante diferentes, cuja correspondência serviria para confirmar que as duas propriedades eram de fato idênticas. O último método, entretanto, exigiria primeiro uma discussão mais detalhada das *ações associadas à continuação da corrente*, que são descritas pelo nome de *trabalho elétrico*.

Isso ocorre porque essas ações da corrente contínua podem ser parcialmente *diretas* e parcialmente *indiretas*, sendo que ambas podem ser úteis para o propósito de medir a resistência, mas não devem ser confundidos entre si.

Por meio de observação cuidadosa, aprendemos agora a reconhecer a *geração de calor*⁵⁸⁴ no corpo como uma ação associada à duração da corrente. De acordo com a teoria mecânica do calor, entretanto, a geração de calor é considerada como *trabalho* e, portanto, é óbvio reconhecer o *trabalho elétrico* A nessa geração do calor. A questão, entretanto, é se essa ação térmica da corrente contínua é *direta* ou *indireta*. Pois, se fosse indireta, poderia haver outras ações indiretas além dessa, que teriam de ser somados para se obter o “*trabalho elétrico total* A ”.

Se, por exemplo, houvesse um ímã móvel nas proximidades, o movimento do ímã também seria uma ação associada à continuação da corrente,⁵⁸⁵ o que parece ser igualmente justificável ser chamado de trabalho elétrico.

Portanto, foi feita uma tentativa de, *em primeiro lugar*, definir com precisão a ação *diretamente* e, portanto, necessariamente conectada à duração da corrente, que, por ser a [ação] original, merece ser chamada *simplesmente de trabalho elétrico* e, *em segundo lugar*, investigar em particular a relação de cada ação da corrente contínua que conhecemos por experiência própria com esse trabalho elétrico.

⁵⁸³Ver a Nota de rodapé 302 na página 166.

⁵⁸⁴Em alemão: *Wärmeentwicklung*. Essa expressão pode ser traduzida como geração, produção ou desenvolvimento de calor.

⁵⁸⁵Weber está se referindo aqui ao torque exercido por um fio com corrente ao atuar sobre um ímã ou bússola móvel.

É assumida a *constituição molecular do corpo ponderável*, e a *existência de dois fluidos elétricos* entre as moléculas do corpo; por outro lado, a existência de dois fluidos magnéticos é dispensada e, em vez disso, como é bem conhecido, é assumida tal constituição das moléculas ponderáveis, em virtude da qual os fluidos elétricos podem formar *correntes moleculares persistentes* ao redor delas, a partir das quais são explicados todos os fenômenos *magnéticos* e *diamagnéticos* do corpo.

De acordo com isso, o processo de uma corrente contínua consiste no fato de o fluido elétrico ser retirado da corrente molecular de uma molécula do corpo, conduzido em direção à próxima molécula do corpo e atraído para a corrente molecular dessa molécula.

Entretanto, o fluido elétrico é extraído de um fluxo molecular pela *força eletromotriz*. Se essa força eletromotriz estiver presente, ela também continuará a agir sobre o fluido elétrico extraído e *aumentará sua velocidade* até que ele entre novamente no próximo fluxo molecular, de onde se conclui que, se a corrente continuar em todas as correntes moleculares simultaneamente, o fluido elétrico extraído das correntes moleculares anteriores entrará *com uma velocidade maior* do que saiu daí.

Dessa forma, o trabalho direto e necessariamente conectado com a continuidade da corrente i consiste na *amplificação das correntes moleculares* e, se esse trabalho, que pode ser determinado em unidades absolutas, for denotado por A , então $A/i^2 = e/i$ resulta constante para cada corpo, ou seja, os dois princípios, de acordo com os quais se iguala a resistência à razão entre a força eletromotriz e e a intensidade da corrente i produzida por ela, ou à razão entre o trabalho A realizado pela corrente e o quadrado da intensidade da corrente i pela qual ele é realizado, são basicamente *idênticos*.

Portanto, resta apenas determinar a relação entre a *geração de calor*, como uma ação da corrente contínua, e o *trabalho elétrico imediato*.

A experiência mostrou agora que o trabalho equivalente à geração de calor ligado à continuidade da corrente é igual ao trabalho elétrico imediato; pois foi constatado que o trabalho equivalente à geração de calor ligado à continuidade da corrente, em unidades absolutas, dividido pelo quadrado da intensidade da corrente determinada em unidades absolutas, é igual à resistência do corpo determinada em unidades absolutas pela razão e/i .

A partir disso, no entanto, surge a alternativa de que ou a geração do calor em si não é nada além do trabalho elétrico imediato, isto é, a *amplificação das correntes moleculares* no corpo, ou que todo o trabalho elétrico imediato desaparece e é substituído pela geração do calor, talvez por meio de uma interação ainda desconhecida entre fluidos elétricos e térmicos, toda amplificação das correntes moleculares seja convertida em uma geração de calor equivalente ao trabalho.

De acordo com a constituição molecular presumida dos corpos ponderáveis e a *persistência* dos fluidos elétricos em seus movimentos de corrente molecular, a *última alternativa* é agora inadmissível, porque, de acordo com ela, todo o trabalho elétrico imediato que consiste na *amplificação das correntes moleculares* deve *desaparecer* e ser substituído pela geração de calor, ou seja, porque, de acordo com ela, as correntes moleculares amplificadas *não seriam persistentes*, como foi presumido.

O resultado interessante é, portanto, que somente a *primeira alternativa* é compatível com as premissas acima mencionadas da *constituição molecular* dos corpos ponderáveis e da *persistência das correntes moleculares*, pois serve como base da doutrina do *magnetismo* e do *diamagnetismo*, a saber, que a *geração de calor associada à duração da corrente nada mais é do que o trabalho elétrico imediato*, o que só é concebível se *toda a geração de calor em corpos ponderáveis consistir na amplificação das correntes moleculares dos fluidos elétricos nesses*

corpos, de acordo com isso também deixaria de existir um *fluido térmico especial* nos corpos ponderáveis, como ocorreu com o *fluido magnético* com a suposição de correntes moleculares persistentes.

A suposição de um éter distribuído em todos os espaços vazios (também entre as moléculas do corpo ponderável) permaneceria independente disso; mas nesse caso a mediação da transferência de calor de um corpo ponderável para outro distante através desse éter, de acordo com as leis de *radiação* e *absorção*, teria que ser atribuída a uma *interação dos fluidos elétricos com esse éter*, como C. Neumann já tentou justificar para o propósito de sua teoria da rotação do plano de polarização da luz por forças galvânico-magnéticas.⁵⁸⁶

Finalmente, todas as outras ações que, de acordo com a experiência, parecem estar conectadas com a duração da corrente em um corpo ponderável, a saber, todas as *ações eletromagnéticas*, *eletrodinâmicas* e de *indução* em corpos distantes, não resultam, em um exame mais detalhado, como ações da *duração da corrente*, mas como ações da *diminuição da corrente* no corpo; pois mesmo nos casos em que a corrente é mantida inalterada durante essas ações, ainda há uma *diminuição na corrente* com relação a essas ações, que só não é observada porque, nesses casos, além da força eletromotriz *necessária* para manter a corrente no corpo, há outra força eletromotriz que, de outra forma, produziria um *aumento na corrente*, mas que, nesses casos, serve apenas para compensar essa *diminuição na corrente*.

⁵⁸⁶Carl Neumann (1832-1925). Ver [Neu58] e [Neu63].

Capítulo 20

[Weber, 1894c] Comentários sobre o Artigo: “Investigação sobre o Arco Elétrico” do Prof. E. Edlund

Wilhelm Weber^{587,588,589}

No 131º Volume dos *Annalen* de Poggendorff, o professor Edlund, de Estocolmo, relatou experimentos e medições interessantes sobre o *arco elétrico*.⁵⁹⁰ Usando um reostato especialmente configurado para esses experimentos, ele conseguiu manter constante a intensidade da corrente de uma célula de Bunsen⁵⁹¹ de 70 a 80 elementos medida por um galvanômetro tangente,⁵⁹² mesmo quando as pontas de carbono⁵⁹³ usadas para fechar a corrente foram colocadas fora de contato e a diferentes distâncias uma da outra, criando o arco elétrico entre elas. A cada aumento na distância, a resistência do reostato tinha que diminuir, e a cada diminuição na distância, a resistência do reostato tinha que aumentar; além do sinal, no entanto, as medições mostraram que a magnitude da mudança na distância era muito proporcional à magnitude da mudança na resistência do reostato. De acordo com isso, o Sr. Edlund iguala a resistência real nas partes da corrente associadas a uma mudança na distância entre as duas pontas de carbono com a mudança correspondente na resistência do reostato.

No entanto, quando as duas pontas de carbono se aproximaram gradualmente até que

⁵⁸⁷[Web94c] com tradução para o inglês em [Web24a]. Esse trabalho só foi publicado postumamente em 1894.

⁵⁸⁸As Notas de Heinrich Weber, o Editor do Volume 4 das *Obras* de Weber, são representadas por [Nota de Heinrich Weber:]; todas as outras Notas são de minha autoria.

⁵⁸⁹[Nota de Heinrich Weber:] Esse ensaio, que W. Weber escreveu depois de ler o tratado de Edlund, foi encontrado sem título em seu espólio.

⁵⁹⁰[Edl67], ver também [Edl86]. Erik Edlund (1819-1888) foi um físico sueco. A expressão alemã *galvanische Lichtbogen* pode ser traduzida como arco elétrico, arco voltaico ou arco galvânico.

⁵⁹¹A pilha, bateria, célula voltaica ou elemento de Bunsen recebeu esse nome em homenagem a seu inventor, Robert Wilhelm Eberhard Bunsen (1811-1899). Essa bateria elétrica consistia em um ânodo de zinco no ácido sulfúrico diluído e um cátodo de carbono no ácido nítrico concentrado. Os dois líquidos eram separados por um pote de cerâmica poroso. Bunsen substituiu o cátodo de platina da bateria de W. R. Grove (1811-1896) por um eletrodo de carbono.

⁵⁹²Ver a Nota de rodapé 570 na página 296.

⁵⁹³Em alemão: *Kohlenspitzen*.

o contato fosse estabelecido, ocorreu além disso uma redução repentina na resistência no momento do contato, que teve de ser compensada por um aumento considerável na resistência do reostato, que o Sr. Edlund distingue da resistência *real* do pedaço de corrente entre as duas pontas de carbono, porque não tem relação com o comprimento desse pedaço de corrente. O Sr. Edlund considera isso apenas como uma mudança *aparente* na resistência, que tem sua causa em uma *mudança na força eletromotriz equivalente à intensidade de corrente medida*. É óbvio que essa alteração na força eletromotriz deve ocorrer nas pontas de carbono no momento em que o contato é cancelado.

A investigação dessa força eletromotriz que ocorre nas pontas de carbono no momento da remoção do contato forma agora o objeto principal da investigação adicional realizada pelo Sr. Edlund, pela qual ele é guiado pelo fato de que, se E denota a força eletromotriz da célula de Bunsen e L a resistência de todo o circuito, o trabalho elétrico⁵⁹⁴ ou seu equivalente é representado por $E \cdot [E/L]$. Se agora, no momento em que o contato for cancelado, for adicionada a força [eletromotriz] D oposta à força eletromotriz E , que está localizada nas pontas de carbono, a corrente, que era $= E/L$ no contato, seria reduzida em D/L e, da mesma forma, o trabalho elétrico real diminuiria de $E \cdot [E/L]$ para $(E - D) \cdot [(E - D)/L]$.

O Sr. Edlund, por outro lado, cita corretamente fatos e leis segundo os quais essa redução do trabalho elétrico não ocorre quando a corrente continua depois que o contato é removido e, portanto, compara esse fenômeno com os fenômenos de amortecimento, em que o amortecedor, pela força eletromotriz exercida por ele no circuito fechado da corrente original, reduz o trabalho da corrente original, mas para o qual o trabalho da corrente induzida no próprio amortecedor fornece um equivalente. Esse equivalente, diz o Sr. Edlund, é fornecido aqui pelo trabalho necessário para remover as partículas de carbono⁵⁹⁵ das quais o arco se origina.

Agora concordo plenamente com o Sr. Edlund nos dois pontos principais, a saber, *em primeiro lugar*, que no momento em que o contato é rompido, uma força de separação⁵⁹⁶ D é adicionada às pontas do carbono, que é oposta à força eletromotriz E da célula e, *em segundo lugar*, que a soma do trabalho realizado no arco e o trabalho realizado pela corrente no restante do circuito é igual ao trabalho $E \cdot [E/L]$ realizado pela célula de Bunsen durante o contato, logo, para evitar qualquer contradição, um terceiro ponto deve merecer uma maior consideração.

Se a força eletromotriz da célula de Bunsen for a única que atuou no circuito *fechado* de resistência L até o momento, mas a força eletromotriz $= -D$ for adicionada no instante do cancelamento do contato, então, se o circuito for considerado *fechado* mesmo após o cancelamento do contato, com resistência inalterada L , o valor do trabalho elétrico anterior $E \cdot [E/L]$ necessariamente cairia de agora em diante para $(E - D) \cdot [(E - D)/L]$, sem qualquer equivalente para essa perda, exatamente como se uma célula⁵⁹⁷ com uma resistência infinitesimalmente pequena de força [eletromotriz] D tivesse sido inserida *ao contrário* no circuito anterior de força [eletromotriz] E .

Como, no entanto, se o trabalho no circuito e no arco forem combinados, essa redução de trabalho não ocorre de fato, é óbvio que, para eliminar a contradição, é preciso discutir mais detalhadamente se o circuito ainda está realmente *fechado* depois que o contato foi cancelado e se, portanto, o trecho de corrente que fica entre as duas pontas de carbono tem

⁵⁹⁴Ver a Nota de rodapé 302 na página 166.

⁵⁹⁵Em alemão: *Kohlentheilchen*.

⁵⁹⁶Ver a Nota de rodapé 202 na página 114.

⁵⁹⁷Em alemão: *Becher*. Isto é, uma célula, bateria ou elemento voltaico.

uma resistência *real*, como o Sr. Edlund determinou, pois a *resistência real de um condutor* é entendida como a razão constante entre a força eletromotriz que atua nesse condutor e a intensidade da corrente produzida no condutor.

Em minha opinião, não há circuito fechado nem resistência real para o trecho de corrente entre as pontas de carbono que estão sem contato, porque essa resistência se deve apenas a um condutor real, que não está presente entre as pontas de carbono.

Faço distinção entre uma *corrente elétrica fechada* e um *circuito galvânico fechado*, pois todo circuito galvânico fechado também forma uma corrente fechada, mas, ao contrário, nem toda corrente fechada forma um circuito galvânico fechado. A lei de Ohm,⁵⁹⁸ segundo a qual a intensidade da corrente é representada pelo quociente E/L (quando E denota a força eletromotriz e L a resistência), aplica-se somente a *circuitos galvânicos fechados* (ou seja, correntes elétricas em condutores fechados), mas não se aplica a correntes fechadas *sem condutores fechados*.

Supondo que esse seja o caso, trata-se essencialmente de uma questão do que o Sr. Edlund descreveu e mediu como a resistência *real* do trecho de corrente entre as pontas de carbono. Também considero que se trata apenas de uma resistência *aparente*, que tem sua causa em uma *força eletromotriz equivalente à intensidade da corrente medida*.

O Sr. Edlund designa com b a resistência *real* (proporcional à distância entre as pontas de carbono) para uma unidade de distância, a resistência *aparente* com a e coloca, porque a tem sua razão em uma força eletromotriz $= -D$, a intensidade da corrente $= (E - D)/(M + nb)$, se n denota a distância entre as pontas de carbono, em vez de colocá-la $= E/(a + nb)$, como teria de ser se a fosse uma resistência real, assim como nb . Em vez disso, coloco a intensidade da corrente $= (E - D)/M$, porque estou procurando o motivo de toda a resistência *aparente* $a + nb$ na força eletromotriz $-D$.

De acordo com seu cálculo, o Sr. Edlund considera que a força eletromotriz D , expressa em partes da força eletromotriz da célula, é quase constante, a saber

$$D = 0,3239 .$$

Por outro lado, de acordo com meu cálculo, descobri que ela aumenta quase proporcionalmente ao comprimento do arco elétrico, a saber

Comprimento do arco elétrico em partes da escala	D
5	0,377
4	0,371
3	0,362
2	0,355
1	0,349

O ponto essencial a ser considerado nesse cálculo diferente é que, de acordo com seu cálculo, o Sr. Edlund deve procurar uma nova fonte desconhecida para a força eletromotriz D ; de acordo com meu cálculo, a fonte dessa força eletromotriz surge automática e necessariamente das leis da distribuição de eletricidade em um circuito galvânico aberto.⁵⁹⁹

Em um circuito galvânico fechado, o caminho da corrente é coberto por uma superfície na qual a eletricidade livre é distribuída de tal forma que a razão entre a força eletromotriz

⁵⁹⁸Ver a Nota de rodapé 200 na página 112.

⁵⁹⁹Em alemão: *in einer ungeschlossenen galvanischen Kette*. Isto é, em um circuito galvânico não fechado, ou em um circuito galvânico aberto.

e a resistência é igualada em todos os elementos de corrente;⁶⁰⁰ em um circuito galvânico aberto, no entanto, a superfície carregada com eletricidade livre também envolve as duas extremidades do circuito que foram tiradas de contato, assim como ocorre em uma garrafa de autodescarga,⁶⁰¹ na qual as cargas positivas e negativas também se estendem sobre as superfícies dos dois botões do micrômetro de faísca que ficam de frente um para o outro e são separados por um pequeno espaço.

No caso de um circuito aberto, no entanto, o papel desempenhado por essa força eletromotriz distribuída sobre a superfície é bem diferente do caso de um circuito fechado; no último caso, ela não tem influência alguma sobre o valor da força eletromotriz total E , porque o valor integral das forças eletromotrizes exercidas por cada partícula em todos os elementos de uma linha fechada na direção da última é sabidamente zero.⁶⁰² No entanto, o valor integral das forças eletromotrizes exercidas por cada partícula em todos os elementos de uma linha aberta (que forma o circuito aberto) na direção desta última é diferente de zero e, portanto, tem uma influência muito grande no valor da força eletromotriz total E , de modo que, no caso de equilíbrio elétrico (quando o circuito galvânico aberto é cercado por um isolante perfeito), o valor de E é completamente cancelado.

Assim como as cargas nos botões de uma garrafa com autodescarga podem desaparecer no momento da autodescarga, mas são constantemente regeneradas quando a garrafa é continuamente conectada à máquina eletrostática,⁶⁰³ o mesmo se aplica à corrente galvânica quando faíscas surgem entre as extremidades que foram retiradas do contato e formam o arco elétrico. Mesmo que houvesse uma descarga *contínua* de eletricidade das duas extremidades de alguma outra forma que não fosse por meio de um *condutor que fechasse o circuito*, essas cargas e sua influência no valor de toda a força eletromotriz E não desapareceriam.

Se uma quantidade de eletricidade fosse continuamente retirada das duas extremidades (de qualquer outra forma que não seja por um condutor que feche a corrente), que estaria na razão de $n : 1$ para a quantidade que passa pela seção transversal do circuito quando o contato é feito, seria formada uma distribuição de eletricidade tal na superfície do circuito aberto que, em todos os elementos do circuito, a razão entre a força eletromotriz e a resistência seria $nE : L$, de modo que toda a força eletromotriz em todo o comprimento L do circuito igual a nE seria apenas uma fração da força eletromotriz da célula, enquanto o restante desta última, ou seja, $(1 - n)E$, seria completamente cancelado pela influência da distribuição elétrica na superfície do condutor aberto. A carga elétrica na superfície do circuito galvânico após o contato ter sido cancelado exerce, portanto, a força eletromotriz $-(1 - n)E$, a mesma força eletromotriz que foi anteriormente designada como $-D$.

Tudo o que se sabe sobre o processo no arco elétrico, pelo qual a eletricidade é continuamente retirada das duas extremidades do circuito galvânico que estão sem contato, é que ele não é mediado por nenhum condutor que fecha o circuito. Esse processo pode ser

⁶⁰⁰Para uma discussão das cargas superficiais em condutores resistivos conduzindo correntes constantes, ver o livro *A Força Elétrica de uma Corrente: Weber e as Cargas Superficiais de Condutores Resistivos com Correntes Constantes*, disponível em português, inglês e alemão: [AH07], [AH09] e [AH13].

⁶⁰¹Em alemão: *Selbstentladungsflasche*. Isto é, um capacitor ou uma garrafa de Leiden de autodescarga, ver o Capítulo 12, A Garrafa de Leiden e os Capacitores, de [Ass18b], [Ass18a] e [Ass19b].

⁶⁰²Isso é, na nomenclatura atual,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 ,$$

onde $\vec{E}$ representa o campo elétrico Coulombiano devido às cargas livres, C é um circuito fechado de formato arbitrário, e $d\vec{\ell}$ representa um elemento de comprimento infinitesimal do circuito fechado.

⁶⁰³Em alemão: *Elektrisirmaschine*. Isto é, um gerador eletrostático, ou máquina eletrostática.

considerado como consistindo em um pequeno condutor oscilando entre as extremidades que foram desconectadas. Desde que nenhuma outra força agisse sobre esse condutor além da resultante da interação de sua carga elétrica com as cargas das duas extremidades e que, ao ser empurrado contra as extremidades inamovíveis, esse condutor fosse jogado para trás de acordo com as leis da elasticidade, de modo que não perdesse nada de sua força viva,⁶⁰⁴ sua velocidade aumentaria até o infinito e o lugar de um condutor que fechasse o circuito seria ocupado por ele de forma cada vez mais perfeita.

Mas se o condutor não fosse jogado para trás de acordo com a lei elástica, ou se a força viva fosse retirada do condutor oscilante de alguma outra forma e, de fato, sempre a mesma fração da força viva total que ele possuía a cada repetição de seu movimento, sua velocidade logo se aproximaria de um limite em que permaneceria constante. A renovação da força viva retirada do condutor pendular nessa velocidade é o trabalho A realizado pela eletricidade entre as duas extremidades (no arco elétrico) e a seguinte equação serve para determinar esse estado limite:

$$A + nE \cdot \frac{nE}{L} = E \cdot \frac{E}{L} .$$

É fácil perceber que, se as determinações de $(1 - n)E = D$, conforme fornecidas pelo Sr. Edlund, também pudessem ser combinadas com as determinações da periodicidade das descargas através do arco elétrico, da maneira fornecida pelo Sr. Feddersen⁶⁰⁵ para a faísca de descarga de uma garrafa de Leiden, seria possível obter muito mais informações sobre o processo ainda pouco conhecido no arco elétrico.

Se, de repente, as duas pontas de carbono ficassem completamente isoladas uma da outra quando o contato fosse cancelado, o valor de $-D$ saltaria repentinamente de zero para $-E$. Devido ao processo desconhecido entre as pontas de carbono, por meio do qual a eletricidade ainda é transportada de uma ponta de carbono para a outra mesmo após o cancelamento do contato, esse salto repentino no valor de $-D$ é um pouco reduzido, ou seja, de 0 para $-(1 - n)E$. É óbvio, no entanto, que ao aumentar gradualmente a distância entre as pontas de carbono, o valor de $-D$ também deve mudar gradualmente de $-(1 - n)E$ para $-E$, ou seja, D deve aumentar com a distância entre as pontas de carbono, como também foi demonstrado pelas medições de Edlund de acordo com meu cálculo anterior.

⁶⁰⁴Ver a Nota de rodapé 23 na página 25.

⁶⁰⁵Berend Wilhelm Feddersen (1832-1918) foi um físico alemão.

Capítulo 21

Introdução ao Artigo de Weber sobre as Ações Eletroscópicas e Eletrodinâmicas da Eletricidade Livre em Circuitos Fechados

A. K. T. Assis⁶⁰⁶

Wilhelm Weber (1804-1891) discutiu em 1852 nas Seções 28 a 36 de sua Segunda Memória principal sobre *Medições Eletrodinâmicas* duas situações nas quais uma corrente elétrica pode fluir ao longo de um condutor resistivo.⁶⁰⁷

A primeira situação aparece na Figura 21.1.

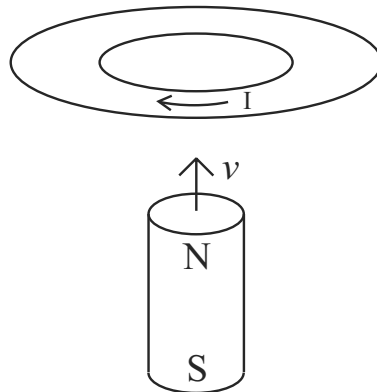


Figura 21.1: Um ímã sendo deslocado com velocidade v ao longo do eixo de um anel resistivo, perpendicular a seu plano, e induzindo nele uma corrente elétrica azimutal I .

Considere um ímã cilíndrico NS cujo eixo é ortogonal ao plano de um anel de cobre circular homogêneo que possui a mesma seção reta em todo lugar. Esse anel é mantido em

⁶⁰⁶Homepage: www.ifi.unicamp.br/~assis

⁶⁰⁷[Web52b] com tradução para o inglês em [Web21e]. Essas Seções haviam sido discutidas detalhadamente no Apêndice A do livro *A Força Elétrica de uma Corrente: Weber e as Cargas Superficiais de Condutores Resistivos com Correntes Constantes*. Ele está disponível em português, inglês e alemão em [AH09], [AH07] e [AH13], respectivamente. Ver também [Ass21c].

repouso no laboratório. Quando o ímã é deslocado com velocidade v ao longo do eixo do anel, ele exerce a mesma força eletromotriz em todos os elementos do anel em consequência desse movimento. Como todos os elementos do anel possuem a mesma resistência, vai ser gerada simultaneamente em todos os elementos do anel uma mesma corrente elétrica devida a esse movimento, fluindo ao longo de sua direção azimutal. O valor da corrente pode depender da distância entre o ímã e o anel. Contudo, ela terá o mesmo valor ao longo da direção azimutal, isto é, ela não vai depender do ângulo azimutal θ ao longo do anel. Disso segue que não pode surgir em qualquer local do anel um acúmulo maior ou menor de carga elétrica positiva ou negativa que varie ao longo do ângulo azimutal θ . Teremos então nesse caso uma corrente fluindo em um circuito resistivo fechado sem qualquer variação da eletricidade livre ao longo da direção azimutal no circuito.

A segunda situação aparece na Figura 21.2.

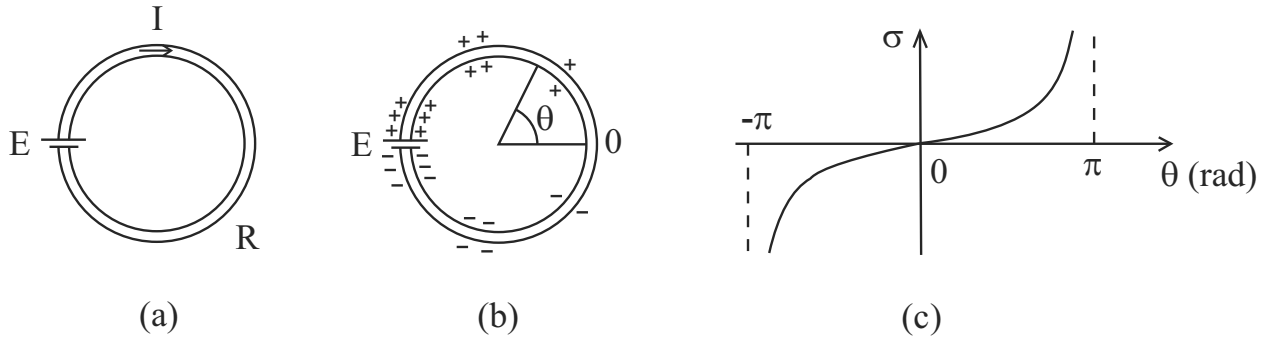


Figura 21.2: (a) Anel resistivo conectado a uma bateria e conduzindo uma corrente constante I . (b) Distribuição de cargas livres ao longo da superfície do anel. (c) Densidade superficial de carga σ ao longo do anel que varia em função do ângulo azimutal θ .

Temos uma bateria de resistência interna desprezível que gera uma voltagem ou força eletromotriz E constante entre seus terminais. O anel tem uma resistência total R e possui uma pequena abertura em um certo local. Quando os dois terminais da bateria são conectados às duas extremidades da abertura do anel, vai ocorrer uma distribuição de cargas ao longo da superfície do anel. Logo vai ser alcançada uma configuração de estado estacionário na qual vai fluir uma corrente constante I em todos os pontos ao longo da direção azimutal θ do anel. Essa corrente vai satisfazer à lei de Ohm.⁶⁰⁸ Nessa situação de estado estacionário a densidade superficial de carga σ (quantidade de carga por unidade de área) ao longo da superfície do anel será constante no tempo, mas sua intensidade vai variar ao longo da direção azimutal θ . Ela vai ser nula no lado oposto à bateria, isto é, em $\theta = 0$ na Figura 21.2 (b). A quantidade de cargas positivas vai aumentar em direção ao terminal positivo da bateria e a quantidade de cargas negativas vai aumentar em direção ao terminal negativo da bateria, como indicado nas Figuras 21.2 (b) e (c).

Em sua Segunda Memória principal sobre *Medições Eletrodinâmicas* publicada em 1852 Weber realizou cálculos pioneiros sobre a distribuição da densidade superficial de carga σ para circuitos resistivos de formatos diferentes que conduziam correntes constantes no tempo. Em particular, ele considerou um fio cilíndrico reto e um anel resistivo. Ele calculou como σ variava ao longo do comprimento do fio cilíndrico. Ele também calculou como σ variava ao longo da direção azimutal do anel.

⁶⁰⁸Ver a Nota de rodapé 200 na página 112.

O artigo que está sendo traduzido no próximo Capítulo foi publicado postumamente em 1894 no Volume 4 das *Obras* de Weber.⁶⁰⁹ Seu objetivo era obter uma equação descrevendo a quantidade total de cargas positivas e negativas distribuídas ao longo de um condutor fechado tendo uma resistência total R e conduzindo uma corrente constante I quando o condutor tinha uma abertura em um local no qual estava conectado aos dois terminais de uma bateria que gerava uma voltagem ou força eletromotriz constante E entre seus terminais. Em particular, Weber considerou a situação na qual a corrente tinha um valor numérico = 1 em um certo sistema de unidades. Nesse caso, a partir da lei de Ohm $E = RI$, a força eletromotriz E e a resistência R possuíam o mesmo valor numérico nesse mesmo sistema de unidades. Esse sistema de unidades poderia ser, por exemplo, o sistema absoluto de unidades criado por Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Wilhelm Weber.⁶¹⁰

Podemos ilustrar o objetivo de Weber com a Figura 21.2, embora nesse artigo póstumo ele não tenha considerado especificamente um anel condutor. Se Weber estivesse considerando este anel nesse trabalho póstumo, ele estaria interessado na quantidade total de carga positiva distribuída entre $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, juntamente com a quantidade total de carga negativa distribuída entre $\theta = 0$ e $\theta = -\pi$, como mostrado nas Figuras 21.2 (b) e (c).

Após essa introdução, apresento a tradução do artigo de Weber.

⁶⁰⁹[Web94e] com tradução para o inglês em [Web24b].

⁶¹⁰[ARW02], [ARW04] e [Ass21d].

Capítulo 22

[Weber, 1894d] Ações Eletroscópicas e Eletrodinâmicas da Eletricidade Livre em Circuitos Fechados

Wilhelm Weber^{611,612}

Cálculo aproximado da quantidade de eletricidade que deve ser distribuída em um circuito fechado se uma força eletromotriz igual à resistência da corrente atuar em um ponto do circuito de modo que a intensidade da corrente em todas as partes do circuito seja $= 1$.

Em um circuito fechado, uma corrente uniforme sem carga só pode existir se as forças eletromotrizes em todos os elementos do circuito forem proporcionais às resistências dos elementos.⁶¹³ Se essa proporcionalidade não ocorrer, a intensidade da corrente nos vários elementos será diferente e, como resultado dessas desigualdades, a eletricidade positiva será liberada em alguns pontos do circuito (onde a intensidade da corrente diminui) e a eletricidade negativa será liberada em outros pontos (onde a intensidade da corrente aumenta), ou o circuito ficará carregado.⁶¹⁴ Esse carregamento do circuito resulta em novas forças eletromotrizes, que reduzem as maiores intensidades de corrente e aumentam as menores. As desigualdades remanescentes produzem novas cargas e, portanto, novas forças eletromotrizes, por meio das quais as desigualdades remanescentes das intensidades de corrente passam por uma nova equalização, e isso continua até que seja estabelecida uma determinada carga do circuito na qual essa intensidade de corrente igual possa existir em todos os elementos [do circuito].⁶¹⁵

⁶¹¹[Web94e] com tradução para o inglês em [Web24b]. Esse trabalho só foi publicado postumamente em 1894.

⁶¹²As Notas de Wilhelm Weber são representadas por [Nota de Wilhelm Weber:]; todas as outras Notas são de minha autoria.

⁶¹³Um exemplo dessa situação foi discutido por Weber em 1852, como ilustrado na Figura 21.1. Nesse caso não há variação ao longo da direção azimutal da quantidade de cargas livres distribuídas sobre a superfície do anel. Isto é, a densidade superficial de cargas livres não depende do ângulo azimutal θ .

⁶¹⁴Isto é, o circuito ficará polarizado eletricamente, com uma parte positiva e outra negativa.

⁶¹⁵Um exemplo dessa situação aparece na Figura 21.2 na qual os dois terminais de uma bateria estão conectados às duas extremidades de uma pequena abertura de um anel resistivo. Para que possa existir uma

Essa carga do circuito⁶¹⁶ é de grande importância para a teoria da formação da corrente, mas até agora tem sido de pouca importância para o uso prático, porque é sempre produzida instantaneamente e por si mesma, e suas ações peculiares, que são independentes da corrente [do circuito], são tão pequenas que dificilmente podem ser percebidas até mesmo com os meios mais delicados de observação. Essas ações pouco perceptíveis da carga de um circuito fechado foram chamadas de ações eletroscópicas, para cuja investigação foram feitas apenas poucas e imperfeitas tentativas até o momento.

No entanto, recentemente essas ações eletroscópicas ganharam maior importância prática, por exemplo, nas *máquinas* de Rhumkorff,⁶¹⁷ onde os requisitos para o isolamento dos enrolamentos dos fios para evitar que as faíscas saltem dependem dessa carga, assim como a distância de impacto das faíscas de uma extremidade do fio induzido⁶¹⁸ para a outra [extremidade do fio],⁶¹⁹ e também para a *telegrafia elétrica*, onde a velocidade de sinalização depende essencialmente da velocidade de formação da corrente. Entretanto, essa formação de corrente é bastante retardada se a carga do circuito necessária para uma corrente uniforme for formada sob a influência de um capacitor, por exemplo, como é o caso dos telégrafos submarinos, em que o tubo de metal que envolve o fio isolado forma esse condutor junto com a água ao redor.

Para evitar esse atraso da carga e o consequente atraso dos sinais, será necessário retornar a corrente, em vez de pela terra ou pelo mar, através de um segundo fio condutor isolado do primeiro e envolvido com ele no mesmo cabo. As cargas opostas e iguais que esses dois fios devem receber em cada ponto quando uma corrente é formada, compensam-se mutuamente em sua ação sobre o tubo metálico ao redor, de forma mais perfeita quando a distância entre os dois fios é muito pequena comparada à distância deles até o tubo metálico. Assim, o tubo de metal não assumirá nenhuma carga perceptível e, conseqüentemente, não exercerá nenhuma reação perceptível na formação da carga nos fios confinados [dentro do tubo]. — Ao mesmo tempo, evita-se a indução de correntes no circuito devido às variações do magnetismo da Terra.

Isso deu interesse prático ao estudo das ações eletroscópicas de um circuito fechado e das leis de [distribuição de] carga das quais dependem as ações eletroscópicas. Para esse fim, os experimentos aos quais essa investigação foi confinada até agora não podem mais ser suficientes, ou seja, usar essa carga do circuito fechado para carregar capacitores precisos e eletrômetros ou eletroscópios sensíveis, dos quais deriva o nome das *ações eletroscópicas* do circuito.

Muito importantes para essas investigações são os dados que serão obtidos com o auxílio dos próprios telégrafos submarinos sobre a duração da formação de correntes uniformes; no entanto, é fácil ignorar o fato de que mesmo as observações mais precisas de tais telégrafos não fornecerão determinações exatas dessa duração de formação devido às diversas outras

corrente constante nessa configuração, é necessária uma distribuição de cargas livres ao longo da superfície do anel. A densidade superficial de cargas é constante no tempo no caso de uma corrente estacionária, mas sua intensidade varia ao longo do comprimento do anel. Isto é, a densidade superficial de carga σ varia ao longo do ângulo azimutal θ , como mostrado nas Figuras 21.2 (b) e (c).

⁶¹⁶Ou seja, esse carregamento elétrico que varia ao longo da superfície do circuito resistivo.

⁶¹⁷Em alemão: *Rhumkorff'sche Maschinen*. As máquinas de Rühmkorff, também chamadas de máquinas ou bobinas de indução, receberam esse nome em homenagem a Heinrich Daniel Rühmkorff (1803-1877), um fabricante de instrumentos alemão, [Nor96].

⁶¹⁸Em alemão: *induzierter Draht*. Isto é, o fio no qual flui a corrente induzida.

⁶¹⁹Ou seja, o comprimento das centelhas também depende das cargas superficiais nas duas extremidades do fio entre as quais ocorre a faísca.

influências envolvidas, das quais também depende o tempo entre a sinalização e a observação do sinal. Além disso, com esses telégrafos, as condições mais influentes na formação da corrente são invariáveis e, portanto, fornecem apenas dados isolados nos quais nenhuma lei pode se basear se já não tiverem sido encontradas por outros meios.

As oscilações elétricas oferecem outra maneira, em que correntes uniformes se formam em circuitos fechados, mas apenas de duração muito curta e com mudança de direção. Essas cargas elétricas também são formadas, mas alternadamente com cargas completamente diferentes. A transição de uma carga para outra ou essa formação de uma distribuição diferente [de cargas] está, no entanto, associada a um movimento que é distinto da mesma corrente [fluindo] em todo o circuito, que é diferente nas partes individuais do circuito.⁶²⁰

É evidente que, estritamente falando, uma oscilação síncrona que é a mesma em todas as partes do circuito não pode ocorrer sozinha se a excitação ocorrer em um ponto do circuito, mas está necessariamente conectada a outra oscilação que, embora também deva ser considerada aproximadamente como síncrona, é muito desigual nas diferentes partes do circuito. Dessa última oscilação, surgem diretamente *forças eletrodinâmicas* de acordo com as leis de Ampère,⁶²¹ que modificam a deflexão observada do dinamômetro; além disso, de acordo com as leis da eletrostática e da indução, surgem novas forças eletromotrizes, que modificam a intensidade da corrente e, portanto, também agem indiretamente no dinamômetro e devem ser percebidas e investigadas por observações precisas do dinamômetro.

O elemento do circuito fechado no qual a força eletromotriz ω atua está contido entre as seções transversais aa e bb (Figura 1).

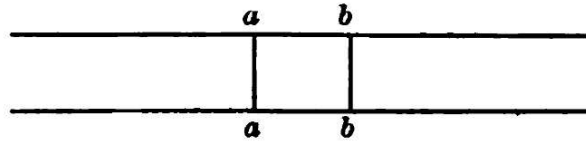


Fig. 1.

A força eletromotriz é distribuída de tal forma que aumenta de ambas as interfaces em direção ao centro proporcionalmente à distância da interface, aa e bb são cobertos em ambos os lados com eletricidade positiva de tal forma que é constante o potencial nos espaços (infinitamente pequenos) entre os dois revestimentos⁶²² de aa e bb . Seja $= +e$ a densidade média desse revestimento.⁶²³ Como $[dV/dx]_{-\varepsilon} = 0$ entre os dois revestimentos, temos os seguintes resultados além dos revestimentos⁶²⁴

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)_{+\varepsilon} - \left(\frac{dV}{dx}\right)_{-\varepsilon} = \left(\frac{dV}{dx}\right)_{+\varepsilon} = 4\pi e ,$$

⁶²⁰Ou seja, no caso de correntes alternadas temos intensidades de corrente diferentes em diferentes pontos do circuito, o que já não ocorre no caso de correntes constantes.

⁶²¹Ver a Nota de rodapé 7 na página 16.

⁶²²Em alemão: *Belegungen*. Essa palavra pode ser traduzida como revestimentos, coberturas, ocupações, atribuições, alocações etc.

⁶²³Isto é, e representa a densidade superficial de carga em cada ponto, ou seja, a quantidade de carga por unidade de área.

⁶²⁴A próxima equação é a condição de contorno em uma interface, sendo V o potencial elétrico e ε uma distância infinitesimal.

se as forças repulsivas forem consideradas como sendo positivas.

Agora, imagine a carga direcionada para bb como estando uniformemente distribuída até o centro entre aa e bb , chame de k à densidade da eletricidade positiva uniformemente distribuída na metade do espaço do elemento em consideração,⁶²⁵ e denomine de α à metade da distância entre bb e aa , temos então

$$k\alpha = e .$$

Logo, nessa região do espaço

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 4\pi k ,$$

se for assumido $d^2V/dy^2 = d^2V/dz^2 = 0$, e se as forças repulsivas forem consideradas como sendo positivas.

Disso segue que

$$\frac{dV}{dx} = 4\pi kx ,$$

se x for calculado a partir de aa , onde $dV/dx = 0$.⁶²⁶ Consequentemente, o valor integral da força eletromotriz é⁶²⁷

$$\int_0^\alpha \frac{dV}{dx} dx = \int_0^\alpha 4\pi kx dx = 2\pi k\alpha^2 = 2\pi e\alpha ,$$

suponha além disso que bb também tenha eletricidade negativa em ambos os lados, de modo que o potencial no espaço (infinitamente pequeno) entre os dois revestimentos [de carga negativa] seja constante. Seja $-e$ a densidade média desse revestimento. Como $[dV/dx]_{+\varepsilon} = 0$ ⁶²⁸ (onde $+\varepsilon$ está no espaço [entre os revestimentos com carga negativa]), isso resulta em

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)_{-\varepsilon} - \left(\frac{dV}{dx}\right)_{+\varepsilon} = \left(\frac{dV}{dx}\right)_{-\varepsilon} = 4\pi e .$$

Se agora imaginarmos que a carga direcionada para aa está uniformemente distribuída até o centro entre bb e aa e chamarmos de $-k$ à densidade da eletricidade negativa uniformemente distribuída na metade do espaço do elemento em consideração, e se denominarmos por α à metade da distância de aa até bb , então

$$k\alpha = e .$$

Temos então nesse espaço

⁶²⁵Isto é, k representa a densidade volumétrica de carga em cada ponto, ou seja, a quantidade de carga por unidade de volume.

⁶²⁶Isto é, $x = 0$ em aa . Nesse ponto $x = 0$ temos $dV/dx = 0$.

⁶²⁷Essa equação apareceu no texto original da seguinte maneira:

$$\int_0^\alpha \frac{dV}{dx} = dx = \int_0^\alpha 4\pi kx dx = 2\pi k\alpha^2 = 2\pi e\alpha .$$

O primeiro sinal de igualdade foi eliminado nessa tradução em português.

⁶²⁸No texto original essa equação apareceu no seguinte formato: $[dV/dx]_{+\varepsilon} = 0$.

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -4\pi k ,$$

se for assumido $d^2V/dy^2 = d^2V/dz^2 = 0$, e se as forças repulsivas forem consideradas como sendo positivas.

Disso segue que

$$\frac{dV}{dx} = 4\pi k(\alpha - x) ,$$

se x for calculado a partir do centro, de tal forma que, para $x = \alpha$, $dV/dx = 0$. Consequentemente o valor integral da força eletromotriz será

$$\int_0^\alpha \frac{dV}{dx} dx = \int_0^\alpha 4\pi k(\alpha - x) dx = 2\pi k\alpha^2 = 2\pi e\alpha .$$

Disso resulta a força eletromotriz para todo o elemento que está sendo considerado como dada por:

$$= 4\pi e\alpha .$$

Vamos colocar essa força eletromotriz igualmente oposta à dada [força eletromotriz] ($-E$), portanto

$$4\pi e\alpha = E .$$

Agora, em vez do revestimento externo de aa , coloque um revestimento na superfície do fio de aa até o ponto que divide pela metade todo o comprimento do fio e denote essa metade do comprimento do fio por L . Deixe que a densidade ε desse revestimento⁶²⁹ cresça de 0 até $[8\alpha/\pi r] \cdot e$ ^{630,631} do ponto bisetor até aa proporcionalmente ao comprimento do fio do ponto bisetor até o ponto em consideração, de modo que, se o fio for muito longo em comparação

⁶²⁹Weber está usando agora o símbolo ε para representar a densidade superficial de carga, isto é, a quantidade de carga por unidade de área.

⁶³⁰[Nota de Wilhelm Weber:] De acordo com Clausius (*Annalen* de Poggendorff, 1852, Volume 86, página 203), em um capacitor, se a denota o raio, c a distância entre as placas, a carga de uma placa é expressa por

$$M = -\frac{a^2}{4c} \cdot F \left[1 + \frac{c}{a\pi} \left(\lg \frac{17,68a}{c} + 2 \right) \right] .$$

A carga da outra placa é dada por

$$N = \frac{a^2}{4c} \cdot F \left[1 + \frac{c}{a\pi} \left(\lg \frac{17,68a}{c} - 2 \right) \right] .$$

Se adicionarmos tanta eletricidade livre N' à eletricidade ligada N de forma que $N + N' = -M$, então $N'/(N + N')$ fornece a eletricidade livre em partes da carga total a . Contudo,

$$\frac{N'}{N + N'} = \frac{4c}{a\pi \left[1 + \frac{c}{a\pi} \left(\lg \frac{17,68a}{c} + 2 \right) \right]} ,$$

ou no caso de um valor muito pequeno de c/a , temos $N'/(N + N') = 4c/a\pi$. No nosso caso, se definirmos 2α no lugar de c e r no lugar de a , então $N'/(N + N') = 8\alpha/r\pi$ será a fração da eletricidade livre em relação à carga total. Se a densidade e corresponder à carga total, então a densidade $[8\alpha/r\pi] \cdot e$ corresponderá à carga livre.

⁶³¹[Cla52].

com sua espessura, a força eletromotriz $(-E/2)$ será distribuída ao longo do comprimento L do fio e sua distribuição pode ser considerada aproximadamente uniforme.

Mas então a carga do comprimento L do fio, através da qual é causada esta distribuição uniforme de metade da força eletromotriz $(-E/2)$, se r denotar o raio do fio, [será dada por:]

$$= \int_0^L 2\pi r \varepsilon dx ,$$

onde

$$\varepsilon = \frac{8\alpha e}{r\pi L} \cdot x ,$$

consequentemente

$$= \int_0^L \frac{2\pi r e}{L} \cdot \frac{8\alpha}{r\pi} x dx = \pi r \frac{8\alpha}{r\pi} e L = \frac{2LE}{\pi} .$$

A mesma quantidade de eletricidade negativa é distribuída na outra metade do fio. Se, portanto, denotarmos o comprimento total do fio $l = 2L$, então

$$\pm \frac{lE}{\pi}$$

será a quantidade de eletricidade positiva ou negativa distribuída no circuito fechado; consequentemente, se

$$E = w ,$$

onde w denota a resistência do circuito, então

$$\pm \frac{lw}{\pi}$$

será a quantidade de eletricidade positiva ou negativa que deve ser distribuída em um circuito fechado através do qual flui a corrente $= 1$, quando a corrente é gerada a partir de um ponto do circuito.⁶³²

⁶³²Weber está escrevendo aqui a lei de Ohm na forma $E = wi$, onde E representa a força eletromotriz atuando em um ponto do circuito. O circuito tem uma resistência total w . Essa força eletromotriz produz uma corrente constante i ao longo do circuito. Caso $i = 1$ em um certo sistema de unidades, então $E = w$ nesse mesmo sistema de unidades. A quantidade total de eletricidade positiva distribuída na metade do circuito será então dada por $lE/\pi = lw/\pi$, enquanto que a quantidade total de eletricidade negativa distribuída na outra metade do circuito será dada por $-lE/\pi = -lw/\pi$, onde l é o comprimento total do circuito que está sendo considerado.

Capítulo 23

[Weber, 1894e] Sobre o Eletrotermismo. (Sobre a Eletricidade e o Calor)

Wilhelm Weber^{633,634}

Sobre o Eletrotermismo.

Sobre a Eletricidade e o Calor.

Depois que o primeiro fenômeno fundamental do *eletromagnetismo* foi descoberto por Oersted,⁶³⁵ outros fenômenos fundamentais também foram descobertos muito em breve, e a teoria do eletromagnetismo foi desenvolvida paralelamente a essas descobertas, de modo que a teoria frequentemente antecipava e fornecia a diretriz para a descoberta desses fenômenos fundamentais.

A situação é bem diferente com os fenômenos fundamentais e a teoria do *eletrotermismo*. Embora a maioria dos fenômenos fundamentais eletrotérmicos tenha sido descoberta antes dos fenômenos eletromagnéticos, a teoria do eletrotermismo permaneceu completamente subdesenvolvida até agora.

Os fenômenos eletrotérmicos fundamentais descobertos até agora são os seguintes:

1. Quando uma turmalina esfria, ela fica carregada positivamente em uma extremidade e negativamente na outra. O inverso é verdadeiro quando ela é aquecida. Hankel, *Elektrische Untersuchungen — Investigações Elétricas*. 9º Tratado (*Abh. d. Königl. Sächs. G. d. W. math.-phys. Klasse*, Volume X, Número IV, 1872).⁶³⁶
2. Uma corrente i em um condutor fechado gera calor em uma parte dele, que tem a

⁶³³[Web94f] com tradução para o inglês em [Web24c]. Esse trabalho só foi publicado postumamente em 1894.

⁶³⁴As Notas de Wilhelm Weber são representadas por [Nota de Heinrich Weber:]; todas as outras Notas são de minha autoria.

⁶³⁵Ver a Nota de rodapé 348 na página 188.

⁶³⁶Wilhelm Gottlieb Hankel (1814-1899) foi um físico alemão. Ver [Han74].

resistência w , no elemento de tempo dt , cujo equivalente mecânico $= wi^2 dt$,⁶³⁷ em que w e i são expressos em unidades absolutas.

3. Uma corrente ocorre em um condutor fechado composto por dois metais diferentes se o condutor tiver uma temperatura desigual nos dois pontos em que os metais diferentes se tocam. (Fenômeno fundamental de Seebeck).⁶³⁸

4. Se uma corrente passa por um condutor composto por dois metais diferentes, que tem a mesma temperatura em todos os lugares, então (além do calor gerado pela corrente nas seções individuais do condutor em proporção às suas resistências) o calor é gerado em uma superfície de contato dos metais e desaparece na outra. (Fenômeno fundamental de Peltier).⁶³⁹

Uma base para uma teoria de eletrotermismo foi buscada na suposição da hipótese de Ampère de correntes moleculares⁶⁴⁰ e em um desenvolvimento adicional dessa hipótese (10º Volume dos *Abhandlungen der Königl. Ges. d. Wissenschaften zu Göttingen*, 1862, “Zur Galvanometrie — Sobre a Galvanometria”, Seção 33,^{641,642} e no 10º Volume dos *Abhandlungen der math.-phys. Klasse der Königl. Ges. der Wissenschaften*, Leipzig, 1871, “Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie — Medições Eletrodinâmicas, Sexta Memória, Relacionada Especialmente com o Princípio de Conservação da Energia”, Seções 19 e 20).^{643,644}

A suposição de correntes moleculares em todos os corpos magnéticos e diamagnéticos leva, como se pode ver facilmente, a uma visão completamente nova do comportamento dos fluidos elétricos em condutores nos chamados estados de equilíbrio eletrostático. Chega-se à conclusão de que os fluidos elétricos nunca estão em repouso, mas em constante movimento em órbitas circulares ao redor das moléculas individuais, de acordo com a qual toda a eletrostática desenvolvida por Poisson deve ser reorganizada.⁶⁴⁵

Além disso, também somos levados a uma nova visão das correntes galvânicas, ou seja, que todos os fluidos elétricos no condutor de corrente, com as chamadas correntes constantes, não se movem em uma velocidade constante, mas que apenas partículas individuais dos fluidos elétricos são arrancadas das correntes moleculares às quais pertencem, passam rapidamente para as próximas correntes moleculares às quais pertencem, até serem arrancadas novamente, e assim por diante.

A força eletromotriz que causa o rompimento, acelera o movimento das partículas arrancadas até que elas entrem no fluxo molecular seguinte. Isso resulta em um aumento da força viva,⁶⁴⁶ que é equivalente ao trabalho mecânico determinado pelo produto da força eletromotriz com a distância entre os dois fluxos moleculares.

Agora, no entanto, foi demonstrado que o trabalho mecânico assim determinado é o trabalho mecânico equivalente ao calor gerado pela corrente no condutor, o que permite concluir que *o calor e a força viva dos fluidos elétricos que se movem nas correntes mole-*

⁶³⁷Esse resultado é devido a Joule. Ver a Nota de rodapé 294 na página 164.

⁶³⁸Ver a Nota de rodapé 212 na página 123.

⁶³⁹Ver a Nota de rodapé 211 na página 123.

⁶⁴⁰Ver a Nota de rodapé 7 na página 16.

⁶⁴¹[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. IV, pág. 91.

⁶⁴²[Web62, Seção 33, pág. 91 das *Obras de Weber*] com tradução para o inglês em [Web24d].

⁶⁴³[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. IV, págs. 291 e 294.

⁶⁴⁴[Web71] com tradução para o inglês em [Web72] e [Web21g]. Esse trabalho está traduzido no Capítulo 9. Ver especialmente as Seções 9.19 e 9.20.

⁶⁴⁵Ver a Nota de rodapé 320 na página 178.

⁶⁴⁶Ver a Nota de rodapé 23 na página 25.

culares são idênticos. Essa é essencialmente a teoria do segundo fenômeno fundamental do eletrotermismo, baseada nas correntes moleculares de Ampère.

Se, no entanto, de acordo com essa teoria do segundo fenômeno fundamental do eletrotermismo, o *calor* é a força viva dos fluidos elétricos que se movem nas correntes moleculares, segue-se que os diferentes graus de temperatura *em um mesmo corpo* devem ter sua causa nas diferentes *velocidades* dos fluidos elétricos que se movem nas correntes moleculares, enquanto as *massas* do fluido elétrico que se move nas correntes moleculares não são diferentes. Isso ocorre porque a massa do fluido elétrico em movimento é dada pela massa sempre igual dos fluidos firmemente conectados ao núcleo da corrente molecular.

No entanto, *corpos diferentes* serão diferentes entre si pela diferença no fluido firmemente conectado aos núcleos das correntes moleculares e, portanto, se *nenhuma carga* estiver presente, também pelas diferentes *massas* do fluido elétrico em movimento.

Se diferentes corpos entrarem em contato com a mesma temperatura, e se as grandes massas dos fluidos elétricos que se movem neles forem denotadas por e e e' e suas velocidades por u e u' , então, de acordo com a definição de igualdade de temperatura de diferentes corpos

$$\varepsilon u^2 = \varepsilon' u'^2 ,$$

onde ε denota a massa elétrica arrancada da primeira corrente molecular e transferida para a outra, ε' denota a massa elétrica arrancada da outra [corrente molecular] e transferida para a primeira. Se as velocidades u e u' pertencentes a dois corpos diferentes na mesma temperatura forem diferentes, as massas ε e ε' também serão diferentes. Portanto, há uma carga nas moléculas, uma carga *positiva* em uma [molécula] e uma carga *negativa* na outra, ou seja, uma força de separação⁶⁴⁷ atua na superfície de contato, que é o *princípio do galvanismo*.

Se denotarmos essa temperatura por t e, além disso, denotarmos por a e a' os calores específicos dos dois corpos, e por b e b' o número de graus de temperatura abaixo de zero para os quais a força viva das correntes moleculares nesses dois corpos se reduziria proporcionalmente a zero, teremos

$$t = \frac{e}{a} u^2 - b = \frac{e'}{a'} u'^2 - b' , \quad (1)$$

já para uma temperatura t' obteremos da mesma maneira:

$$t' = \frac{e}{a} w^2 - b = \frac{e'}{a'} w'^2 - b' ,$$

ou colocando

$$w^2 = u^2 + v^2 , \quad w'^2 = u'^2 + v'^2 ,$$

[obteremos:]

$$t' = \frac{e}{a} (u^2 + v^2) - b = \frac{e'}{a'} (u'^2 + v'^2) - b' . \quad (2)$$

A Equação (1) subtraída de (2) fornece

$$\frac{e}{a} v^2 = \frac{e'}{a'} v'^2 ,$$

ou

⁶⁴⁷Ver a Nota de rodapé 202 na página 114.

$$v'^2 = \frac{e}{e'} \frac{a'}{a} v^2 . \quad (3)$$

Da Equação (1) segue que

$$u'^2 = \frac{a'}{e'} \left(\frac{e}{a} u^2 + b' - b \right) , \quad (4)$$

assim, se adicionarmos (3) e (4), obteremos

$$u'^2 + v'^2 = \frac{a'}{e'} \left[\frac{e}{a} (u^2 + v^2) + b' - b \right] ,$$

ou

$$w'^2 = \frac{a'}{e'} \left(\frac{e}{a} w^2 + b' - b \right) .$$

Da igualdade de temperatura entre os dois corpos, nomeadamente $= t'$, segue-se

$$\eta w^2 = \eta' w'^2 ,$$

onde η denota a massa elétrica arrancada da primeira corrente molecular e transferida para a outra, η' denota a massa elétrica arrancada da outra [corrente molecular] e transferida para a primeira. Disso resulta

$$\frac{\eta}{\eta'} = \frac{a'}{e'} \left(\frac{e}{a} + \frac{b' - b}{w^2} \right) ,$$

ou, como $w^2 = [a/e](t' + b)$,

$$\frac{\eta}{\eta'} = \frac{e}{e'} \frac{a'}{a} \left(1 + \frac{b' - b}{t' + b} \right) .$$

A escolha da razão η/η' (ou seja, a magnitude da força de separação na superfície de contato entre os dois corpos) é, portanto, diferente, dependendo da diferença [no valor] da temperatura t' , se o valor $b' - b$ para os dois corpos for diferente de zero, ou seja, se o número de graus de temperatura abaixo de zero, para os quais a força viva das correntes moleculares desapareceria proporcionalmente, for diferente para um corpo e para o outro.

É óbvio que, para todos os corpos para os quais o valor do calor específico muda mais ou menos com a temperatura, o valor de $b' - b$ deve ser diferente de zero. Esse é provavelmente o caso do bismuto e do antimônio em um grau particularmente alto.

No entanto, essa dependência da magnitude da força de separação na superfície de contato em relação à temperatura contém o princípio do fenômeno fundamental de Seebeck, ou o terceiro fenômeno fundamental eletrotérmico.

Decorre disto o princípio do fenômeno fundamental de Peltier ou do quarto fenômeno eletrotérmico fundamental.

Seja E a quantidade de eletricidade que passa pela seção transversal do condutor circular na unidade de tempo, e sejam u e u' as velocidades com que os fluidos elétricos se movem nas correntes moleculares dos dois corpos (condutores metálicos) dos quais é composto o condutor circular. Então, E flui com a velocidade u do primeiro condutor para o segundo condutor, e E flui com a velocidade u' da camada limite do segundo condutor para a camada seguinte. A força viva das correntes moleculares do segundo condutor na camada limite é,

portanto, aumentada em $E(u^2 - u'^2)$ na unidade de tempo, ou o calor é gerado nessa camada limite, cujo equivalente mecânico é $= E(u^2 - u'^2)$.

Além disso, E flui do segundo condutor para o primeiro condutor com a velocidade u' , e E continua a fluir da camada limite para o primeiro condutor com a velocidade u . A força viva das correntes moleculares do primeiro condutor nessa camada limite é, portanto, reduzida por $E(u^2 - u'^2)$ na unidade de tempo, ou seja, o calor, cujo equivalente mecânico é $= E(u^2 - u'^2)$, desaparece nessa camada limite. Esse é o princípio do fenômeno fundamental de Peltier.

Se passarmos agora do segundo, terceiro e quarto fenômenos eletrotérmicos fundamentais para o primeiro após essa consideração teórica, devemos primeiro observar que a turmalina é um isolante. As correntes moleculares em um isolante são tais que, mesmo sob a influência de uma força de separação, nenhuma partícula é arrancada do fluido no fluxo molecular⁶⁴⁸ e levada para a corrente molecular seguinte. Também há uma condução de calor muito fraca nesse isolante, mas não há uma ausência total de condução de calor, pois as diferentes temperaturas das várias partes de uma turmalina se igualam em um tempo moderadamente longo. Essa condução de calor deve, portanto, ser baseada em um princípio diferente da separação de partículas individuais dos fluidos no fluxo molecular e sua transição para fluxos moleculares vizinhos.

Sem essa migração de partículas elétricas ε com a velocidade u que elas têm nas correntes moleculares (ou seja, com o calor cujo equivalente mecânico é $= \varepsilon u^2$), o calor só pode ser transferido de uma corrente molecular para outra por indução. Essa indução pode ser obtida observando-se que o raio das correntes moleculares às vezes aumenta, às vezes diminui e, portanto, está sempre mudando. Entretanto, se o estado de resfriamento da turmalina pudesse ser explicado dessa forma, ainda assim não seriam explicadas as cargas positivas e negativas associadas nas faces opostas da turmalina. Também está claro que, como essa carga elétrica resultante do resfriamento só ocorre na turmalina e em cristais semelhantes, sua explicação deve estar mais intimamente relacionada à estrutura cristalina, ou seja, às relações posicionais⁶⁴⁹ das correntes moleculares nesses cristais.

Embora a cristalografia forneça informações sobre essas relações posicionais, ela não fornece nenhuma informação sobre as forças pelas quais elas surgiram e são mantidas. Mesmo que a razão para a preservação dessas condições de camada seja descrita pelo nome de solidez (ou elasticidade) do estado agregado, ainda não há conhecimento das leis de interação dos fluxos moleculares (moléculas) entre si, das quais resulta esse estado agregado sólido.

Em geral, seria necessário considerar três tipos de interações, a saber: (1) interações elétricas, cujas leis são dadas, (2) interações da eletricidade com os núcleos ponderáveis das correntes moleculares. Se alguém sustentar que tais interações não ocorrem à distância, a única interação que resta é aquela por meio da qual os núcleos ponderáveis das correntes moleculares permanecem firmemente conectados a uma certa quantidade de um fluido elétrico. Além disso, (3) as interações entre os núcleos ponderáveis dos fluxos moleculares, que eles exercem uns sobre os outros à distância, devem ser levadas em conta. Essas últimas, na medida em que resultam da lei da gravitação, dificilmente seriam levadas em consideração devido ao seu pequeno valor. Embora ainda não saibamos de nenhuma dessas interações que sejam independentes da lei da gravitação, temos motivos para supor que elas existam e que sejam grandes o suficiente para serem de grande importância para a formação dos estados sólidos cristalinos da matéria.

⁶⁴⁸Em alemão: *Molekularströmung*.

⁶⁴⁹Em alemão: *Lageverhältnissen*.

No entanto, com a total ignorância desse tipo de interação, a maneira mais óbvia de explicar a formação dos estados cristalinos sólidos de agregação é investigar mais de perto tudo o que poderia ser causado pelas *interações elétricas entre as correntes moleculares*.

Teorema. Duas correntes moleculares de Ampère, cujos eixos igualmente orientados estão em uma linha reta, se atraem a distâncias maiores e se repelem a distâncias menores.

Teorema. Todo movimento relativo entre dois desses fluxos moleculares de Ampère é amortecido pela interação, ou seja, o movimento mecânico, que consiste em deslocamentos dos fluxos moleculares um contra o outro, é transformado em fluxo molecular (energia térmica).

A lei da interação elétrica nos ensina como é feita a conversão da energia cinética mecânica em energia térmica. Se essas correntes moleculares de Ampère formarem as moléculas de corpos sólidos, então, de acordo com o primeiro teorema mencionado, a solidez desses corpos será explicada pela interação entre essas correntes moleculares em determinadas posições e distâncias.

Briot, *Théorie de la Chaleur — Teoria do Calor*, Introdução, página 2,⁶⁵⁰ remonta a explicação a uma força atrativa entre as partículas ponderáveis $= mm' \cdot a/r^n$ e a uma força repulsiva entre suas duas atmosferas de éter $= mm' \cdot b/r^{n+p}$, por meio da qual, no entanto, apenas a distância das partículas em equilíbrio é determinada, mas não a orientação das linhas retas que as conectam. De acordo com a explicação anterior, essa orientação é dada pelo eixo da primeira corrente molecular, e a orientação da segunda corrente molecular também é determinada pelo fato de que seu eixo deve ser paralelo ao [eixo] da primeira.

Uma série dessas correntes moleculares, todas em uma linha reta e a distâncias iguais, forma uma coluna. Uma segunda coluna idêntica de correntes moleculares é mantida a uma certa distância da primeira, de modo que as correntes com direções opostas ficam próximas umas das outras nas duas colunas. Uma série dessas colunas, todas a distâncias iguais umas das outras e todas em um plano, formam uma camada, que novamente mantém uma camada igual a uma certa distância, e assim por diante.

Dessa forma, obtém-se um sistema fixo de correntes moleculares estendido por todo o espaço, não apenas com determinadas *distâncias* entre as moléculas, mas também com determinadas direções e posições das moléculas em relação umas às outras. Esse sistema fixo seria um sistema cristalino com três eixos de elasticidade mutuamente perpendiculares, dois dos quais teriam os mesmos módulos de elasticidade. Entretanto, não parece que a explicação dos outros sistemas cristalinos possa ser encontrada dessa forma.

⁶⁵⁰Charles Auguste Albert Briot (1817-1882) foi um matemático francês. Ver [Bri69].

Capítulo 24

[Weber, 1894f] Aforismos

Wilhelm Weber^{651,652}

Das categorias de número, espaço e tempo, apenas o *número* pertence à lógica pura ou à ciência pura; o espaço já contém algo hipotético ou retirado da observação (por exemplo, a hipótese de Euclides⁶⁵³ da teoria das paralelas e também a ideia de esquerda e direita, que não são conceitos logicamente definíveis). Assim como acontece com o espaço, o mesmo pode ocorrer com o *tempo*. As relações de passado, presente e futuro, de acordo com nosso conceito de tempo formado para o mundo físico, devem, portanto, também conter algo hipotético, que não seria incondicionalmente válido para o mundo espiritual (para o mundo do pensamento, mas ainda mais para o próprio pensamento).

Compreendemos nosso mundo de pensamento na estrutura de número, espaço, tempo, movimento e assim por diante, sendo que a continuidade e a simplicidade do movimento (que nenhuma coisa pode fazer dois movimentos ao mesmo tempo) são essenciais para o contexto.

Essa estrutura não é mais suficiente se esse mundo de nossos pensamentos também tiver que ser estendido e expandido para a vida espiritual e para a divindade.

O movimento mental do pensamento não pode ser limitado de tal forma que, como o movimento físico, estaria sujeito ao princípio da continuidade e simplicidade (segundo o qual nenhum ser pensante poderia ter dois pensamentos ao mesmo tempo). A possibilidade de uma conclusão exige que três proposições estejam presentes juntas na consciência.

De acordo com a estrutura anterior, formada para o mundo físico, o presente não é *nada*, mas apenas um mero limite entre o passado e o futuro, sem nenhum conteúdo próprio.

Na vida espiritual, a consciência pertence ao presente, que tem um conteúdo essencial (ao qual toda memória também pertence). Portanto, na vida espiritual, o presente é algo real e não apenas um limite entre o passado e o futuro; ele tem um conteúdo real.

Sem a consciência como conteúdo do presente, não há vida espiritual alguma e, para a divindade, até mesmo o conteúdo do presente dado na consciência deve ser infinitamente ampliado.

Mas esse conteúdo requer tempo; na vida espiritual, portanto, o presente repleto de

⁶⁵¹[Web94b] com tradução para o inglês em [Web97] e [Web21a]. Ver também [Ten97]. Esse trabalho só foi publicado postumamente em 1894.

⁶⁵²Todas as Notas são de minha autoria.

⁶⁵³Euclides foi um matemático grego que floresceu ao redor de 300 a. C. Ver [Euc56a] e [Euc09].

consciência não é um mero limite entre o passado e o futuro, mas é uma *camada limite*⁶⁵⁴ entre o passado e o futuro, é um elemento real do tempo.

Na divindade, esse presente repleto de consciência deve ser infinitamente estendido.

A divindade que existisse apenas no presente, no sentido assumido para o mundo físico (onde é a mera fronteira entre o passado e o futuro), que teria existido no passado e que teria que vir a existir no futuro, seria espiritualmente nula ou apenas um ser ilusório.

Nossa capacidade de pensar, sentir e lembrar são os ativos que nos foram dados para gerenciar. Formamos um mundo de pensamentos em maravilhosa conexão com nossos sentimentos. Dessa forma, aprendemos a apreciar a dádiva que nos foi concedida e a honrar e confiar no doador que a concedeu. Esse mundo de pensamentos formado em conexão com nossas sensações também inclui uma ideia de nós mesmos, que, no entanto, pela ideia de nosso nascimento e morte, é limitada ao período de tempo entre nosso nascimento e nossa morte. Embora esse mundo de pensamentos contenha muitas ideias, incluindo o tempo antes de nosso nascimento e depois de nossa morte, nenhuma dessas ideias é sobre nós mesmos. Enquanto vivermos, administraremos o empréstimo⁶⁵⁵ que nos foi concedido e buscaremos continuamente corrigir e completar nosso mundo de pensamento; mas o que já alcançamos é suficiente para incutir em nós a mais alta estima pelo empréstimo e a mais alta confiança naquele que o concedeu, especialmente a confiança de que quem concedeu esse empréstimo continuará a cuidar dele. A convicção de que a verdadeira ordem mundial ultrapassa em muito a ordem de nosso mundo de pensamento baseia-se nessa confiança.

Quando seres materiais separados um do outro no espaço e no tempo interagem, a razão para essa interação está na natureza de ambos *como sendo um todo único*.⁶⁵⁶ As partes interdependentes desse *todo* existem em diferentes pontos no espaço e no tempo. Se existem seres *materiais* que, como um *todo*, não podem ser limitados a um ponto no espaço e no tempo, isso é ainda mais verdadeiro para os seres *espirituais*.

Recebemos a capacidade de sentir, pensar e lembrar. Assim, adquirimos um mundo de pensamento em geral e, em particular, um mundo imaginário, material e espiritual em um contexto causal. A conexão causal leva a uma causa final: Deus. A possibilidade de

⁶⁵⁴Em alemão: *Grenzsicht*.

⁶⁵⁵Em alemão: *Pfund*, ou seja, libra ou dinheiro em geral. Essa palavra está sendo traduzida aqui como empréstimo no sentido genérico.

⁶⁵⁶Em alemão: *in dem Wesen beider als einem Ganzen*. Ou seja, a razão para essa interação entre dois seres materiais reside na natureza de ambos, em conjunto, como um todo.

uma percepção mais profunda do porquê e do para quê não parece ser conferida a nós pela faculdade de sentir e pensar. Um mundo hipotético em conexão causal, que não leva a uma causa última, mas a muitas causas últimas, propriedades de todas as coisas existentes no espaço, é limitado a um mundo corpóreo hipotético;⁶⁵⁷ todo pensamento é excluído dele, conseqüentemente, qualquer *explicação* do mundo corpóreo hipotético também é excluída dele. Pois um mundo corpóreo poderia existir sem ser pensado.

Nas ciências naturais descritivas (incluindo a química), a conexão dada por uma regra é considerada uma *explicação*, sem que a *razão* da regra seja comprovada na natureza dos corpos concebidos, muito menos a razão de todo sentimento e pensamento.

⁶⁵⁷Em alemão: *eine gedachte Körperwelt*. A expressão *Körperwelt* pode ser traduzida como mundo de corpos, mundo corpóreo, mundo corporal, mundo material, mundo físico ou mundo de corpos físicos. A expressão *gedachte* pode ser traduzida como imaginário, imaginado, concebido, hipotético ou pensado.

Parte III

A Eletrodinâmica de Weber Contra as Diferentes Teorias de Campo

Capítulo 25

A Velocidade na Eletrodinâmica de Weber Contra as Velocidades nas Diferentes Teorias de Campo

A. K. T. Assis⁶⁵⁸

Comparo nesse Capítulo a velocidade que aparece na eletrodinâmica de Weber com as velocidades que aparecem em diferentes teorias de campo.⁶⁵⁹

Antes disso mostro que quando damos interpretações diferentes às grandezas que aparecem na mesma fórmula matemática, obtemos teorias diferentes.

25.1 Teorias Diferentes Descritas pela Mesma Fórmula Matemática

Suponha uma força proporcional à seguinte expressão:

$$\frac{mm'}{r^2} . \quad (25.1)$$

Essa força é uma representação matemática da lei de Newton da gravitação? A resposta a essa questão depende dos significados que são fornecidos às grandezas m , m' e r .

Caso m e m' sejam definidos como as massas das partículas que estão interagindo e caso r seja definido como a distância entre elas como representada pela Figura 25.1 (a), então pode-se dizer que essa fórmula é uma representação matemática da lei de Newton da gravitação.

Por outro lado, caso m e m' sejam definidas como as áreas superficiais dos dois corpos que estão interagindo, então a Equação (25.1) não vai mais representar a lei de Newton da gravitação. Da mesma forma, caso m e m' sejam definidas como os volumes dos dois corpos que estão interagindo, então essa Equação também não vai representar a lei de Newton da gravitação. Com essas novas definições das grandezas m e m' teremos teorias que são

⁶⁵⁸Homepage: www.ifi.unicamp.br/~assis

⁶⁵⁹[Ass92a, Apêndice A], [AP92], [Ass94, Apêndice A], [SP13], [Ass13, Seção 14.5], [Ass14b, Seção 15.5 e Apêndice A] e [Ass15a, Apêndice B].

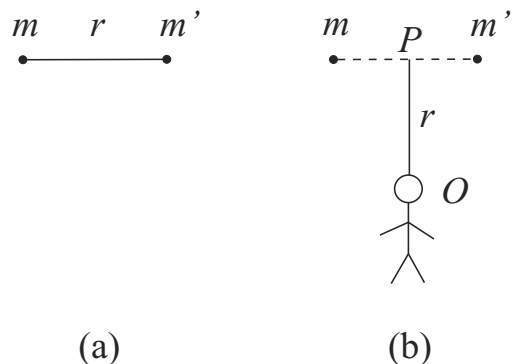


Figura 25.1: Diferentes definições da grandeza r . (a) Como a distância entre as partículas m e m' . (b) Como a distância entre o ponto P e o observador O , onde P é o ponto médio entre m e m' .

diferentes da teoria gravitacional de Newton, embora as forças sejam representadas pela mesma expressão algébrica (pela mesma fórmula matemática).

Na Figura 25.1 (b) considero um observador O e o ponto P que está localizado no ponto médio entre m e m' . Caso a grandeza r a ser utilizada na Equação (25.1) seja definida como a distância entre O e P , como indicado na Figura 25.1 (b), então essa Equação não será uma representação matemática da lei da gravitação universal de Newton, mesmo que m e m' sejam definidas como as massas das duas partículas que estão interagindo. Nesse caso a Equação (25.1) seria uma representação matemática de uma teoria diferente. Logo, nesse caso ela não seria uma representação matemática da lei de *Newton* da gravitação, tendo de receber um outro nome.

25.2 Força Atuando em um Corpo Eletrizado de Acordo com a Teoria dos Campos Eletromagnéticos

Newton apresentou sua lei da gravitação universal em termos de uma força atuando entre corpos materiais. Ele não utilizou o conceito de campo gravitacional.

Por outro lado, na teoria de campos, a força gravitacional é usualmente expressa em termos de um campo gravitacional $\vec{g}$ gerado por alguma massa gravitacional M_g , chamada de massa fonte ou corpo fonte. De acordo com a teoria de campos, esse campo propaga-se no espaço, tipicamente na velocidade da luz. Quando esse campo alcança uma outra massa gravitacional m_g , chamada de massa teste ou massa de prova, esse campo gera uma força $\vec{F}$ sobre essa massa teste dada por:

$$\vec{F} = m_g \vec{g} . \quad (25.2)$$

Analogamente, na teoria de campos eletromagnéticos, a força $\vec{F}$ atuando sobre um corpo eletrizado que possui uma carga q quando esse corpo está na presença de um campo elétrico $\vec{E}$ e de um campo magnético $\vec{B}$ é dada por:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} . \quad (25.3)$$

A história dessa força e os diferentes significados que foram dados à velocidade $\vec{v}$ que aparece nessa equação vão ser discutidos na Seção 25.3.

25.3 Origens e Diferentes Significados da Velocidade $\vec{v}$ que Aparece na Lei de Força do Eletromagnetismo Clássico $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$

O eletromagnetismo clássico é composto de duas partes principais, a saber, as equações de Maxwell e a força eletromagnética que atua sobre uma partícula eletrizada com carga q na presença de um campo elétrico $\vec{E}$ e de um campo magnético $\vec{B}$. As equações de Maxwell relacionam $\vec{E}$ e $\vec{B}$ com suas fontes, a saber, a densidade volumétrica de carga ρ e a densidade de corrente $\vec{J}$.

Já a força eletromagnética especifica como que os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ atuam sobre uma partícula com carga q . No Sistema Internacional de Unidades (chamado de SI ou MKSA) essa força, usualmente denominada de força de Lorentz nos livros didáticos, é dada pela seguinte fórmula:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} . \quad (25.4)$$

Os livros didáticos ao apresentar pela primeira vez essa força se expressam usualmente da mesma forma que Feynman, Leighton e Sands:⁶⁶⁰

Podemos escrever a força $\mathbf{F}$ atuando sobre uma carga q deslocando-se com velocidade $\mathbf{v}$ como

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (1.1)$$

Denominamos $\mathbf{E}$ como sendo o *campo elétrico* e $\mathbf{B}$ o *campo magnético* no local da carga.

Em outro capítulo eles se expressaram da seguinte maneira:⁶⁶¹

A força sobre uma carga elétrica depende não apenas de onde ela está, mas também de quão rápido ela está se movendo. [...] A força eletromagnética total sobre a carga pode, então, ser escrita como

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (13.1)$$

Ela é denominada a *força de Lorentz*.

Afirmações como essas feitas por Feynman, Leighton e Sands são encontradas na maioria dos livros didáticos sobre eletromagnetismo.⁶⁶² Contudo, essas afirmações não têm significado físico, já que elas não especificam o significado da velocidade que aparece na Equação (25.4). A velocidade não é uma propriedade intrínseca de um corpo. A velocidade indica uma relação entre a partícula eletrizada e um outro corpo em relação ao qual a partícula esteja se deslocando. Por esse motivo uma certa partícula eletrizada pode ter simultaneamente várias velocidades diferentes. Por exemplo, ela pode estar simultaneamente em repouso em relação ao solo, $v_1 = 0$; movendo-se em direção a uma segunda partícula eletrizada com uma velocidade v_2 ; afastando-se de um detector de campo magnético

⁶⁶⁰[FLS64, pág. 1.2].

⁶⁶¹[FLS64, pág. 13.1].

⁶⁶²Várias citações podem ser encontradas em [AP92].

com uma velocidade v_3 , afastando-se ainda mais rapidamente de um certo observador com uma velocidade v_4 etc. Qual dessas diferentes velocidades devemos empregar ao utilizar a Equação (25.4)?

Meu objetivo nesse Capítulo é discutir as origens históricas e os diferentes significados da velocidade $\vec{v}$ que aparece nessa equação.

Considere, por exemplo, a situação da Figura 25.2, onde todas as velocidades nessa Figura são dadas em relação ao solo. A partícula teste com carga q desloca-se com velocidade $\vec{v}_q$, o ímã NS desloca-se com velocidade $\vec{v}_m$, o circuito c conduzindo a corrente I desloca-se com velocidade $\vec{v}_c$, o observador O desloca-se com velocidade $\vec{v}_o$, enquanto que d é um detector de campo magnético que desloca-se com velocidade $\vec{v}_d$. A velocidade $\vec{v}$ que aparece na Equação (25.4) deve ser entendida em relação a qual objeto, corpo ou entidade? Ou seja, $\vec{v}$ é a velocidade da partícula q com relação a que?

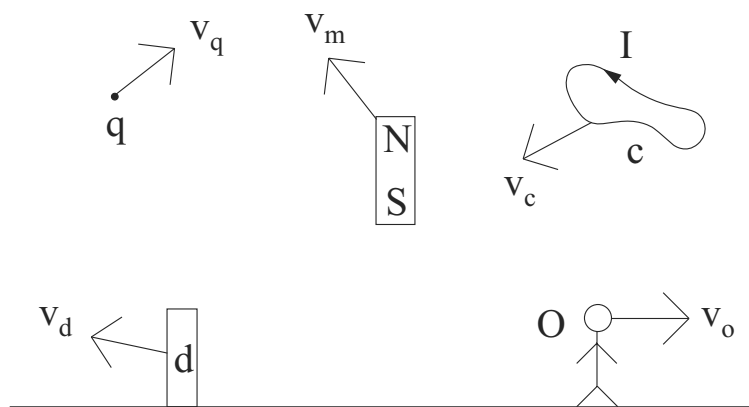


Figura 25.2: Velocidades de vários corpos em relação ao solo.

Algumas possíveis respostas a esta pergunta fundamental:

- Em relação ao espaço absoluto de Newton.
- Em relação ao laboratório, em relação ao solo ou em relação à Terra.
- Em relação ao referencial das estrelas fixas.
- Em relação ao referencial das galáxias distantes.
- Em relação à fonte macroscópica do campo magnético (isto é, em relação ao ímã ou em relação ao fio com corrente).
- Em relação ao movimento médio das cargas microscópicas (em geral elétrons) que geram o campo magnético.
- Em relação ao próprio campo magnético.
- Em relação ao observador.
- Em relação a algum sistema de referência inercial específico.
- Em relação a algum sistema de referência arbitrário, que não precisa ser inercial.
- Em relação ao detector de campo magnético.

- Em relação ao éter.
- Etc.

Nesta Seção apresento a história desta força e as diferentes interpretações que têm sido fornecidas por diversos autores ao longo dos anos para esta velocidade.

25.3.1 Significado para Maxwell: Velocidade em Relação ao Campo Magnético

A força dada pela Equação (25.4) é usualmente chamada de força de Lorentz nos livros didáticos. Contudo, parece que Maxwell foi o primeiro a chegar nela.⁶⁶³

Maxwell apresentou esta força em 1861-1862 em seu artigo sobre as linhas físicas de força,⁶⁶⁴ discutindo-a também em 1864-1865 em seu artigo com uma teoria dinâmica do campo eletromagnético,⁶⁶⁵ assim como em seu livro de 1873, *Tratado de Eletricidade e Magnetismo*.⁶⁶⁶ Ele estava considerando a força sobre um corpo eletrizado, sendo que às vezes se referia a este corpo como um condutor, como um dielétrico ou isolante, como uma partícula, como um elemento de corrente de um circuito elétrico, ou simplesmente como eletricidade.

Maxwell interpretou essa velocidade como sendo a velocidade do corpo eletrizado com carga q deslocando-se em relação ao campo magnético.

Na página 166 de seu artigo de 1861-1862 ele afirmou o seguinte:⁶⁶⁷ “ μ é uma quantidade que possui uma razão constante para a densidade.” A “densidade” se refere aqui à suposta densidade dos vórtices no meio. Na página 283 disse o seguinte: “Proposição IV. Determinar o movimento de uma camada de partículas separando dois vórtices. Seja α , β , γ a velocidade circunferencial de um vórtice, multiplicada pelos três cossenos diretores de seu eixo, respectivamente, como na Proposição II.” Na página 288: “Sejam P , Q , R as forças atuando sobre a unidade das partículas nas três direções coordenadas, sendo essas grandezas funções de x , y , e z .” Na página 342: “[...] F , G , e H são os valores das componentes eletrotônicas para um ponto fixo do espaço, [...]” A força por unidade de carga, que é análoga à grandeza $\vec{F}/q$ da Equação (25.4), foi originalmente escrita como segue em seu artigo de 1861-1862:⁶⁶⁸

$$\left. \begin{aligned} P &= \mu\gamma \frac{dy}{dt} - \mu\beta \frac{dz}{dt} + \frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx}, \\ Q &= \mu\alpha \frac{dz}{dt} - \mu\gamma \frac{dx}{dt} + \frac{dG}{dt} - \frac{d\Psi}{dy}, \\ R &= \mu\beta \frac{dx}{dt} - \mu\alpha \frac{dy}{dt} + \frac{dH}{dt} - \frac{d\Psi}{dz}. \end{aligned} \right\} \quad (77) \quad (25.5)$$

Logo após essa equação Maxwell escreveu o seguinte, minha ênfase.⁶⁶⁹

O primeiro e segundo termos de cada equação indicam o efeito do *movimento de qualquer corpo no campo magnético*, o terceiro termo refere-se a mudanças no estado eletrotônico produzidas pelas alterações de posição ou de intensidade dos ímãs ou correntes no campo, enquanto que Ψ é uma função de x , y , z , e t , que é

⁶⁶³[Mar90, pág. 31], [Rib08], [Cur09, Seção 4.6, págs. 122-128], [Hur10, pág. 22], [Tom12a], [Tom12b] e [Yag20].

⁶⁶⁴[Max62, pág. 342, Equação (77)] e [Max65b, Equação (77)].

⁶⁶⁵[Max65, pág. 484, Equação (D)] e [Max65a, Equação (D)].

⁶⁶⁶[Max54a, Vol. 2, parágrafos 598-599, págs. 238-241, Equações (B) e (10)].

⁶⁶⁷[Max62].

⁶⁶⁸[Max62, pág. 342, Equação (77)].

⁶⁶⁹[Max62, pág. 342, logo após a Equação (77)].

indeterminada no que diz respeito à solução das equações originais, mas que sempre pode ser determinada em qualquer caso a partir das circunstâncias do problema. A interpretação física de Ψ é que ela é a *tensão elétrica* em cada ponto do espaço.

No artigo de 1864-1865 a força por unidade de carga, análoga à grandeza $\vec{F}/q$ da Equação (25.4), foi apresentada como segue, minha ênfase:⁶⁷⁰

As equações completas da *força eletromotriz sobre um condutor móvel* podem agora ser escritas como segue:

Equações da Força Eletromotriz.

$$\left. \begin{aligned} P &= \mu \left(\gamma \frac{dy}{dt} - \beta \frac{dz}{dt} \right) - \frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx}, \\ Q &= \mu \left(\alpha \frac{dz}{dt} - \gamma \frac{dx}{dt} \right) - \frac{dG}{dt} - \frac{d\Psi}{dy}, \\ R &= \mu \left(\beta \frac{dx}{dt} - \alpha \frac{dy}{dt} \right) - \frac{dH}{dt} - \frac{d\Psi}{dz}. \end{aligned} \right\} \quad (D) \quad (25.6)$$

O primeiro termo do lado direito de cada equação representa a força eletromotriz que surge do movimento do próprio condutor. Essa força eletromotriz é perpendicular à direção do movimento e às linhas de força magnética; e se for traçado um paralelogramo cujos lados representem em direção e grandeza a velocidade do condutor e a indução magnética naquele ponto do campo, então a área do paralelogramo representará a força eletromotriz devida ao movimento do condutor, e a direção da força é perpendicular ao plano do paralelogramo.

O segundo termo em cada equação indica o efeito de mudanças na posição ou intensidade dos ímãs ou correntes no campo.

O terceiro termo mostra o efeito do potencial elétrico Ψ . Ele não tem efeito para causar uma corrente circulatória em um circuito fechado. Ele indica a existência de uma força atuando sobre a eletricidade em direção a certos pontos definidos no campo, ou a partir desses pontos.

Em seu livro *Tratado sobre Eletricidade e Magnetismo* Maxwell definiu o campo elétrico $\vec{E}$, que ele representou pela letra alemã $\mathfrak{E}$, nos Artigos 44 e 68. Ele também denominou esse campo elétrico pelo nome de “intensidade eletromotriz:”⁶⁷¹

O Campo Elétrico.

44.] O campo elétrico é a porção do espaço nas redondezas de corpos eletrizados, considerados com referência aos fenômenos elétricos. [...]

Seja e a carga do corpo, e F a força atuando sobre o corpo em uma certa direção, então quando e é muito pequena, F é proporcional a e , ou

$$F = Re,$$

onde R depende da distribuição de eletricidade sobre outros corpos no campo. Se a carga e puder ser feita igual à unidade sem perturbar a eletrização dos outros corpos, teremos $F = R$.

Denominaremos R de intensidade eletromotriz resultante no ponto dado do campo. Quando quisermos expressar o fato de que essa grandeza é um vetor, vamos denominá-la pela letra alemã $\mathfrak{E}$.

⁶⁷⁰[Max65, pág. 484].

⁶⁷¹[Max54a, Vol. 1, parágrafo 44, págs. 47-48].

Analogamente, no Artigo 68 ele mencionou que:⁶⁷²

Intensidade Resultante em um Ponto.

68.] Para simplificar o processo matemático, é conveniente considerar a ação de um corpo eletrizado, não sobre um outro corpo de formato arbitrário, mas sobre um corpo indefinidamente pequeno, carregado com uma quantidade indefinidamente pequena de eletricidade, e colocado em qualquer lugar do espaço no qual alcança a ação elétrica. Ao tornar a carga desse corpo indefinidamente pequena, tornamos desprezível sua ação perturbadora sobre a carga do primeiro corpo.

Seja e a carga do corpo pequeno, e seja Re a força atuando sobre ele quando colocado no ponto (x, y, z) , e sejam l, m, n os cossenos diretores da força, então podemos denominar R a intensidade elétrica resultante no ponto (x, y, z) .

Se X, Y, Z denotam as componentes de R , então

$$X = Rl, \quad Y = Rm, \quad Z = Rn.$$

Ao falar da intensidade elétrica resultante em um ponto, não queremos necessariamente dizer que uma força qualquer de fato está atuando lá, mas apenas que se um corpo eletrizado fosse colocado lá, haveria uma força Re atuando sobre ele, onde e é a carga do corpo.⁶⁷³

Essa força não apenas tende a mover um corpo carregado com eletricidade, mas também a mover a eletricidade dentro do corpo, de tal forma que a eletricidade positiva tende a se deslocar na direção de R e a eletricidade negativa na direção oposta. Portanto, a grandeza R também é chamada de intensidade eletromotriz no ponto (x, y, z) .

Quando queremos expressar o fato de que a intensidade resultante é um vetor, iremos denominá-la pela letra alemã $\mathfrak{E}$. [...]

No *Tratado* de Maxwell o vetor indução magnética foi representado pelo símbolo $\mathfrak{B}$ e suas componentes ao longo das direções x, y e z por a, b e c , respectivamente.⁶⁷⁴ Na notação vetorial moderna esse vetor seria escrito como $\vec{B}$, enquanto que suas componentes seriam B_x, B_y e B_z . O potencial vetor da indução magnética foi representado por Maxwell por $\mathfrak{A}$ e suas componentes por F, G e H , respectivamente.⁶⁷⁵ Na notação vetorial moderna esse potencial vetor magnético é representado por $\vec{A}$ e suas componentes por A_x, A_y e A_z . Os vetores $\vec{B}$ e $\vec{A}$ estavam relacionados pela seguinte equação:⁶⁷⁶

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} . \tag{25.7}$$

A força eletromotriz E devida à indução atuando sobre o circuito secundário foi escrita como segue:⁶⁷⁷

⁶⁷²[Max54a, Vol. 1, parágrafo 68, pág. 75].

⁶⁷³[Nota de Maxwell:] As intensidades elétrica e magnética correspondem, na eletricidade e magnetismo, à intensidade da gravidade, que é comumente denominada por g na teoria dos corpos pesados.

⁶⁷⁴[Max54a, Vol. 2, parágrafo 400, pág. 25].

⁶⁷⁵[Max54a, Vol. 2, parágrafo 405, pág. 29].

⁶⁷⁶[Max54a, Vol. 2, parágrafo 405, pág. 29, Equação (21) e parágrafo 591, pág. 233, Equação (A)].

⁶⁷⁷[Max54a, Vol. 2, parágrafo 598, pág. 239].

$$E = \int \left(P \frac{dx}{ds} + Q \frac{dy}{ds} + R dz ds \right) ds . \quad (5) \quad (25.8)$$

O Capítulo VIII do Volume 2 do *Tratado* de Maxwell foi dedicado à exploração do campo utilizando o circuito secundário. Ele mencionou na página 229 que:⁶⁷⁸ “[...] a ação eletromagnética entre o circuito primário e secundário depende da grandeza denominada por M , que é uma função da forma e da posição relativa entre os dois circuitos.” Ele queria estudar o momento eletrocinético do circuito secundário dependendo da corrente primária i_1 , que denominou como sendo $p = Mi_1$. Na página 230 mencionou que “a parte contribuída pelo elemento ds do circuito é Jds , onde J é uma grandeza que depende da posição e direção do elemento ds .” Na página 232 ele disse que o momento eletrocinético no ponto (x, y, z) era idêntico ao potencial vetor da indução magnética.

A força por unidade de carga representando as equações da intensidade eletromotriz, análoga à grandeza $\vec{F}/q$ da Equação (25.4), foi expressa no *Tratado de Eletricidade e Magnetismo* da seguinte forma:⁶⁷⁹

$$\left. \begin{aligned} P &= c \frac{dy}{dt} - b \frac{dz}{dt} - \frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx} , \\ Q &= a \frac{dz}{dt} - c \frac{dx}{dt} - \frac{dG}{dt} - \frac{d\Psi}{dy} , \\ R &= b \frac{dx}{dt} - a \frac{dy}{dt} - \frac{dH}{dt} - \frac{d\Psi}{dz} . \end{aligned} \right\} \quad (B) \quad (25.9)$$

Ele resumiu estas Equações (B) da seguinte maneira:⁶⁸⁰

Portanto, a força eletromotriz, como definida pelas Equações (B), pode ser escrita na forma quaterniônica,

$$\mathfrak{E} = V.\mathfrak{B} - \mathfrak{A} - \nabla\Psi . \quad (10)$$

Em notação moderna esta Equação (10) de Maxwell pode ser escrita como:

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\Psi . \quad (25.10)$$

Ou seja, esta expressão (25.10) de Maxwell é análoga à Equação (25.4), expressando a força por unidade de carga, a saber, $\vec{F}/q$.

Em seu *Tratado*, logo após apresentar suas Equações (B) para a força eletromotriz, isto é, a Equação (25.9) dada anteriormente, ele disse o seguinte, minha ênfase:⁶⁸¹

Os termos envolvendo a nova grandeza Ψ são introduzidos para dar generalidade às expressões para P , Q , R . Eles desaparecem da integral quando estendidos ao redor do circuito fechado. Portanto, a grandeza Ψ é indeterminada no problema que temos diante de nós, no qual é para ser determinada a força eletromotriz ao redor do circuito. Contudo, encontraremos que quando conhecemos todas as circunstâncias do problema, podemos atribuir um valor definitivo para Ψ , e que ela representa, de acordo com uma certa definição, o *potencial elétrico* no ponto (x, y, z) .

⁶⁷⁸[Max54a].

⁶⁷⁹[Max54a, Vol. 2, parágrafo 598, pág. 239, Equação (B)].

⁶⁸⁰[Max54a, Vol. 2, parágrafo 599, pág. 241, Equação (10)].

⁶⁸¹[Max54a, Vol. 2, parágrafo 598, págs. 239-241].

A grandeza sob o símbolo integral na equação⁶⁸² (5) representa a intensidade eletromotriz atuando sobre o elemento ds do circuito.

Se denotarmos por $T.\mathfrak{E}$, ao valor numérico da resultante de P , Q , e R , e por ϵ , ao ângulo entre a direção dessa resultante e a direção do elemento ds , podemos escrever a Equação (5), [como:]

$$E = \int T.\mathfrak{E} \cos \epsilon ds . \quad (6)$$

O vetor $\mathfrak{E}$ é a intensidade eletromotriz atuando no elemento móvel ds . Sua direção e magnitude dependem da posição e do movimento de ds , e da variação do campo magnético, mas não dependem da direção de ds . Portanto, podemos desconsiderar agora a circunstância de que ds é parte de um circuito, e considerá-lo simplesmente como uma porção de um *corpo em movimento*, que está sob a ação de uma intensidade eletromotriz $\mathfrak{E}$. A intensidade eletromotriz em um ponto já foi definida no Artigo 68.⁶⁸³ Ela também é chamada de intensidade elétrica resultante, sendo a força que seria sentida por uma unidade de eletricidade positiva colocada neste ponto. Obtemos agora o valor mais geral desta grandeza *no caso de um corpo deslocando-se em um campo magnético* devida a um sistema elétrico variável.

Se o corpo for um condutor, a força eletromotriz produzirá uma corrente; se ele for um dielétrico, a força eletromotriz produzirá apenas um deslocamento elétrico.⁶⁸⁴

A intensidade eletromotriz, ou a força sobre uma partícula, tem de ser distinguida cuidadosamente da força eletromotriz ao longo do arco de uma curva, sendo esta última grandeza a integral de linha da grandeza anterior. Ver o Artigo 69.

599.] A intensidade eletromotriz, cujas componentes são definidas pelas Equações (B),⁶⁸⁵ depende de três circunstâncias. *A primeira destas é o movimento da partícula através do campo magnético. A parte da força dependendo deste movimento é expressa pelos dois primeiros termos à direita de cada equação. Ela depende da velocidade da partícula transversal às linhas de indução magnética.*⁶⁸⁶

Se $\mathfrak{V}$ é um vetor representando a velocidade, e $\mathfrak{B}$ um outro vetor representando a indução magnética, então se $\mathfrak{E}_1$ é a parte da intensidade eletromotriz dependendo do movimento,

$$\mathfrak{E}_1 = V.\mathfrak{V}\mathfrak{B} , \quad (7)$$

ou, a intensidade eletromotriz é a parte vetorial do produto da indução magnética multiplicada pela velocidade, isto é, a magnitude da força eletromotriz é representada pela área do paralelogramo, cujos lados representam a velocidade e a indução magnética, e sua direção é normal a este paralelogramo, traçado de tal forma que a velocidade, a indução magnética, e a intensidade eletromotriz estejam em uma ordem cíclica destra.

A Equação (7) seria escrita hoje em dia com notação vetorial da seguinte maneira:

⁶⁸²Isto é, a Equação (25.8) dada anteriormente.

⁶⁸³Neste Artigo 68 Maxwell definiu a intensidade eletromotriz como sendo a força por unidade de carga.

⁶⁸⁴Isto é, Maxwell está afirmando que nesse caso a força eletromotriz produzirá apenas uma polarização elétrica do dielétrico.

⁶⁸⁵Isto é, a Equação (25.9) dada anteriormente.

⁶⁸⁶Isto é, Maxwell está afirmando que ela depende das componentes da velocidade que são ortogonais ao campo magnético $\vec{B}$.

$$\vec{E}_1 = \vec{v} \times \vec{B} . \quad (25.11)$$

É importante enfatizar algumas coisas aqui. As Equações (B) do *Tratado* de Maxwell, equivalentes à Equação (25.9), são análogas à força dada pela Equação (25.4). Maxwell parece ter sido a primeira pessoa a obter essa equação, publicando seus resultados entre 1861 e 1873.

A componente magnética dessa força, a saber, $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$, parece ter sido obtida por Maxwell após considerar a força eletrodinâmica de Ampère exercida por um circuito fechado C_2 conduzindo a corrente i_2 ao atuar sobre um elemento de corrente $i_1 d\vec{\ell}_1$ de um outro circuito. Considere um elemento de corrente $i_1 d\vec{\ell}_1$ localizado em $\vec{r}_1$ em relação à origem O de um sistema inercial de coordenadas, juntamente com um outro elemento de corrente $i_2 d\vec{\ell}_2$ localizado em $\vec{r}_2$. A distância entre esses elementos de corrente é dada por $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$. Seja $\hat{r} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/r$ o vetor unitário apontando de 2 para 1.

Na notação vetorial moderna e no Sistema Internacional de Unidades, a força de Ampère exercida por um circuito fechado C_2 conduzindo uma corrente i_2 ao atuar sobre um elemento de corrente $i_1 d\vec{\ell}_1$ de um outro circuito pode ser escrita como:

$$d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \oint_{C_2} \frac{\hat{r}}{r^2} \left[3(\hat{r} \cdot d\vec{\ell}_1)(\hat{r} \cdot d\vec{\ell}_2) - 2(d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2) \right] = i_1 d\vec{\ell}_1 \times \oint_{C_2} \frac{\mu_0 i_2 d\vec{\ell}_2 \times \hat{r}}{4\pi r^2} . \quad (25.12)$$

Nessa equação $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ kgmC}^{-2}$ é chamada de constante de permeabilidade do vácuo (ou constante de permeabilidade magnética do vácuo, ou constante magnética).

Maxwell, mas não Ampère, definiu então o campo magnético $\vec{B}$ na posição $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ do elemento de corrente $i_1 d\vec{\ell}_1$, campo esse devido ao circuito fechado C_2 conduzindo a corrente i_2 , como sendo dado por:

$$\vec{B}(\vec{r}_1) \equiv \oint_{C_2} \frac{\mu_0 i_2 d\vec{\ell}_2 \times \hat{r}}{4\pi r^2} . \quad (25.13)$$

Com essa definição, a força de Ampère dada pela Equação (25.12) pode então ser escrita como:

$$d\vec{F}_{21} = i_1 d\vec{\ell}_1 \times \oint_{C_2} \frac{\mu_0 i_2 d\vec{\ell}_2 \times \hat{r}}{4\pi r^2} = i_1 d\vec{\ell}_1 \times \vec{B} . \quad (25.14)$$

Maxwell então substituiu esse elemento de corrente $i_1 d\vec{\ell}_1$ por $q\vec{v}$, onde q é a carga do corpo eletrizado e $\vec{v}$ sua velocidade. A força magnética $\vec{F}_m$ atuando sobre esse corpo eletrizado deslocando-se em um campo magnético seria então escrita como:

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} . \quad (25.15)$$

Maxwell interpretava essa velocidade $\vec{v}$ que aparece nas Equações (25.4) ou (25.15) como sendo a velocidade da partícula com carga q ao mover-se em relação ao campo magnético $\vec{B}$. Como mostrado anteriormente, em seu trabalho de 1861 e no Artigo [598] de seu livro de 1873, *Tratado de Eletricidade e Magnetismo*, Maxwell mencionou explicitamente a força atuando sobre “um corpo deslocando-se em um campo magnético.”

25.3.2 Significado para Thomson: Velocidade em Relação ao Meio de Permeabilidade Magnética μ

Em 1881 J. J. Thomson (1856-1940) chegou teoricamente na força magnética dada por $q\vec{v} \times \vec{B}/2$.⁶⁸⁷ Essa expressão tem a metade do valor da expressão análoga dada por Maxwell. Além disso, esta velocidade $\vec{v}$ era, para Thomson, interpretada como sendo a velocidade da carga q em relação ao meio através do qual ela estava se movendo, meio cuja permeabilidade magnética era μ . Para Thomson esta velocidade $\vec{v}$ não era a velocidade da carga q em relação ao campo magnético, nem em relação ao éter luminífero, nem em relação ao ímã ou fio com corrente que gerava o campo magnético $\vec{B}$ e nem mesmo em relação ao observador. Ele chamava esta $\vec{v}$ de velocidade real [*actual velocity*] da partícula de carga q . Em seu artigo ele afirmou explicitamente o seguinte:⁶⁸⁸

Deve ser enfatizado que aquilo que por conveniência chamamos de velocidade real da partícula é, na verdade, a velocidade da partícula em relação ao meio através do qual ela está se movendo [...], meio cuja permeabilidade magnética é μ .

25.3.3 Significado para Heaviside: Velocidade em Relação ao Dielétrico

Em 1889 Heaviside (1850-1925) chegou teoricamente na força magnética atuando sobre uma partícula com carga q como sendo dada por $q\vec{v} \times \vec{B}$, onde $\vec{B}$ era o campo magnético no local da carga. Esse é o mesmo valor que havia sido obtido anteriormente por Maxwell e o dobro do valor que foi obtido por J. J. Thomson.

A interpretação dessa velocidade $\vec{v}$ para Heaviside fica clara a partir do título do seu artigo, a saber:⁶⁸⁹

Sobre os efeitos eletromagnéticos devido ao movimento da eletrificação através de um dielétrico.

Este título mostra que para Heaviside esta velocidade $\vec{v}$ era a velocidade da partícula eletrizada em relação a este meio dielétrico no qual ela estava se movendo.

25.3.4 Significado para Lorentz: Velocidade em Relação ao Éter

Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) publicou em 1895 um artigo intitulado “Tentativa de uma teoria dos fenômenos elétricos e ópticos em corpos em movimento.” Nesse trabalho ele apresentou a força atuando sobre um partícula com carga q deslocando-se com velocidade $\vec{v}$ na presença de um campo elétrico $\vec{E}$ e de um campo magnético $\vec{B}$ na seguinte forma:⁶⁹⁰

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} . \quad (25.16)$$

Sua dedução contém apenas duas páginas que pertencem à Seção I (As equações fundamentais para um sistema de íons localizados no éter) de seu artigo. Apresento aqui a tradução integral dessas duas páginas.⁶⁹¹

⁶⁸⁷[Tho81] e [Whi73a, págs. 306-310].

⁶⁸⁸[Tho81, pág. 248].

⁶⁸⁹[Hea89].

⁶⁹⁰[Lor95], [Pai82, pág. 125] e [Pai86, pág. 76].

⁶⁹¹[Lor95, Seção 1, parágrafo 12, págs. 21-22 e Tabela após a pág. 138].

A segunda parte da força que atua sobre a matéria ponderável

§ 12. Um elemento de corrente, como o que acabamos de considerar, está localizado em um campo magnético produzido por causas externas. De acordo com uma lei conhecida, ele sofre uma força eletrodinâmica

$$[\mathbf{id} \cdot \mathbf{h}],$$

para a qual agora também podemos escrever

$$[\Sigma \mathbf{ev} \cdot \mathbf{h}],$$

ou

$$\Sigma \{e[\mathbf{v} \cdot \mathbf{h}]\}.$$

Em nossa opinião, essa ação resulta de todas as forças exercidas pelo éter sobre os íons do elemento de corrente. Portanto, é razoável supor que a força que atua em um íon individual é

$$e[\mathbf{v} \cdot \mathbf{h}],$$

hipótese essa que queremos estender assumindo, *de modo bem geral*, uma força

$$\rho d\tau [\mathbf{v} \cdot \mathbf{h}]$$

atuando sobre a matéria ponderável do elemento de volume $d\tau$. Para a unidade de carga isso seria

$$\mathfrak{E}_2 = [\mathbf{v} \cdot \mathbf{h}].^{692}$$

Ao combinar esse vetor com a expressão $\mathfrak{E}_1$ considerada anteriormente (parágrafo 9), obtemos para a força total exercida sobre a unidade de carga, isto é, para a *força elétrica*,

$$\mathfrak{E} = 4\pi V^2 \mathfrak{v} + [\mathbf{v} \cdot \mathbf{h}]. \quad (\text{V})$$

Abstemo-nos de expressar em palavras a lei aqui enunciada. Ao elevá-la a uma lei fundamental geral, completamos o sistema de equações de movimento (I)-(V), uma vez que a força elétrica, em conjunto com quaisquer outras forças, determina o movimento dos íons.

No que diz respeito as estes últimos, gostaríamos de introduzir a suposição de que os íons nunca giram.^{693,694}

Lorentz apresentou uma dedução similar em uma série de palestras que ministrou na Universidade de Columbia, em Nova York, em março e abril de 1906. Elas foram publicadas pela primeira vez em 1909 em seu livro *The Theory of Electrons — A Teoria dos Elétrons*.⁶⁹⁵ Cito aqui trechos da segunda edição desta obra, de 1915. Entre colchetes vão minhas palavras e a apresentação moderna de algumas de suas fórmulas (por exemplo, $[\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}]$ é em geral representado hoje em dia por $\vec{a} \times \vec{b}$). Ele usava o sistema CGS de unidades e o que chamava de “elétron” representa uma partícula eletrizada qualquer (a partícula que chamamos hoje

⁶⁹²[Nota de Lorentz:] Se não quisermos considerar uma corrente elétrica normal como uma corrente de convecção, devemos justificar essa fórmula com a suposição de que um corpo no qual ocorre uma convecção experimenta as mesmas ações eletrodinâmicas que um condutor de corrente correspondente.

⁶⁹³[Nota de Lorentz:] Na dedução publicada anteriormente das equações de movimento (La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants — A teoria eletromagnética de Maxwell e sua aplicação aos corpos em movimento), discuti as condições necessárias para isso.

⁶⁹⁴[Lor92].

⁶⁹⁵[Lor09, págs. 14-15] e [O’R65, pág. 561].

em dia de elétron, com carga $q = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ e massa $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, só foi descoberta em 1897). Palavras de Lorentz com minha ênfase:⁶⁹⁶

De qualquer forma temos certamente de falar em tal coisa como a força agindo sobre uma carga, ou sobre um elétron, sobre a matéria carregada, qualquer que seja a denominação que você prefira. Agora, de acordo com os princípios gerais da teoria de Maxwell, *vamos considerar esta força como causada pelo estado do éter e mesmo, como este meio penetra os elétrons, como exercida pelo éter sobre todos os pontos internos destas partículas onde há uma carga.* Se dividirmos todo o elétron em elementos de volume, haverá uma força agindo sobre cada elemento e determinada pelo estado do éter existindo dentro dele. Vamos supor que esta força seja proporcional à carga do elemento, de tal forma que só queremos saber a força atuando por unidade de carga. É a isto que agora podemos chamar apropriadamente de *força elétrica*. A representaremos por $\mathbf{f}$. A fórmula pela qual ela é determinada e que é uma que ainda temos de adicionar a (17)-(20) [equações de Maxwell], é dada por:

$$\mathbf{f} = \mathbf{d} + \frac{1}{c}[\mathbf{v} \cdot \mathbf{h}]. \quad \left[\vec{f} = \vec{d} + \frac{\vec{v} \times \vec{h}}{c} \right]. \quad (23)$$

Como as nossas equações anteriores, ela é obtida generalizando os resultados de experiências eletromagnéticas. O primeiro termo representa a força agindo sobre um elétron em um campo eletrostático; na verdade, neste caso, a força por unidade de carga tem de ser completamente determinada pelo deslocamento elétrico. Por outro lado, a parte da força representada pelo segundo termo pode ser deduzida a partir da lei de acordo com a qual um elemento de um fio conduzindo uma corrente sofre a ação de um campo magnético com uma força perpendicular a ele mesmo e às linhas de força,⁶⁹⁷ ação esta que nas nossas unidades pode ser representada na notação vetorial por

$$\mathbf{F} = \frac{s}{c}[\mathbf{i} \cdot \mathbf{h}], \quad \left[\vec{F} = \frac{i\vec{s} \times \vec{h}}{c} \right],$$

onde $\mathbf{i}$ é a intensidade da corrente considerada como um vetor e s o comprimento do elemento. De acordo com a teoria dos elétrons, $\mathbf{F}$ é composta de todas as forças com as quais o campo $\mathbf{h}$ age sobre os elétrons separados movendo-se no fio. Agora, simplificando a questão ao assumir apenas um tipo de elétrons em movimento com cargas iguais e e uma velocidade comum $\mathbf{v}$, podemos escrever

$$s\mathbf{i} = Ne\mathbf{v}, \quad [i\vec{s} = Ne\vec{v}],$$

se N é o número total destas partículas no elemento s . Portanto

$$\mathbf{F} = \frac{Ne}{c}[\mathbf{v} \cdot \mathbf{h}], \quad \left[\vec{F} = \frac{Ne\vec{v} \times \vec{h}}{c} \right],$$

⁶⁹⁶[Lor15, págs. 14-15].

⁶⁹⁷Isto é, a força é perpendicular ao elemento de corrente e também às linhas de campo magnético.

de tal forma que, dividindo por Ne , obtemos a força por unidade de carga

$$\frac{1}{c}[\mathbf{v} \cdot \mathbf{h}]. \quad \left[\frac{\vec{v} \times \vec{h}}{c} \right].$$

Como uma aplicação interessante e simples deste resultado, posso mencionar a explicação que ele permite da corrente induzida que é produzida em um fio movendo-se através das linhas de força magnéticas. Os dois tipos de elétrons tendo a velocidade $\mathbf{v}$ do fio, são neste caso forçados em direções opostas que são determinadas por nossa fórmula.

9. Após ter sido levados em um caso particular à existência da força $\mathbf{d}$ e em um outro à existência da força $\frac{1}{c}[\mathbf{v} \cdot \mathbf{h}]$, combinamos agora as duas na forma mostrada na equação (23), indo além do resultado direto das experiências pela suposição de que em geral as duas forças existem simultaneamente. Se, por exemplo, um elétron estivesse se movendo em um espaço atravessado por ondas hertzianas, poderíamos calcular a ação deste campo sobre ele utilizando os valores de $\mathbf{d}$ e $\mathbf{h}$, tal como eles estão no ponto do campo ocupado pela partícula.

O’Rahilly fez comentários muito importantes relacionados com essa dedução de Lorentz. Esses comentários também podem ser aplicados à dedução anterior e similar de Maxwell apresentada na Subseção 25.3.1. Concordo com O’Rahilly quando ele observou que:⁶⁹⁸

A prova usual da fórmula é extremamente insatisfatória. Aqui vai o esforço de Lorentz:
[...]

Há duas objeções esmagadoras em relação a esta suposta generalização. (1) Os dois ‘casos particulares’ aqui ‘combinados’ são bem incompatíveis. Em um caso temos cargas em repouso, no outro as cargas estão em movimento; elas não podem estar ao mesmo tempo estacionárias e em movimento. (2) Experiências com um ‘fio conduzindo uma corrente’ dizem respeito a correntes *neutras*, contudo a dedução contradiz esta neutralidade.

O’Rahilly citou então diversos livros didáticos mostrando que as provas que eles apresentavam da força de Lorentz são igualmente insatisfatórias.

Acrescento aqui um terceiro aspecto bem insatisfatório das deduções de Maxwell e Lorentz de suas leis de força, a saber, eles não especificaram claramente os significados associados com a velocidade da partícula eletrizada. Para compreender os significados que forneceram a essa velocidade, precisamos estudar atentamente seus trabalhos, prestando muito atenção às suas palavras.

Eles começam com a força atuando sobre um elemento de corrente $Id\vec{\ell}$ de comprimento $d\ell$ no qual flui a corrente I . Substituem então esse elemento de corrente por uma partícula eletrizada com carga q deslocando-se com velocidade $\vec{v}$, ou seja, substituem $Id\vec{\ell}$ por $q\vec{v}$. Como observado por O’Rahilly, quando Ampère obteve sua expressão para a força exercida por um circuito fechado conduzindo uma corrente ao atuar sobre um elemento de corrente de um outro circuito, ele estava lidando com elementos de corrente neutros. Portanto, é errado substituir $Id\vec{\ell}$ por $q\vec{v}$.

⁶⁹⁸[O’R65, pág. 561].

Além disso, quando há uma corrente elétrica fluindo ao longo de um fio metálico, as partículas eletrizadas responsáveis pela corrente estão em movimento em relação à matéria do condutor. Esse condutor pode ser, por exemplo, um fio de cobre. Portanto, a primeira ideia seria considerar essa velocidade $\vec{v}$ da partícula eletrizada como sendo a velocidade de deriva (também chamada de velocidade de arraste) da partícula eletrizada em relação ao fio. Mas não foi isso que Maxwell e Lorentz fizeram. Como mostrado na Subseção 25.3.1, Maxwell considerou essa velocidade como sendo a velocidade da partícula em relação ao campo magnético.

*Lorentz, ao contrário, considerou essa velocidade como sendo a velocidade da partícula em relação ao éter. Isso pode ser visto em sua citação anterior (“... força como causada pelo estado do éter e mesmo, como este meio penetra os elétrons, como exercida pelo éter ...”). Portanto, para Lorentz a velocidade $\vec{v}$ significava originalmente a velocidade da partícula em relação ao éter e não, por exemplo, em relação ao observador ou sistema de referência. Lorentz não interpretou essa velocidade como sendo a velocidade da partícula eletrizada em relação ao campo magnético, nem em relação ao observador, nem em relação ao sistema de referência. Lorentz sempre considerou que o éter estava em repouso em relação ao referencial das estrelas fixas.*⁶⁹⁹

Uma prova conclusiva para esta interpretação do significado da velocidade que aparece no termo $q\vec{v} \times \vec{B}$ pode ser encontrada em um outro trabalho de Lorentz, *Lectures on Theoretical Physics — Palestras sobre Física Teórica*. Este trabalho é baseado em um conjunto de palestras sobre a teoria de Maxwell apresentadas entre 1900 e 1902, e em um outro conjunto de palestras ministradas entre 1910 e 1912 sobre o princípio da relatividade para translações uniformes, que foram publicados em 1925 e 1922, respectivamente. A Figura 25.3 mostra minha representação das duas situações que ele estava considerando. Ele considerou três corpos, a saber, a Terra T , um circuito conduzindo uma corrente elétrica I , e uma partícula com carga q .

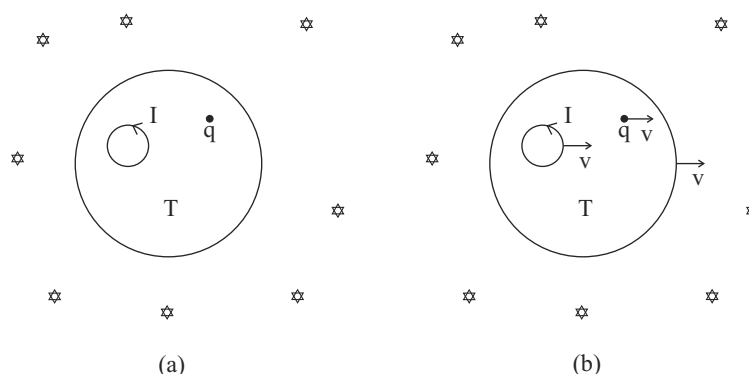


Figura 25.3: Terra T , circuito conduzindo uma corrente constante I , e partícula com carga q . (a) Esses três corpos estão em repouso em relação ao éter e também em relação ao referencial das estrelas fixas. (b) Esses três corpos deslocam-se com a mesma velocidade $\vec{v}$ em relação ao éter e também em relação ao referencial das estrelas fixas.

Na configuração (a) da Figura 25.3 a Terra, o circuito e a partícula com carga q estão em repouso em relação ao éter. Logo, de acordo com Lorentz, também estão em repouso em relação ao referencial das estrelas fixas. Já na configuração (b) esses três corpos deslocam-se

⁶⁹⁹[Pai82, pág. 111].

com a mesma velocidade $\vec{v}$ tanto em relação ao éter quanto em relação ao referencial das estrelas fixas.

Neste trabalho Lorentz fez a seguinte afirmação:⁷⁰⁰

8-9. Existe ainda um outro problema que merece atenção. Imagine uma corrente elétrica fluindo em um circuito fechado sem resistência. Esta corrente vai agir sobre uma partícula que possui uma carga e colocada perto do circuito? Falamos de propósito de um circuito sem resistência. Pois, caso ele tivesse uma resistência, seria necessária uma certa força eletromotriz para manter a corrente, e isto inevitavelmente daria origem a um gradiente de potencial e a cargas (não interessa quão pequenas elas sejam) espalhadas sobre o condutor que iriam atuar sobre a partícula eletrizada. Enfim, nossa questão refere-se ao efeito da corrente *como tal* [atuando] sobre a partícula.

A resposta a esta questão era, obviamente, que a corrente não agia sobre a partícula. Ela agiria sobre uma agulha magnética colocada em suas proximidades, já que ela é cercada por um campo magnético, mas não há traço de um campo elétrico. Certamente esta conclusão é correta enquanto a corrente e a partícula eletrizada estão em repouso.⁷⁰¹ Contudo, suponha que ambos compartilhem em algum movimento, por exemplo, o movimento da Terra.⁷⁰² O que acontece neste caso? Para começar, a partícula eletrizada vai deslocar-se com uma certa velocidade através do campo magnético da corrente e, portanto, vai sofrer a ação de alguma força.

Neste trabalho Lorentz afirmou que se um fio por onde circula uma corrente elétrica (e assim gerando um campo magnético) e uma partícula eletrizada externa estiverem em repouso entre si e em relação ao éter, que então não haverá força magnética sobre a carga. Em suas palavras: “a corrente não agia sobre a partícula.”

Por outro lado, se o fio e a partícula eletrizada estiverem em repouso entre si, mas se ambos estiverem deslocando-se com uma velocidade comum $\vec{v}$ de translação em relação ao éter, então ele afirmou que vai haver uma força magnética sobre a carga teste. Em suas palavras: “a partícula eletrizada vai deslocar-se com uma certa velocidade através do campo magnético da corrente e, portanto, vai sofrer a ação de alguma força.”

Nessa última situação não há movimento entre a partícula eletrizada e o circuito conduzindo corrente constante, nem entre a partícula e a Terra, nem mesmo entre a partícula e o observador ou detector de campo magnético (já que tanto o observador quanto o detector de campo magnético estão supostamente em repouso em relação ao solo). Contudo, para Lorentz mesmo nesse caso vai haver uma força magnética atuando sobre a partícula. Ele só podia chegar a essa conclusão porque interpretava $\vec{v}$ como sendo a velocidade da partícula eletrizada em relação ao éter. De acordo com Lorentz a partícula também vai estar deslocando-se com essa velocidade em relação ao referencial das estrelas fixas. Como as estrelas fixas não causam qualquer força eletromagnética sobre a partícula com carga q , tudo o que sobra é a força exercida pelo éter ao atuar sobre a partícula.

*Concluindo, para Lorentz a velocidade que aparece na Equação (25.16) é a velocidade da partícula eletrizada em relação ao éter. Além disso, ele assumiu que esse éter estava parado em relação ao referencial das estrelas fixas.*⁷⁰³

⁷⁰⁰[Lor31, Volume 3, pág. 306] e [O’R65, Volume 2, pág. 566].

⁷⁰¹[Nota de O’Rahilly:] Em repouso em relação ao éter.

⁷⁰²[Nota de O’Rahilly:] Isto é, assumindo que o laboratório *tem* um movimento através do éter.

⁷⁰³[Pai82, pág. 111].

25.3.5 Significado para Einstein: Velocidade em Relação ao Observador ou Sistema de Referência

A velocidade $\vec{v}$ da partícula com carga q que aparece na força $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ tem vários significados de acordo com autores diferentes: (a) Para Maxwell, é a velocidade da carga em relação ao campo magnético. (b) Para Thomson, é a velocidade da carga em relação ao meio de permeabilidade magnética μ . (c) Para Heaviside, é a velocidade em relação ao dielétrico. (d) Já para Lorentz, é a velocidade da carga em relação a um meio bem específico, o éter. Esses quatro autores interpretavam que esta força surgia da interação da partícula eletrizada com quatro entidades diferentes, a saber, (a) com o campo magnético, (b) com o meio de permeabilidade magnética μ , (c) com o dielétrico, ou (d) com um meio bem específico, o éter. Como a partícula eletrizada estaria interagindo com estes meios materiais, era natural interpretar $\vec{v}$ como sendo a velocidade da carga em relação a estes meios.

*Einstein modificou tudo isto em seu artigo de 1905 sobre a teoria da relatividade especial, também chamada de teoria da relatividade restrita.*⁷⁰⁴ Neste artigo Einstein introduziu que a velocidade $\vec{v}$ na Equação (25.4) deve ser interpretada como a velocidade da partícula eletrizada em relação ao observador.⁷⁰⁵

Inicialmente ele obteve as transformações de Lorentz para as coordenadas espaciais e para o tempo. Estas transformações relacionam as grandezas expressas em um sistema de referência inercial, com as mesmas grandezas expressas em um outro referencial inercial que translada em relação ao primeiro com uma velocidade constante. Einstein obteve em seguida estas transformações para o campo elétrico e para o campo magnético. Einstein aplicou então na força eletromagnética dada pela Equação (25.4) estas transformações dos campos elétrico e magnético. Desta forma Einstein começou a interpretar a velocidade $\vec{v}$ como sendo a velocidade da carga q em relação ao observador ou sistema de referência inercial. Por exemplo, neste trabalho ele apresentou a diferença entre o velho paradigma do eletromagnetismo e o novo paradigma baseado em sua teoria da relatividade nos seguintes termos (nas notas de rodapé vão minhas palavras para auxiliar na compreensão de algumas passagens):⁷⁰⁶

Para interpretarmos estas equações,⁷⁰⁷ consideremos uma carga elétrica pontual que apresente o valor “um” quando é medida no sistema em repouso,⁷⁰⁸ isto é, uma carga que, estando imóvel no sistema em repouso, exerce a força de 1 dine sobre uma carga igual, colocada a distância de 1 cm dela. De acordo com o princípio da relatividade, a mesma carga elétrica apresentará também o valor “um” se for medida no sistema em movimento. Estando a carga em repouso em relação ao sistema imóvel, o vetor (X, Y, Z) ⁷⁰⁹ é, por definição, igual a força que atua sobre ela; mas, estando a carga em repouso relativamente ao sistema que se move (pelo menos no instante que se está considerando), então a força que atua sobre ela será igual, se for medida neste sistema móvel, ao vetor (X', Y', Z') . Consequentemente, as primeiras três equações

⁷⁰⁴[Ein05] com tradução para o português em [Ein14] e traduções para o inglês em [Ein20b] e [Ein89].

⁷⁰⁵Ver a Nota de rodapé 659.

⁷⁰⁶[Ein14, pág. 71].

⁷⁰⁷A saber, as equações que fornecem as transformações de Lorentz para os campos elétricos e magnéticos.

⁷⁰⁸Sistema de coordenadas em que são válidas as equações da mecânica de Newton, isto é, sistema de referência inercial onde não se precisa introduzir a força fictícia de Coriolis e a força fictícia centrífuga.

⁷⁰⁹Este vetor (X, Y, Z) é o vetor da força elétrica por unidade de carga. Ou seja, é o vetor campo elétrico, que hoje em dia seria expresso da seguinte maneira: $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$.

acima⁷¹⁰ podem ser traduzidas em enunciados das duas seguintes maneiras:

1. Se um polo elétrico unidade,⁷¹¹ puntiforme, se move num campo eletromagnético, exercer-se-á sobre ele, além da força elétrica,⁷¹² uma força “eletromotriz”⁷¹³ que, desprezando termos em que entram como fatores potências de v/c de grau igual ou superior a 2, é igual ao quociente pela velocidade da luz do produto vetorial formado com a velocidade do polo unidade e com a força magnética.⁷¹⁴ (Antigo enunciado.)
2. Se um polo elétrico puntiforme unidade se move num campo eletromagnético, exerce-se sobre ele uma força idêntica à força elétrica que se obtém no ponto ocupado pelo polo quando se submete o campo a uma transformação de coordenadas, a fim de o referir a um sistema de eixos que esteja imóvel em relação ao referido polo. (Novo enunciado.)

Seguindo Einstein, seja K o sistema inercial estacionário e k o sistema inercial que está deslocando-se em relação a K com uma velocidade constante v . Vou utilizar símbolos com acentos para indicar as grandezas expressas em k . De acordo com Einstein, a carga da partícula eletrizada tem o mesmo valor nos dois sistemas de coordenadas, $q' = q$. Além disso, a partícula desloca-se com velocidade $\vec{v}$ em relação a K , estando parada em relação a k , isto é, $\vec{v}' = 0$. Portanto, de acordo com Einstein, a força resultante atuando sobre a partícula eletrizada em K é dada por $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$. Por outro lado, a força resultante sobre a partícula eletrizada em k é dada por $\vec{F}' = q'\vec{E}' + q'\vec{v}' \times \vec{B}' = q\vec{E}'$, pois $q' = q$ e $\vec{v}' = \vec{0}$.

Essa é a passagem crucial na qual Einstein passou a introduzir forças que dependem do sistema de referência, isto é, forças cujo valor depende do movimento entre o corpo de teste e o observador. Ele apresentou aqui um significado completamente novo para a velocidade $\vec{v}$ que aparece na Equação (25.4), a saber, velocidade da partícula eletrizada em relação ao observador, ou então velocidade da partícula eletrizada em relação ao sistema de referência.

Esta introdução de forças físicas que passam a depender do estado de movimento do observador criou muitos problemas para a interpretação de experiências simples. Infelizmente, essa interpretação passou a fazer parte de toda a física teórica desde então. Nenhuma experiência sugeria ou obrigava que se fizesse esta nova interpretação. Tudo isto partiu da cabeça de Einstein. Poderia se manter a expressão usual da força magnética com $\vec{v}$ sendo a velocidade da carga q em relação ao ímã, ou a velocidade da carga em relação ao fio com corrente, sem que houvesse contradição com qualquer dado experimental. Em vez de adotar este ponto de vista razoável, Einstein resolveu mudar o significado desta velocidade, gerando uma grande confusão em toda a física teórica desde 1905.

⁷¹⁰Ou seja, equações que fornecem as transformações dos campos entre dois sistemas inerciais diferentes que transladam com velocidade constante em relação um ao outro.

⁷¹¹Ou seja, uma carga elétrica q de valor unitário.

⁷¹²Ou seja, além da força $q\vec{E}$.

⁷¹³Ou seja, uma força dada por $q\vec{v} \times \vec{B}$.

⁷¹⁴Isto é, uma força eletromotriz que é igual ao produto vetorial da velocidade $\vec{v}$ com o campo magnético $\vec{B}$, sendo a força dada por $q\vec{v} \times \vec{B}$. A força resultante neste enunciado antigo é então dada por $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$.

25.4 Esses Vários Significados Atribuídos à Velocidade que Aparece na Lei de Força do Eletromagnetismo Clássico Implicam em *Diferentes* Teorias de Campo

A força fundamental do eletromagnetismo clássico, chamada usualmente força de Lorentz nos livros didáticos, pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} . \quad (25.17)$$

Tenho lidado com o significado da velocidade $\vec{v}$ que aparece nessa expressão desde meus anos de graduação em física.⁷¹⁵

Durante meus estudos de graduação e pós-graduação em física fui introduzido à assim chamada força de “Lorentz”, atribuída a H. A. Lorentz (1853-1928). Como usualmente mencionado nos livros didáticos, se uma partícula eletrizada com uma carga q está deslocando-se com uma velocidade $\vec{v}$ na presença de um campo elétrico $\vec{E}$ e de um campo magnético $\vec{B}$, então a força de Lorentz $\vec{F}$ atuando nessa carga é dada por $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$. Os livros didáticos usualmente não especificam o significado dessa velocidade. Ou seja, $\vec{v}$ é a velocidade da carga q em relação a que? Essa força só pode ser aplicada e utilizada quando sabemos o significado dessa velocidade. Quando descobri que atualmente essa velocidade $\vec{v}$ é interpretada como sendo a velocidade da partícula eletrizada q em relação ao observador, não aceitei essa interpretação. Essa interpretação é contrária à minha intuição física, já que a carga q não está interagindo com o observador. Ela está interagindo com outras cargas elétricas. Logo, na lei de força só deveriam aparecer velocidades *relativas* entre as partículas eletrizadas que estão interagindo.

Comecei então a fazer uma busca histórica relacionada ao significado dessa velocidade na assim chamada força de Lorentz.⁷¹⁶ Concluí minha análise de 1994-1995 sobre esse tópico com as seguintes palavras:⁷¹⁷

Esta mudança de significado da velocidade $\vec{v}$ da carga q na equação $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ é muito estranha, confusa e completamente diferente de tudo o que se faz na física usualmente.

Nos últimos anos finalmente fiquei ciente que isso é não apenas estranho, confuso e completamente diferente de tudo o que se faz na física usualmente. Como mostro na Seção 25.1, ao mudar o significado das grandezas que aparecem em algumas fórmulas matemáticas, alteramos simultaneamente a teoria que está por trás dessas fórmulas. Em particular, a Equação (25.1) é uma representação matemática da lei de Newton da gravitação quando interpretamos a distância r nessa equação como sendo definida pela Figura 25.1 (a). Contudo, essa mesma fórmula vai representar uma teoria diferente da teoria de Newton se definirmos a distância r como dada pela Figura 25.1 (b). Da mesma forma, está agora claro

⁷¹⁵[Ass21g, págs. 16-17].

⁷¹⁶Ver a Nota de rodapé 659.

⁷¹⁷[Ass94, pág. 241] e [Ass15a, pág. 170].

para mim que esses diferentes significados que foram fornecidos à velocidade que aparece na Equação (25.17) implicam diferentes teorias.

Lorentz, em particular, como mostrado na Subseção 25.3.4, definiu a velocidade que aparece na Equação (25.17) como sendo a velocidade da partícula eletrizada em relação ao éter. Porém, como nos livros didáticos modernos de eletromagnetismo a velocidade que aparece nessa equação é definida como a velocidade da partícula eletrizada em relação ao observador, é **errado** chamar essa expressão de força de Lorentz, assim como ela é denominada nos livros didáticos atuais.

Após ter me convencido que o próprio Maxwell já havia deduzido uma fórmula similar antes de Lorentz, decidi chamar a Equação (25.17) de força de Maxwell-Lorentz.⁷¹⁸ Contudo, como mostrado na Subseção 25.3.1, Maxwell definiu a velocidade que aparece nessa equação como sendo a velocidade da partícula eletrizada em relação ao campo magnético. Como nos livros didáticos modernos a velocidade aparecendo nessa equação é interpretada como sendo a velocidade da partícula em relação ao observador, é **errado** chamar essa expressão de força de Maxwell-Lorentz, assim como fiz em 2013 e 2014.

As cinco interpretações diferentes da velocidade discutidas nas Subseções 25.3.1, 25.3.2, 25.3.3, 25.3.4 e 25.3.5 implicam cinco teorias diferentes. Essas diferentes teorias têm que ser denominadas por nomes diferentes. Maxwell, Thomson, Heaviside, Lorentz e Einstein expressaram a força atuando sobre uma partícula eletrizada pela mesma fórmula, a saber, pela Equação (25.17). Contudo, como eles deram definições diferentes para os significados da velocidade aparecendo nessa equação, cada uma dessas leis de força tem de receber um nome diferente. Em particular, se interpretarmos essa velocidade como sendo a velocidade da partícula em relação ao observador (ou em relação ao sistema de referência), como é o caso da interpretação apresentada em todos os livros didáticos modernos de eletromagnetismo, então os nomes de Maxwell, Thomson, Heaviside e Lorentz não podem ser associados a essa lei de força.

25.5 Forças que Dependem da Velocidade na Mecânica Newtoniana

Na mecânica newtoniana também existem forças dependentes da velocidade dos corpos. Mas estas forças dependem apenas das velocidades *relativas entre os corpos que estão interagindo*. Ou seja, elas não dependem da velocidade de um corpo em relação ao observador, assim como não dependem da velocidade deste corpo em relação a um sistema de referência. Vamos dar aqui apenas dois exemplos, um da mecânica e outro do eletromagnetismo.

Vamos supor um pára-quedista que salta do alto de uma torre. Ele vai aumentando sua velocidade em relação ao solo até atingir uma velocidade constante de queda, quando a força peso é equilibrada pela força de arraste exercida pelo ar sobre o corpo. Esta força de atrito depende apenas da velocidade *relativa* $\vec{v}_r$ entre o corpo e o ar ao seu redor. Esta velocidade relativa é dada por $\vec{v}_r = \vec{v} - \vec{v}_f$, onde $\vec{v}$ é a velocidade do corpo em relação ao solo, enquanto que $\vec{v}_f$ é a velocidade do fluido em relação ao solo na região onde o corpo se encontra. Vamos supor que o ar esteja parado em relação ao solo e que a velocidade terminal do pára-quedista seja $\vec{v}_t$. Logo a força de arraste sobre o pára-quedista no referencial terrestre dependerá de sua velocidade $\vec{v} = \vec{v}_t$. Ao igualar o peso do corpo com a força de arraste vertical para cima

⁷¹⁸[Ass13, pág. 240] e [Ass14b, pág. 274].

exercida pelo ar, podemos relacionar a velocidade terminal do corpo com seu peso, com seu formato, com a densidade do ar etc.

Vou agora analisar o problema do ponto de vista do pára-quedista quando ele está caindo com velocidade terminal $\vec{v}_t$ em relação ao solo. Embora o pára-quedista não esteja se deslocando em relação a ele mesmo, a força de arraste atuando sobre ele não será nula de seu próprio ponto de vista. Seja S' o referencial do pára-quedista. Como ele está parado em relação a ele mesmo, ele tem velocidade nula, isto é, $\vec{v}' = \vec{0}$. Por outro lado, o ar ao seu redor está deslocando-se para cima e tem uma velocidade $\vec{v}_f'$ diferente de zero. Quando o pára-quedista atingiu a velocidade terminal teremos $\vec{v}_f' = -\vec{v}_t$, com essa velocidade $\vec{v}_f'$ apontando para cima. Portanto a velocidade relativa entre o pára-quedista e o ar ao seu redor, no referencial S' , será dada por $\vec{v}_r' = \vec{v}' - \vec{v}_f' = \vec{0} - (-\vec{v}_t) = \vec{v}_t$. Isto é, essa velocidade relativa no referencial S' tem o mesmo valor que a velocidade relativa no referencial terrestre. Ou seja, podemos resolver o problema tanto no referencial terrestre quanto no referencial do pára-quedista. Não surge nenhum paradoxo e não há a necessidade de qualquer transformação do campo gravitacional entre o referencial terrestre e o referencial S' do pára-quedista.

O segundo exemplo é o da lei de Ohm. Se for aplicada uma diferença de potencial $\Delta\phi$ entre os terminais de um circuito com resistência R , a corrente I que fluirá sobre ele será dada por $\Delta\phi = RI$. Em termos microscópicos esta lei pode ser escrita como $\vec{J} = -\sigma\nabla\phi = \sigma\vec{E}$, onde $\vec{J}$ é a densidade de corrente, σ é a condutividade do meio e $\vec{E} = -\nabla\phi$ é o campo elétrico que existe neste ponto (força por unidade de carga). No caso dos metais em que apenas os elétrons se deslocam em relação ao fio, esta densidade de corrente pode ser escrita como $\vec{J} = \rho_-\vec{v}_{r-}$, onde ρ_- é a densidade volumétrica de cargas negativas no fio e $\vec{v}_{r-}$ é a *velocidade relativa* entre o elétron e o fio. Ela pode ser escrita como $\vec{v}_{r-} = \vec{v}_q - \vec{v}_f$, onde $\vec{v}_q$ é a velocidade do elétron em relação ao solo, enquanto que $\vec{v}_f$ é a velocidade do fio em relação ao solo. Assim como no caso anterior, podemos analisar a lei de Ohm no referencial parado em relação ao fio. Nesse caso $\vec{v}_q = \vec{v}_d$ e $\vec{v}_f = 0$, onde $\vec{v}_d$ é a velocidade de deriva (também chamada de velocidade de arraste) de qualquer elétron de condução específico, isto é, sua velocidade em relação ao fio. Nesse referencial do fio teremos então: $\vec{v}_{r-} = \vec{v}_q - \vec{v}_f = \vec{v}_d - 0 = \vec{v}_d$.

Também podemos analisar esse problema no sistema de referência S' que está parado em relação a qualquer elétron de condução específico. Nesse caso $\vec{v}_q' = 0$ e $\vec{v}_f' = -\vec{v}_d$. Portanto, a velocidade relativa em S' é dada por $\vec{v}_{r-}' = \vec{v}_q' - \vec{v}_f' = 0 - (-\vec{v}_d) = \vec{v}_d$. Isto é, a velocidade relativa entre qualquer elétron de condução e o fio é a mesma tanto no sistema de referência do fio, quanto no sistema de referência desse elétron de condução.

Nos dois casos vai haver a mesma força exercida pelo fio sobre o elétron. Afinal de contas, a velocidade relativa entre eles é sempre a mesma, não interessando o sistema de referência inercial que utilizamos para analisar o problema.

25.6 A Velocidade na Força de Weber

Em 1846 Weber propôs uma *lei fundamental da ação elétrica*.⁷¹⁹ Essa lei é uma força combinando a lei de Coulomb para a interação entre duas partículas eletrizadas separadas por uma distância r , juntamente com uma componente dependendo da velocidade relativa entre elas, dr/dt , e uma componente dependendo da aceleração relativa entre elas, d^2r/dt^2 .

⁷¹⁹[Web46] com tradução parcial para o francês em [Web87] e uma tradução completa para o inglês em [Web21d].

Em 1852 ele apresentou sua lei utilizando uma constante c que representava a velocidade relativa uniforme na qual a força entre as duas partículas vai a zero.⁷²⁰ A constante c de Weber (conhecida durante o século XIX como a *constante de Weber*) foi medida pela primeira vez por Weber e Kohlrausch entre 1854 e 1856. Eles obtiveram $c = 4,39 \times 10^8 \text{ m/s}$.⁷²¹

Em 1857 Weber e Kirchhoff foram os primeiros a deduzir teoricamente a equação completa do telegrafista trabalhando independentemente entre si e chegando simultaneamente no mesmo resultado. Utilizando os conceitos modernos e a terminologia usual da teoria de circuitos, pode-se dizer que eles foram os primeiros a levar em consideração não apenas a capacitância e resistência do circuito, mas também sua auto-indutância. Para um circuito com resistência desprezível, eles concluíram que a velocidade de propagação de uma onda elétrica ao longo do fio seria dada por $c/\sqrt{2} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$. Esse valor coincidia com o valor já conhecido da velocidade da luz no vácuo, v_L , como deduzida a partir de observações astronômicas e a partir de experiências ópticas terrestres. Isto é,

$$\frac{c}{\sqrt{2}} = v_L \quad \text{ou} \quad c = \sqrt{2} \cdot v_L . \quad (25.18)$$

Esse resultado era independente da seção reta e da condutividade do fio, sendo também independente de sua densidade superficial de eletricidade. Kohlrausch, que estava colaborando com Weber em alguns experimentos relacionados com a propagação de ondas eletromagnéticas, morreu em 1858. O trabalho de Weber teve então sua publicação adiada e apareceu apenas em 1864.⁷²²

A força fundamental de 1846 de Weber pode então ser expressa em termos de sua constante de 1852, c , e também em termos da velocidade da luz no vácuo, v_L , da seguinte maneira:

$$\frac{ee'}{r^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2}{c^2} r \frac{d^2r}{dt^2} \right] = \frac{ee'}{r^2} \left[1 - \frac{1}{2v_L^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{v_L^2} r \frac{d^2r}{dt^2} \right] . \quad (25.19)$$

A força entre duas partículas com cargas e e e' depende então da distância r entre elas, da *velocidade relativa* entre elas, dr/dt , assim como da *aceleração relativa* entre elas, d^2r/dt^2 . Não são relevantes na força de Weber as velocidades das partículas em relação ao observador, assim como não são relevantes as velocidades das partículas em relação ao sistema de referência. A força de Weber aponta ao longo da linha reta que conecta as partículas que estão interagindo e sempre segue o princípio de ação e reação de Newton.

⁷²⁰[Web52b, pág. 366 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21e, pág. 346].

⁷²¹[Web55] com tradução para o inglês em [Web21j]; [WK56] com tradução para o inglês em [WK21] e tradução para o português em [WK08]; e [KW57] com tradução para o inglês em [KW21]. Ver também [Ass21e].

⁷²²[Kir57b] com tradução para o inglês em [Kir57a] e [Kir21b], [Pog57] com tradução para o inglês em [Pog21], e [Web64] com tradução para o inglês em [Web21c]. Ver também [Ass21a] e [Ass21e].

Capítulo 26

Comparação entre as Deduções de Lorentz e Weber de Suas Leis de Força

Nos últimos 130 anos a força de Weber (1846) foi substituída pela assim chamada força de Lorentz (1895) nos livros didáticos de eletromagnetismo. Essa força, denominada nos livros didáticos como a força de Lorentz, tem sido apresentada lado a lado com as equações de Maxwell como sendo a base da teoria eletromagnética clássica. Comparo nessa Seção as deduções dessas duas leis de força. Uma comparação similar, chegando a resultados equivalentes, também pode ser feita entre as deduções de Maxwell e Weber de suas leis de força diferentes.

Lorentz apresentou a dedução de sua força em 2 páginas de seu artigo de 1895 que estão traduzidas para o português na Subseção 25.3.4.⁷²³ Ele apresentou uma dedução similar em 2 páginas de seu livro *A Teoria dos Elétrons*.⁷²⁴ Por outro lado, Weber apresentou a dedução de sua força em 25 páginas de seu tratado de 1846, nas Seções 18 a 21.⁷²⁵

26.1 Lorentz Não Realizou Qualquer Experiência para Justificar a Dedução de Sua Força. Weber, ao Contrário, Antes de Sua Dedução Apresentou uma Prova Experimental da Força de Ampère entre Elementos de Corrente

De acordo com meu conhecimento, Lorentz nunca realizou um único experimento para chegar a sua lei de força de 1895 apresentada na Subseção 25.3.4.

Weber, por outro lado, utilizou as primeiras 50 páginas de seu artigo de 1846 apresentando uma prova experimental detalhada da força de Ampère descrevendo a interação entre correntes elétricas. Para essa finalidade introduziu o famoso eletrodinamômetro que

⁷²³[Lor95, Seção 1, parágrafo 12, págs. 21-22 e Tabela após a pág. 138].

⁷²⁴[Lor09, págs. 14-15] e [Lor15, págs. 14-15].

⁷²⁵[Web46, págs. 132-157 das *Obras* de Weber] com tradução completa em inglês em [Web21d, págs. 129-149].

ele próprio criou. De acordo com Maxwell:⁷²⁶

Os experimentos que ele fez com esse instrumento fornecem a prova experimental mais completa da precisão da fórmula de Ampère aplicada a correntes fechadas, e formam uma parte importante das pesquisas pelas quais Weber elevou a determinação quantitativa de grandezas elétricas a um nível muito alto no diz respeito à precisão. A forma do eletrodinamômetro de Weber, na qual uma bobina é suspensa dentro de outra, e é acionada por um par de forças que tende a girá-la em torno de um eixo vertical, é provavelmente a mais adequada para medições absolutas.

Weber utilizou então seu eletrodinamômetro para testar a lei de indução de Faraday. Ele também o utilizou para muitas outras aplicações descritas em seu artigo de 1846.

26.2 Em Sua Dedução Lorentz Utilizou a Força Exercida por um Circuito Fechado Conduzindo uma Corrente Constante ao Atuar sobre um Elemento de Corrente. Já Weber Utilizou a Força entre Dois Elementos de Corrente

Lorentz, para obter a componente magnética de sua força, considerou um elemento de corrente $id\vec{s}$ localizado em um campo magnético $\vec{B}$ gerado por causas externas e disse que, de acordo com uma lei conhecida, esse elemento de corrente sofre uma força dada por

$$id\vec{s} \times \vec{B} . \quad (26.1)$$

As causas externas que Lorentz não especificou podem ser um ímã ou um condutor conduzindo uma corrente constante. André-Marie Ampère (1775-1836) obteve em 1822 a expressão final de sua lei de força fundamental entre dois elementos de corrente. Ele então provou pela primeira vez, tanto experimentalmente quanto teoricamente, que um circuito fechado de formato arbitrário conduzindo uma corrente constante exerce uma força sobre um elemento de corrente externo ao circuito que é sempre ortogonal a esse elemento e também ortogonal a uma certa linha reta que denominou de diretriz. A direção dessa diretriz coincide com a direção do campo magnético moderno que aparece nos livros didáticos, embora deva ser enfatizado que o próprio Ampère nunca trabalhou com o conceito de campo magnético. Mais tarde Ampère também provou pela primeira vez a equivalência entre uma camada magnética dipolar e um circuito fechado conduzindo uma corrente constante, de tal forma que qualquer ímã pode ser substituído por um sistema de circuitos fechados conduzindo correntes constantes.⁷²⁷

Ou seja, essencialmente a Equação (26.1) representa o resultado obtido pela primeira vez por Ampère de que a força atuando sobre um elemento de corrente devida a um ímã (ou a força sobre esse elemento de corrente devida a um circuito fechado de forma arbitrária conduzindo uma corrente constante) é sempre ortogonal a esse elemento e a uma linha reta dada pela diretriz de Ampère. Ou seja, a Equação (26.1) é essencialmente equivalente ao

⁷²⁶[Max54a, Vol. 2, Artigo 725, pág. 371].

⁷²⁷Ver a Nota de rodapé 7 na página 16.

resultado de Ampère expresso com notação vetorial moderna e no Sistema Internacional de Unidades dado pela Equação (25.12).

Weber, por outro lado, para chegar à sua lei de força decidiu começar diretamente com a força de Ampère entre elementos de corrente. Em notação vetorial moderna e no Sistema Internacional de Unidades, a força de Ampère $d^2\vec{F}_{21}$ exercida por um elemento de corrente $i_2 d\vec{\ell}_2$ ao atuar sobre um elemento de corrente $i_1 d\vec{\ell}_1$ é escrita como:

$$d^2\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \frac{\hat{r}}{r^2} \left[3(\hat{r} \cdot d\vec{\ell}_1)(\hat{r} \cdot d\vec{\ell}_2) - 2(d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2) \right] = -d^2\vec{F}_{12} . \quad (26.2)$$

Aqui $d^2\vec{F}_{12}$ é a força exercida por $i_1 d\vec{\ell}_1$ sobre o elemento de corrente $i_2 d\vec{\ell}_2$, enquanto que $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ kgmC}^{-2}$ é chamada de constante de permeabilidade do vácuo (ou constante de permeabilidade magnética do vácuo, ou constante magnética).

A força de Ampère entre elementos de corrente sempre satisfaz à lei de ação e reação de Newton. Além disso, ela sempre aponta ao longo da linha reta que une os dois elementos de corrente, não importando suas orientações no espaço.

A Equação (26.2) é mais fundamental do que a Equação (26.1). Isso pode ser visto pelo fato de que Ampère deduziu a Equação (25.12), que é análoga à Equação (26.1), a partir de sua força entre elementos de corrente (26.2) após integrá-la ao longo do circuito fechado C_2 . Além disso, a partir da força de Ampère entre elementos de corrente podem ser obtidos outros resultados, tal como a força exercida por um pedaço de um circuito ao atuar sobre um outro pedaço do mesmo circuito; a força exercida por um pedaço de um circuito ao atuar sobre um pedaço de um outro circuito; etc.

De acordo com Maxwell, a força de Ampère entre dois elementos de corrente deve sempre permanecer como a fórmula mais importante da eletrodinâmica:⁷²⁸

A investigação experimental pela qual Ampère estabeleceu as leis da ação mecânica entre correntes elétricas é um dos feitos mais brilhantes na ciência. O conjunto de teoria e experiência parece como que se tivesse pulado, crescido e armado, do cérebro do “Newton da eletricidade”. O conjunto é perfeito na forma, e de precisão irrefutável, e está resumido em uma fórmula a partir da qual todos os fenômenos podem ser deduzidos, e que tem de sempre permanecer como a fórmula cardeal da eletrodinâmica.

Além disso, na dedução de sua lei de força Weber começou não apenas com a força de Ampère entre elementos de corrente, mas também com a lei de indução de Faraday.

26.3 Lorentz Substituiu um Elemento de Corrente Neutro por uma Partícula Eletrizada. Weber, ao Contrário, Substituiu um Elemento de Corrente Neutro por Partículas Eletrizadas com Cargas Opostas

Na sequência de sua dedução Lorentz substituiu o elemento de corrente $id\vec{s}$ na Equação (26.1) por uma soma de partículas, cada uma delas possuindo uma carga e deslocando-se com uma

⁷²⁸[Max54a, Vol. 2, Artigo 528, pág. 175].

velocidade $\vec{v}$, a saber, substituiu $id\vec{s}$ por $\sum e\vec{v}$. Ele então assumiu que isso também seria válido para um único íon, ou seja, substituiu $id\vec{s} \times \vec{B}$ por:

$$e\vec{v} \times \vec{B} . \quad (26.3)$$

O’Rahilly observou corretamente que essa “prova” de Lorentz é altamente insatisfatória, já que há uma objeção fundamental a essa generalização. Afinal de contas, os experimentos de Ampère realizados com um fio com corrente lidam com elementos de corrente neutros, enquanto que a dedução de Lorentz contradiz essa neutralidade elétrica. Ele substituiu um elemento de corrente neutro $id\vec{s}$ por uma partícula com carga e deslocando-se com velocidade $\vec{v}$, isto é, substituiu $id\vec{s}$ por $e\vec{v}$.⁷²⁹

Weber não cometeu esse erro óbvio ao deduzir sua própria lei de força. Em 1846 ele começou com a força de Ampère entre dois elementos de corrente ids e $i'ds'$. Ele então substituiu o primeiro elemento de corrente por duas partículas eletrizadas com cargas opostas e e $-e$ deslocando-se com velocidades u e $-u$ em relação ao fio, enquanto que o segundo elemento de corrente foi substituído por duas partículas eletrizadas com cargas opostas e' e $-e'$ deslocando-se com velocidades u' e $-u'$ em relação ao fio. Isto é, cada elemento de corrente permaneceu eletricamente neutro com as substituições de Weber, o que já não ocorreu com a substituição de Lorentz.

26.4 De Acordo com Lorentz e Weber as Velocidades das Partículas Eletrizadas que Compõem um Elemento de Corrente Possuem Significados Diferentes

Para obterem suas forças entre partículas eletrizadas, Lorentz e Weber começaram com a força atuando sobre um elemento de corrente ids de comprimento ds . Esse elemento de corrente pertencia a um fio conduzindo uma corrente elétrica i .

Lorentz substituiu então esse elemento de corrente por uma partícula eletrizada tendo uma carga e deslocando-se com velocidade v . Isto é, ele substituiu ids com ev . Seria natural assumir que essa velocidade v era a velocidade de deriva (ou velocidade de arraste) da partícula eletrizada em relação ao fio. Mas não foi isso que Lorentz fez. Como mostrado na Subseção 25.3.4, ele considerou essa velocidade como sendo a velocidade da partícula em relação ao éter.

Weber, por outro lado, substituiu ids por partículas eletrizadas com cargas e e $-e$ deslocando-se com velocidades u e $-u$, respectivamente. Ele chamou u e $-u$ de velocidades absolutas das partículas eletrizadas. Ele considerou essas velocidades como sendo as velocidades das partículas em relação ao corpo material do condutor. Esse condutor podia ser, por exemplo, um fio de cobre. Essa interpretação fica clara a partir do contexto de sua detalhada discussão em seu artigo fundamental de 1846. Portanto as velocidades u e $-u$ na dedução de Weber significavam as velocidades de deriva (também chamadas de velocidades de arraste) das partículas eletrizadas em relação ao fio de cobre no qual fluía a corrente elétrica i . Essa interpretação também era clara para os contemporâneos de Weber. Maxwell, por exemplo, descreveu em seu primeiro artigo sobre eletromagnetismo de 1855 (publicado

⁷²⁹[O’R65, pág. 561].

em 1858) as suposições feitas por Weber em seu artigo de 1846 com as seguintes palavras, com ênfase em *italico* do próprio Maxwell:⁷³⁰

1. Que duas partículas de eletricidade quando estão em movimento não se repelem mutuamente com a mesma força que existia quando estavam em repouso, mas que a força é alterada por uma quantidade que depende do movimento relativo entre as duas partículas, de tal forma que a expressão para a repulsão na distância r é dada por

$$\frac{ee'}{r^2} \left[1 + a \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + br \frac{d^2r}{dt^2} \right] .$$

2. Que quando a eletricidade está se deslocando em um condutor, a velocidade do fluido positivo *em relação à matéria do condutor* é igual e oposta à velocidade do fluido negativo.
3. Que a ação total de um elemento condutor sobre um outro elemento condutor é a resultante das ações mútuas das massas de eletricidade dos dois tipos que estão contidas em cada elemento.
4. Que a força eletromotriz em cada ponto é a diferença dessas forças atuando sobre os fluidos positivo e negativo.

Três aspectos devem ser enfatizados aqui.

- Em 1846 Weber assumiu uma corrente dupla em cada pedaço de fio conduzindo uma corrente elétrica. Em particular, ele assumiu a hipótese de 1845 de Fechner, a saber, ele supôs em cada elemento de corrente partículas iguais eletrizadas com cargas opostas e e $-e$ deslocando-se em relação ao fio com velocidades de deriva iguais e opostas u e $-u$.⁷³¹ Essa era uma suposição comum naquela época. Contudo, pode ser mostrado que também deduzimos a força de Ampère entre elementos de corrente a partir da força de Weber entre partículas eletrizadas sem impor quaisquer restrições em suas velocidades. Isto é, podemos assumir o elemento de corrente ids composto de partículas com cargas e e $-e$ deslocando-se em relação ao primeiro fio com velocidades arbitrárias u_1 e u_2 , enquanto que o elemento de corrente $i'ds'$ é composto de partículas com cargas e' e $-e'$ deslocando-se em relação ao segundo fio com velocidades arbitrárias u'_3 e u'_4 . Cada uma dessas quatro velocidades tem um valor arbitrário, sendo elas independentes entre si. Isso significa que, começando com a força de Weber, chegamos na força de Ampère entre elementos de corrente até mesmo em circuitos metálicos nos quais as cargas positivas estão fixas nas redes cristalinas ($u_1 = u'_3 = 0$), enquanto que apenas os elétrons de condução são os responsáveis pelas correntes. Também deduzimos a força de Ampère quando as partículas eletrizadas positivamente e negativamente deslocam-se em direções opostas com velocidades de valores diferentes (como ocorre em situações de eletrólise nas quais as correntes fluem em meios líquidos).⁷³²

⁷³⁰[Max58, págs. 66-67 do artigo de 1858 e págs. 207-209 do livro de Niven].

⁷³¹[Fec45] com tradução para o inglês em [Fec21].

⁷³²[Ass90], [Wes90b], [Ass94, Seção 4.2] e [Ass15a].

- Mais tarde Weber mudou seu ponto de vista. Em vez de assumir uma corrente dupla em cada fio, ele passou a assumir uma corrente simples em cada fio (ou seja, uma corrente na qual apenas as cargas com sinal de um único tipo deslocam-se em relação ao fio). Em particular, começou a supor que as partículas eletrizadas com cargas de um sinal permaneciam em repouso em relação à rede cristalina do condutor, enquanto que apenas as partículas eletrizadas com cargas de sinal oposto eram responsáveis pela corrente, deslocando-se com velocidades de deriva em relação ao fio. Ele nunca teve certeza se eram as cargas positivas que deviam ser assumidas em repouso em relação ao fio, enquanto que apenas as cargas negativas deslocavam-se em relação ao fio; ou se eram as cargas negativas que deviam ser supostas paradas em relação ao fio, com as cargas positivas deslocando-se em relação ao fio com velocidades de deriva. Uma discussão detalhada desse tópico com muitas citações de Weber pode ser encontrada no Capítulo 5 (A evolução da concepção de Weber sobre uma corrente elétrica — começando com uma corrente dupla até chegar em uma corrente simples) do livro *O Modelo Planetário de Weber para o Átomo*.⁷³³
- O terceiro fato a ser enfatizado é que o elétron só foi descoberto em 1897, seis anos após a morte de Weber (1891). De qualquer forma, com sua suposição de uma corrente simples em condutores metálicos, Weber estava muito à frente de seu tempo. Nessa concepção as cargas de um sinal ficam paradas em relação ao fio, enquanto que apenas as cargas de sinal oposto deslocam-se em relação ao fio.

26.5 As Diferentes Velocidades Finais Aparecendo nas Leis de Força de Lorentz e Weber

De acordo com Lorentz, a velocidade da partícula eletrizada que aparece na expressão final de sua lei de força é a velocidade da partícula em relação ao éter, como foi mostrado na Subseção 25.3.4.

Considero agora a lei de força de Weber entre partículas eletrizadas. Para chegar nessa força ele começou com a força de Ampère entre dois elementos de corrente. Substituiu então o primeiro elemento de corrente ids por partículas eletrizadas com cargas opostas e e $-e$ deslocando-se em relação ao primeiro pedaço de fio com velocidades de deriva (ou velocidade de arraste) u e $-u$. O segundo elemento de corrente $i'ds'$ foi similarmente substituído pelas partículas eletrizadas e' e $-e'$ deslocando-se em relação ao segundo pedaço de fio com velocidades de deriva u' e $-u'$. Contudo, no desenvolvimento de sua lei de força, Weber terminou apenas com as *velocidades relativas* entre cada par de partículas. Isto é, seja r a distância entre qualquer partícula eletrizada e_1 do primeiro elemento de corrente e qualquer partícula eletrizada e_2 do segundo elemento de corrente. A expressão final da força de Weber entre e_1 e e_2 depende apenas do produto de suas cargas, e_1e_2 , da distância r entre elas, da *velocidade relativa* entre elas, dr/dt , assim como da *aceleração relativa* entre elas, d^2r/dt^2 .

As leis de força de Newton e Coulomb dependem da distância r entre as partículas que estão interagindo. A força de Weber é uma generalização da lei de Coulomb dependendo também da *velocidade relativa* entre as partículas, dr/dt , assim como da *aceleração relativa* entre elas, d^2r/dt^2 . Essas são *grandezas relacionais* que possuem os mesmos valores em todos os sistemas de referência, sejam eles inerciais ou não. Essas grandezas relacionais também

⁷³³[AWW11] com tradução para o português em [AWW14] e tradução para o alemão em [AWW18].

possuem os mesmos valores para todos os observadores. Essas grandezas r , dr/dt e d^2r/dt^2 têm o mesmo valor até mesmo quando se compara um sistema de referência inercial com outro sistema não inercial. Elas são grandezas intrínsecas relacionadas apenas aos corpos que estão interagindo.⁷³⁴ Além disso, a força de Weber sempre satisfaz à lei de ação e reação de Newton. Ela também sempre aponta ao longo da linha reta que conecta as duas partículas que estão interagindo, não interessando como elas estejam se deslocando no espaço. Ela satisfaz aos princípios de conservação do momento linear, do momento angular e da energia. Esses são os principais motivos que têm feito com que eu trabalhe com a eletrodinâmica de Weber desde que a descobri durante meus estudos universitários em física.⁷³⁵

26.6 Após Obter Sua Força das Leis de Coulomb, Ampère e Faraday, Weber Inverteu o Procedimento. Ou seja, Deduziu as Leis de Coulomb, Ampère e Faraday de Sua Força, além de Deduzir Outros Resultados (Análise e Síntese no Tratado de 1846 de Weber)

Após decompor a força de Ampère entre elementos de corrente e a lei de indução de Faraday para chegar à sua lei de força entre partículas eletrizadas, Weber inverteu o argumento. Nas 57 páginas finais de seu tratado de 1846, da Seção 22 até a Seção 32, ele postulou sua força entre partículas eletrizadas e deduziu dela uma série de consequências.⁷³⁶ Ele começou a Seção 22 de seu artigo com as seguintes palavras:

Tendo alcançado a *lei elétrica fundamental* expressa na Seção anterior, podemos colocá-la no topo da teoria da eletricidade, e deduzir dela sinteticamente um sistema de consequências, sendo esse o propósito final de tal lei.

[...]

No caso de eletricidade *em movimento*, inicialmente será considerado o movimento *uniforme* da eletricidade de correntes galvânicas em condutores em repouso, ao qual se relaciona a lei de Ampère. Agora, como a lei elétrica fundamental anterior foi desenvolvida analiticamente a partir da lei de Ampère, a lei de Ampère, por sua vez, tem de seguir sinteticamente dessa lei fundamental. Essa dedução será de fato apresentada aqui.

Weber deduziu então várias consequências a partir de sua lei de força:

- As leis de Coulomb e Poisson quando não há movimento entre as partículas eletrizadas que estão interagindo.
- A força de Ampère entre elementos de corrente.

⁷³⁴[Ass13, Seção 2.8] e [Ass14b, Seção 2.8 e Apêndice A].

⁷³⁵[Ass21g, págs. 16-17].

⁷³⁶[Web46, págs. 157-214 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21d, págs. 149-203].

- A lei da ação eletrodinâmica de um circuito fechado ao atuar sobre um elemento de corrente de outro circuito.
- A lei da ação eletrodinâmica de um ímã ao atuar sobre um elemento de corrente.
- Ampère chegou em sua força entre elementos de corrente ao fazer experiências com fios conduzindo correntes constantes. Weber mostra agora que a força de Ampère também é válida no caso de circuitos com intensidades variáveis de corrente.
- Weber também deduz matematicamente a lei de indução de Faraday a partir de sua força entre partículas eletrizadas.
- Etc.

Tudo isso nos lembra do enfoque que Newton adotou ao tratar dos problemas inversos.⁷³⁷ Na última Questão de seu livro *Óptica* Newton afirmou o seguinte:⁷³⁸

Como na matemática, também na filosofia natural a investigação das coisas difíceis pelo método da análise deve sempre preceder o método da composição. Essa análise consiste em fazer experiências e observações, em tirar conclusões gerais delas por indução e em não admitir objeções contra as conclusões exceto aquelas que decorrem das experiências ou de algumas outras verdades. Pois as hipóteses não devem ser consideradas na filosofia experimental. E, embora a argumentação pela indução a partir de experiências e observações não seja a demonstração de conclusões gerais, ainda assim é o melhor caminho de argumentação que a natureza das coisas admite, e pode ser considerada tanto mais forte quanto mais geral é a indução. E se não aparece nenhuma exceção dos fenômenos, a conclusão pode ser afirmada em termos gerais. Mas se depois, em qualquer época, aparecer qualquer exceção relativamente às experiências, ela poderá então começar a ser afirmada com as exceções que aparecerem. Por esse método de análise podemos passar dos compostos aos ingredientes, e dos movimentos às forças que os produzem; e, em geral, dos efeitos às suas causas, e das causas particulares às causas mais gerais, até que o argumento termine na causa mais geral. Tal é o método da análise; e a síntese consiste em admitir as causas descobertas e estabelecidas como princípios, em explicar por elas os fenômenos que deles procedem e em provar as explicações.

Nos dois primeiros livros desta *Óptica* procedi a essa análise para descobrir e provar as diferenças originais dos raios de luz com respeito à refringência, à reflexibilidade e à cor, aos seus estados alternados de fácil reflexão e fácil transmissão e às propriedades dos corpos, tanto opacos quanto transparentes, das quais dependem suas reflexões e cores. E, uma vez provadas essas descobertas, elas podem ser admitidas no método da composição para explicar os fenômenos que delas resultam, e dei um exemplo desse método no final do primeiro livro. [...]

Newton formalizou seu enfoque geral da ciência no Prefácio à primeira edição de seu livro *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*, geralmente conhecido por seu primeiro nome em latim, *Principia*.⁷³⁹

⁷³⁷[Ass98b], e [Ass11] com tradução para o português em [Ass17b].

⁷³⁸[New79, págs. 404-405] com tradução para o português em [New96, págs. 292-293].

⁷³⁹[New34, pág. xvii] com tradução para o português em [New90, págs. I-II], [New08] e [New10].

[...] ofereço este trabalho como os princípios matemáticos da filosofia, pois toda a essência da filosofia parece consistir nisso — a partir dos fenômenos de movimento, investigar as forças da natureza e, então, dessas forças demonstrar os outros fenômenos; e para esse fim dirigem-se as proposições gerais no primeiro e segundo Livros. No terceiro Livro, dou um exemplo disso na explicação do Sistema do Mundo; pois, pelas proposições matematicamente demonstradas nos Livros anteriores, no terceiro derivo dos fenômenos celestes as forças de gravidade com as quais corpos tendem para o Sol e para os vários planetas. Então, dessas forças, por outras proposições que também são matemáticas, deduzo os movimentos dos planetas, dos cometas, da Lua e do mar.

No terceiro livro do *Principia*, Newton apresentou seis fenômenos relacionados com as leis de Kepler (1571-1630) do movimento planetário.⁷⁴⁰ A partir desses fenômenos Newton deduziu que a força da gravidade é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os corpos que estão interagindo. Após chegar a esse resultado, começou o processo inverso. Isto é, começando com uma força gravitacional variando como $1/r^2$, ele deduziu as leis de Kepler e outros resultados. Um exemplo:⁷⁴¹

Proposição XIII. Teorema XIII: Os planetas movem-se em elipses que têm seu foco comum no centro do sol e, a partir de raios traçados até este centro, descrevem áreas proporcionais aos tempos de percurso.

Dissertamos acima sobre estes movimentos a partir dos Fenômenos. Agora que conhecemos os princípios dos quais eles dependem, a partir destes princípios deduzimos os movimentos dos céus *a priori*. [...]

26.7 Comparação entre as Leis de Força de Lorentz e Weber

Comparei nas Subseções anteriores como Lorentz e Weber deduziram suas leis de força.

Em trabalhos anteriores fiz uma comparação direta entre as expressões finais de suas forças diferentes. Mostrei então, por exemplo, situações nas quais a assim chamada força de Lorentz não satisfaz à lei de ação e reação de Newton ao lidar com a interação entre duas partículas eletrizadas; a previsão com a força de Lorentz de um torque atuando sobre um capacitor que nunca foi observado experimentalmente; etc.⁷⁴²

Agora qualquer pessoa pode comparar não apenas a maneira como Lorentz e Weber deduziram suas forças, mas também as expressões finais dessas forças diferentes, tanto ao ler seus trabalhos originais em alemão, quanto as traduções em inglês e português desses textos.⁷⁴³

Cada pessoa pode então tomar suas próprias decisões. Ou seja, qual dessas forças você considera melhor? Qual delas deve ser desenvolvida teoricamente e experimentalmente? A

⁷⁴⁰Ver o livro de Koestler para uma bela discussão da vida e obra de Kepler, [Koe89].

⁷⁴¹[New34, pág. 420] com tradução para o português em [New08, pág. 210].

⁷⁴²[Ass92a], [Ass94, Capítulo 6], [Ass95b] e [Ass15a].

⁷⁴³[Lor95] com tradução para o inglês em https://en.wikisource.org/wiki/Translation:Attempt_of_a_Theory_of_Electrical_and_Optical_Phenomena_in_Moving_Bodies, [Lor09] e [Lor15]. Ver também [Web46] com tradução para o inglês em [Web21d].

qual dessas duas teorias você vai dedicar seu tempo e seus esforços? Qual delas você vai ensinar a seus estudantes?

Capítulo 27

As Várias Definições do Conceito de Campo e as Contradições entre Essas Diferentes Definições

A. K. T. Assis⁷⁴⁴

Comparo nesse Capítulo a eletrodinâmica de Weber com diferentes teorias de campo. Embora os livros didáticos modernos sobre eletromagnetismo afirmem que há uma única teoria de campo desenvolvida por Faraday, Maxwell, Lorentz e Einstein, mostro aqui que existem muitas definições contraditórias do conceito de campo. Essas definições contraditórias são apresentadas tanto por esses quatro autores, quanto nos livros didáticos. Isso significa que na realidade existem muitas teorias de campo diferentes entre si.

27.1 Múltiplas Definições do Conceito de Campo

Faraday explicou suas descobertas utilizando diferentes conceitos abstratos. Alguns dos conceitos que utilizou: curvas magnéticas, linhas de força, o estado eletrotônico, e o campo. Não é fácil entender as definições e relações entre esses conceitos de acordo com Faraday. Maxwell também utilizou os conceitos de linhas de força, estado eletrotônico, campo, e éter. Assim como no caso de Faraday, é muito complexo entender as definições, significados e relações entre esses conceitos de acordo com Maxwell. Lorentz também utilizou os conceitos de campos elétricos e magnéticos, assim como o conceito de um éter. Novamente é difícil entender as definições, significados e relações entre esses conceitos de acordo com Lorentz. Por exemplo, o campo elétrico não é idêntico ao conceito de éter para Maxwell nem para Lorentz (ou seja, o campo elétrico não é sinônimo de éter). Mas qual é a relação entre esses dois conceitos diferentes para esses autores? Da mesma forma, o campo magnético não é idêntico ao conceito de éter para Maxwell nem para Lorentz (ou seja, o campo magnético não é sinônimo de éter). Contudo, qual é a relação entre esses dois conceitos diferentes para Maxwell e Lorentz? Esses dois autores falam diversas vezes em um mesmo parágrafo e até mesmo em uma mesma frase dos campos elétricos e magnéticos, juntamente com o éter. Mas não deixam claro o que há de comum e de diferente entre o campo elétrico e o éter, assim como

⁷⁴⁴Homepage: www.ifi.unicamp.br/~assis

não deixam claro o que há de comum e de diferente entre o campo magnético e o éter. Devido a isso nesse Capítulo vou me concentrar principalmente no conceito de campo, mostrando que mesmo esse conceito que parece simples é definido de várias maneiras diferentes por cada um desses autores.

Nessa Seção apresento algumas das definições, significados e propriedades do conceito de campo.⁷⁴⁵ A principal dificuldade é a polissemia associada com o conceito de campo, isto é, ele possui vários significados. Esses múltiplos significados associados com o conceito de campo aparecem não apenas nos trabalhos originais de Faraday e Maxwell, mas também em livros didáticos modernos. Além disso, esses vários significados são usualmente contraditórios entre si, embora os autores não pareçam estar cientes dessas contradições.

27.1.1 O Campo Definido como uma Região do Espaço ao Redor de Massas Gravitacionais, Partículas Eletrizadas, Ímãs e Fios Conduzindo Correntes Elétricas

Nessa Subseção mostro que Faraday, Maxwell e outros autores definiram originalmente o campo como sendo uma região do espaço. Isto é, identificaram campo com espaço.⁷⁴⁶ Eles não definiram o campo como alguma coisa material localizada no espaço. O campo não foi originalmente definido como uma entidade real, “algo” ou “alguma coisa” localizada no espaço. *Ao contrário, o campo foi definido como sendo o próprio espaço.*

Faraday utilizou a palavra “campo” pela primeira vez em 7 de novembro de 1845, em seu Diário.⁷⁴⁷ Mas muito antes desta época já utilizava expressões análogas tais como “curvas magnéticas,” “linhas de força magnética,” ou “linhas de força.” Em um artigo publicado em 1851 ele definiu o *campo* como sendo a *região do espaço* ao redor dos corpos que estava investigando:⁷⁴⁸

2806. Tentarei agora considerar qual é a influência que os corpos paramagnéticos e diamagnéticos, considerados como condutores (2797), exercem sobre as linhas de força em um campo magnético. Qualquer porção do espaço atravessada por linhas de força magnética, pode ser considerada como um tal campo, e provavelmente não existe espaço sem elas.

O mesmo conceito foi adotado por Maxwell, como pode ser observado a partir de sua definição do campo elétrico que aparece em seu livro principal, *Tratado de Eletricidade e Magnetismo*:⁷⁴⁹

44.] O campo elétrico é a porção do espaço na vizinhança dos corpos eletrizados, considerado com referência aos fenômenos elétricos.

Maxwell e Jenkin apresentaram uma definição similar do campo magnético, minha ênfase:⁷⁵⁰

⁷⁴⁵[O’R65, Vol. 2, Capítulo 13, Seção 4, págs. 645-661], [Lar82], [Gar04], [KS05], [And07], [SK07], [KS08], [Rib08], [RVA08], [ARV09], [AC11], [Ass13], [Ass14b] e [AC15].

⁷⁴⁶[Lar82, pág. 16].

⁷⁴⁷[Ner89, Nota 17].

⁷⁴⁸[Far52, parágrafo 2806, pág. 690].

⁷⁴⁹[Max54a, Vol. 1, parágrafo 44, pág. 47].

⁷⁵⁰[MJ64, pág. 133] e [MJ65].

6. *Campo Magnético*. — É claro que a presença do ímã de alguma maneira modifica o espaço ao seu redor, já que qualquer outro ímã colocado nesse espaço sofre uma força peculiar. *A vizinhança de um ímã é, por conveniência, chamada de campo magnético*; e pela mesma razão, o efeito produzido por um ímã é frequentemente expresso como sendo devido ao campo magnético, em vez de ser devido ao próprio ímã.

Maxwell em seu *Tratado* apresentou uma definição similar de campo magnético ao interpretar a descoberta de Oersted⁷⁵¹ da deflexão de uma bússola colocada nas proximidades de um longo fio conduzindo uma corrente elétrica, minha ênfase:⁷⁵²

476.] Portanto, parece que no espaço ao redor de um fio conduzindo uma corrente elétrica agem forças sobre um ímã que dependem da posição do fio e da intensidade da corrente. *Portanto, o espaço no qual agem estas forças pode ser considerado como um campo magnético*, e podemos estudá-lo da mesma forma como já estudamos o campo na vizinhança dos ímãs comuns, ao traçar o curso das linhas de força magnética, e medindo a intensidade da força em cada ponto.

Em seu artigo de 1864-1865 contendo uma teoria dinâmica do campo eletromagnético ele já havia expresso pontos de vista similares:⁷⁵³

(3) Portanto, a teoria que proponho pode ser chamada uma teoria do *campo eletromagnético*, já que ela lida com o espaço na vizinhança dos corpos elétricos ou magnéticos, e ela pode ser chamada uma teoria *dinâmica*, pois ela assume que no espaço há matéria em movimento, pela qual são produzidos os fenômenos eletromagnéticos observados.

(4) O campo eletromagnético é aquela parte do espaço que contém e circunda corpos em condições elétricas e magnéticas.

Esta definição também foi seguida por J. J. Thomson (1856-1940). Ele afirmou o seguinte após descrever os fenômenos triboelétricos básicos (ou seja, após descrever a eletrização por atrito e fenômenos correlacionados):⁷⁵⁴

Diz-se que a cera de lacre e a flanela estão *eletrizados*, ou em um estado de *eletrificação*, ou carregados com *eletricidade*; e a região na qual as atrações e repulsões são observadas é chamada de *campo elétrico*.

James Jeans (1877-1946) também seguiu as definições de Faraday e Maxwell:⁷⁵⁵

30. O espaço na vizinhança de cargas de eletricidade, considerado com referência aos fenômenos elétricos ocorrendo neste espaço, é denominado de campo elétrico.

Vários outros autores apresentaram uma definição similar do campo, como citado por O’Rahilly.⁷⁵⁶ Heilbron resumiu essas definições nos seguintes termos:⁷⁵⁷

⁷⁵¹Ver a Nota de rodapé 348 na página 188.

⁷⁵²[Max54a, Vol. 2, parágrafo 476, pág. 139].

⁷⁵³[Max65, pág. 460] e [Max65a, pág. 527].

⁷⁵⁴[Tho21, pág. 1].

⁷⁵⁵[Jea41, pág. 24].

⁷⁵⁶[O’R65, Vol. 2, pág. 651].

⁷⁵⁷[Hei81, pág. 187].

Campo, em geral, significa uma região do espaço considerada em relação ao comportamento potencial dos corpos de teste que se movimentam nela; os eletricitistas de 1780 não tinham a palavra, mas tinham o conceito, que eles chamavam de “esfera de influência”, *sphaera activitatis* ou *Wirkungskreis*. [...]

Ao longo do tempo foram dadas outras definições para o conceito de campo, sendo algumas delas apresentadas a seguir.

27.1.2 O Campo Definido como uma Entidade Física Real Localizada no Espaço

Muitos físicos modernos consideram o campo como sendo uma entidade física real localizada no espaço, ou preenchendo o espaço. Essa entidade real seria material, tal como um fluido ou um meio material.

Albert Einstein (1879-1955), por exemplo, disse o seguinte:⁷⁵⁸

Para a pergunta: “Por que uma pedra que levantamos e soltamos cai na terra?”, a resposta geralmente é: “Porque ela é atraída pela terra”. A física moderna formula a resposta de forma um pouco diferente pelo seguinte motivo. Um estudo mais detalhado dos fenômenos eletromagnéticos levou à conclusão de que não existe uma ação direta à distância. Se, por exemplo, um ímã atrai um pedaço de ferro, não devemos nos contentar com a visão de que o ímã age diretamente sobre o ferro por meio do espaço vazio entre eles, mas imaginamos, de acordo com Faraday, que o ímã sempre produz algo fisicamente real no espaço ao seu redor, que é chamado de “campo magnético”. Esse campo magnético, por sua vez, atua sobre o pedaço de ferro, de modo que ele se esforça para se mover em direção ao ímã. Não discutiremos aqui a justificativa desse conceito intermediário arbitrário. Deve-se observar apenas que, com a ajuda dele, os fenômenos eletromagnéticos, especialmente a propagação de ondas eletromagnéticas, podem ser teorizados de forma muito mais satisfatória do que sem ele. Os efeitos da gravitação também são conceituados de maneira semelhante.

Feynman, Leighton e Sands afirmaram o seguinte:⁷⁵⁹

Podemos escrever a força $\mathbf{F}$ atuando sobre uma carga q deslocando-se com velocidade $\mathbf{v}$ como

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (1.1)$$

Denominamos $\mathbf{E}$ como sendo o *campo elétrico* e $\mathbf{B}$ o *campo magnético* no local da carga.

[...] É precisamente porque $\mathbf{E}$ (ou $\mathbf{B}$) pode ser especificado em todo ponto do espaço que ele é chamado de um “campo.” Um “campo” é qualquer grandeza física que assume valores diferentes em diferentes pontos do espaço.

⁷⁵⁸[Ein20b, pág. 43, parágrafo 19] com tradução para o inglês em [Ein20a, pág. 74].

⁷⁵⁹[FLS64, págs. 1-2 e 1-4].

De acordo com Griffiths:⁷⁶⁰

O que é, exatamente, um campo elétrico? Comecei, deliberadamente, com o que se pode chamar de interpretação ‘mínima’ de $\mathbf{E}$, como passo intermediário no cálculo de forças elétricas. Mas recomendo que pense no campo como uma entidade física ‘real’ que preenche o espaço em torno de qualquer carga elétrica.

27.1.3 O Campo Definido como uma Grandeza Vetorial com Módulo, Direção e Sentido

A maioria dos autores considera o campo como uma grandeza vetorial que tem módulo, direção e sentido. O campo gravitacional é normalmente representado hoje em dia por $\vec{g}$ ou $\mathbf{g}$, o campo elétrico por $\vec{E}$ ou $\mathbf{E}$, enquanto que o campo magnético é usualmente representado por $\vec{B}$ ou $\mathbf{B}$.

Maxwell enfatizou esse aspecto da seguinte maneira em seu *Tratado*:⁷⁶¹

O Campo Elétrico.

44.] O campo elétrico é a porção do espaço nas redondezas de corpos eletrizados, considerados com referência aos fenômenos elétricos. [...]

Seja e a carga do corpo, e F a força atuando sobre o corpo em uma certa direção, então quando e é muito pequena, F é proporcional a e , ou

$$F = Re,$$

onde R depende da distribuição de eletricidade sobre outros corpos no campo. Se a carga e puder ser feita igual à unidade sem perturbar a eletrização dos outros corpos, teremos $F = R$.

Denominaremos R de intensidade eletromotriz resultante no ponto dado do campo. Quando quisermos expressar o fato de que essa grandeza é um vetor, vamos denominá-la pela letra alemã $\mathfrak{E}$.

Em vez do símbolo $\mathfrak{E}$ de Maxwell, hoje em dia o campo elétrico é normalmente representado pelo símbolo $\vec{E}$. A força elétrica $\vec{F}$ atuando sobre uma partícula com carga e é então escrita como:

$$\vec{F} = e\vec{E}. \quad (27.1)$$

Maxwell também considerou o campo magnético como um vetor. Por exemplo, no Capítulo II do Volume 2 de seu *Tratado*, que lida com a força magnética e com a indução magnética, disse o seguinte:⁷⁶²

Os três vetores, a magnetização $\mathfrak{J}$, a força magnética $\mathfrak{H}$, e a indução magnética $\mathfrak{B}$, estão conectados pela equação vetorial

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{J}. \quad (7)$$

⁷⁶⁰[Gri89, pág. 64] com tradução para o português em [Gri10, págs. 43-44].

⁷⁶¹[Max54a, Vol. 1, parágrafo 44, pág. 48].

⁷⁶²[Max54a, Vol. 2, parágrafo 400, pág. 25].

Hoje em dia essa equação conectando o campo $\vec{B}$ (chamado de campo magnético, indução magnética ou densidade de fluxo magnético), o campo $\vec{M}$ (chamado de momento de dipolo magnético por unidade de volume) e o campo auxiliar $\vec{H}$ (chamado de intensidade magnética por alguns autores, enquanto que outros autores o denominam de campo magnético), no Sistema CGS de unidades e no Sistema Internacional de Unidades, é escrita como, respectivamente:⁷⁶³

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M} , \quad (27.2)$$

e

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M} . \quad (27.3)$$

27.1.4 O Campo Eletromagnético Propaga-se em um Meio Material de Acordo com Maxwell

Maxwell apresentou sua teoria eletromagnética da luz no Capítulo 20 de seu livro *Tratado de Eletricidade e Magnetismo*. Ele defendia a existência de um meio material, o éter, existindo entre os corpos materiais. Este meio seria elástico e teria uma densidade finita de matéria. A luz seria uma perturbação eletromagnética neste meio, propagando-se em relação a ele:⁷⁶⁴

781.] Em várias partes deste tratado tem sido feita uma tentativa de explicar os fenômenos eletromagnéticos por meio da ação mecânica transmitida de um corpo para outro através de um meio ocupando o espaço entre eles. A teoria ondulatória da luz também assume a existência de um meio. Temos agora de mostrar que as propriedades do meio eletromagnético são idênticas às propriedades do meio luminífero.

[...]

Mas as propriedades dos corpos são passíveis de medida quantitativa. Portanto, obtemos o valor numérico de alguma propriedade do meio, tal como a velocidade com a qual uma perturbação é propagada através dele, que pode ser calculada a partir das experiências eletromagnéticas, e também observada diretamente no caso da luz. Se for encontrado que a velocidade de propagação das perturbações eletromagnéticas é a mesma que a velocidade da luz, e isto não apenas no ar, mas [também] em outros meios transparentes, teremos fortes motivos para acreditar que a luz é um fenômeno eletromagnético, e a combinação da evidência óptica com a evidência elétrica produzirá uma convicção sobre a realidade do meio similar à convicção que obtemos, no caso dos outros tipos de matéria, a partir da evidência combinada dos sentidos.

27.1.5 O Campo Eletromagnético Propaga-se no Espaço Vazio de Acordo com Einstein

Em seu artigo de 1905 introduzindo a teoria da relatividade restrita, Einstein tornou o éter supérfluo e passou a considerar que a luz e as ondas eletromagnéticas propagam-se no espaço

⁷⁶³[Jac75, pág. 188], [Gri89, pág. 258] e [HM95, pág. 26].

⁷⁶⁴[Max54a, Vol. 2, parágrafo 781, pág. 431].

vazio, minha ênfase:⁷⁶⁵

Exemplos deste gênero, assim como o insucesso das experiências feitas para constatar um movimento da Terra em relação ao meio luminífero (“Lichtmedium”) levam à suposição de que, tal como na mecânica, também na eletrodinâmica os fenômenos não apresentam nenhuma particularidade que possa fazer-se corresponder à ideia de um repouso absoluto. Pelo contrário em todos os sistemas de coordenadas em que são válidas as equações da mecânica, também são igualmente válidas leis ópticas e eletrodinâmicas da mesma forma — o que, até à primeira ordem de aproximação, já está demonstrado. Vamos erguer à categoria de postulado esta nossa suposição (a cujo conteúdo chamaremos daqui em diante “Princípio da Relatividade”); e, além disso, vamos introduzir o postulado — só aparentemente incompatível com o primeiro — de que *a luz, no espaço vazio, se propaga sempre com uma velocidade determinada*, independente do estado de movimento da fonte luminosa. Estes dois postulados são suficientes para chegar a uma eletrodinâmica de corpos em movimento, simples e livre de contradições, baseada na teoria de Maxwell para corpos em repouso. *A introdução de um “éter luminífero” revelar-se-á supérflua*, visto que na teoria que vamos desenvolver não necessitaremos de introduzir um “espaço em repouso absoluto”, nem de atribuir um vetor velocidade a qualquer ponto do espaço vazio em que tenha lugar um processo eletromagnético.

Mais tarde Einstein e Infeld afirmaram o seguinte:⁷⁶⁶

Nossa única saída parece ser considerar como certo o fato de que o espaço tem a propriedade física de transmitir ondas eletromagnéticas e não se preocupar muito com o significado dessa afirmação.

27.1.6 O Campo Definido como um Reservatório de Energia, Momento Linear e Momento Angular

Vários autores consideram que há uma densidade de energia no campo eletromagnético.⁷⁶⁷ Eles afirmam que o campo elétrico armazena energia elétrica, isto é, que ele contém energia. Da mesma forma afirmam que o campo magnético armazena energia magnética.

J. J. Thomson, por exemplo, afirmou o seguinte:⁷⁶⁸

Se, como eu, acreditamos com Faraday e Clerk Maxwell, que as propriedades dos corpos carregados são devidas a linhas de força que se espalham a partir deles para o éter circundante, devemos colocar a energia do elétron no espaço fora da pequena esfera que supostamente representa o elétron.

De acordo com Einstein:⁷⁶⁹

⁷⁶⁵[Ein20b, págs. 37-38] e [Ein14, pág. 48].

⁷⁶⁶[EI38, pág. 159].

⁷⁶⁷[O’R65, Vol. 1, Cap. 8, Seção 4, págs. 281-290], [Gri89, Seção 7.5, págs. 320-333, e Subseção 8.2.2, págs. 358-360], [HM95, Seção 4.6, págs. 143-147, e Seção 14.12, págs. 522-527] e [CS02, Seção 23.5, págs. 854-859].

⁷⁶⁸[Tho29, pág. 12] e [O’R65, Vol. 1, pág. 281].

⁷⁶⁹[Ein05, pág. 891], com tradução para o inglês em [Ein20b, pág. 37] e tradução para o português em [Ein14, pág. 47].

Assim, se for móvel o ímã e estiver em repouso o condutor, estabelecer-se-á em volta do ímã um campo elétrico com um determinado conteúdo energético, que dará origem a uma corrente elétrica nas regiões onde estiverem colocadas porções do condutor.

Esses autores também consideram que há uma densidade de momento linear no campo eletromagnético.⁷⁷⁰

J. J. Thomson afirmou o seguinte:⁷⁷¹

Para dar um exemplo, de acordo com a terceira lei do movimento de Newton, ação e reação são iguais e opostas, de modo que o momento em qualquer direção de qualquer sistema autônomo é invariável. No caso de muitos sistemas elétricos, há violações aparentes desse princípio; assim, se considerarmos o caso de um corpo carregado em repouso atingido por um pulso elétrico, o corpo carregado, quando exposto à força elétrica do pulso, adquire velocidade e momento, de modo que, quando o pulso passa por ele, seu momento não é o que era originalmente. Assim, se limitarmos nossa atenção ao momento no corpo carregado, ou seja, se supormos que o momento está necessariamente confinado ao que consideramos matéria comum, haverá uma violação da terceira lei do movimento, pois o único momento reconhecido nessa visão restrita foi alterado. O fenômeno, no entanto, está de acordo com essa lei se reconhecermos a existência de momento no campo elétrico; pois, segundo essa visão, antes de o pulso atingir o corpo carregado, havia momento no pulso, mas nenhum [momento] no corpo; depois que o pulso passou pelo corpo, havia algum momento no corpo e uma quantidade menor no pulso, sendo a perda de momento no pulso igual ao ganho de momento pelo corpo.

Jackson afirmou o seguinte:⁷⁷²

[...] campos eletromagnéticos podem existir em regiões do espaço onde não há fontes. Eles podem transportar energia, momento [linear] e momento angular e, portanto, ter uma existência totalmente independente de cargas e correntes.

Griffiths afirmou o seguinte:⁷⁷³

Quando uma carga sofre *aceleração*, uma parte do campo, em um certo sentido, se ‘separa’ e parte à velocidade da luz, levando consigo energia, momento linear e momento angular. Isso é o que chamamos de **radiação eletromagnética**. Sua existência nos convida (se não nos *obriga*) a considerar os campos como entidades dinâmicas e independentes, por si mesmas, tão ‘reais’ quanto os átomos ou as bolas de beisebol. Consequentemente, nosso interesse se desloca do estudo das forças entre as cargas para o da teoria dos próprios campos. Mas é preciso uma carga para *produzir* um campo eletromagnético e outra para *detectá-lo*. Portanto, é melhor começarmos revendo as propriedades essenciais das cargas elétricas.

⁷⁷⁰[O’R65, Vol. 1, Cap. 8, Seção 5, págs. 291-304], [Gri89, Seção 7.5, págs. 320-333, e Subseção 8.2.2, págs. 358-360], [HM95, Seção 4.6, págs. 143-147, e Seção 14.12, págs. 522-527] e [CS02, Seção 23.5, págs. 854-859].

⁷⁷¹[Tho04, págs. 24-25] e [O’R65, Vol. 1, pág. 294].

⁷⁷²[Jac75, pág. 3].

⁷⁷³[Gri89, pág. 4] com tradução para o português em [Gri10, pág. xiv].

27.1.7 O Campo Definido como o Agente Intermediário para a Ação entre Massas Gravitacionais, entre Partículas Eletizadas, entre Ímãs, e entre Fios Conduzindo Correntes Elétricas

Muitos autores definem o campo como sendo o agente intermediário para a ação entre dois corpos separados espacialmente entre si. Ou seja, esses corpos não atuariam diretamente um sobre o outro. Em vez disso, um dos corpos produziria um campo ao seu redor que se propagaria em todas as direções tipicamente com a velocidade da luz. E seria esse campo que atuaria sobre o outro corpo quando o alcançasse. Esse foi o ponto de vista defendido por Maxwell, ao ir contra as teorias de ação à distância.⁷⁷⁴

Essa ideia também foi apresentada por Griffiths da seguinte maneira:⁷⁷⁵

A formulação de campo da eletrodinâmica

O problema fundamental que uma teoria eletromagnética espera resolver é o seguinte: se eu segurar uma porção de cargas elétricas *aqui* (e talvez as chacoalhe um pouco) — o que vai acontecer com as outras cargas elétricas, que estão *ali*? A solução clássica toma a forma de uma **teoria de campo**: dizemos que o espaço em torno de uma carga elétrica é permeado por **campos** elétricos e magnéticos (o ‘odor’ eletromagnético, por assim dizer, da carga). Uma segunda carga, na presença desses campos, sente uma força; os campos, então, transmitem a influência de uma carga para outra — eles intermedeiam a interação.

27.1.8 O Campo Definido como uma Grandeza que Possui Dimensões

No Sistema Internacional de Unidades, por exemplo, a unidade do campo gravitacional $\vec{g}$ é a mesma da aceleração, m/s^2 . A unidade do campo elétrico $\vec{E}$ é $V/m = kgmC^{-1}s^{-2} = kgmA^{-1}s^{-3}$. Já a unidade do campo magnético $\vec{B}$ é o Tesla, representada pela letra T , ou seja, $T = Wm^{-2} = kgC^{-1}s^{-1} = kgA^{-1}s^{-2}$.

27.1.9 O Campo Definido como as Linhas de Força Consideradas em Conjunto

Einstein e Infeld apresentaram uma definição do campo como sendo as linhas de força consideradas em conjunto.⁷⁷⁶

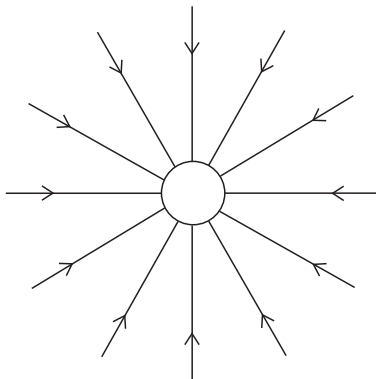
O Campo como Representação

[...] Sabemos que duas partículas se atraem e que essa força de atração diminui com o quadrado da distância. Podemos representar esse fato de uma nova maneira, e o faremos mesmo que seja difícil entender a vantagem disso. O pequeno círculo em nosso desenho representa

⁷⁷⁴[Max54a, Vol. 1, Prefácio à primeira edição, págs. v-xii, Vol. 2, parágrafos 641-646, págs. 278-283 e Capítulo 23, parágrafos 846-866, págs. 480-493].

⁷⁷⁵[Gri89, pág. 4] com tradução para o português em [Gri10, pág. xiv].

⁷⁷⁶[EI38, págs. 129-131].



um corpo atrator, por exemplo, o Sol. Na verdade, nosso diagrama deve ser imaginado como um modelo no espaço e não como um desenho em um plano. Nosso pequeno círculo, então, representa uma esfera no espaço, digamos, o Sol. Um corpo, o chamado *corpo de teste*, trazido para algum lugar nas proximidades do Sol será atraído ao longo da linha que liga os centros dos dois corpos. Assim, as linhas em nosso desenho indicam a direção da força de atração do Sol para diferentes posições do corpo de teste. A seta em cada linha mostra que a força está direcionada para o Sol; isso significa que a força é uma atração. Essas são as *linhas de força do campo gravitacional*. No momento, esse é apenas um nome e não há razão para enfatizá-lo ainda mais. Há um aspecto característico de nosso desenho que será enfatizado mais tarde. As linhas de força são construídas no espaço, onde não há matéria presente. No momento, todas as linhas de força, ou, resumidamente, o *campo*, indicam apenas como um corpo de teste se comportaria se fosse trazido para a vizinhança da esfera para a qual o campo foi construído.

Mais adiante no mesmo livro:⁷⁷⁷

Dessa forma, as linhas de força, ou seja, o campo, permitem determinar as forças que atuam sobre um polo magnético em qualquer ponto do espaço.

27.1.10 O Campo Definido como um Estado do Espaço

De acordo com Einstein, o campo pode ser considerado como um estado particular do espaço:⁷⁷⁸

Quando falamos sobre o éter aqui, é claro que não estamos nos referindo ao éter físico da teoria ondulatória da mecânica, que está sujeito às leis da mecânica newtoniana e cujos pontos individuais recebem uma velocidade. Estou convencido de que essa construção teórica desempenhou seu papel final desde o estabelecimento da teoria da relatividade especial. Em vez disso, trata-se, de modo mais geral, das coisas que são concebidas como fisicamente reais, que desempenham um papel no nexo causal da física, juntamente com a matéria ponderável que consiste em partículas elementares elétricas. Em vez de “éter”, poderíamos muito bem falar de “qualidades físicas do espaço”. Entretanto, pode-se argumentar que todos os objetos da física se enquadram nesse termo, pois, de acordo com a consistente teoria do campo, a

⁷⁷⁷[EI38, pág. 135].

⁷⁷⁸[Ein24, pág. 85] com tradução para o inglês em [Ein91, pág. 13].

matéria ponderável ou as partículas elementares que a constituem também devem ser entendidas como “campos” de um tipo especial ou como “estados espaciais” particulares.

27.1.11 O Campo como sendo Gerado ou Produzido por Corpos Fontes tais como Massas Gravitacionais, Partículas Eletizadas, Ímãs e Fios Conduzindo Correntes Elétricas

Alguns cientistas assumem que o “campo” é uma grandeza que é gerada, criada ou produzida no espaço por certos corpos. Estes corpos que produzem os campos são chamados de “fontes”, “corpos fontes”, “cargas fontes” etc. Supõe-se, por exemplo, que massas gravitacionais gerem ou produzam campos gravitacionais. Assume-se que corpos eletrizados ou cargas elétricas gerem campos elétricos. Da mesma forma supõe-se que partículas eletrizadas em movimento, ímãs e fios conduzindo correntes elétricas gerem campos magnéticos. Apresento aqui algumas citações defendendo esse ponto de vista.

Landau e Lifshitz afirmaram o seguinte:⁷⁷⁹

A interação de partículas pode ser descrita com a ajuda do conceito de *campo* de força. Ou seja, em vez de dizer que uma partícula age sobre outra, podemos dizer que a partícula cria um campo ao redor de si mesma; uma certa força então age sobre todas as outras partículas localizadas neste campo.

Feynman, Leighton e Sands afirmaram o seguinte:⁷⁸⁰

Temos então duas regras: (a) as cargas produzem um campo e (b) as cargas nos campos experimentam forças e se movem.

Griffiths afirmou o seguinte:⁷⁸¹

Mas é preciso uma carga para *produzir* um campo eletromagnético e outra para *detectá-lo*.

27.1.12 O Campo Devido a Corpos Fontes Gera ou Produz Forças sobre Outros Corpos de Teste tais como Massas Gravitacionais, Partículas Eletizadas, Ímãs e Fios Conduzindo Correntes Elétricas

De acordo com a maioria dos físicos, os campos devidos a “corpos fontes” podem atuar sobre outros corpos denominados de “corpos de teste,” “corpos teste”, “corpos de prova”, “cargas de prova” etc. (I) As massas gravitacionais teste, por exemplo, são afetadas por campos gravitacionais devidos a outras massas gravitacionais fonte. Estes campos gravitacionais geram ou produzem uma força sobre essas massas teste, acelerando-as em relação a um referencial inercial caso estejam livres para se deslocar. Da mesma forma, (II), partículas eletrizadas teste são afetadas por campos elétricos devidos a outras partículas eletrizadas

⁷⁷⁹[LL75, pág. 46].

⁷⁸⁰[FLS63, pág. 2-5].

⁷⁸¹[Gri89, pág. 4] com tradução para o português em [Gri10, pág. xiv].

fonte. Caso as partículas teste estejam livres para se deslocar em um referencial inercial, elas serão aceleradas por esses campos elétricos. (III) Já no caso de partículas de prova eletrizadas em movimento, ímãs de prova e fios de prova conduzindo correntes elétricas, eles são afetados por campos magnéticos devidos a outras fontes (outras partículas eletrizadas em movimento, outros ímãs e outros fios com corrente), sendo acelerados por esses campos caso esses corpos teste estejam livres para se deslocar em relação a um sistema de referência inercial.

Essa ideia foi expressa claramente por Feynman, Leighton e Sands:⁷⁸²

Descobriu-se mais sobre a força elétrica. A interpretação natural da interação elétrica é que dois objetos simplesmente se atraem: positivo contra negativo. No entanto, descobriu-se que essa era uma ideia inadequada para representá-la. Uma representação mais adequada da situação é afirmar que a existência da carga positiva, em algum sentido, distorce ou cria uma “condição” no espaço, de modo que, quando colocamos a carga negativa, ela sente uma força. Essa potencialidade de produzir uma força é chamada de *campo elétrico*. Quando colocamos um elétron em um campo elétrico, dizemos que ele é “puxado”. Temos então duas regras: (a) as cargas produzem um campo e (b) as cargas nos campos experimentam forças e se movem.

27.1.13 Condensações do Campo Eletromagnético Definidas como sendo as Partículas Elementares de Matéria

Einstein apresentou o ponto de vista de que as partículas são condensações do campo eletromagnético em uma palestra apresentada em 5 de maio de 1920 na Universidade de Leiden:⁷⁸³

Como, de acordo com nossas concepções atuais, as partículas elementares da matéria também são, em sua essência, nada mais do que condensações do campo eletromagnético, nossa visão atual do universo apresenta duas realidades completamente separadas uma da outra conceitualmente, embora conectadas causalmente, a saber, o éter gravitacional e o campo eletromagnético, ou — como também podem ser chamados — espaço e matéria.

Ele apresentou o mesmo ponto de vista em outras publicações.⁷⁸⁴

Assim, da forma como as coisas estão hoje, somos de fato forçados a distinguir entre “matéria” e “campos”, mesmo que tenhamos esperança de que as gerações posteriores superem essa visão dualista e a substituam por uma visão unificada, como a teoria de campo tentou em vão fazer em nossos dias.

Einstein e Infeld afirmaram o seguinte no livro *A Evolução da Física*:⁷⁸⁵

Campo e Matéria

[...]

⁷⁸²[FLS63, pág. 2-5].

⁷⁸³[Ein22, pág. 22] [O’R65, Vol. 2, pág. 655].

⁷⁸⁴[Ein24, pág. 85] com tradução para o inglês em [Ein91, pág. 13].

⁷⁸⁵[EI38, págs. 255-258].

Temos duas realidades: *matéria e campo*. Não há dúvida de que, no momento, não podemos imaginar toda a física construída sobre o conceito de matéria, como fizeram os físicos do início do século XIX. Por enquanto, aceitamos os dois conceitos. Podemos pensar na matéria e no campo como duas realidades distintas e diferentes? Dada uma pequena partícula de matéria, poderíamos imaginar, de forma ingênua, que há uma superfície definida da partícula onde ela deixa de existir e seu campo gravitacional aparece. Em nossa imagem, a região na qual as leis do campo são válidas é abruptamente separada da região na qual a matéria está presente. Mas quais são os critérios físicos que distinguem matéria e campo? Antes de conhecermos a teoria da relatividade, poderíamos ter tentado responder a essa pergunta da seguinte maneira: a matéria tem massa, enquanto o campo não tem. O campo representa a energia, a matéria representa a massa. Mas já sabemos que essa resposta é insuficiente em vista do conhecimento adicional adquirido. A partir da teoria da relatividade, sabemos que a matéria representa grandes reservas de energia e que a energia representa a matéria. Não podemos, dessa forma, distinguir qualitativamente entre matéria e campo, já que a distinção entre massa e energia não é qualitativa. De longe, a maior parte da energia está concentrada na matéria, mas o campo que envolve a partícula também representa energia, embora em uma quantidade incomparavelmente menor. Portanto, poderíamos dizer: A matéria está onde a concentração de energia é grande, e o campo onde a concentração de energia é pequena. Mas se esse for o caso, então a diferença entre matéria e campo é quantitativa e não qualitativa. Não há sentido em considerar a matéria e o campo como duas qualidades muito diferentes uma da outra. Não podemos imaginar uma superfície definida separando distintamente campo e matéria.

A mesma dificuldade surge para a carga e seu campo. Parece impossível fornecer um critério qualitativo óbvio para distinguir entre matéria e campo ou carga e campo.

[...]

Não podemos construir a física com base apenas no conceito de matéria. Mas a divisão em matéria e campo é, após o reconhecimento da equivalência de massa e energia, algo artificial e não claramente definido. Não poderíamos rejeitar o conceito de matéria e construir uma física de campo puro? O que impressiona nossos sentidos como matéria é, na verdade, uma grande concentração de energia em um espaço comparativamente pequeno. Poderíamos considerar a matéria como as regiões no espaço onde o campo é extremamente forte. Dessa forma, uma nova base filosófica poderia ser criada. Seu objetivo final seria a explicação de todos os eventos na natureza por leis estruturais válidas sempre e em todos os lugares. Uma pedra lançada é, desse ponto de vista, um campo mutável, no qual os estados de maior intensidade do campo viajam pelo espaço com a velocidade da pedra. Em nossa nova física, não haveria lugar para campo e matéria, sendo o campo a única realidade. Essa nova visão é sugerida pelas grandes conquistas da física de campo, por nosso sucesso em expressar as leis da eletricidade, do magnetismo e da gravitação na forma de leis estruturais e, finalmente, pela equivalência de massa e energia. Nosso problema final seria modificar nossas leis de campo de tal forma que elas não se desintegrassem em regiões nas quais a energia está enormemente concentrada.

Mas até agora não conseguimos cumprir este programa de forma convincente e consistente. A decisão sobre se é possível realizá-lo pertence ao futuro. Atualmente

devemos ainda assumir em todas as nossas construções teóricas atuais duas realidades: campo e matéria.

27.1.14 Etc.

Existem muitos outros significados associados com o conceito de campo. Mas paro por aqui, já que os significados anteriores são os mais comuns e frequentes na literatura.

27.2 Essas Diferentes Definições de Campo São Contraditórias Entre Si

Muitas das definições ou propriedades dos campos apresentadas na Seção 27.1 são contraditórias entre si. Muitas dessas definições também são contrárias às definições originais de Faraday e Maxwell. Apresento aqui alguns exemplos destas contradições e problemas introduzidos na física com o conceito de campo.

27.2.1 Uma Entidade Física Real Preenchendo o Espaço Não Pode Ser Identificada com o Próprio Espaço

Faraday, Maxwell e os criadores do conceito de campo definiram o campo como sendo uma região do espaço na vizinhança de corpos fontes. Esses corpos fontes podem ser uma massa gravitacional, um corpo eletrizado, um ímã ou um fio conduzindo uma corrente elétrica. Ou seja, o campo foi equiparado ao espaço, identificado com o vazio. Einstein e muitos cientistas modernos, por outro lado, sustentaram que o campo é uma entidade física real que preenche o espaço. Ou seja, Einstein considerava o campo como algo real no espaço. Isso é obviamente uma contradição. Os conceitos básicos da física são os de matéria e espaço vazio. A matéria é algo que tem propriedades físicas (pode ser dura ou macia, pode ser quente ou fria, pode ser sólida ou líquida, interage com outra matéria etc.) O espaço, por outro lado, não tem nenhuma dessas propriedades. Um corpo pode ocupar uma região do espaço. Ele também pode se mover de uma região do espaço para outra. Mas a matéria não é idêntica ao espaço e não deve ser equiparada a ele.

Portanto, se campo é uma região do espaço, conforme definido por Faraday e Maxwell, ele não pode ser uma entidade física real. Se, por outro lado, campo é uma entidade física real preenchendo o espaço, então ele não pode ser identificado com o próprio espaço. Esses dois conceitos se excluem. Isso sempre foi assim, desde os atomistas da Grécia antiga.

Pode-se até mesmo defender que não existe o vácuo ou o vazio. Nesse caso só haveria matéria em todo lugar.

Por outro lado, caso o campo seja identificado com o espaço, então ele não pode ao mesmo tempo ser identificado com matéria. Identificar simultaneamente campo com espaço vazio e com matéria é incoerente e contraditório.

27.2.2 Como Pode uma Região do Espaço ter Módulo, Direção e Sentido?

A concepção usual de espaço é que ele é o vácuo, ou seja, uma região vazia entre corpos materiais. Faraday e Maxwell definiram campo como uma região do espaço na vizinhança

de corpos eletrizados, ímãs e fios conduzindo uma corrente elétrica. Maxwell, Einstein e a maioria dos cientistas argumentaram que campo é uma grandeza vetorial, com módulo, direção e sentido. Como é possível que uma região de espaço vazio tenha magnitude, direção e sentido? Novamente isso não faz sentido, é incoerente e contraditório.

A matéria pode ter propriedades (um corpo A pode ter uma massa grande ou pequena, uma temperatura alta ou baixa, um corpo A pode mover-se em direção a outro corpo B ou afastar-se dele com uma velocidade grande ou pequena, ...). Um fluido material como a água, um certo gás ou o ar pode ter propriedades (uma temperatura grande ou pequena, uma densidade maior ou menor, uma pressão alta ou baixa, partes do fluido podem estar em movimento em relação a outros corpos como no caso de furacões e redemoinhos, ...) Já o espaço vazio, por definição, é o vácuo, não tem propriedades. Ele não pode ter um módulo (um valor numérico ou magnitude alta ou baixa) e não pode ter direção.

27.2.3 Como Pode uma Região do Espaço se Propagar no Próprio Espaço?

A definição básica de campo, de acordo com Faraday, Maxwell e muitos outros cientistas, é que, em geral, ele significa uma região do espaço ao redor de corpos fontes. Um campo elétrico, por exemplo, é uma região do espaço ao redor de partículas eletrizadas. Um campo magnético, por outro lado, é uma região do espaço ao redor de ímãs ou ao redor de fios conduzindo correntes elétricas. Uma onda eletromagnética na teoria de Maxwell é composta de campos elétricos e magnéticos que oscilam ortogonalmente entre si. Portanto, devem existir duas regiões de espaço ortogonais entre si, o que é um conceito muito estranho. Isso nunca foi explicado por Maxwell nem por outros autores.

Em todo caso, de acordo com a definição original de Maxwell de um campo como uma região do espaço, uma onda eletromagnética composta de campos elétricos e magnéticos também seria uma região do espaço. Mas esse conceito também cria outros problemas. De acordo com Einstein, as ondas eletromagnéticas se propagam no espaço vazio. Como é possível que uma região do espaço se propague no próprio espaço? Isso nunca foi explicado por Einstein nem por nenhuma outra pessoa. O pior ainda é termos duas regiões do espaço ortogonais entre si (como é o caso do campo elétrico ortogonal ao campo magnético de uma onda eletromagnética) que se propaga em relação ao próprio espaço. O espaço sendo ortogonal ao espaço e propagando-se no próprio espaço!

27.2.4 Como Pode uma Região do Espaço, ou seja, Algo Imaterial, Interagir com um Corpo Material?

Faraday e Maxwell definiram campo como uma região do espaço ao redor de corpos fontes. Os livros didáticos normalmente argumentam que um corpo de teste, como uma massa gravitacional, sofre uma força quando está na presença de um campo gravitacional. Por exemplo, essa massa de teste poderia ser acelerada em relação ao solo devido a esse campo gravitacional. Um corpo de teste eletrizado, da mesma forma, sentiria a presença de um campo elétrico. Ou seja, uma força elétrica atuaria sobre essa carga de prova que poderia ser acelerada em relação a um referencial inercial. Já um ímã e um fio conduzindo uma corrente elétrica sentiriam a presença de um campo magnético, ou seja, um torque magnético ou uma força magnética atuaria sobre eles. Esse torque ou essa força seriam produzidos pelo campo magnético.

Mas como é possível que algo imaterial, tal como uma região do espaço, atue sobre um corpo material? Faraday, Maxwell, Lorentz, Einstein e os autores dos livros didáticos nunca explicaram como uma região do espaço pode acelerar um corpo material. Ou seja, nunca explicaram como o nada, o vácuo ou o vazio pode atuar sobre uma pedra na experiência de queda livre, acelerando-a em direção ao solo.

27.2.5 Como Pode uma Região do Espaço Ter Dimensões Diferentes de Comprimento, Área ou Volume?

Se um campo é uma região do espaço, conforme definido por Faraday, Maxwell e muitos outros cientistas, ele deve ter dimensão de “espaço.” Ou seja, a unidade de medida de um campo deve coincidir com a de comprimento, área ou volume. No Sistema Internacional de Unidades (SI ou MKSA), a unidade de comprimento é o metro, representado pelo símbolo m , a unidade de área é o metro quadrado, representado por m^2 , enquanto que a unidade de volume é o metro cúbico, representado por m^3 .

Mas não é isso que acontece com os campos comuns. O campo gravitacional $\vec{g}$ tem a unidade de aceleração, m/s^2 , o campo elétrico $\vec{E}$ tem a unidade $V/m = kgmC^{-1}s^{-2} = kgmA^{-1}s^{-3}$, enquanto que o campo magnético $\vec{B}$ tem a unidade Tesla, representada pela letra T , ou seja, $T = Wm^{-2} = kgC^{-1}s^{-1} = kgA^{-1}s^{-2}$. Todas essas unidades são diferentes das unidades de comprimento, área e volume. Portanto, não é possível identificar nenhum desses três campos com o espaço.

27.2.6 Um Campo que Não É uma Região do Espaço Não Está em Conformidade com as Teorias de Faraday e Maxwell

Conforme mostrado nas Subseções 27.2.1 até 27.2.6, vários problemas com o conceito de campo estão relacionados à sua definição como “uma região do espaço”. Essa foi a definição básica de campo de acordo com Faraday e Maxwell.

Se abandonarmos essa definição para evitar os problemas anteriores, não poderemos mais chamar a teoria clássica de campos de “teoria eletromagnética de Faraday e Maxwell” ou “teoria de campos de Faraday-Maxwell”. Afinal, esse será um novo modelo não compatível com as definições, raciocínios e conceitos apresentados por Faraday e Maxwell. As pessoas que defenderem essa nova abordagem não estarão seguindo as ideias de Faraday e Maxwell. Portanto, essas pessoas devem começar com uma estrutura conceitual completamente nova. Em particular, para evitar confusão, elas devem criar outro conceito e dar a ele um nome diferente de “campo”. Além disso, essas pessoas não devem mais associar os nomes de Faraday e Maxwell às suas novas teorias.

Em todo caso, mesmo abandonando a definição de campo como uma região do espaço, ainda há muitos outros problemas e contradições relacionados com os outros significados associados ao conceito de campo apresentados na Seção 27.1. Alguns desses problemas são discutidos na sequência.

27.2.7 Maxwell Afirmou que uma Onda Eletromagnética se Propaga em um Meio Material que Preenche Todo o Espaço, o Éter. Einstein, por outro lado, Afirmou que uma Onda Eletromagnética se Propaga no Espaço Vazio

Uma região específica do espaço pode ser vazia de matéria, como um vácuo. Ou pode ser preenchida com matéria. Neste segundo caso, podemos ter uma região do espaço ocupada por um corpo material, como uma rocha, por exemplo. Também podemos ter uma região do espaço ocupada por um meio material, como água, ar ou outro fluido. Uma região vazia do espaço (um vácuo) e uma região do espaço preenchida com matéria são duas concepções completamente diferentes.

Faraday e Maxwell acreditavam fortemente em um meio material preenchendo todo o espaço. Maxwell denominou esse meio de éter.⁷⁸⁶ Como ele disse no Prefácio de seu *Tratado de Eletricidade e Magnetismo*:⁷⁸⁷

Por exemplo, Faraday, em sua mente, viu linhas de força atravessando todo o espaço, enquanto os matemáticos viram centros de força se atraindo à distância: Faraday via um meio onde eles não viam nada além de distância: Faraday procurou a origem dos fenômenos em ações reais que ocorriam no meio, e eles ficaram satisfeitos por tê-la encontrado em um poder de ação à distância que se imprimia nos fluidos elétricos.

Na teoria eletromagnética da luz, a onda eletromagnética propaga-se nesse meio material, o éter.⁷⁸⁸ Algumas citações relevantes foram apresentadas na Subseção 27.1.4.

Maxwell terminou seu livro com a seguinte afirmação:⁷⁸⁹

[...] Portanto, todas essas teorias levam à concepção de um meio no qual a propagação ocorre e, se admitirmos esse meio como uma hipótese, acho que ele deve ocupar um lugar de destaque em nossas investigações e que devemos nos esforçar para construir uma representação mental de todos os detalhes de sua ação, e esse tem sido meu objetivo constante neste tratado.

Einstein, por outro lado, tornou o éter supérfluo em sua teoria da relatividade especial e argumentou que a onda eletromagnética propaga-se no espaço vazio.⁷⁹⁰ Algumas citações relevantes foram apresentadas na Subseção 27.1.5.

Esses são dois pontos de vista completamente opostos. Portanto, é errado dizer que as teorias da relatividade de Einstein são compatíveis com a eletrodinâmica de Maxwell. Essas são estruturas conceituais completamente diferentes. Não faz sentido manter as equações de Maxwell, removendo a substância material que lhe dá suporte, e ao mesmo tempo argumentar que a nova teoria concorda com os pontos de vista de Maxwell. Afirmar o contrário, como foi feito por Einstein, é confundir todo mundo.

Muitos livros didáticos citam com aprovação a seguinte declaração do físico alemão Heinrich Hertz (1857-1894):⁷⁹¹

⁷⁸⁶[Max54a, Vol. 1, Prefácio à primeira edição, págs. v-xii, Vol. 2, parágrafos 641-646, págs. 278-283 e Cap. 23, parágrafos 846-866, págs. 480-493].

⁷⁸⁷[Max54a, Vol. 1, pág. ix].

⁷⁸⁸[Max54a, Vol. 2, parágrafo 781, pág. 431].

⁷⁸⁹[Max54a, Vol. 2, parágrafo 866, pág. 493].

⁷⁹⁰[Ein20b, págs. 37-38] e [Ein14, pág. 48].

⁷⁹¹[Her94, pág. 23] com tradução para o inglês em [Her00, pág. 21].

Portanto, para a pergunta “O que é a teoria de Maxwell?”, não conheço uma resposta mais curta e definitiva do que esta: A teoria de Maxwell é o sistema de equações de Maxwell.

No entanto, há uma pessoa que certamente rejeitaria imediatamente essa resposta, a saber, o próprio Maxwell. Ele começou e terminou seu livro mais importante defendendo a ideia de um éter material. Seu sistema de equações sem o meio material subjacente não faria sentido para ele.

Por exemplo, sempre que Maxwell lidava com o conceito que ele chamava de “deslocamento elétrico”, era o deslocamento de um meio material. Este meio material podia ser um dielétrico ou o éter:⁷⁹²

A polarização elétrica de uma porção elementar de um dielétrico é um estado forçado no qual o meio é lançado pela ação da força eletromotriz e que desaparece quando essa força é removida. Podemos conceber que ela consiste no que podemos chamar de deslocamento elétrico, produzido pela intensidade eletromotriz. [...]

Neste tratado, a indução elétrica estática é medida pelo que chamamos de deslocamento elétrico, uma quantidade ou vetor direcionado que denotamos por $\mathfrak{D}$, e suas componentes por f, g, h . [...]

A corrente real $\mathfrak{C}$ é composta pela corrente de condução $\mathfrak{R}$ e pela variação do deslocamento elétrico $\mathfrak{D}$, e como ambas dependem da intensidade eletromotriz $\mathfrak{E}$, encontramos, como no Artigo 611,

$$\mathfrak{C} = (C + \frac{1}{4\pi}K\frac{d}{dt})\mathfrak{E} .$$

Ou seja, segundo Maxwell, não haveria deslocamento elétrico, nem corrente de deslocamento, nem onda eletromagnética se não houvesse meio material a ser deslocado.

27.2.8 Qual é a Relação do Éter com o Campo Elétrico e com o Campo Magnético?

Maxwell falou muito sobre os campos elétricos e magnéticos, geralmente enfatizando que eram regiões do espaço ao redor de corpos eletrizados, ao redor de ímãs e ao redor de fios conduzindo correntes elétricas. Ele também falou muito sobre o éter, supondo que fosse um meio material que preenchia o espaço. Entretanto, ele nunca fez uma distinção clara entre esses conceitos. Certamente, eles não eram sinônimos. Entretanto, qual é a relação entre um campo elétrico e o éter? E qual a relação entre um campo magnético e o éter? E qual a relação entre um campo gravitacional e o éter?

O mesmo pode ser dito de Lorentz. Ele também falou muito sobre campos elétricos e magnéticos. Ele também estava convencido da existência de um meio material preenchendo o espaço, o éter. Ele assumiu que esse éter estava em repouso em relação ao referencial das estrelas fixas. Mas ele nunca apresentou claramente quais eram as relações específicas dos conceitos de campo elétrico e campo magnético com o conceito de éter.

Fica então difícil entender as teorias desses autores porque não conhecemos as relações entre esses conceitos que eram essenciais para esses dois cientistas.

⁷⁹²[Max54a, parágrafo 60, pág. 65; parágrafo 608, pág. 252].

27.2.9 As Dimensões de $\vec{g}$, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ São Diferentes Entre Si. Isso Significa que Não São Grandezas de Mesmo Tipo. Portanto, Elas Não Podem Receber a Mesma Denominação como a de “Campo”. Elas São Grandezas de Natureza Diferente e Precisam Ser Classificadas em Categorias Diferentes

O matemático grego Euclides, que floresceu por volta de 300 a.C., apresentou a teoria clássica das proporções nos Livros V e VI de sua obra *Os Elementos*:⁷⁹³

4. Magnitudes são ditas ter uma razão entre si, aquelas que multiplicadas podem exceder uma a outra.

Ou seja, duas magnitudes A e B são do mesmo tipo se houver dois números naturais m e n tais que $mA > B$ e $nB > A$. Exemplos de duas magnitudes do mesmo tipo: dois comprimentos, duas áreas, dois volumes, dois ângulos, dois intervalos de tempo, dois pesos etc. Um comprimento $d_1 = 5\text{ m}$ é do mesmo tipo que um comprimento $d_2 = 18\text{ m}$. Afinal de contas, $d_2 > d_1$ e $4d_1 > d_2$. Logo, d_2 é maior do que d_1 , há uma razão entre eles dada por $d_2/d_1 = 18/5$ etc.

Por outro lado, um comprimento $d = 5\text{ m}$ e um peso $P = 18\text{ N}$ são grandezas de tipos diferentes. Não podemos dizer qual grandeza é maior que a outra. Da mesma forma, não há múltiplos de d que possam ser maiores que P , nem múltiplos de P que possam ser maiores que d . Por essa razão, eles receberam nomes diferentes, comprimento e peso, e também unidades diferentes, metros (m) e Newtons (N).

Na física, há vários tipos de energia. Temos, por exemplo, a energia cinética, a energia potencial gravitacional, a energia potencial elástica, a energia potencial elétrica, a energia magnética, a energia nuclear, a energia térmica, a energia química etc. Todas essas grandezas têm a mesma unidade, Joule, representada por J . Esses diferentes tipos de energia podem ser comparados uns com os outros. Podemos, por exemplo, especificar quantas vezes uma determinada energia cinética é maior ou menor do que outra energia elétrica específica. Elas também podem ser convertidas ou modificadas umas nas outras. Por exemplo, quando soltamos uma pedra em repouso em relação à Terra, ela cai no chão. Dizemos que sua energia potencial gravitacional inicial está sendo transformada em energia cinética à medida que a pedra cai no chão.

Também temos vários tipos de força: força gravitacional, força elétrica, força magnética, força elástica, força nuclear, força de atrito etc. Todas essas magnitudes têm a mesma unidade, Newton, representada por N . Essas forças, ao atuarem simultaneamente no mesmo corpo, podem combinar suas ações. Um exemplo é a lei do paralelogramo de forças que Newton apresentou no primeiro Corolário após suas três leis do movimento no início de seu livro *Principia*. Quando um bloco de matéria permanece em repouso sobre uma mesa, dizemos que seu peso para baixo exercido pela Terra é equilibrado pela força normal para cima exercida pela mesa. Uma força pode ser adicionada ou subtraída de outra força, é possível dizer quantas vezes uma determinada força é maior que outra força etc.

O mesmo comportamento não acontece com $\vec{g}$, $\vec{E}$ e $\vec{B}$. No Sistema Internacional de Unidades, por exemplo, a unidade de medida do campo gravitacional $\vec{g}$ é a aceleração, m/s^2 . A unidade do campo elétrico $\vec{E}$ é a de $V/m = kgmC^{-1}s^{-2} = kgmA^{-1}s^{-3}$. A unidade do

⁷⁹³[Euc09, Livro V, Definição 4, pág. 205] e [Euc56b, Livro V, Definição 4, pág. 114].

campo magnético $\vec{B}$ é a de Tesla, ou seja, $T = Wm^{-2} = kgC^{-1}s^{-1} = kgA^{-1}s^{-2}$. Isto é, essas três magnitudes têm unidades de medida diferentes.

A magnitude $\vec{g}$ pode ser chamada de aceleração gravitacional não apenas porque tem a unidade de aceleração, mas também porque representa, por exemplo, a aceleração de queda livre de um corpo de teste liberado em repouso em relação ao solo. A magnitude $\vec{E}$, por outro lado, não pode ser chamada de aceleração elétrica. Uma partícula de massa M e carga Q liberada em repouso dentro de um capacitor no qual há um campo elétrico constante $\vec{E}$ é acelerada em relação a um sistema de referência inercial com uma aceleração $\vec{a}$ dada por $\vec{a} = Q\vec{E}/M$, e não por $\vec{a} = \vec{E}$. Da mesma forma, a magnitude $\vec{B}$ não pode ser chamada de aceleração magnética.

Assim como as grandezas $\vec{g}$, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ têm unidades diferentes, elas representam tipos diferentes de magnitude. Portanto, não faz sentido classificá-las na mesma categoria, ou seja, na categoria de “campo”. Essas três grandezas pertencem a categorias diferentes que têm de receber nomes diferentes. A magnitude $\vec{g}$ pode estar classificada na categoria aceleração. Também pode-se dar um nome genérico a essa categoria, tal como *xxx*. A magnitude $\vec{E}$ pode estar classificada na categoria *yyy*. Contudo, a categoria *yyy* não pode receber o nome aceleração, nem o nome *xxx*. Ou seja, *xxx* tem de ser diferente de *yyy*. A magnitude $\vec{B}$ pode estar classificada na categoria *zzz*. Contudo, a categoria *zzz* não pode receber o nome *xxx* nem o nome *yyy*.

Teríamos então que $\vec{g}$ seria uma *aceleração gravitacional* (ou uma *xxx gravitacional*), $\vec{E}$ seria uma *yyy elétrica*, enquanto que $\vec{B}$ seria uma *zzz magnética*. Esse seria o procedimento correto e coerente a ser adotado para a classificação e denominação dessas grandezas diferentes, de acordo com tudo o que sempre foi feito na física.

Denominar $\vec{g}$, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ pelo mesmo nome genérico, a saber, *campo*, cria apenas confusões e mal-entendidos.

27.2.10 Como é Possível Haver Ação e Reação entre um Campo e um Corpo Material?

Geralmente a terceira lei do movimento de Newton, o princípio de ação e reação, é aplicada para a interação entre dois corpos materiais. A força que um corpo A exerce sobre outro corpo B é igual e oposta à força exercida por B sobre A . Essa força pode ter várias origens, a saber, gravitacional, elástica, elétrica, magnética etc. Se os corpos A e B estão inicialmente em repouso em relação a um referencial inercial, sendo livres para se mover, sua interação mútua fará com que sejam acelerados neste referencial, movendo-se em direções opostas.

Hoje em dia, por outro lado, esse fato é descrito utilizando o conceito de campo. Os físicos então argumentam que o campo produzido pelo corpo A se propaga no espaço, normalmente na velocidade da luz. Quando esse campo atinge o corpo B posteriormente, o campo interage com B . Como devemos entender ação e reação nessa formulação de campo? O corpo B , por exemplo, é acelerado em relação a um referencial inercial por essa interação. O que acontece durante essa interação com o campo gerado por A ? Existe uma força atuando nesse campo e sendo gerada pelo corpo B ? Esse campo é acelerado em relação a um referencial inercial? Caso esse campo seja acelerado, sua velocidade vai ultrapassar a velocidade da luz? O campo acelera como um todo em relação a um referencial inercial? Ou seja, é toda a região do espaço infinito que acelera em relação a um referencial inercial? Ou é apenas a porção do campo ao redor do corpo B que é acelerada em relação a um referencial inercial? Se houver forças gravitacionais, elétrica e magnética atuando simultaneamente sobre um corpo A , então os

três campos $\vec{g}$, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ vão sofrer uma força de reação do corpo A ?

Não são claras as respostas a essas e a outras questões similares. Autores diferentes de vários livros didáticos de eletromagnetismo clássico discordam entre si nessas questões.

27.2.11 A Condensação de um Campo Não Pode Ser uma Partícula Elementar de Matéria

Einstein afirmou que as partículas elementares de matéria são condensações do campo eletromagnético.⁷⁹⁴

Porém, como afirmou corretamente O’Rahilly:⁷⁹⁵

O campo começou como uma prole humilde, a penumbra sombria que envolve uma carga; ele termina destruindo não apenas a eletricidade, mas a matéria!

Esse ponto de vista defendido por Einstein tem sido seguido por muitos cientistas modernos.⁷⁹⁶

Entretanto, esse ponto de vista é incoerente e contraditório. O que significa uma condensação do campo eletromagnético? É o campo elétrico por unidade de volume, $d\vec{E}/dV$ ou $d|\vec{E}|/dV$? É o campo magnético por unidade de volume, $d\vec{B}/dV$ ou $d|\vec{B}|/dV$? E o que Einstein quis dizer com uma partícula elementar de matéria? Ele estava se referindo à sua massa inercial m_i ? Ou à sua massa gravitacional m_g ? Ou à sua carga elétrica q ? Nenhuma dessas opções faz sentido, afinal, essas magnitudes ($d|\vec{E}|/dV$, $d|\vec{B}|/dV$, m e q) têm dimensões diferentes. Elas não podem ser identificadas uma com a outra. Portanto, é incorreto dizer que as partículas elementares da matéria são, em sua essência, nada mais do que condensações do campo eletromagnético.

27.2.12 Etc.

Eu poderia apresentar muitos outros exemplos mostrando as contradições mútuas entre os vários significados associados ao conceito de campo. Mas estes são suficientes para indicar os problemas lógicos associados às teorias de campo atuais.

⁷⁹⁴Ver a Subseção 27.1.13.

⁷⁹⁵[O’R65, Vol. 2, pág. 655].

⁷⁹⁶Ver [O’R65, Vol. 2, Cap. 13, Seção 4, págs. 645-661] e [Hob13].

Capítulo 28

Newton, Coulomb, Ampère e Weber Nunca Trabalharam com o Conceito de Campo

28.1 Newton Lutou Contra os Vórtices de René Descartes e Propôs Sua Lei da Gravitação Universal

René Descartes (1596-1650) foi um filósofo, físico e matemático francês muito influente. Em 1644 publicou em latim o livro *Princípios da Filosofia* que foi traduzido para o francês em 1647 sob sua supervisão.⁷⁹⁷ Na Parte II desse livro, sobre os princípios das coisas materiais, ele defende que não há o vazio, apresenta suas leis da natureza e tenta explicar o movimento dos corpos celestes por meio de vórtices de matéria que girariam ao redor do Sol, das estrelas fixas e até mesmo de planetas como Júpiter. Esses redemoinhos ou turbilhões de matéria moveriam outros corpos celestes ao redor desses centros. Por exemplo, os planetas descreveriam suas órbitas ao redor do Sol devido ao vórtice de matéria girando ao redor do Sol, o vórtice ao redor de Júpiter moveria os satélites de Júpiter ao redor de Júpiter etc.

Isaac Newton (1642-1727) lutou contra a cosmologia de Descartes. Publicou em 1687 seu livro “Princípios Matemáticos de Filosofia Natural,” usualmente conhecido por seu primeiro nome em latim, *Principia*. No próprio título já se coloca contra Descartes, apresentando princípios matemáticos da física, em vez de princípios filosóficos. Nessa obra apresentou sua lei da gravitação universal.⁷⁹⁸ Essa lei é usualmente expressa em palavras dizendo que matéria atrai matéria na razão direta das massas e na razão inversa do quadrado de suas distâncias. Os corpos se atraem diretamente à distância e não através de um meio material entre eles. Não há redemoinhos ou vórtices de matéria empurrando os planetas na direção de seus movimentos. Newton apresenta no *Principia* vários problemas com os vórtices de Descartes provando, em particular, que eles não são compatíveis com as leis de Kepler do movimento planetário.⁷⁹⁹

⁷⁹⁷[Des47] com traduções para o português em [Des97] e [Des02]. Ver também [And13].

⁷⁹⁸Tradução para o português em [New90], [New08] e [New10].

⁷⁹⁹Ver a Nota de rodapé 740 na página 363.

28.2 Coulomb Também Lutou Contra os Vórtices Cartesianos e Propôs Leis de Força Newtonianas na Eletricidade e no Magnetismo

Na época de Charles Augustin de Coulomb (1736-1806) havia alguns modelos conceituais que tentavam explicar as atrações e repulsões elétricas por meio de eflúvios, vórtices ou atmosferas elétricas que existiriam ao redor dos corpos eletrizados. Não haveria interação direta à distância entre dois corpos eletrizados. A força que um corpo de prova experimenta quando está próxima de um outro corpo fonte seria devida ao meio material existindo entre esses dois corpos. Coulomb lutou contra essas ideias e defendeu um sistema newtoniano baseado em forças atrativas e repulsivas atuando diretamente entre os corpos eletrizados que estavam separados entre si. Chegou assim a uma força elétrica inversamente proporcional ao quadrado da distância entre as partículas eletrizadas e diretamente proporcional ao produto de suas cargas.

A teoria da gravitação universal de Newton suplantou a teoria gravitacional de Descartes baseada em vórtices de matéria girando ao redor dos corpos celestes e movendo outros corpos menores (tais como planetas ou satélites) ao redor desses corpos celestes. Apesar disso, 100 anos depois de Newton, a física cartesiana ainda era muito influente no magnetismo. Também em seu livro de 1644, *Princípios da Filosofia*, Descartes tentou explicar o magnetismo supondo a circulação de partículas helicoidais passando por canais ou poros no interior da Terra, dos ímãs e do ferro. Esse fluxo de partículas formaria vórtices circulando ao redor desses corpos. Quando esses vórtices passassem pelos canais de outros corpos imantados ou do ferro, esses outros corpos seriam orientados por esses vórtices. Os corpos não magnéticos ou aqueles que não podem ser imantados não teriam esses canais ou poros, não reagindo à presença de ímãs em suas proximidades. Essa teoria foi muito popular tanto que em 1746 a Academia de Ciências da França premiou trabalhos de Leonhard Euler (1707-1783), Dutour de Salvert (1711-1789), Daniel Bernoulli (1700-1782) e Jean Bernoulli, também conhecido como Johann Bernoulli contendo explicações para o magnetismo seguindo as ideias cartesianas. Coulomb também lutou contra os vórtices cartesianos no magnetismo. No lugar desses vórtices chegou a uma lei de força similar à lei gravitacional de Newton para explicar a interação entre polos magnéticos. Essa força de Coulomb era diretamente proporcional ao produto das intensidades dos polos magnéticos e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles.

Uma discussão desse tema com várias referências encontra-se no livro com as traduções comentadas em português e inglês das obras de Coulomb sobre torção, eletricidade e magnetismo.⁸⁰⁰

⁸⁰⁰[Ass22] e [AB23].

28.3 Ampère Nunca Trabalhou com o Conceito de Campo Magnético, Lutou Contra a Ideia de Qualquer Coisa Circulando ao Redor de um Fio com Corrente e Propôs uma Força Central entre Dois Elementos de Corrente Inversamente Proporcional ao Quadrado da Distância entre Eles

28.3.1 A Chamada “Lei Circuital de Ampère” Não é Devida a Ampère. Logo essa Denominação é Inapropriada

Os livros didáticos atribuem a Ampère a chamada “lei circuital de Ampère”. Ou seja, a integral de linha de um campo magnético $\vec{B}$ em torno de um circuito fechado C é proporcional à corrente elétrica I que atravessa esse circuito. No Sistema Internacional de Unidades essa equação é escrita como:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I. \quad (28.1)$$

Aqui $d\vec{\ell}$ é um elemento de comprimento ao longo do circuito fechado C de formato arbitrário e $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ kgmC}^{-2}$ é chamada de constante de permeabilidade do vácuo (ou constante de permeabilidade magnética do vácuo, ou constante magnética).

Contudo:

- Ampère nunca deduziu essa lei, ele não a obteve em nenhum formato. Ampère não é o autor da denominada “lei circuital de Ampère”.
- De fato, ele nunca trabalhou com o conceito de campo magnético.
- *Além do mais, ele lutou explicitamente contra qualquer coisa circulando ao redor de um fio conduzindo uma corrente elétrica!*

Uma discussão detalhada desse tópico pode ser encontrada no Capítulo 16 (Ampère Contra Seus Principais Oponentes) de nosso livro *Eletrodinâmica de Ampère: Análise do Significado e da Evolução da Força de Ampère, Juntamente com a Tradução Comentada de Sua Principal Obra sobre Eletrodinâmica*.⁸⁰¹ Nesse livro mostramos como a eletrodinâmica de Ampère se opõe às concepções e paradigmas defendidos por H. C. Oersted (1777-1851), J.-B. Biot (1774-1862), F. Savart (1791-1841), M. Faraday (1791-1867), H. Grassmann (1809-1877) e também ao conceito de campo magnético.

A primeira pessoa a escrever a lei circuital, mesmo sem a corrente de deslocamento, parece ter sido Maxwell em seu primeiro artigo sobre eletromagnetismo de 1855, publicado 20 anos após a morte de Ampère.⁸⁰²

É inadequado utilizar a expressão “lei circuital de Ampère”, essa lei não pode ser atribuída a Ampère.⁸⁰³

⁸⁰¹[AC11] com tradução para o inglês em [AC15].

⁸⁰²[Max58, pág. 66 do artigo original de Maxwell e pág. 206 do livro de Niven], [Whi73a, págs. 242-245], [Ass94, Seção 2.5] e [Erl99].

⁸⁰³[Erl99].

28.3.2 A Diretriz de Ampère Contra o Campo Magnético

Apresento nessa Seção um tópico que discuti detalhadamente no livro “Eletrodinâmica de Ampère: Análise do significado e da evolução da força de Ampère, juntamente com a tradução comentada de sua principal obra sobre eletrodinâmica”, no qual se encontram as referências detalhadas.⁸⁰⁴

28.3.3 A Diretriz de Ampère

Em 1822, Ampère obteve a expressão final de sua força entre dois elementos de corrente. No Sistema Internacional de Unidades ela é escrita como a Equação (26.2). Em 1822, 1823 e 1824, ele integrou essa expressão e calculou a força exercida por uma corrente formando um circuito fechado e agindo em um elemento de corrente $i'ds'$ não pertencente a esse circuito fechado. Ele também calculou a força sobre esse elemento de corrente exercida por um circuito conduzindo uma corrente e estendido indefinidamente em ambas as direções até uma distância infinita de $i'ds'$. A Figura 28.1 (a) apresenta um circuito fechado C de formato arbitrário transportando uma corrente i e interagindo com um elemento de corrente externo $i'ds'$ localizado em um ponto arbitrário no espaço. A Figura 28.1 (b) apresenta um circuito C de forma arbitrária, conduzindo uma corrente i , estendendo-se indefinidamente em ambas as direções. Nessa última configuração, as extremidades do circuito estão localizadas a distâncias infinitas de $i'ds'$. Esse é o caso, por exemplo, de um circuito reto e filiforme de comprimento infinito atuando em $i'ds'$. Ao integrar sua força entre os elementos de corrente, ele conseguiu obter o valor da força e sua direção.

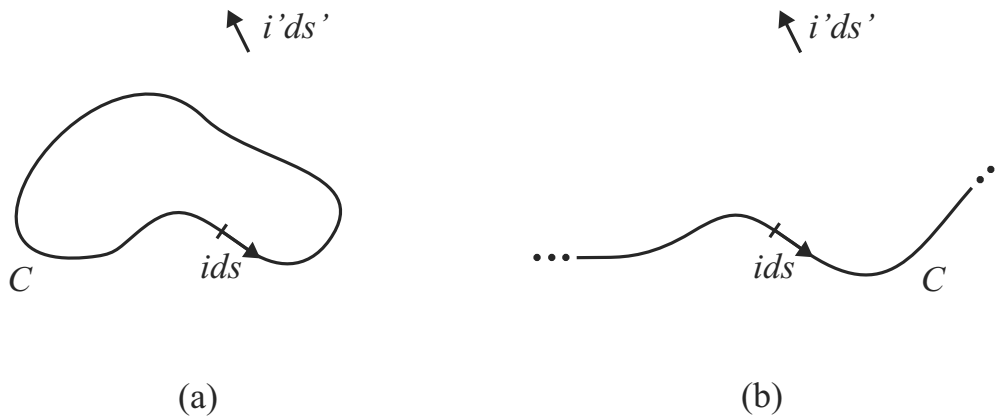


Figura 28.1: (a) Circuito fechado C de formato arbitrário conduzindo uma corrente elétrica i e atuando sobre um elemento de corrente externo $i'ds'$ localizado em um ponto qualquer. (b) Circuito C de formato arbitrário estendendo-se indefinidamente nas duas direções, conduzindo uma corrente elétrica i , e atuando sobre um elemento de corrente externo $i'ds'$.

Ampère calculou a força resultante atuando em um elemento de corrente $i'ds'$ que não pertencia ao circuito C de forma arbitrária representado pelas Figuras 28.1 (a) e (b). Ele obteve que essa força resultante era sempre ortogonal à direção do elemento $i'ds'$. Além disso, ele concluiu que essa força resultante pertencia a um certo plano que passava pelo centro de $i'ds'$, não importando a direção de $i'ds'$. Ele o chamou de *plano diretor* (*plan directeur* em francês). A linha reta ortogonal a esse plano diretor e passando pelo ponto médio do

⁸⁰⁴[AC11] com tradução para o inglês em [AC15].

elemento de corrente $i'ds'$ foi inicialmente chamada de *normal ao plano diretor* (*normale au plan directeur* em francês). Em seu livro principal, “*Teoria dos Fenômenos Eletrodinâmicos, Deduzida Unicamente da Experiência*”, publicado em 1826, Ampère chamou essa reta de *diretriz* (*directrix* em francês), um termo que será adotado aqui.⁸⁰⁵

Apresento aqui exemplos de duas configurações específicas.

Como primeiro exemplo, considere uma corrente constante i fluindo ao longo da direção positiva do eixo z por um condutor infinito e reto. O centro de um elemento de corrente externo $i'ds'$ está no ponto A localizado no plano xy . Nessa configuração, o plano diretor que contém o ponto A passa pelo fio condutor de corrente infinito ao longo do eixo z , Figura 28.2 (a). A diretriz devida a esse fio no local do elemento de corrente externo é ortogonal ao plano diretor, passando pelo ponto A . A Figura 28.2 (b) apresenta essa configuração com o eixo z ortogonal ao plano do papel.

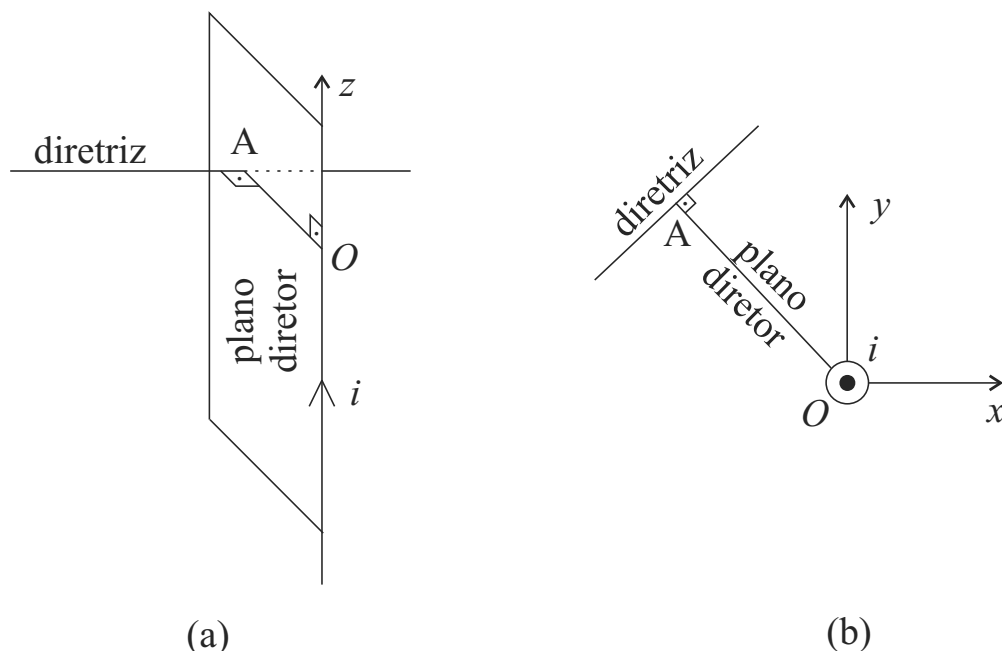


Figura 28.2: (a) Plano diretor e diretriz devidos a um fio reto infinito conduzindo uma corrente i ao longo da direção positiva do eixo z , quando esse fio atua sobre um elemento de corrente $i'ds'$ cujo centro está no ponto A localizado no plano xy . (b) Configuração vista no plano xy . A diretriz é a linha reta traçada no plano xy , enquanto que o plano diretor é ortogonal ao plano do papel, passando ao longo da linha reta que liga A com a origem O do sistema de coordenadas.

A força exercida pelo fio infinito no elemento de corrente $i'ds'$ está sempre no plano diretor, não importando a orientação de $i'ds'$ em relação ao fio infinito. Ela é ortogonal à diretriz e também ortogonal a $i'ds'$. Suponha que o ponto A esteja localizado ao longo do eixo x . Neste caso, a diretriz será uma linha reta paralela ao eixo y . Em particular, se este elemento de corrente apontar ao longo do eixo x , a força será paralela ao eixo z ; se este elemento apontar ao longo do eixo y , não haverá força atuando sobre ele; e se este elemento apontar ao longo do eixo z , a força será paralela ao eixo x .

Como um segundo exemplo, considere um circuito circular de raio R localizado no plano xy com seu centro na origem O do sistema de coordenadas. Uma corrente constante i flui no sentido anti-horário nesse circuito fechado. Um elemento de corrente externo $i'ds'$ tem seu

⁸⁰⁵Ver a Nota de rodapé 7 na página 16.

centro em um ponto A localizado ao longo do eixo x . Nessa configuração, o plano diretor que contém o ponto A é o plano xy , Figura 28.3 (a). A diretriz devida a essa espira circular no local A do elemento de corrente externo é uma linha reta paralela ao eixo z , Figura 28.3 (b).

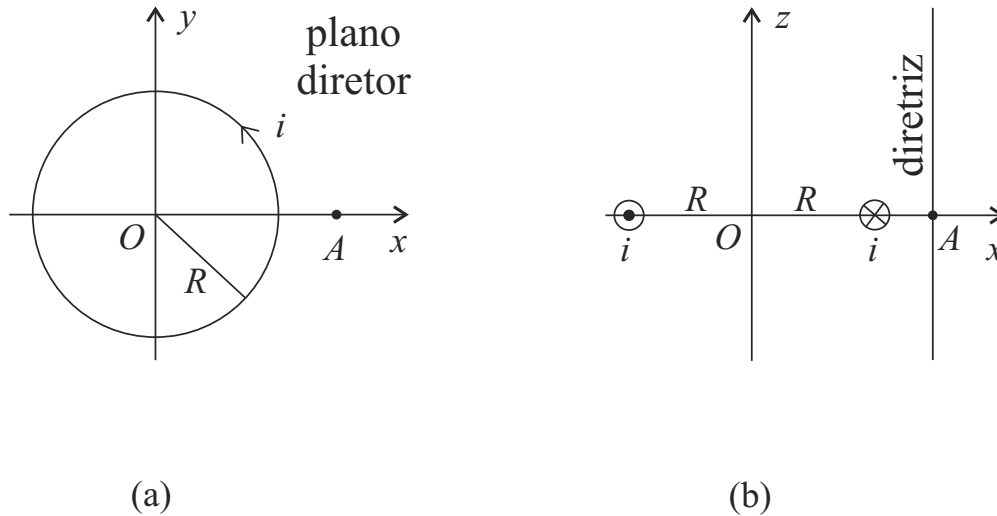


Figura 28.3: (a) Um fio circular de raio R localizado no plano xy , centrado na origem O do sistema de coordenadas e conduzindo uma corrente constante i no sentido anti-horário. O ponto A está ao longo do eixo x . O plano diretor coincide com o plano do papel. (b) A mesma configuração como vista no plano xz . A diretriz passando por A é a linha reta paralela ao eixo z .

A força exercida pelo fio circular no elemento de corrente $i'ds'$ está sempre no plano diretor xy , não importando a orientação de $i'ds'$. Ela também é ortogonal à direção de $i'ds'$. Em particular, se este elemento de corrente apontar ao longo do eixo x , a força será paralela ao eixo y ; se este elemento apontar ao longo do eixo y , a força será paralela ao eixo x ; e se este elemento apontar ao longo do eixo z , não haverá força atuando sobre ele.

28.3.4 A Diretriz é Simplesmente uma Direção ao Longo da Qual um Fio Conduzindo uma Corrente Não Exerce Força sobre um Elemento de Corrente. O Campo Magnético, ao Contrário, é “Algo” que é Produzido pelo Fio com Corrente

Apresento aqui uma distinção conceitual muito importante entre a diretriz de Ampère e o campo magnético ensinado em todos os livros didáticos de eletromagnetismo.

Considere um circuito fechado C de formato arbitrário que conduz uma corrente constante i e um elemento de corrente $i'ds'$ não pertencente ao circuito fechado C e localizado em um determinado ponto A . De acordo com Ampère, a diretriz é simplesmente uma linha reta que passa por A e que aponta em uma determinada direção no espaço. Essa direção específica dependerá da forma do circuito fechado e da localização do ponto A em relação a esse circuito. Ampère mostrou como calcular essa direção. Dois exemplos foram dados na Subseção 28.3.3.

A direção da diretriz de Ampère coincide com a direção do campo magnético dado pelos livros didáticos.⁸⁰⁶ Contudo, há uma clara distinção entre esses dois conceitos.

⁸⁰⁶Ver a Seção 10.1 (A diretriz, o plano diretor e a força exercida por um circuito fechado de forma arbitrária

De acordo com Ampère, dado o circuito fechado C e o elemento de corrente externo $i'ds'$, a diretriz passando por $i'ds'$ indica apenas a direção ao longo da qual nenhuma força atua sobre o elemento de corrente, não importando a orientação desse elemento de corrente no ponto A .

Por outro lado, de acordo com Maxwell e todos os livros didáticos sobre eletromagnetismo, este circuito fechado C gera, cria ou produz “algo” em qualquer ponto externo A . Ninguém jamais explicou claramente o que é este “algo”. Em todo caso, este “algo” recebeu um nome bastante pomposo, a saber, o “campo magnético”. Este “algo” contém energia, momento linear e momento angular, exerce forças sobre elementos de corrente e sobre partículas eletrizadas, etc.

Esses dois conceitos são completamente diferentes, indicando paradigmas opostos.

28.3.5 De Acordo com Ampère, a Força Magnética Não é Mediada por um Campo Magnético

Considere um circuito fechado C de formato arbitrário transportando uma corrente constante i e um elemento de corrente $i'ds'$ não pertencente ao circuito fechado C e localizado em um determinado ponto A . Ampère obteve a força exercida por esse circuito fechado atuando sobre $i'ds'$ ao integrar sua força entre os elementos de corrente. Deve-se enfatizar que, de acordo com as concepções originais de Ampère, essa força resultou de uma ação direta entre o condutor fechado C que transporta uma corrente i e o elemento de corrente $i'ds'$. Ou seja, de acordo com Ampère, essa força não era mediada por um “campo magnético”. A força resultante é simplesmente o resultado de uma ação direta a distância entre os elementos de corrente do circuito e o elemento de corrente externo ao circuito.

Por outro lado, de acordo com os livros didáticos modernos sobre eletromagnetismo, não há ação direta entre o circuito fechado C e o elemento de corrente $i'ds'$. Este circuito fechado gera “algo” no espaço. Esse “algo” é chamado de campo magnético. Este “algo” se propaga no espaço, tipicamente na velocidade da luz. Quando esse “algo” atinge a localização do elemento de corrente $i'ds'$, de alguma forma esse “algo” produz uma força sobre o elemento de corrente.

Novamente temos dois conceitos bem distintos de como ocorre a força sobre o elemento de corrente. Esses diferentes conceitos correspondem a paradigmas opostos.

28.3.6 A Diretriz é uma Linha Reta Não Direcionada. Já o Campo Magnético é uma Grandeza Direcionada

Considere mais uma vez um dado circuito fechado de forma arbitrária transportando uma corrente constante e um elemento de corrente de outro circuito localizado em um ponto externo. A diretriz de Ampère é uma certa linha reta passando pelo centro do elemento de corrente. A direção desta diretriz coincide com a direção do vetor campo magnético passando por este ponto devido ao circuito fechado conduzindo uma corrente elétrica. Apesar das similaridades desses conceitos, há uma diferença muito importante entre eles que deve ser enfatizada, a saber:

- A diretriz de Ampère é uma simples linha reta. Ou seja, ela não é uma linha reta direcionada.

sobre um elemento de corrente) de [AC11] com tradução para o inglês em [AC15].

- Por outro lado, o vetor campo magnético é uma grandeza direcionada. Como explicado em todo livro moderno de eletromagnetismo, ele é obtido pela regra da mão direita.

Considere, por exemplo, um condutor reto infinito que transporta uma corrente constante i ao longo da direção positiva do eixo z e um elemento de corrente $i'ds'$ de um outro circuito localizado no ponto externo A , conforme mostrado na Figura 28.2. O plano diretor que contém o ponto A passa pelo eixo z . A diretriz devida ao fio infinito é uma linha reta ortogonal ao plano diretor, Figura 28.4 (a). Por outro lado, o vetor campo magnético, é um segmento de linha orientado e direcionado de acordo com a regra da mão direita, Figura 28.4 (b).

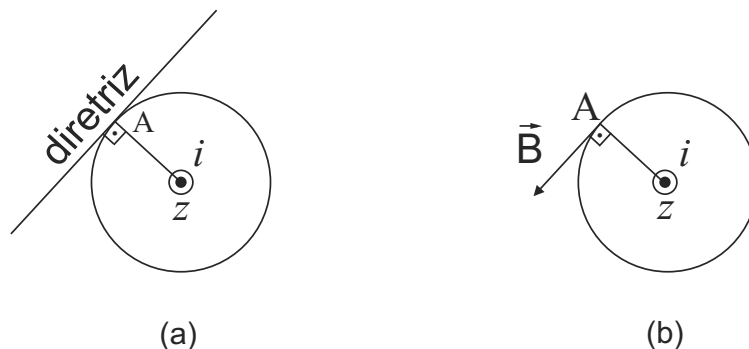


Figura 28.4: Um fio reto infinito conduzindo uma corrente elétrica i ao longo da direção positiva do eixo z , ortogonal ao plano do papel. (a) Diretriz em um ponto externo A . (b) Campo magnético $\vec{B}$ produzido por esse fio no ponto A .

Considere agora uma corrente constante i fluindo no sentido anti-horário ao longo de uma espira circular de raio R localizada no plano xy com seu centro na origem O do sistema de coordenadas, conforme mostrado na Figura 28.3. A Figura 28.5 mostra esse sistema como visto no plano xz , que é ortogonal ao plano da espira. Mostro três pontos específicos onde o centro de um elemento de corrente externo $i'ds'$ pode estar localizado, a saber, em A ao longo do eixo x , na origem O do sistema de coordenadas, e em um ponto D localizado em algum lugar no plano xz . A Figura 28.5 (a) mostra as diretrizes passando por esses três pontos. A Figura 28.5 (b) mostra os campos magnéticos produzidos pela espira circular nesses três pontos.

As Figuras 28.4 e 28.5 mostram claramente a distinção entre uma diretriz e um campo magnético. Enquanto a diretriz é uma linha reta não direcionada, o campo magnético é uma grandeza direcionada.

28.3.7 O Campo Magnético Não Existe na Natureza, mas Apenas na Mente das Pessoas que Acreditam Nele

Considero mais uma vez uma corrente constante i fluindo ao longo da direção positiva do eixo z através de um condutor infinito e reto, conforme representado na Figura 28.2 (a). Considere um ponto A que não pertence ao eixo z . Ele forma um plano com o eixo z . Esse condutor infinito e reto exercerá uma força sobre um elemento de corrente $i'ds'$ localizado em A . Ampère mostrou que a direção dessa força sempre estará localizada no plano diretor, independentemente da orientação de $i'ds'$ no espaço. Esse plano diretor é exatamente o plano

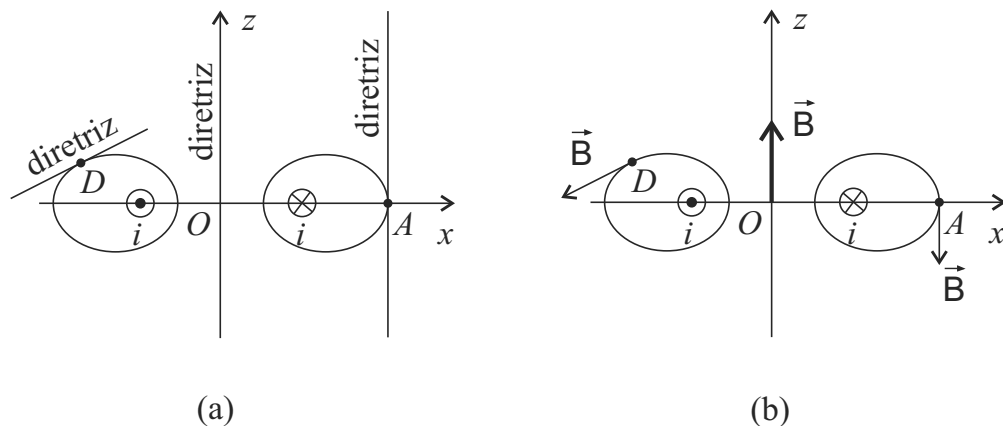


Figura 28.5: Uma espira circular no plano xy conduz uma corrente elétrica i no sentido anti-horário. (a) As diretrizes passando por três pontos A , O e D localizados no plano xz . (b) Os campos magnéticos $\vec{B}$ produzidos pela espira nesses três pontos.

que contém o fio reto infinito e o ponto A . Isso é coerente e está em conformidade com o princípio da simetria.

Uma reta e um ponto A fora desta reta formam um plano. Suponha que haja uma corrente elétrica fluindo ao longo desta reta. Suponha que haja também uma partícula eletrizada ou um elemento de corrente localizado no ponto A . Por simetria, qualquer força atuando na partícula eletrizada ou no elemento de corrente tem de estar contida neste plano, sendo direcionada ao longo deste plano.

O campo magnético devido a este fio reto segue a regra da mão direita, como representado na Figura 28.4 (b). No entanto, esta regra da mão direita é uma escolha arbitrária feita pelo homem. Nada obriga ninguém a usar a mão direita em vez da mão esquerda. Este campo magnético viola o princípio da simetria.

Uma prova clara desse fato utiliza o princípio da razão suficiente formulado por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716):⁸⁰⁷

31. Os nossos raciocínios fundam-se sobre *dois grandes princípios*: o da *contradição*, pelo qual consideramos *falso* o que ele implica, e *verdadeiro* o que é oposto ao falso ou lhe é contraditório.

32. E o da *razão suficiente*, pelo qual entendemos não poder algum fato ser tomado como verdadeiro ou existente, nem algum enunciado ser considerado verídico, sem que haja uma razão suficiente para ser assim e não de outro modo, embora frequentemente tais razões não possam ser conhecidas por nós.

Não há razão suficiente para que o campo magnético deva seguir a regra da mão direita em vez da regra da mão esquerda. Portanto, de acordo com o princípio da razão suficiente, o campo magnético não pode fazer essa escolha. O campo magnético definido pela regra da mão direita não é real, ele não existe na natureza.

Como um segundo exemplo, considere novamente uma corrente constante i fluindo no sentido anti-horário ao longo de uma espira circular de raio R localizada no plano xy com seu centro na origem O do sistema de coordenadas, Figura 28.3 (a). Considere um ponto A nesse

⁸⁰⁷ [Lei86, parágrafos 31 e 32, págs. 59-61], com tradução para o inglês em [Lei48, parágrafos 31 e 32, pág. 235] e tradução para o português em [Lei83, parágrafos 31 e 32, pág. 108].

plano. Ele pode estar localizado ao longo do eixo x , conforme representado na Figura 28.3 (a), ou em qualquer lugar no plano xy . Esse condutor circular que transporta uma corrente constante exercerá uma força em um elemento de corrente $i'ds'$ localizado em A . A direção dessa força estará localizada no plano xy da espira, independentemente da orientação de $i'ds'$ no espaço. O plano diretor de Ampère coincide com o plano do anel para qualquer ponto A pertencente a esse plano. Isso é coerente e está em conformidade com o princípio da simetria. Uma força exercida em qualquer partícula eletrizada ou em qualquer elemento de corrente localizado no plano da espira conduzindo uma corrente tem de estar contida no plano da espira, sendo direcionada ao longo desse plano.

O campo magnético na origem O da espira aponta ao longo do eixo z positivo, Figura 28.5 (b). Não há razão suficiente para que o campo magnético no ponto O deva apontar ao longo do eixo z positivo, em vez de apontar ao longo do eixo z negativo. Como o campo magnético não pode fazer uma escolha entre essas direções opostas, ele não escolherá entre essas duas possibilidades. De acordo com o princípio da razão suficiente, o campo magnético em O apontando ao longo do eixo z positivo, conforme dado pela regra da mão direita, é fictício, ele não existe na natureza.

Considere agora um ponto A fora do anel, localizado ao longo do eixo x , Figura 28.5 (b). O campo magnético dado pela regra da mão direita aponta ao longo do eixo z negativo. Não há razão suficiente para que o campo magnético no ponto A aponte ao longo do eixo z negativo, em vez de apontar ao longo do eixo z positivo. Como o campo magnético não pode escolher entre essas direções opostas, ele não escolherá entre essas duas possibilidades. De acordo com o princípio da razão suficiente, o campo magnético em A apontando ao longo do eixo negativo de z , conforme dado pela regra da mão direita, é fictício, ele não existe na natureza.

*Segundo o princípio da razão suficiente, exemplos como esses provam que o campo magnético dado pela regra da mão direita não existe na natureza. Apesar do que lemos em todos os livros didáticos sobre eletromagnetismo, esse campo magnético é uma ficção, um conceito imaginário, que só existe na mente das pessoas que acreditam nele.*⁸⁰⁸

*Um circuito fechado de formato arbitrário que transporta uma corrente constante i exerce uma força em outro pedaço de fio que transporta uma corrente constante i' . Essa força pode ser medida. Ampère ensinou como calcular seu valor e sua direção integrando sua força entre os elementos de corrente. Ele não utilizou o conceito de campo magnético. Esse conceito de campo magnético é supérfluo e contrário aos princípios básicos de simetria. A força de Ampère está em conformidade com o princípio da simetria e concorda com todas as medições. Essa é a força que deve ser ensinada nos livros didáticos de física.*⁸⁰⁹

⁸⁰⁸Este é meu ponto de vista (André Koch Torres Assis), [Ass99a] com tradução para o alemão em [Ass14a] e tradução para o português em [Ass19a].

⁸⁰⁹Ver Nota de rodapé 7 na página 16.

28.4 Weber Nunca Trabalhou com o Conceito de Campo e Propôs uma Força entre Partículas Eletrizadas que Depende da Distância, Velocidade e Aceleração entre Elas

A eletrodinâmica de Weber é um paradigma completamente diferente das teorias de campo de Faraday, Maxwell, Lorentz e Einstein. Wilhelm Weber (1804-1891) foi contemporâneo de Michael Faraday (1791-1867) e James Clerk Maxwell (1831-1879). Em seus tratados, ele citou muitas obras de Faraday, como podemos ver em suas Obras Coletadas.⁸¹⁰ Ele também citou alguns dos trabalhos de Maxwell.⁸¹¹ Os 6 volumes de suas Obras Coletadas somam mais de 3.000 páginas. Podemos ler todos eles e não encontraremos os conceitos de campo elétrico e campo magnético. A exceção ocorre em uma citação das palavras de Faraday relacionadas ao diamagnetismo que Weber citou em um de seus trabalhos.⁸¹²

O principal resultado das pesquisas de Ampère foi sua força entre dois elementos de corrente. É fascinante ler o primeiro grande tratado de Weber sobre *Medições Eletrodinâmicas* de 1846 e ver como ele expressou a força de Ampère entre elementos de corrente com base no movimento das partículas eletrizadas positivas e negativas que compõem cada elemento de corrente.

Faraday expressou a lei da indução eletromagnética como sendo devida a um fio que corta as curvas magnéticas, como pode ser visto no Artigo 114 de seu trabalho original lido em 1831.⁸¹³

114. A relação satisfeita entre o polo magnético, o fio ou metal em movimento, e a direção da corrente produzida, isto é, *a lei* que governa a evolução da eletricidade por indução eletromagnética, é muito simples, embora bem difícil de expressar. Se na Figura 24 *PN* representa um fio horizontal passando por um polo magnético marcado,⁸¹⁴ de tal forma que a direção de seu movimento coincida com a linha curva indo de baixo para cima ou caso seu movimento paralelo a si próprio ocorra em uma linha tangencial à linha curva, mas na direção geral das setas, ou se ele passa o polo em outras direções, mas de tal forma a cortar as curvas magnéticas⁸¹⁵ na mesma direção geral, ou no mesmo lado em que elas seriam cortadas pelo fio caso estivessem

⁸¹⁰[Web92b], [Web92a], [Web93b], [Web94g], [WW93] e [WW94]. A maioria de seus artigos já foi traduzida para o inglês nos 5 volumes do livro *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*: [Ass21h], [Ass21i], [Ass21j], [Ass21k] e [Ass24].

⁸¹¹[AW03].

⁸¹²[Web48b, pág. 257 das Obras de Weber] e [Web48c, pág. 257 das Obras de Weber] com tradução para o inglês em [Web21m, pág. 251]. Ver também [Far46c, Artigo 2429, pág. 73] com tradução em alemão em [Far47, Artigo 2429, pág. 48].

⁸¹³[Far32a, pág. 154 das *Philosophical Transactions* e pág. 281 dos *Great Books of the Western World*] com tradução para o alemão em [Far32b] e [Far89], e tradução para o português em [Far11, pág. 193].

⁸¹⁴[Nota de Faraday apresentada no Artigo 44 desse trabalho de 1831:] Para evitar qualquer confusão a respeito dos polos do ímã, designarei o polo apontando para o Norte como sendo o polo marcado; ocasionalmente, posso falar das extremidades Norte e Sul da agulha, mas não quero dizer, com isso, os polos Norte e Sul. Muitos consideram o verdadeiro polo Norte de uma agulha como sendo o polo que aponta para o Sul, mas, neste país, este polo é chamado, muitas vezes, de polo Sul.

⁸¹⁵[Nota de Faraday:] Entendo por *linhas magnéticas*, as linhas das forças magnéticas, modificadas de qualquer maneira pela justaposição de polos, que seriam representadas por limalha de ferro; ou aquelas linhas em relação às quais seria tangente uma pequena agulha magnética.

se movendo ao longo da linha curva tracejada, então a corrente de eletricidade no fio vai de P para N . [...]

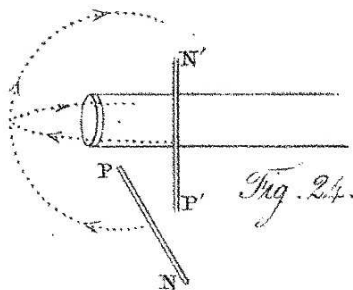


Figura 28.6: A Figura 12 dos *Great Books of the Western World* coincide com a Figura 24 do trabalho original de 1831 de Faraday nas *Philosophical Transactions*.

Hoje em dia, a lei de indução de Faraday é expressa em termos da força eletromotriz induzida em um circuito fechado por uma mudança temporal do fluxo do campo magnético que passa pelo circuito. Essa força eletromotriz é em geral designada pelas letras *fem*. Uma apresentação típica dessa regra de fluxo foi dada por Feynman, Leighton e Sands.⁸¹⁶

A quantidade de *fem* é dada por uma regra simples descoberta por Faraday. (Vamos apenas apresentar a regra agora e esperar até mais tarde para examiná-la em detalhes). A regra é que, quando o fluxo magnético que passa pelo circuito (esse fluxo é o componente normal de $\mathbf{B}$ integrado sobre a área do circuito) está mudando com o tempo, a *fem* é igual à taxa de variação do fluxo. Vamos nos referir a isso como “a regra do fluxo”.

Em 1846, Weber também utilizou a lei de indução de Faraday para deduzir sua própria força entre partículas eletrizadas. No entanto, Weber não utilizou esses conceitos de curva magnética, linhas de força, um fio cortando as curvas magnéticas ou cortando as linhas de força magnética, taxa de variação do fluxo magnético, nem mesmo o conceito básico de um campo magnético!⁸¹⁷

Os únicos conceitos que Weber utilizou foram aqueles que ele podia observar e medir. Na Parte III, Seções 10 e 11 de seu artigo, ele menciona que Faraday obteve a indução em três configurações principais. Na primeira configuração, dois circuitos fechados permaneciam em repouso um em relação ao outro, com uma corrente elétrica no circuito primário e nenhuma no circuito secundário. Entretanto, uma corrente seria induzida no circuito secundário sempre que houvesse uma mudança na intensidade da corrente no circuito primário. A segunda configuração era aquela em que a corrente elétrica no circuito primário era constante. Uma corrente também poderia ser induzida no circuito secundário quando houvesse um movimento relativo entre os dois circuitos. Na terceira configuração, o circuito primário com corrente constante foi substituído por um ímã permanente. Uma corrente também poderia ser induzida no circuito secundário sempre que houvesse um movimento relativo entre o ímã e o circuito secundário. Utilizando seu eletrodinamômetro, Weber podia medir a corrente no

⁸¹⁶[FLS64, pág. 16-1].

⁸¹⁷[Web46] com uma tradução parcial para o francês em [Web87] e uma tradução completa para o inglês em [Web21d].

circuito primário, a corrente induzida no circuito secundário e também o movimento relativo entre suas duas bobinas.

Weber apresentou a dedução de sua força nas Seções 18 a 21 de seu tratado de 1846.⁸¹⁸ Ele assumiu três fatos que eram em parte baseados indiretamente na observação. Ele também decompôs cada elemento de corrente em partículas eletrizadas com cargas opostas movendo-se em relação ao fio de condução com certas velocidades de deriva. Em particular, as descobertas experimentais de Faraday foram representadas em seu terceiro fato especial, a saber:

Para obter uma guia para esta investigação baseada na experiência e tão confiável quanto possível, *três fatos especiais* serão tomados como base, alguns dos quais são indiretamente baseados na observação e alguns dos quais estão diretamente contidos na lei fundamental de Ampère, que foi confirmada por todas as medições.

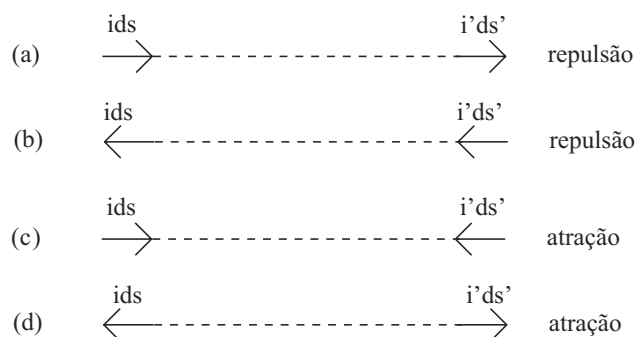
O *primeiro fato* é que dois elementos de corrente estando ao longo de uma linha reta que coincide com suas direções, se *repelem* ou se *atraem*, conforme a eletricidade flui através deles no *mesmo* sentido ou em sentidos *opostos*.⁸¹⁹

O *segundo fato* é que dois elementos de corrente paralelos, que formam ângulos retos com a linha que os conecta, se *atraem* ou se *repelem*, conforme a eletricidade flui através deles no *mesmo* sentido ou em sentidos *opostos*.⁸²⁰

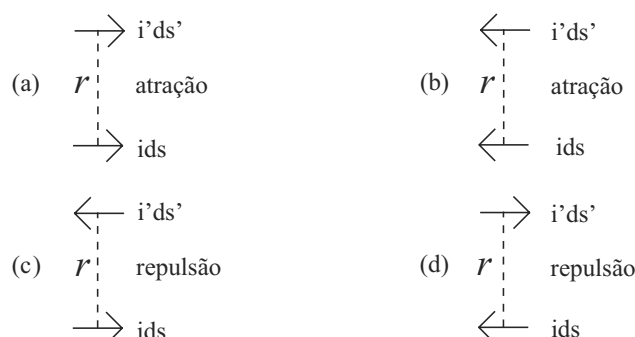
O *terceiro fato* é que um elemento de corrente, que está juntamente com um elemento de fio ao longo de uma linha reta coincidindo com as direções dos dois elementos,

⁸¹⁸[Web46, págs. 132-157 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21d, págs. 129-149].

⁸¹⁹Essas situações estão ilustradas na Figura dessa Nota de rodapé. Em (a) e (b) as correntes fluem no mesmo sentido e os elementos se repelem, enquanto que em (c) e (d) as correntes fluem em sentidos opostos e os elementos se atraem:



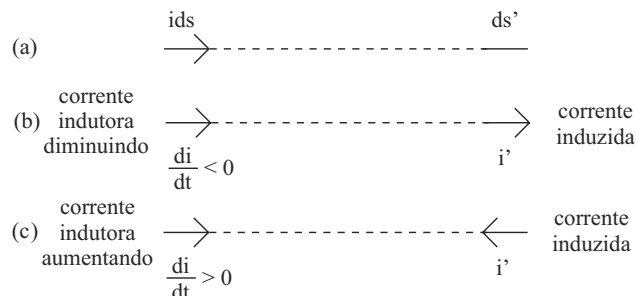
⁸²⁰Essas situações estão ilustradas na Figura dessa Nota de rodapé. Em (a) e (b) as correntes fluem no mesmo sentido e os elementos se atraem, enquanto que em (c) e (d) as correntes fluem em sentidos opostos e os elementos se repelem:



induz no elemento de fio uma corrente *no mesmo sentido ou no sentido oposto*, conforme a intensidade de sua própria corrente *diminui ou aumenta*.⁸²¹

É fascinante ver esses dois paradigmas completamente diferentes em ação. No paradigma de Faraday e Maxwell temos curvas magnéticas, linhas de força, campo magnético, um condutor cortando as linhas de força, fluxo de campo magnético, variação temporal do fluxo de campo magnético etc. No paradigma de Ampère e Weber, ao contrário, temos apenas condutores conduzindo correntes elétricas e partículas eletrizadas, juntamente com as distâncias entre essas partículas, suas velocidades relativas e suas acelerações relativas.

⁸²¹Essas situações estão ilustradas na Figura dessa Nota de rodapé. Em (a) temos um elemento de corrente indutora ids e um pedaço de fio de comprimento ds' paralelos entre si e ao longo da linha reta que os une. (b) Quando a corrente indutora i diminui de intensidade com o tempo, ela induz no pedaço de fio uma corrente induzida i' no mesmo sentido que i . (c) Quando a corrente indutora i aumenta de intensidade com o tempo, ela induz no pedaço de fio uma corrente induzida i' fluindo no sentido oposto à corrente i , a saber:



Capítulo 29

Visão Geral e Desenvolvimentos Futuros da Lei de Weber Aplicada ao Eletromagnetismo e à Gravitação

A. K. T. Assis⁸²²

A lei de Weber foi a principal teoria eletrodinâmica da segunda metade do século XIX.

Nos últimos anos tem havido um interesse renovado na lei de Weber aplicada ao eletromagnetismo e à gravitação devido a novas experiências e desenvolvimentos teóricos importantes.⁸²³

Nesse Capítulo final do livro contendo as traduções comentadas dos principais trabalhos de Weber apresento um panorama geral do que já foi alcançado até o momento. Também apresento minha visão pessoal de alguns aspectos importantes e dos novos desenvolvimentos que podem surgir da lei de Weber aplicado ao eletromagnetismo, óptica e gravitação.⁸²⁴

⁸²²Homepage: www.ifi.unicamp.br/~assis

⁸²³[PK74], [Wes87], [SS87], [Gra90d], [Gra90a], [Gra90c], [Gra90e], [Gra90b], [Wes90b], [Wes90c], [Wes90d], [Wes90a], [Phi90a], [Phi90b], [Cor90], [Wes91], [She91], [Ass92a], [Rag92], [Phi92], [GG93, Capítulo 3: The Riddle of Inertia], [Gal93], [Ass94], [Zyl94], [Bue94], [GM95], [KF96], [Phi96], [GV97], [BC97], [Dru97], [FK97], [GV98], [Ass98a], [Mik99], [GV99a], [GV99b], [Cos99], [CL99], [Phi99], [Ass99b], [Ass99c], [LL00], [GV01], [GVM01], [Bun01], [BA01], [Mik01], [Wes02], [Fuk03], [Cos03], [Mik03], [GV04], [JP04], [GVAB05], [AGV07], [AH07], [AH09], [AC11], [AWW11], [Här12a] com tradução para o português em [Här12b], [War13, Capítulo 5: The Logic of Relational Physics], [Taj13], [Phi13], [AH13], [Ass13], [AWW14], [Ass14b], [Ass15a], [Taj15], [Pry15], [STM15], [SJM15], [BA15], [AC15], [TSLBLVRR15], [SJY⁺16], [PPL16], [Bak17], [Mon17], [LT17], [SM17], [AT17], [Pry18], [Ano18], [BT18], [Pry18], [Här18], [Tra18], [CL18], [AWW18], [WT19], [Ano19], [FW19], [Lim20], [Här20], [BSM20], [Ass21h], [Ass21i], [Ass21j], [Küh21], [Ass21k], [Li22], [Bau22], [BM22b], [BM22a], [LM23], [Mon23], [Küh23a], [Küh23b], [Mar24], [Küh24], [LSM24], [FW24], [Ass24], [Li25] etc.

⁸²⁴[Ass94, Seção 8.4: Weber's law and plasma physics, quantum mechanics, nuclear physics, etc.] e [Ass21f].

29.1 A Unificação de Ampère entre Magnetismo, Eletrodinâmica e Eletromagnetismo

Em 1687 Isaac Newton (1642-1727) propôs em seu livro *Princípios Matemáticos de Filosofia Natua* sua lei da gravitação universal.⁸²⁵ De acordo com ele, a força de atração entre duas partículas é proporcional ao produto de suas massas m e m' , varia inversamente com o quadrado da distância r entre elas, atua ao longo da linha reta que as une e satisfaz ao princípio de ação e reação. Ou seja, essa força é proporcional a:

$$\frac{mm'}{r^2} . \quad (29.1)$$

Em 1785 Charles Augustin de Coulomb (1736-1806) obteve uma expressão análoga descrevendo a interação entre duas partículas eletrizadas que estão em repouso entre si.⁸²⁶ Nesse caso assumimos a existência de dois tipos de partículas, a saber, aquelas eletrizadas positivamente e negativamente. Partículas eletrizadas com cargas de mesmo sinal se repelem, enquanto que partículas eletrizadas com cargas de sinais opostos se atraem. A força entre duas partículas é proporcional ao produto de suas cargas elétricas e e e' , varia inversamente com o quadrado da distância r entre elas, atua ao longo da linha reta que as une e satisfaz ao princípio de ação e reação:

$$\frac{ee'}{r^2} . \quad (29.2)$$

Ao trabalhar com ímãs artificiais longos e finos, com polos magnéticos bem definidos, Coulomb também obteve uma expressão análoga descrevendo a força entre polos magnéticos. Neste caso assumimos a existência de dois fluidos magnéticos, a saber, austral e boreal. Eles também são chamados de fluido magnético Norte e Sul. Os polos (ou centros de ação) de finas barras de aço uniformemente magnetizadas estão concentrados nas proximidades das extremidades dessas barras. Polos do mesmo tipo se repelem enquanto que polos de tipos diferente se atraem. A força de Coulomb entre dois polos magnéticos é proporcional ao produto das intensidades p e p' dos polos, varia com o inverso da distância r entre eles, atua ao longo da linha reta que os une e satisfaz ao princípio de ação e reação:

$$\frac{pp'}{r^2} . \quad (29.3)$$

Nunca foi encontrado um polo isolado na natureza. A entidade magnética mais simples com a qual podemos trabalhar é um dipolo magnético, isto é, dois polos magnéticos iguais e opostos separados por uma pequena distância fixa. De qualquer forma, as forças e torques entre dois dipolos podem ser obtidos utilizando a lei de Coulomb entre polos magnéticos. Da mesma forma, as forças e torques entre dois ímãs podem ser obtidos com uma distribuição apropriada de dipolos dentro de cada ímã. As orientações das bússolas comuns e das bússolas de inclinação ocasionadas pela Terra também podem ser obtidas com a lei de Coulomb entre polos magnéticos ao utilizar distribuições apropriadas de dipolos magnéticos dentro dos ímãs e dentro da Terra.

Discuto agora o trabalho de André-Marie Ampère (1775-1836) que, juntamente com os trabalhos de Newton e Coulomb, foi tão influente para Wilhelm Weber. Seu livro principal

⁸²⁵Ver a Nota de rodapé 29 na página 27.

⁸²⁶Ver a Nota de rodapé 320 na página 178.

sobre eletrodinâmica foi publicado em 1826, estando totalmente disponível em francês, inglês e português.⁸²⁷

A unificação realizada por Ampère entre os principais ramos da física de seu tempo foi discutida detalhadamente na Seção 22.2 de nosso livro “Eletrodinâmica de Ampère: Análise do Significado e da Evolução da Força de Ampère, Juntamente com a Tradução Comentada de Sua Principal Obra sobre Eletrodinâmica”.⁸²⁸ Naquele livro utilizamos a seguinte nomenclatura:

- *Fenômenos eletrostáticos*: Forças e torques entre corpos eletrizados que estão em repouso mútuo.
- *Fenômenos magnéticos*: Forças e torques entre ímãs, juntamente com as forças e torques exercidos pela Terra sobre os ímãs (orientação das bússolas comuns e das bússolas de inclinação).
- *Fenômenos eletromagnéticos*: Forças e torques entre um ímã e um condutor com corrente, juntamente com as forças e torques exercidos pela Terra sobre um condutor com corrente.
- *Fenômenos eletrodinâmicos*: Forças e torques entre condutores com corrente constante.

Entre 1820 e 1827 Ampère conseguiu unificar os três últimos ramos da física, a saber, a magnetostática, a eletrodinâmica e o eletromagnetismo.

Os fenômenos magnéticos já eram conhecidos muitos séculos antes de Ampère. Esses fenômenos incluem a orientação das bússolas comuns e das bússolas de inclinação pelo magnetismo terrestre; as atrações e repulsões entre ímãs dependendo de suas distâncias e orientações; os torques entre os ímãs dependendo de suas distâncias e orientações; etc. Esses fenômenos magnetostáticos eram descritos teoricamente utilizando a lei de Coulomb para o magnetismo. Isto é, utilizando sua força entre polos magnéticos, juntamente com distribuições apropriadas de dipolos magnéticos dentro de ímãs e dentro da Terra.

A descoberta de interações eletrodinâmicas ocorrendo apenas entre fios conduzindo correntes constantes, sem a influência da Terra ou de qualquer ímã, é totalmente devida a Ampère no período entre 1820 e 1827. Ele foi a primeira pessoa a observar as atrações e repulsões entre espirais planas conduzindo correntes constantes. Ele também observou as atrações e repulsões entre condutores paralelos conduzindo correntes constantes. Isso levou à construção de sua famosa balança de corrente. Ele também descobriu o torque entre condutores conduzindo correntes constantes; a rotação contínua de um condutor conduzindo uma corrente devido à sua interação com um outro condutor conduzindo uma corrente constante; a chamada experiência da ponte de Ampère (também denominada de experiência do fio flutuante ou experiência do grampo de Ampère) na qual uma parte de um circuito fechado é deslocada em relação ao restante do circuito; etc. Ele também bolou e realizou muitas experiências de equilíbrio nas quais um circuito móvel conduzindo uma corrente era mantido em repouso devido a forças e torques opostos exercidos por dois outros condutores conduzindo correntes. Alguns exemplos são os casos de equilíbrio do fio sinuoso, das correntes anti-paralelas, da não existência da rotação contínua, da não existência da força tangencial, da lei da semelhança, etc.

⁸²⁷Ver a Nota de rodapé 7 na página 16.

⁸²⁸Seção 22.2, A unificação de Ampère, de [AC11] e [AC15].

Ampère foi capaz de explicar todos esses fenômenos eletrodinâmicos utilizando sua força entre elementos de corrente. Sua força é proporcional ao produto das intensidades de corrente i e i' dos dois elementos. Ela é também proporcional ao produto dos comprimentos infinitesimais ds e ds' desses elementos. Além disso, ela varia com o quadrado da distância r entre eles. Sua força sempre satisfaz ao princípio de ação e reação, além de sempre apontar ao longo da linha reta que une os elementos, não interessando as direções dos dois elementos de corrente que estão interagindo. Nesses aspectos sua força é similar à lei de Newton da gravitação, assim como é semelhante às leis de Coulomb para a eletrostática e magnetostática. Contudo, a força de Ampère é mais complexa, já que depende também do ângulo ε entre as direções dos dois elementos de corrente, e dos ângulos θ e θ' entre cada elemento de corrente e a linha reta que une seus centros. A direção de cada elemento de corrente forma um plano com a reta que une os centros dos dois elementos de corrente. O ângulo entre esses dois planos formados por cada elemento de corrente e a reta que os une é chamado de ω . Esses ângulos ε , θ , θ' e ω estão representados na Figura 29.1. Discutimos detalhadamente os significados desses ângulos na Seção 2.8 (Os Ângulos que Aparecem na Força de Ampère) de nosso livro sobre a Eletrodinâmica de Ampère.⁸²⁹

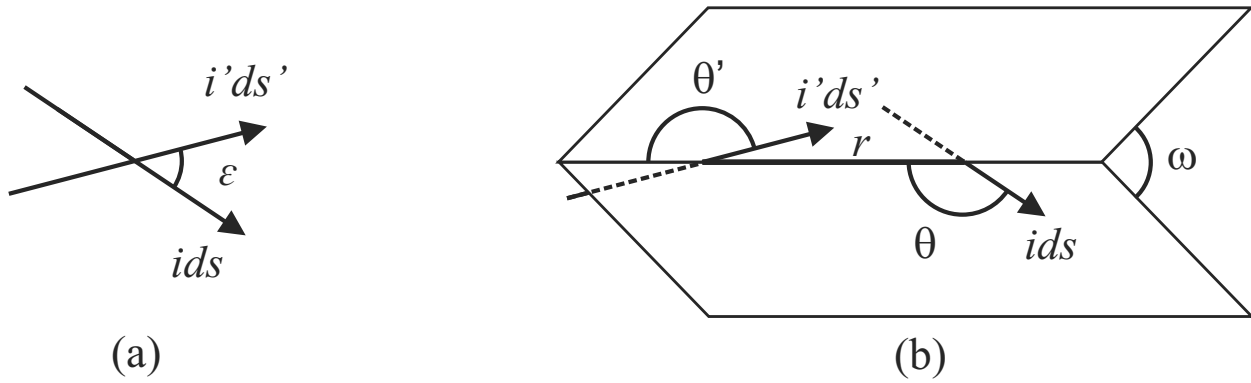


Figura 29.1: (a) Ângulo ε entre os dois elementos de corrente. (b) Ângulos θ e θ' entre os dois elementos de corrente e a reta que os une, juntamente com o ângulo ω entre os dois planos (com cada plano sendo formado por um elemento de corrente e a reta que os une).

A força de Ampère entre dois elementos de corrente ids e $i'ds'$ é então proporcional a:

$$\frac{ii'dsds'}{r^2} \left(\cos \varepsilon - \frac{3}{2} \cos \theta \cos \theta' \right) = \frac{ii'dsds'}{r^2} \left(\sin \theta \sin \theta' \cos \omega - \frac{1}{2} \cos \theta \cos \theta' \right). \quad (29.4)$$

Ao integrar essa expressão ele mostrou que um circuito fechado de forma arbitrária conduzindo uma corrente constante exerce uma força sobre um elemento de corrente de um outro circuito que é sempre ortogonal a esse elemento, sendo também ortogonal a uma certa linha reta passando pelo centro desse elemento. Essa linha reta foi denominada de diretriz ou de normal ao plano diretor. Ele comprovou esse resultado experimentalmente, sendo esse um dos seus casos de equilíbrio. Ampère e seu antigo estudante, Félix Savary (1797-1841), introduziram o conceito de solenoide eletrodinâmico.⁸³⁰ Consideraram quatro tipos de solenoide, a saber, definido, fechado, indefinido nos dois sentidos e simplesmente indefinido.⁸³¹ Eles obtiveram a força e o torque entre um elemento de corrente e um solenoide eletrodinâmico, entre

⁸²⁹Em português: [AC11]. Em inglês: [AC15].

⁸³⁰Félix Savary (1797-1841) não deve ser confundido com Félix Savart (1791-1841) da lei de Biot e Savart.

⁸³¹Ver a Seção 10.2, A Introdução do Solenoide Eletrodinâmico, de [AC11] e [AC15].

um circuito fechado de forma arbitrária conduzindo uma corrente constante e um solenoide eletrodinâmico, assim como a força e o torque entre dois solenoides eletrodinâmicos.

Muitos cientistas contribuíram para a descoberta dos efeitos eletromagnéticos. Em 1820 H. C. Ørsted (1777-1851)⁸³² descobriu o primeiro fenômeno eletromagnético, a saber, a deflexão de uma bússola por um fio próximo conduzindo uma corrente constante, fazendo com que a bússola alterasse sua orientação natural ao longo do meridiano magnético devido à influência magnética terrestre.⁸³³ Logo em seguida ele mostrou o fenômeno inverso, isto é, a orientação de uma espira com corrente devido à influência de um ímã em suas proximidades. Dessa maneira ele descobriu o torque e o contra torque exercidos entre um ímã e uma espira com corrente. Entre 1820 e 1827 Ampère descobriu muitos outros fenômenos eletromagnéticos tais como as forças de atração e repulsão entre um ímã e um fio com corrente; a orientação de espiras com corrente devido à influência terrestre (experiência essa que é análoga à orientação de uma bússola magnética pelo magnetismo da Terra); etc. Jean-Baptiste Biot (1774-1862) e Félix Savart (1791-1841) obtiveram o torque exercido por um fio reto ao atuar sobre um pequeno ímã em função da distância entre eles. Também obtiveram o torque exercido por um fio no formato da letra V ao atuar sobre um pequeno ímã em função do ângulo de abertura do fio. Em 1821 Michael Faraday (1791-1867) descobriu um novo fenômeno eletromagnético, a saber, a rotação da extremidade de um ímã ao redor de um fio fixo conduzindo uma corrente constante, juntamente com a rotação da extremidade de um fio com corrente ao redor de um ímã fixo. Entre 1821 e 1822 Ampère descobriu muitos fenômenos novos relacionados com a rotação de Faraday, tais como a rotação de um fio com corrente devida à influência terrestre; a rotação de um ímã ao redor de seu eixo devida a uma espira com corrente, etc. Ampère também obteve algumas experiências de equilíbrio envolvendo ímãs e condutores com corrente, sendo um exemplo disso o caso de equilíbrio das correntes ortogonais.

Ampère também obteve uma das primeiras unificações na história da ciência. Ele conseguiu combinar os fenômenos magnéticos, eletrodinâmicos e eletromagnéticos em uma única formulação teórica. Quando ouviu falar pela primeira vez da experiência de Oersted e a viu ser reproduzida na Academia de Ciências, teve uma ideia ou intuição extremamente frutífera, a saber, supôs a existência de correntes elétricas fluindo dentro de ímãs e também dentro da Terra. Além disso, assumiu que todas as interações magnéticas e eletromagnéticas eram devidas essencialmente a forças eletrodinâmicas. Isto é, ele interpretou as experiências eletromagnéticas de Oersted, dele próprio e aquelas devidas a Faraday como sendo devidas a interações entre a corrente elétrica fluindo no fio e as supostas correntes elétricas fluindo dentro do ímã. Ele interpretou a orientação de uma bússola comum pela influência terrestre, juntamente com a orientação de uma bússola de inclinação pela Terra, como sendo devidas a torques exercidos pelas supostas correntes elétricas terrestres ao atuarem sobre as supostas correntes nas bússolas. Da mesma forma, interpretou os torques e forças atuando entre dois ímãs como sendo devidas a torques e forças eletrodinâmicas atuando entre as supostas correntes fluindo no interior desses ímãs. Para completar sua intuição teve de supor distribuições de corrente específicas no interior dos ímãs e da Terra de tal forma que as forças eletrodinâmicas produzidas e sofridas por essas correntes correspondessem às observadas forças magnéticas. Mais tarde, devido a uma sugestão de Augustin Jean Fresnel (1788-1827), substituiu a concepção de correntes macroscópicas fluindo dentro de ímãs e da Terra por correntes microscópicas fluindo apenas ao redor das partículas imantadas que

⁸³²Seu nome também é escrito como Oersted.

⁸³³Ver a Nota de rodapé 348 na página 188.

compõem os ímãs e a Terra. Essas correntes microscópicas são usualmente denominadas de correntes moleculares de Ampère.

Utilizando sua força entre elementos de corrente Ampère conseguiu então unificar teoricamente esses três ramos da ciência. Ampère e Savary obtiveram a força entre um elemento de corrente e um solenoide eletrodinâmico simplesmente indefinido. A expressão que obtiveram era análoga à fórmula de Biot e Savart para a interação entre um elemento de corrente e um suposto polo magnético. Ampère também obteve a força exercida por um circuito fechado de forma arbitrária conduzindo uma corrente constante ao atuar sobre um solenoide eletrodinâmico simplesmente indefinido. Ele conseguiu unificar o eletromagnetismo com a eletrodinâmica através da identificação matemática da extremidade de um solenoide eletrodinâmico simplesmente indefinido com um polo magnético colocado nessa extremidade. Com suas fórmulas foi possível explicar quantitativamente as experiências eletromagnéticas de Oersted, Biot, Savart, Faraday e Ampère.

Ampère também obteve a fórmula analítica expressando a interação eletrodinâmica entre dois solenoides eletrodinâmicos simplesmente indefinidos. Ela representa uma força apontando ao longo da linha reta conectando essas duas extremidades e variando com o inverso do quadrado da distância entre elas. Essa força é matematicamente análoga à ação entre dois polos magnéticos obtida por Coulomb. Ampère conseguiu então unificar matematicamente o magnetismo com a eletrodinâmica. Isto é, um par de polos magnéticos interagindo entre si foi identificado com um par de solenoides eletrodinâmicos simplesmente indefinidos interagindo entre si. Ampère e Savary obtiveram também a força e o torque entre dois solenoides eletrodinâmicos definidos. Essa interação podia ser reduzida a quatro forças, cada uma apontando ao longo da linha reta conectando uma extremidade de um solenoide com uma extremidade do outro solenoide. Além disso, cada uma dessas quatro forças variava com o inverso do quadrado da distância entre essas extremidades. Essa força era proporcional ao produto das intensidades de corrente dos dois solenoides. Foram então capazes de identificar um ímã com seus dois polos, Norte e Sul, como sendo análogo a um solenoide eletrodinâmico definido.

Ampère também conseguiu mostrar que qualquer circuito fechado de forma arbitrária conduzindo uma corrente constante era equivalente a um conjunto de duas superfícies muito próximas entre si, terminadas por esse circuito, sobre as quais estariam espalhadas dois fluidos magnéticos de tipos opostos e de mesma intensidade, a assim chamada folha magnética ou camada de dipolo magnético. A equivalência se refere aqui ao fato de que um circuito fechado com corrente exerce uma força eletrodinâmica sobre um segundo circuito fechado com corrente que é análoga à interação magnética entre duas camadas de dipolo magnético terminadas por esses circuitos.

Ampère obteve também as forças e torques exercidos entre duas espiras fechadas planas e pequenas, com áreas λ e λ' de formatos arbitrários, conduzindo correntes constantes de intensidades i e i' , respectivamente, supondo que as dimensões típicas dessas espiras era muito menor do que a distância entre seus centros. Seguindo Poisson,⁸³⁴ ele também calculou as forças e torques entre dois dipolos magnéticos pequenos de comprimentos $\delta\rho$ e $\delta\rho'$, supondo que seus comprimentos eram muito menores do que a distância entre os centros desses dipolos. Sejam μ e $-\mu$ as intensidades dos polos magnéticos de um dipolo, enquanto que μ' e $-\mu'$ são as intensidades correspondentes do outro dipolo. Ampère mostrou que as forças e torques eletrodinâmicos entre duas dessas espiras com corrente eram equivalentes às forças e torques magnéticos entre dois dipolos magnéticos quando as espiras são substituídas pelos dipolos,

⁸³⁴Ver a Nota de rodapé 320 na página 178.

desde que o eixo conectando os polos Norte e Sul de um dipolo seja normal à área de uma espira, enquanto que o eixo conectando os polos Norte e Sul do outro dipolo seja normal à área da outra espira. Portanto, o equivalente eletrodinâmico a um pequeno dipolo magnético é uma pequena espira plana de formato arbitrário conduzindo uma corrente constante, com o plano da espira sendo ortogonal ao eixo Norte-Sul do dipolo. Dessa maneira Ampère obteve uma equivalência matemática completa dos fenômenos magnéticos com os fenômenos eletrodinâmicos.

Até a época de Ampère os cientistas explicavam os fenômenos magnéticos supondo a existência dos fluidos austral e boreal, isto é, assumindo a existência de polos Norte e Sul dentro dos ímãs e também dentro da Terra. Um dos conceitos básicos do magnetismo era aquele de um dipolo magnético, isto é, dois polos opostos de mesma intensidade separados por uma pequena distância fixa. Com a unificação de Ampère esses conceitos de polos e dipolos magnéticos tornaram-se supérfluos e desnecessários, já que ele conseguiu explicar todos os fenômenos magnéticos lidando apenas com a interação entre correntes elétricas. Essa explicação não era apenas qualitativa e conceitual, mas também quantitativa. Para isso foi essencial sua força eletrodinâmica entre dois elementos de corrente, juntamente com a suposição de correntes elétricas microscópicas fluindo ao redor das partículas dos corpos magnetizados e também ao redor das partículas da Terra.

A força de Ampère entre elementos de corrente foi completamente esquecida durante todo o século XX. A força entre elementos de corrente aparecendo nos livros didáticos nesse período foi substituída pela expressão devida a Hermann Grassmann (1809-1877) em 1845.⁸³⁵ A força de Ampère sempre satisfaz à lei de ação e reação de Newton, além de apontar ao longo da linha reta que une os dois elementos, não interessando suas direções no espaço. A força de Grassmann, por outro lado, em geral não satisfaz ao princípio de ação e reação de Newton. De acordo com a força de Grassmann, há situações hipotéticas nas quais a força exercida pelo elemento de corrente 1 ao atuar sobre o elemento de corrente 2 é diferente em intensidade e direção à força exercida por 2 sobre 1.

Maxwell conheceu não apenas a força de Ampère, mas também a força de Grassmann. Em seu *Tratado sobre Eletricidade e Magnetismo* ele fez uma análise de quatro fórmulas expressando as forças entre dois elementos de corrente, a saber, aquelas de Ampère e Grassmann, juntamente com duas outras expressões criadas pelo próprio Maxwell. Seu julgamento final:⁸³⁶

Destas quatro suposições a de Ampère é sem dúvida a melhor, já que ela é a única que faz com que a força entre os dois elementos seja não apenas igual e oposta, mas ao longo da reta que os une.

Apesar da clara defesa de Maxwell da lei de ação e reação ao longo da linha reta conectando os dois elementos de corrente, a força de Ampère desapareceu dos livros didáticos. O principal motivo para isso é que as teorias atuais da física são baseadas nas teorias da relatividade de Albert Einstein (1879-1955). E as teorias de Einstein são baseadas não apenas nas equações de Maxwell, mas também na denominada força de Lorentz, usualmente atribuída ao físico holandês Hendrik Lorentz (1853-1928). Se começarmos com a força de Lorentz, então só deduzimos a força de Grassmann, mas não a força de Ampère entre elementos de corrente. Por outro lado, se começarmos com a força de Weber, então só deduzimos a força

⁸³⁵[Gra45] com tradução para o inglês em [Gra65], e [Gra77] com tradução para o inglês em [Gra21].

⁸³⁶[Max54a, Vol. 2, Artigos 526 e 527, pág. 174] e [Ass15a, pág. 90].

de Ampère, mas não a força de Grassmann entre elementos de corrente. Apresentei as provas desses fatos nas Seções 3.2 (Deduzindo a Força de Ampère entre Elementos de Corrente a Partir da Força de Weber entre Cargas) e 3.4 (Deduzindo a Força de Grassmann entre Elementos de Corrente a Partir da Força de Maxwell-Lorentz) do livro *Eletrodinâmica de Weber*.⁸³⁷ A força de Ampère entre elementos de corrente não é compatível com as teorias da relatividade de Einstein. Devido a esse fato, os autores de livros didáticos apagaram a força de Ampère de seus textos. Consequentemente a força de Ampère não tem sido ensinada nas escolas secundárias e nas universidades por mais de um século. A primeira tradução completa de sua obra prima de 1826 para qualquer idioma apareceu apenas em 2009 quando ela foi traduzida para o português. Traduções parciais para o inglês de seus trabalhos só foram publicadas em 1965 e 1969, enquanto que traduções completas para o inglês de seu livro principal só apareceram em 2012 e 2015.⁸³⁸

Os livros didáticos sempre atribuem a Ampère a suposta “lei circuital de Ampère”, isto é, a integral de linha de um campo magnético ao redor de um circuito fechado é proporcional à corrente elétrica atravessando a área englobada pelo circuito fechado. Contudo, Ampère nunca deduziu essa lei, ele não a escreveu em qualquer formato. Na realidade, ele nunca trabalhou com o conceito de campo magnético. *Além disso, ele sempre lutou explicitamente contra qualquer coisa circulando ao redor de um fio com corrente!* O primeiro cientista a escrever a lei circuital magnética, mesmo sem a corrente de deslocamento, parece ter sido Maxwell em seu primeiro artigo de 1855 lidando com eletromagnetismo, vinte anos após a morte de Ampère. É inapropriado e um equívoco denominar a lei circuital como sendo de Ampère. O conceito de campo magnético é contrário às concepções de Ampère.⁸³⁹

Maxwell ficou realmente impressionado com o poder da força de Ampère entre elementos de corrente dada pela Equação (29.4). Sua admiração pelo trabalho de Ampère e por sua força entre elementos de corrente foi expressa nas seguintes palavras em sua obra principal, *Tratado sobre Eletricidade e Magnetismo*:⁸⁴⁰

A investigação experimental pela qual Ampère estabeleceu as leis da ação mecânica entre correntes elétricas é um dos feitos mais brilhantes na ciência. O conjunto de teoria e experiência parece como que se tivesse pulado, crescido e armado, do cérebro do ‘Newton da eletricidade’. Ele é perfeito na forma, de acurácia irrefutável, e está resumido em uma fórmula a partir da qual todos os fenômenos podem ser deduzidos, e que tem de sempre permanecer como a fórmula cardeal [mais importante] da eletrodinâmica.

Espero que no século XXI a força de Ampère entre elementos de corrente volte a ser a fórmula mais importante da eletrodinâmica, como defendido por Maxwell. Que ela seja mais uma vez ensinada em todos os cursos de eletromagnetismo, em respeito à sua bela obra e como um tributo ao Newton da eletricidade.

Descrições detalhadas desses fenômenos, experiências, conceitos teóricos, conflitos de paradigmas, juntamente com muitas citações de fontes originais e uma ampla bibliografia

⁸³⁷Em português: [Ass92a] e [Ass15a]. Em inglês: [Ass94, Seções 4.2 e 4.4].

⁸³⁸Ver a Nota de rodapé 7 na página 16.

⁸³⁹Uma discussão detalhada desse tópico pode ser encontrada no Capítulo 16 (Ampère Contra Seus Principais Oponentes) de [AC11] e [AC15]. Ver ainda [Max58, pág. 66 do artigo original de Maxwell e pág. 206 do livro de Niven], [Whi73a, págs. 242-245], [Ham78], [Mat90], [Ass94, Seção 2.5], [Erl99] e [Ass15a, Seção 1.4, Equações de Maxwell]. Ver também a Seção 28.3.

⁸⁴⁰[Max54a, Vol. 2, Artigo 528, pág. 175].

podem ser encontradas em nosso livro “*Eletrodinâmica de Ampère: Análise do Significado e da Evolução da Força de Ampère, Juntamente com a Tradução Comentada de Sua Principal Obra sobre Eletrodinâmica*”.⁸⁴¹

29.2 A Unificação de Weber das Leis de Coulomb, Ampère e Faraday

Weber obteve a unificação de todos os ramos da eletrodinâmica conhecidos durante o século XIX. Começando com a força de Ampère entre elementos de corrente e supondo cada elemento de corrente como sendo composto por partículas eletrizadas positivas e negativas deslocando-se em direções opostas em relação ao corpo material do condutor ele propôs em 1846 uma *lei de ação elétrica fundamental*.⁸⁴² Era uma força combinando a lei de Coulomb para a interação entre partículas eletrizadas em repouso mútuo, juntamente com uma componente dependendo da velocidade relativa entre as partículas e uma outra componente dependendo da aceleração relativa entre elas.

Em 1852 ele apresentou sua lei utilizando uma constante c . Essa constante representava a velocidade relativa constante na qual a força de Weber entre as partículas iria a zero. A constante c de Weber (conhecida durante o século XIX como a *constante de Weber*) foi medida pela primeira vez por Weber e Kohlrausch entre 1854 e 1856. Eles obtiveram $c = 4,39 \times 10^8 \text{ m/s}$.⁸⁴³

Em 1857 Weber e Kirchhoff foram os primeiros a deduzir teoricamente a completa equação do telégrafo trabalhando independentemente entre si e chegando simultaneamente ao mesmo resultado. Utilizando os conceitos atuais e a terminologia usual da teoria de circuitos, podemos dizer que eles foram os primeiros a levar em consideração não apenas a resistência e capacitância do circuito, mas também sua auto-indutância. Para um circuito de resistência desprezível, a equação do telégrafo reduz-se à equação de onda. Eles concluíram que nesse caso a velocidade de propagação de uma onda elétrica ao longo do fio seria dada por $c/\sqrt{2} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$. Esse valor coincidia com a conhecida velocidade da luz no vácuo, v_L , como obtida a partir de observações astronômicas e de experiências ópticas terrestres. Isto é,

$$\frac{c}{\sqrt{2}} = v_L \quad \text{ou} \quad c = \sqrt{2} \cdot v_L . \quad (29.5)$$

Weber e Kirchhoff mostraram que esse resultado era independente da seção reta e condutividade do fio, sendo também independente da densidade superficial de eletricidade. Kohlrausch, que estava colaborando com Weber em algumas experiências relacionadas com a propagação de ondas eletromagnéticas, morreu em 1858. O trabalho de Weber teve sua publicação atrasada e só apareceu em 1864.⁸⁴⁴

⁸⁴¹[Cha09] e [AC11].

⁸⁴²[Web46] com tradução parcial para o francês em [Web87] e traduções completas para o inglês em [Web07] e [Web21d].

⁸⁴³[Web55] com tradução para o inglês em [Web21i]; [WK56] com traduções para o inglês em [WK03] e [WK21], e tradução para o português em [WK08]; e [KW57] com tradução para o inglês em [KW21]. Ver também [Ass21e].

⁸⁴⁴[Kir57b] com traduções para o inglês em [Kir57a] e [Kir21b], [Pog57] com tradução para o inglês em [Pog21], e [Web64] com tradução para o inglês em [Web21c]. Ver ainda [Ass21a] e [Ass21e].

A força fundamental de Weber de 1846 pode então ser expressa em termos de sua constante c de 1852 e em função da velocidade da luz v_L como:⁸⁴⁵

$$\frac{ee'}{r^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2}{c^2} r \frac{d^2r}{dt^2} \right] = \frac{ee'}{r^2} \left[1 - \frac{1}{2v_L^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{v_L^2} r \frac{d^2r}{dt^2} \right]. \quad (29.6)$$

Nessa expressão e e e' são os valores das cargas elétricas das duas partículas que estão interagindo quando separadas por uma distância r . A força entre as duas partículas é então dependente da *velocidade relativa* entre elas, dr/dt , assim como da *aceleração relativa* entre elas, d^2r/dt^2 . Não são relevantes na força de Weber as velocidades das partículas em relação a um observador ou em relação a um sistema de referência, seja ele inercial ou não inercial. A força de Weber aponta ao longo da linha reta conectando as partículas que estão interagindo, seguindo ainda ao princípio de ação e reação.

Weber também introduziu em 1848 uma energia potencial a partir da qual podia deduzir sua lei de força.⁸⁴⁶ A energia potencial de Weber pode ser escrita em termos da constante c de Weber e em função da velocidade da luz v_L como:

$$\frac{ee'}{r} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] = \frac{ee'}{r} \left[1 - \frac{1}{2v_L^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right]. \quad (29.7)$$

Em 1868 Carl Neumann (1832-1925) obteve uma formulação Lagrangiana e Hamiltoniana da lei de Weber.⁸⁴⁷

Quando não há movimento entre as partículas, isto é, quando $dr/dt = 0$ e $d^2r/dt^2 = 0$, a força de Weber reduz-se à lei de Coulomb. Portanto toda a eletrostática está contida na eletrodinâmica de Weber, incluindo a lei de Gauss relacionando o fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada com a carga elétrica que existe dentro do volume limitado por essa superfície.

Considere agora dois condutores conduzindo correntes constantes i e i' . Dois elementos de corrente de comprimentos ds e ds' são representados por ids e $i'ds'$. Podemos considerar um elemento de corrente neutro ids como sendo composto por cargas iguais e opostas, e_+ e $e_- = -e_+$, deslocando-se em relação ao corpo material do condutor com velocidades de deriva v_+ e v_- . Da mesma forma, podemos considerar um elemento de corrente neutro $i'ds'$ como sendo composto por cargas iguais e opostas, e'_+ e $e'_- = -e'_+$, deslocando-se em relação ao condutor com velocidades v'_+ e v'_- . A interação entre ids e $i'ds'$ é então composta de quatro termos, a saber, a força entre e_+ e e'_+ , a força entre e_+ e e'_- , a força entre e_- e e'_+ , juntamente com a força entre e_- e e'_- . Ao somar essas quatro expressões, Weber foi capaz de deduzir em 1846 a força de Ampère entre elementos de corrente a partir de sua lei de força fundamental entre partículas eletrizadas. Portanto, toda a eletrodinâmica de Ampère está contida na lei de força de Weber. Como Ampère havia unificado a magnetostática, a eletrodinâmica e o eletromagnetismo com sua lei de força, todos esses três ramos da física estão contidos na eletrodinâmica de Weber (incluindo a assim denominada lei circuital magnética).

Em sua dedução da força de Ampère entre elementos de corrente a partir de sua força entre partículas eletrizadas Weber havia utilizado a hipótese de Gustav Theodor Fechner (1801-1887).⁸⁴⁸ De acordo com Fechner, em um condutor conduzindo uma corrente cons-

⁸⁴⁵[Web52b, pág. 366 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21e].

⁸⁴⁶[Web48a] com traduções para o inglês em [Web52c], [Web66], [Web19] e [Web21o].

⁸⁴⁷[Neu68a] com tradução para o inglês em [Neu21b], ver o Capítulo 5.

⁸⁴⁸Ver a Nota de rodapé 24 na página 26. Ver ainda [Fec45] com tradução para o inglês em [Fec21].

tante as partículas positivas e negativas deslocam-se em relação à matéria do condutor com velocidades iguais e opostas. Contudo, deve ser enfatizado que não é necessário impor essa condição. De fato, a força de Ampère é deduzida da força de Weber mesmo com velocidades arbitrárias e independentes das partículas positivas e negativas em relação ao condutor. Portanto a força de Ampère é deduzida da lei de Weber mesmo para o caso de condutores metálicos nos quais as partículas positivamente eletrizadas estão fixas na rede cristalina do metal e quando apenas os elétrons de condução negativamente eletrizados são responsáveis pelas correntes.⁸⁴⁹

Em 1831 Faraday descobriu a lei de indução eletromagnética.⁸⁵⁰ Isto é, a indução de uma corrente elétrica em um circuito secundário ao variar a intensidade de corrente em um circuito primário próximo. Ele também mostrou que era possível induzir uma corrente em um circuito secundário quando havia um movimento relativo entre esse circuito secundário e um ímã próximo (ou quando havia um movimento relativo entre esse circuito secundário e um circuito primário conduzindo uma corrente constante). Esses fenômenos ficaram conhecidos como a lei de indução de Faraday. Em 1846 Weber conseguiu deduzir quantitativamente a lei de indução de Faraday a partir de sua lei de força fundamental.⁸⁵¹ James Clerk Maxwell (1831-1879) só conseguiu obter uma formulação matemática da lei de Faraday muitos anos depois de Weber.

Portanto, essencialmente todos os fenômenos eletrodinâmicos conhecidos durante as vidas de Maxwell e Weber podiam ser explicados quantitativamente pela lei de Weber dada pelas Equações (29.6) e (29.7).

As forças de Newton e Coulomb dependem da distância r entre as partículas que estão interagindo. A força de Weber, por lidar com uma classe muito mais ampla de fenômenos, depende também da *velocidade relativa* entre elas, dr/dt , assim como da *aceleração relativa* entre elas, d^2r/dt^2 . Essas são *grandezas relacionais* que possuem os mesmos valores para todos os observadores e em todos os sistemas de referência. Essas grandezas possuem os mesmos valores até mesmo ao comparar um sistema de referência inercial com um sistema de referência não inercial. Elas são grandezas relacionadas apenas aos corpos que estão interagindo, ou seja, grandezas intrínsecas ao sistema.⁸⁵²

29.3 Algumas Possíveis Áreas de Desenvolvimento Futuro da Lei de Weber

Existem muitas áreas da eletrodinâmica e da gravitação que deveriam ser exploradas utilizando a força de Weber.

29.3.1 Interação entre Dois ou Mais Corpos

Weber e muitos outros cientistas estudaram o problema de dois corpos com a força e energia potencial de Weber.⁸⁵³ O próximo passo seria tratar da interação entre três ou mais partículas com a lei de Weber.

⁸⁴⁹Ver [Ass90], [Wes90b], [Ass94, Seção 4.2] e [Ass15a, Seção 3.2].

⁸⁵⁰Ver a Nota de rodapé 8 na página 17.

⁸⁵¹[Web46] com tradução parcial para o francês em [Web87] e traduções completas para o inglês em [Web07] e [Web21d].

⁸⁵²[Ass13] e [Ass14b].

⁸⁵³Ver a Nota de rodapé 223 na página 127.

Será relevante estudar no futuro o mesmo problema considerando também o spin de uma dessas partículas ou de ambas, isto é, o fato de terem não apenas uma carga e massa, mas também uma rotação intrínseca ao redor de seus eixos. Um primeiro cálculo nesse sentido já foi feito em 1989.⁸⁵⁴ Ou seja, considerando uma casca esférica girando ao redor de seu eixo e interagindo com uma partícula que se desloca em relação a essa casca esférica. O próximo passo seria considerar a interação entre duas cascas esféricas, sendo que cada uma delas estaria girando ao redor de seu eixo em uma direção arbitrária. As massas (ou cargas) desses corpos poderia ser diferente, assim como seus raios, suas velocidades angulares etc. Obviamente no futuro os cientistas devem considerar também os problemas com três, quatro e muitos corpos utilizando a lei de Weber. Esses corpos podem ter massas ou cargas, além de poderem girar ao redor de seus eixos.

29.3.2 Teoria de Circuitos

Considere um circuito elétrico tendo auto-indutância L e resistência R conectado a uma bateria ou a uma fonte de força eletromotriz aplicada $V(t)$. A equação descrevendo o fluxo de corrente $I = dQ/dt$ através da seção reta do fio, onde Q representa a carga elétrica e t o tempo, é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$V(t) = RI + L \frac{dI}{dt} = R \frac{dQ}{dt} + L \frac{d^2Q}{dt^2} . \quad (29.8)$$

Suponha agora uma partícula de massa m deslocando-se ao longo do eixo x com velocidade $v = dx/dt$ e aceleração $a = dv/dt = d^2x/dt^2$, onde x é a posição da partícula em função do tempo t em relação a um referencial inercial. A segunda lei de Newton é dada por $F = ma$, onde F é a força resultante atuando sobre a partícula. Se a partícula estiver sujeita a uma força de atrito proporcional à velocidade dada por $-bv$, onde b é o coeficiente de atrito constante, e também estiver sujeita a uma força externa aplicada $F(t)$, a segunda lei de Newton fica na seguinte forma:

$$F(t) = bv + ma = b \frac{dx}{dt} + m \frac{d^2x}{dt^2} . \quad (29.9)$$

Como mencionado em diversos livros didáticos, as Equações (29.8) e (29.9) são matematicamente equivalentes.

Contudo, como mostrei em 1997, essas duas equações não são apenas matematicamente equivalentes. Afinal de contas, a equação da teoria de circuitos pode ser deduzida da segunda lei de movimento de Newton quando aplicada em conjunto com a força de Weber. *De fato, é possível mostrar que a equação da teoria de circuitos é a segunda lei de Newton aplicada aos elétrons de condução, quando aplicada em conjunto com a força de Weber.*⁸⁵⁵ Em particular, a auto-indutância L é uma medida da massa inercial efetiva dos elétrons de condução. A massa inercial efetiva de um elétron de condução devida à sua interação com as cargas positivas da rede cristalina do metal é muito maior do que a massa usual dos elétrons livres.

Essa interpretação Weberiana da auto-indutância oferece uma nova percepção sobre a teoria microscópica da condução e deveria ser estendida a outros domínios da física, em particular, à eletrônica.

⁸⁵⁴[Ass89] e a Seção 16.5 (As forças exercidas por cascas esféricas) de [Ass13] e [Ass14b].

⁸⁵⁵[Ass97] e [AH06].

29.3.3 Física de Plasmas e Aceleradores de Partículas

O prêmio Nobel de física Hannes Alfvén (1908-1995) desenvolveu na década de 1940 a teoria magneto-hidrodinâmica (MHD) para lidar com um plasma como sendo um fluido condutor. Um plasma é como se fosse um gás composto de partículas eletrizadas positivamente e negativamente, ou composto por elétrons negativos e íons carregados positivamente. Seria importante desenvolver uma física de plasmas Weberiana. Ou seja, um plasma no qual a lei de interação entre suas partículas eletrizadas seja dada pela força de Weber. Essa teoria poderia ser aplicada, por exemplo, na ionização da matéria por lasers, na fusão por confinamento inercial, na física dos tokamaks etc.

A física dos aceleradores de partículas poderia ser muito beneficiada por um novo enfoque baseado na lei de Weber. O próprio Weber apresentou algumas sugestões sobre a transmutação de um elemento químico em outro elemento químico através de sua força eletrodinâmica.⁸⁵⁶

A busca pela fusão termonuclear controlada começou na década de 1950. Nenhum avanço significativo foi alcançado nos últimos 70 anos. Ao aplicar a lei de Weber a essa área de pesquisa talvez seja possível alcançar o objetivo desejado de construir um reator de fusão termonuclear controlada.

A física do plasma espacial também deve se beneficiar enormemente dessa mudança de paradigma. Ao considerar essa área da ciência do ponto de vista da lei de Weber pode ser possível entender melhor diversos fenômenos como a ionosfera terrestre, os cinturões de Van Allen que receberam esse nome em homenagem a James Van Allen (1914-2006), as auroras polares (boreais e austrais), as radiogaláxias, os quasares etc.

29.3.4 Supercondutividade

Posso ilustrar o poder da lei de Weber quando aplicada a um novo fenômeno ainda não conhecido durante a vida de Weber (1804-1891) ao mencionar a supercondutividade, isto é, materiais exibindo resistência elétrica nula. Esse fenômeno foi descoberto em 1911 por Heike Kamerlingh Onnes (1853-1926). O chamado efeito Meissner foi descoberto em 1933 por F. W. Meissner (1882-1974) e R. Ochsenfeld (1901-1993). Ele é normalmente descrito nos livros didáticos como sendo a expulsão de um campo magnético de um material durante sua transição para o estado supercondutor. O assim chamado “momento de London” é o momento magnético adquirido por um supercondutor em rotação. Quando um material supercondutor é girado em relação a um sistema de referência inercial com uma velocidade angular $\vec{\Omega}$, é desenvolvido em todo o seu interior um campo magnético $\vec{B} = 2m\vec{\Omega}/e$, onde $m > 0$ é a massa do elétron, sendo $e > 0$ a magnitude da carga do elétron (ou a carga de um próton). Esse efeito foi previsto por Richard Becker (1887-1955), Fritz London (1900-1954) e outros. Ao aplicar a força de Weber original de 1846 a esses fenômenos, foi possível deduzir o momento de London, o efeito Meissner e a profundidade de penetração de London (que caracteriza a distância que um campo magnético penetra na superfície de um supercondutor, com uma queda de intensidade exponencial). Essas deduções não foram apenas qualitativas, mas também quantitativas, sem utilizar quaisquer parâmetros livres ou ajustáveis.⁸⁵⁷

Isso é apenas o começo. Esses cálculos iniciais deveriam ser ampliados e comparados com outros fenômenos da supercondutividade.

⁸⁵⁶[AWW11, Seção 1.11] com tradução para o português em [AWW14, Cap. 11: Considerações Finais] e tradução para o alemão em [AWW18, Cap. 11].

⁸⁵⁷[AT17] e [Pry18].

Esse exemplo específico ilustra o poder da eletrodinâmica de Weber quando aplicada a novos fenômenos.

29.4 A Unificação da Óptica com a Eletrodinâmica através da Força de Weber

Como discutido na Seção 29.2, Weber introduziu em 1852 a constante c em sua força de 1846. Essa constante foi medida pela primeira vez por Weber e Kohlrausch entre 1854 e 1856 fornecendo $c = 4,39 \times 10^8 \text{ m/s}$.⁸⁵⁸ Em 1857 Weber e Kirchhoff foram os primeiros cientistas a deduzir a forma completa da equação do telégrafo levando em consideração não apenas a resistência e capacitância do circuito, mas também sua auto-indutância. Ambos utilizaram a força de Weber como base de seus cálculos. Para um circuito de resistência desprezível, a equação do telégrafo reduz-se à equação de onda com a perturbação propagando-se ao longo do fio com velocidade $c/\sqrt{2}$. É relevante citar as palavras de Kirchhoff:⁸⁵⁹

Descobriu-se aqui que a velocidade de propagação de uma onda elétrica é $= c/\sqrt{2}$, ou seja, independente da seção transversal e da condutividade do fio, bem como da densidade da eletricidade; seu valor é de 41950 milhas em um segundo, ou seja, quase igual à velocidade da luz no espaço vazio.

Isto é, $c/\sqrt{2} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, que tem essencialmente o mesmo valor que a conhecida velocidade da luz no vácuo, v_L , como obtida por observações astronômicas e por experiências terrestres. Utilizando o Sistema Internacional de Unidades, podemos dizer que em 1846-1852 Weber introduziu pela primeira vez na física a constante eletromagnética $c/\sqrt{2} = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, onde ε_0 é a constante de permissividade do vácuo e μ_0 é a constante de permeabilidade do vácuo. Entre 1854 e 1856 Weber e Kohlrausch mediram essa constante em uma experiência puramente eletromagnética. Em particular, mediram a força entre duas esferas eletrizadas e então o torque produzido em uma bússola próxima quando uma parte da carga de uma dessas esferas foi descarregada para o solo. A partir dessas duas medições de força eles obtiveram o valor de $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$. Eles não mediram a velocidade de qualquer corpo, não estudaram qualquer propriedade da luz nessa experiência, nem qualquer outra coisa relacionada com a óptica. De qualquer forma, encontraram $c/\sqrt{2} = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, isto é, o mesmo valor que a conhecida velocidade da luz no vácuo. Em 1857 Weber e Kirchhoff deduziram teoricamente a equação de onda descrevendo a propagação de uma perturbação eletromagnética ao longo de um fio metálico. Encontraram que uma onda elétrica propagasse ao longo de um fio de resistência desprezível exatamente com essa velocidade. Esses resultados de Weber, Kohlrausch e Kirchhoff mostraram uma conexão quantitativa direta entre a óptica e a eletrodinâmica de Weber, muitos anos antes de Maxwell.

De fato, esses resultados inspiraram muitas teorias eletromagnéticas da luz: a de Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) em 1858 (esse artigo só foi publicado postumamente em 1867);⁸⁶⁰ a própria teoria de Maxwell em 1861-1873;⁸⁶¹ assim como a do físico dinamarquês Ludvig Valentin Lorenz (1829-1891) em 1867.⁸⁶²

⁸⁵⁸Ver também [Ass21e].

⁸⁵⁹[Kir57b, págs. 209-210], com traduções para o inglês em [Kir57a, 406] e [Kir21b, pág. 214].

⁸⁶⁰[Rie67b] com tradução para o inglês em [Rie67a] e [Rie77a].

⁸⁶¹[Max62], [Max65] e [Max54a].

⁸⁶²[Lor67b] com tradução para o inglês em [Lor67a].

É possível deduzir uma teoria eletromagnética completa da luz e da radiação eletromagnética em geral trabalhando apenas no contexto da eletrodinâmica de Weber? Sim, acredito que isso seja possível. Apresento aqui algumas pistas nessa direção.

Weber, Carl Neumann e J. K. Friedrich Zöllner (1834-1882) indicaram diferentes conexões entre a óptica e a lei de Weber, como discutido na Seção 9 (Propriedades Ópticas do Modelo Planetário de Weber para o Átomo) de nosso livro *O Modelo Planetário de Weber para o Átomo*.⁸⁶³

Weber sempre defendeu uma teoria ondulatória da luz. Por exemplo, no livro que publicou com seu irmão, o médico Ernst Heinrich Weber (1795-1878), Weber comparou a teoria ondulatória com a teoria corpuscular da luz de Newton, mostrando as vantagens de uma propagação ondulatória através do éter.⁸⁶⁴

Ele discutiu correntes alternadas na Seção 16 de sua Primeira Memória principal sobre *Medições Eletrodinâmicas* de 1846. Ele distinguiu a corrente galvânica constante da corrente alternada, que em intervalos de tempo muito curtos muda constantemente de direção. Ele então apresentou uma hipótese ousada de que a luz incidente sobre um corpo poderia criar vibrações elétricas sobre os fluidos elétricos de uma substância material! Acredito que essa tenha sido a primeira vez em que apontou uma possível conexão entre a óptica e a eletricidade.⁸⁶⁵

Como o movimento progressivo da eletricidade ocorre tão abundantemente na natureza, não é óbvio o motivo pelo qual, dada uma mobilidade tão grande, também não devessem ocorrer condições ocasionais que favoreçam um movimento vibratório. Se, por exemplo, as ondulações luminosas exercerem uma ação sobre os fluidos elétricos, e se tiverem o poder de perturbar seu equilíbrio, seria certamente esperado que essas ações das ondulações luminosas estariam estruturadas temporalmente com a mesma periodicidade que as *próprias ondulações da luz*, de tal forma que o resultado consistiria em uma *vibração elétrica* que, contudo, não somos capazes de descobrir com nossos instrumentos.

A influência eletromagnética sobre os fenômenos ópticos era conhecida desde 1845 quando Faraday descobriu a rotação magnética do plano de polarização da luz.⁸⁶⁶ Ele observou essa rotação para a luz atravessando um pedaço de vidro pesado imerso em um forte campo magnético ao longo da direção de propagação da luz,⁸⁶⁷ ou com o vidro cercado por uma corrente galvânica fluindo em uma hélice ao redor do vidro, isto é, com a corrente na hélice fluindo em planos quase ortogonais ao feixe de luz. Weber estava ciente dessa descoberta e a mencionou em seu trabalho de 1846, quando apresentou a sugestão de que o éter que se acreditava propagar as vibrações da luz poderia ser um meio eletricamente neutro.⁸⁶⁸

A ideia da existência de tal meio intermediário já é encontrada na ideia do fluido elétrico neutro difundido em todos os lugares, e mesmo se esse fluido neutro,

⁸⁶³[AWW11, Seção 1.9] com tradução para o português em [AWW14, Seção 9] e tradução para o alemão em [AWW18, Seção 9].

⁸⁶⁴[WW94, Parágrafos 306 a 313 das *Obras* de Weber].

⁸⁶⁵[Web46, pág. 124 das *Obras* de Weber] com traduções completas em inglês em [Web07, pág. 76] e [Web21d, pág. 122].

⁸⁶⁶[Far46a, Série XIX, Artigos 2146-2242] e [ML22].

⁸⁶⁷O chamado vidro pesado é feito de borossilicato de chumbo, [Tho01, pág. 100] e [ML22].

⁸⁶⁸[Web46, págs. 213-214] com traduções completas para o inglês em [Web07, págs. 141-142] e [Web21d, págs. 202].

sem considerar os condutores, tenha até o momento escapado das observações dos físicos, contudo há agora esperança de que podemos ser bem sucedidos em ganhar uma elucidação mais direta, de várias formas novas, desse fluido difundido por toda parte. Talvez em outros corpos, com exceção dos condutores, não ocorram correntes [elétricas], mas apenas *vibrações*, que podem ser observadas mais precisamente pela primeira vez com os métodos discutidos na Seção 16. Além disso, preciso apenas lembrar da última descoberta de Faraday sobre a influência *das correntes elétricas sobre as vibrações da luz*, o que não torna improvável que o meio elétrico neutro difundido em todos os lugares seja o próprio éter que está em toda parte, que cria e propaga as vibrações luminosas, ou que ao menos os dois [meios] estejam interconectados tão intimamente, que as observações das vibrações da luz possam ser capazes de explicar o comportamento do meio elétrico neutro.

Carl Neumann tratou matematicamente a rotação do plano de polarização da luz pelo magnetismo a partir do ponto de vista da eletrodinâmica de Weber em sua dissertação de 1858.⁸⁶⁹ Cinco anos depois apresentou sua teoria de forma mais detalhada.⁸⁷⁰ Ele propôs uma interação entre as partículas do éter e as moléculas do corpo dependendo das forças magnéticas externas. Contudo essas forças atuariam apenas sobre as partículas móveis do éter que tivessem sido excitadas anteriormente, mas não atuariam sobre partículas estacionárias do éter. Ele supôs essa força sendo produzida por correntes moleculares de Ampère induzidas no corpo por essas forças magnéticas, em analogia com a explicação do diamagnetismo feita por Weber. Porém deve ser enfatizado aqui que Neumann utilizou o modelo *ideal* de uma corrente molecular Ampèreana, isto é, baseada em um fluxo contínuo de corrente ao redor da molécula, como os anéis de Saturno. Essas correntes moleculares induzidas atuariam sobre as partículas do éter de acordo com a lei de força de Weber. Essa interação seria análoga à interação mútua entre duas correntes elétricas. A teoria de Neumann foi uma primeira tentativa de aplicar a lei de Weber para fenômenos ópticos.⁸⁷¹

Em 1862 Weber postulou a excitação de ondas de calor e ondas de luz através de correntes moleculares.⁸⁷² Como mencionado, o modelo *ideal* de uma corrente molecular Ampèreana de Neumann não podia excitar essas ondas no éter. Weber, por outro lado, em seu trabalho de 1862 apresentou mais uma vez um modelo para as correntes moleculares de Ampère que fosse *discreto* ou *corpúscular*, similar ao modelo que havia apresentado em 1852.⁸⁷³ Nesse modelo de Weber as correntes contínuas, similares aos anéis de Saturno, são substituídas por partículas eletrizadas discretas descrevendo órbitas ao redor de um centro, similares às luas de Júpiter. Essa mudança crucial tornou possível a excitação de ondas de luz através de correntes moleculares. A única diferença desse modelo de 1862 em relação ao modelo de 1852 é que agora Weber inverteu os sinais entre as partículas eletrizadas móveis e estacionárias. Em seu trabalho de 1862 Weber dotou seu modelo planetário do átomo com propriedades ópticas, a saber, a possível produção de ondas luminosas através do éter.

Ele fez os seguintes comentários ao discutir o trabalho de Neumann relacionado com a rotação de Faraday:⁸⁷⁴

⁸⁶⁹[Neu58].

⁸⁷⁰[Neu63].

⁸⁷¹[Wie60, págs. 194-195] e [Wie67].

⁸⁷²[Web62, págs. 94-96 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web24d].

⁸⁷³[Web52b] com tradução para o inglês em [Web21e]; ver também [Rie92b, pág. 25] com tradução para o inglês em [Rie24, pág. 192].

⁸⁷⁴[Web62, pág. 95 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web24d, pág. 122].

De acordo com suas premissas, Neumann descobriu que nenhuma influência de correntes elétricas moleculares sobre *partículas de éter em repouso* poderia ocorrer; entretanto, deve-se observar que essas premissas, de acordo com o objetivo da investigação de Neumann, que se limitava à influência das correntes moleculares sobre os trens de ondas já existentes propagados entre as moléculas através do éter, referiam-se às ações das correntes moleculares a distâncias muito pequenas, mas ainda permitiam a admissão de uma concepção *ideal* das correntes moleculares, de acordo com a qual as mesmas são consideradas como uma *superposição de correntes opostas iguais de eletricidade positiva e negativa*, mas isso obviamente não é permitido quando se trata da excitação de novos trens de ondas pelas correntes moleculares elétricas, o que só pode ocorrer na *camada de éter imediatamente adjacente* às correntes moleculares. Para essa camada de éter, as partículas elétricas positivas e negativas que se movem em direções opostas não podem mais ser consideradas como coincidentes. Se imaginarmos, por exemplo, que o fluido negativo está firmemente conectado à molécula, e apenas o fluido positivo é concebido em fluxo molecular, ou vice-versa (uma concepção recomendada pelo fato de que [esse movimento] pode existir com a persistência das correntes moleculares sem forças eletromotrizes), fica claro que a diferença na posição e no comportamento dos dois fluidos elétricos não precisa mais ser levada em consideração, mesmo em distâncias muito pequenas (como considerado por Neumann), nas quais se baseia a admissibilidade dessa concepção *ideal* das correntes moleculares, mas que pode, no entanto, ser importante para a *camada de éter imediatamente adjacente*, especialmente se o fluido elétrico no fluxo molecular *não for distribuído contínua e uniformemente* ao redor da molécula.

Carl Neumann tinha uma imagem das correntes moleculares como sendo compostas pelos dois fluidos elétricos deslocando-se em sentidos opostos em órbitas fechadas ao redor da molécula, em analogia com os anéis de Saturno. Contudo, esse modelo não era apropriado para a produção de novas ondas através do éter. Como pode ser visto por essa citação, Weber modificou a concepção de Neumann. A distribuição contínua de eletricidade fluindo ao redor da molécula foi agora considerada como concentrada em uma partícula, como a Lua orbitando ao redor da Terra. Isto é, Weber transformou as correntes moleculares de Ampère em um sistema planetário!⁸⁷⁵

Em 1852 ele já havia apresentado uma ideia similar, mas naquela época com a partícula positiva considerada como estando parada com a molécula, enquanto que a partícula negativa orbitava ao redor da molécula positiva.⁸⁷⁶ Nesse trabalho de 1862 ele inverteu os sinais das cargas. Naquela época ainda não era possível decidir sobre qual sinal de carga deveria estar associado com a corrente molecular de Ampère.

Na sequência desse trabalho de 1862 Weber mencionou até mesmo que a frequência orbital das partículas eletrizadas em seu modelo planetário deveria ser idêntica à frequência das ondas de calor ou das ondas de luz:⁸⁷⁷

Se, no entanto, houver realmente uma perturbação do equilíbrio na *camada de éter imediatamente vizinha* e, conseqüentemente, uma excitação das ondas de éter, é óbvio que isso se repete a cada revolução da eletricidade ao redor da molécula, ou

⁸⁷⁵[Wie67, págs. 157-161].

⁸⁷⁶[Web52b] com tradução para o inglês em [Web21e].

⁸⁷⁷[Web62, pág. 95 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web24d, pág. 228].

seja, o período da onda deve corresponder ao período de revolução das partículas elétricas que se encontram em corrente molecular.

Weber não discutiu as consequências da conservação da energia nesta produção de ondas luminosas e de calor realizadas por sua corrente molecular planetária.

Weber também acreditava que seria possível utilizar as propriedades ópticas de seu modelo planetário para obter informação sobre a constituição interna das moléculas. Em particular, os comprimentos de onda da luz emitida poderiam fornecer a chave para tirar conclusões sobre os processos moleculares elétricos. Poderia ser possível, por exemplo, obter informação sobre essas correntes moleculares a partir das propriedades da luz emitida por essas moléculas.⁸⁷⁸

No caso das *moléculas luminosas*,⁸⁷⁹ no entanto, a duração dos trens de ondas emitidos por elas é conhecida com precisão a partir de experimentos ópticos; portanto, se a relação presumida entre as correntes moleculares elétricas e o éter luminífero, de acordo com a ideia de Neumann, fosse confirmada, seria possível obter informações mais detalhadas sobre o comportamento da eletricidade que forma as correntes moleculares a partir de experimentos ópticos.

Em 1876 Zöllner apresentou o outro aspecto deste raciocínio, a saber, utilizar as propriedades internas de um modelo planetário com o objetivo de deduzir as linhas espectrais dos elementos químicos! Apresentamos aqui a citação relevante desta bela ideia:⁸⁸⁰

As leis desenvolvidas por Weber sobre as oscilações de um par atômico provavelmente levarão a uma determinação analítica do número e da posição das linhas espectrais dos elementos químicos e suas conexões com os pesos atômicos.

Esta é uma passagem notável que indica uma possível explicação teórica das conhecidas linhas espectrais dos elementos. Naquela época ainda não havia uma explicação detalhada para estas linhas espectrais. A análise espectral dos elementos químicos havia sido desenvolvida por R. W. Bunsen (1811-1899) e Gustav Kirchhoff (1824-1887) em 1859. A compreensão quantitativa completa das séries espectrais específicas de cada átomo foi obtida apenas no século XX. De qualquer forma, é impressionante observar quão à frente de seu tempo estavam Weber e Zöllner em suas especulações teóricas.

Nesta citação Zöllner estava se referindo ao trabalho de Weber de 1871. Weber havia estimado o período de oscilação de duas cargas de mesmo sinal orbitando uma ao redor da outra, estando separadas por distâncias menores do que a distância crítica. Isto é, separadas por uma distância r tal que $r < \rho$. Weber encontrou que este período de oscilação estava entre $2r_0/c$ e $4r_0/c$. Fez então o seguinte comentário ao tentar conectar este período de oscilação com o período da luz visível:⁸⁸¹

Se colocarmos $c = 439\,450 \cdot 10^6$ milímetros/segundo, seguirá dessa última determinação que o valor de ρ tem de estar aproximadamente entre $1/4000$ e $1/8000$ de um milímetro para que essas oscilações possam ter a mesma rapidez que as oscilações da luz.

⁸⁷⁸[Web62, págs. 95-96 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web24d, pág. 229].

⁸⁷⁹Em alemão: *Bei leuchtenden Molekullen*. Essa expressão pode ser traduzida por moléculas luminosas, moléculas luminescentes, moléculas brilhantes ou moléculas que brilham.

⁸⁸⁰[Zöl76b, Prefácio, pág. XXI].

⁸⁸¹[Web71, pág. 278 das *Obras* de Weber] com traduções para o inglês em [Web72, pág. 129] e [Web21g, pág. 93]. Ver, em particular, página 107 na Seção 9.14 do Capítulo 9.

Como discutido por Hecht, foi com este modelo que Weber tentou pela primeira vez encontrar as bases para a produção das oscilações ocorrendo na frequência da luz.⁸⁸²

A conexão entre as ondas eletromagnéticas e a eletrodinâmica de Weber também pode ser desenvolvida em outras direções. Por exemplo, Weber e Kirchhoff calcularam em 1857-1864 a propagação de sinais elétricos ao longo de cabos telegráficos condutores. Eles mostraram que as ondas se propagam com a velocidade da luz quando a resistência do fio é desprezível. Esses cálculos baseados na força de Weber devem ser estendidos para ondas elétricas propagando-se em meios isolantes compostos de partículas elétricas positivas e negativas (como o ar, o vidro, o meio entre as estrelas e galáxias, etc.). O próprio Weber apresentou algumas ideias ao longo dessas linhas na Seção 12 de seu trabalho póstumo publicado em 1894.⁸⁸³

Outras ideias de como poderia ser possível obter uma velocidade de propagação finita para as perturbações elétricas partindo da eletrodinâmica de Weber foram apresentadas no livro *Eletrodinâmica de Weber*.⁸⁸⁴ Existem também alguns trabalhos bem atuais obtendo a propagação de ondas eletromagnéticas no espaço utilizando a eletrodinâmica de Weber.⁸⁸⁵

29.5 A Unificação da Física Nuclear com a Eletrodinâmica Através da Força de Weber

Apresento aqui algumas das principais propriedades do fascinante modelo planetário de Weber.

Em 2011 publicamos o livro *O Modelo Planetário de Weber para o Átomo*.⁸⁸⁶ Esse livro apresentou o modelo planetário do átomo desenvolvido por Wilhelm Weber na segunda metade do século XIX, antes do modelo atômico de Niels Bohr (1885-1962) que foi criado entre 1911 e 1913. O modelo atômico de Weber é baseado em sua lei de força de 1846 que depende da distância r entre as partículas que estão interagindo, da velocidade relativa entre elas e da aceleração relativa entre elas. Weber mostrou que duas partículas eletrizadas com cargas de mesmo sinal se comportam como se tivessem massas inerciais negativas quando estão aceleradas entre si, desde que estejam se movendo separadas por distâncias muito pequenas, menores do que uma certa distância crítica r_c . Quando ocorrem essas condições, as duas partículas eletrizadas com cargas de mesmo sinal vão se atrair, em vez de se repelir como usualmente observado. Weber previu então que os átomos poderiam ser compostos de partículas negativas descrevendo órbitas elípticas ao redor de um núcleo positivo, sendo atraídas pelo núcleo. Já as partículas positivas que compõem o núcleo iriam se atrair devido às suas massas inerciais negativas, mantendo o núcleo estável. Três aspectos notáveis principais de seu modelo devem ser enfatizados:

- A previsão de Weber foi feita antes da descoberta do elétron (1897) e também antes das experiências de 1911 de Ernest Rutherford (1871-1937). Seu modelo também foi desenvolvido antes da descoberta em 1885 e 1908 das séries de Johann Jakob Balmer (1825-1898) e Friedrich Paschen (1865-1947) descrevendo as linhas espectrais de emissão do átomo de hidrogênio. O modelo atômico de Bohr (1913), por outro lado,

⁸⁸²[Hec96].

⁸⁸³[Web94d] com traduções para o inglês em [Web08] e [Web21b], ver a Seção 18.12 com a tradução em português desse trabalho.

⁸⁸⁴[Ass94, Seção 8.2] e [Ass15a, Seção 5.6].

⁸⁸⁵[Küh23a], [Küh23b], [LM23] e [LSM24].

⁸⁸⁶[AWW11] com tradução para o português em [AWW14] e tradução para o alemão em [AWW18].

foi inventado para ser compatível com essas descobertas experimentais. Enquanto que o modelo de Bohr foi *ad hoc* (isto é, foi formulado com essa finalidade), o modelo de Weber foi uma previsão real de como os átomos deveriam ser compostos.

- As forças nucleares não são necessárias no modelo de Weber para estabilizar o núcleo positivo. Afinal de contas, todas as partículas positivas dos núcleos são mantidas unidas por forças puramente eletrodinâmicas. Na física moderna, por outro lado, os cientistas tiveram de postular a existência de forças nucleares já que não estavam mais cientes da eletrodinâmica de Weber. Portanto, após ter sido estabelecida a existência dos núcleos positivos, eles encontraram o problema de explicar a estabilidade dos núcleos em função das forças repulsivas Coulombianas atuando entre os componentes do núcleo carregados positivamente. Com essa finalidade eles postularam a existência de forças nucleares. Já com o modelo planetário de Weber para o átomo temos uma unificação do eletromagnetismo com as forças nucleares. Essa unificação ocorreu antes que esses dois ramos da física fossem separados entre si. Ou seja, até mesmo a estabilidade dos núcleos foi prevista e explicada pela eletrodinâmica de Weber!
- Quando Weber desenvolveu seu modelo durante as décadas de 1850 até 1880, o elétron e o pósitron ainda eram desconhecidos, já que essas duas partículas só foram descobertas em 1897 e 1932, respectivamente. Portanto, Weber só conseguiu fazer cálculos algébricos e qualitativos em relação ao valor de sua distância crítica r_c . Mas quando utilizamos, por exemplo, os valores conhecidos da massa e da carga de dois pósitrons e calculamos a distância crítica r_c abaixo da qual essas duas partículas começam a se atrair, obtemos um número com a ordem de grandeza de $10^{-15} m$. Ou seja, essencialmente o tamanho conhecido dos núcleos! Essa similaridade entre o valor da distância crítica de Weber para essas partículas fundamentais e o tamanho dos núcleos não deve ser uma coincidência.

Do meu ponto de vista, Weber apresentou a essência do modelo atômico correto. Contudo, a teoria de Weber foi esquecida durante todo o século XX. A física nuclear foi desenvolvida exatamente durante esse período. Portanto, seria extremamente relevante se os cientistas nucleares modernos pudessem analisar seus dados a partir do ponto de vista da eletrodinâmica de Weber. Muitos fenômenos novos podem ser até mesmo previstos ao explorar a força de Weber e sua energia potencial aplicadas às partículas eletrizadas compondo os átomos e núcleos atômicos.

O modelo planetário de Weber para o átomo apresenta uma unificação do eletromagnetismo com a física nuclear. Além disso, esse unificação ocorreu antes que esses dois ramos da física tivessem se separado no início do século XX. Acredito que a eletrodinâmica de Weber apresenta não apenas a essência da explicação correta para a estabilidade dos núcleos, mas também uma justificativa para seus tamanhos medidos.

29.6 Lei de Weber e a Tabela Periódica dos Elementos

O modelo planetário maduro de Weber para o átomo foi apresentado em seu trabalho póstumo de 1894.⁸⁸⁷ Acredita-se que esse texto tenha sido escrito na década de 1880. Ele

⁸⁸⁷[Web94d] com traduções para o inglês em [Web08] e [Web21b], e com tradução para o português no Capítulo 18.

está fragmentado e não foi completado durante a vida de Weber. Nesse trabalho ele tentou explicar a variedade de corpos ponderáveis a partir de sua lei de força fundamental de 1846.

Ele classificou as partículas básicas (chamadas de moléculas) em três categorias. (a) As partículas positivas simples teriam carga $+e$ e massa ε , enquanto que as partículas negativas simples teriam carga $-e$ e massa ε' que poderia ser diferente da massa ε das partículas positivas simples. (b) As partículas positivas indivisíveis seriam compostas por m partículas positivas simples deslocando-se muito próximas entre si, abaixo da distância crítica r_c , de tal forma que elas se atrairiam mutuamente. Da mesma forma, as partículas negativas indivisíveis seriam compostas por n partículas negativas simples deslocando-se muito próximas entre si, abaixo da distância crítica r_c , de tal forma que elas se atrairiam mutuamente. As grandezas m e n seriam inteiros positivos tais como 2, 3, 4, 5 etc. (c) As moléculas ponderáveis seriam compostas de números iguais de partículas positivas e negativas. As moléculas ponderáveis teriam peso, enquanto que as partículas simples só teriam massa, mas não interagiriam gravitacionalmente entre si.

Além dessas três categorias, ele previu a possibilidade de que uma partícula eletrizada poderia orbitar ao redor de uma molécula ponderável, estando dinamicamente conectada a ela através de sua lei de força. Uma partícula eletrizada orbitando ao redor de uma molécula ponderável neutra é essencialmente equivalente a um íon moderno da física e da química, sendo que Weber previu a existência desses íons muito antes que eles fossem comprovados experimentalmente. Os átomos e moléculas ponderáveis poderiam então ser classificados em três grupos, a saber, moléculas neutras, íons positivos e íons negativos. As partículas desses três grupos teriam massa e também interagiriam gravitacionalmente entre si.

Ao desenvolver suas ideias, ele considerou a tabela periódica dos elementos na Seção 18.5 de seu trabalho: *Classificação das Moléculas Materiais de Acordo com a Composição e a Capacidade de Separação*.

Em 1871 e em seu trabalho póstumo ele também apresentou a grande ideia de que as ligações químicas entre os átomos poderiam ter uma origem elétrica! Discutimos algumas de suas ideias em nosso livro sobre o modelo planetário de Weber para o átomo.⁸⁸⁸

Ele tentou explicar a formação do gelo, água e vapor e apresentou algumas considerações qualitativas de como esses diferentes estados da matéria poderiam mudar entre si. Ele também apresentou algumas ideias fundamentais tentando explicar a distinção entre condutores e isolantes elétricos, juntamente com algumas de suas propriedades principais.

A maioria de suas ideias era qualitativa. De qualquer forma, ele apresentou intuições importantes que deveriam ser exploradas com as ferramentas analíticas modernas.

29.7 Aplicações da Lei de Weber para a Gravitação

Discuti no livro *Mecânica Relacional e Implementação do Princípio de Mach com a Força de Weber Gravitacional* os trabalhos de alguns cientistas que aplicaram a lei de Weber para a gravitação.⁸⁸⁹

A eletrodinâmica de Weber foi extremamente bem sucedida ao explicar os fenômenos eletrostáticos (através da força de Coulomb) e eletrodinâmicos (força de Ampère entre elementos de corrente, lei de indução de Faraday, a equação do telégrafo descrevendo a propagação de

⁸⁸⁸Seção 10.4 (Aplicação da Teoria de Weber para as Ligações Atômicas) de [AWW11] com tradução para o português em [AWW14] e tradução para o alemão em [AWW18].

⁸⁸⁹[Ass14b, Seção 25.3] e [Ass13, Seção 24.3].

sinais eletromagnéticos em fios condutores com a velocidade da luz, etc.). Devido a seu grande sucesso, alguns cientistas tentaram aplicar uma lei análoga para a gravitação. Era o pêndulo oscilando de volta. Ou seja, após a grande influência da força gravitacional de Newton nos trabalhos de Coulomb e Ampère, agora era a vez da gravitação ser influenciada pelo eletromagnetismo.

A ideia é que a força entre duas massas gravitacionais deve ter o mesmo formato que a força de Weber entre duas partículas eletrizadas. O primeiro a propor que a força gravitacional poderia depender da velocidade e aceleração entre as massas que estavam interagindo foi o próprio Weber em seu trabalho de 1846 no qual propôs sua lei de força para o eletromagnetismo.⁸⁹⁰

Assumindo a correção dos resultados que alcançamos, surgiria aqui um caso no qual a força com que duas massas atuam uma na outra dependeria não apenas *do valor das massas e da distância entre elas*, mas também de sua *velocidade relativa e aceleração relativa*. [...]

Ele mencionou essa sugestão em vários outros trabalhos.⁸⁹¹

Além de Weber, os primeiros cientistas a propor sua lei para a gravitação parecem ter sido Carl Wilhelm Seegers em 1864 e Gustav Holzmüller (1844-1914) em 1870.⁸⁹² Félix Tisserand estudou em 1872 a força de Weber aplicada à gravitação. Ele analisou, em particular, o avanço do periélio dos planetas.⁸⁹³ O problema de dois corpos na eletrodinâmica de Weber havia sido resolvido por Seegers em 1864 em termos de funções elípticas, mas Tisserand resolveu o problema iterativamente. Hans Reissner (1874-1967) também trabalhou com uma energia potencial Weberiana para a gravitação, embora não tenha mencionado a lei de Weber.⁸⁹⁴ Listei anteriormente diversos autores que resolveram o problema de dois corpos utilizando a lei de Weber aplicada ao eletromagnetismo e gravitação.⁸⁹⁵

Outras pessoas também trabalharam com a lei de Weber para a gravitação aplicando-a ao problema da precessão do periélio dos planetas: o físico alemão Paul Gerber (1854-1909) em 1898 e 1917, Erwin Schrödinger (1887-1961) em 1925, P. B. Eby em 1977 e eu mesmo em 1989.⁸⁹⁶ Curiosamente, nenhum desses autores estava ciente da eletrodinâmica de Weber, com exceção do nosso trabalho. Gerber estava trabalhando com ideias de tempo retardado e trabalhou na formulação Lagrangeana. Schrödinger estava tentando implementar o princípio

⁸⁹⁰[Web46, pág. 149 das *Obras* de Weber] com traduções completas para o inglês em [Web07, pág. 92] e [Web21d, pág. 142].

⁸⁹¹[Web55, pág. 595 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21i]; [KW57, pág. 652 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [KW21]; [Web82]; e [Web94d, págs. 481-488 das *Obras* de Weber] com traduções para o inglês em [Web08, págs. 4-15] e [Web21b, págs. 176-183], ver as Seções 18.2 e 18.3 com a tradução em português desse trabalho. Ver também [Woo81] e [Wis81].

⁸⁹²[See64] com tradução para o alemão em [See24]; [Hol70] com tradução para o inglês em [Hol17]; [Nor65, pág. 46] e [Jam00, pág. 153].

⁸⁹³[Tis72] com traduções para o inglês em [Tis17a], [Tis21] e [Tis24a], e tradução para o português no Capítulo 11. Ver também [Tis90] com traduções para o inglês em [Tis17b] e [Tis24b]; [Tis96, Volume 4, Cap. 28 (Vitesse de propagation de l'attraction), págs. 499-503] e [Poi53, págs. 201-203].

⁸⁹⁴[Rei14] com tradução para o inglês em [Rei95b]; [Rei15] com tradução parcial para o inglês em [Rei95a]. Ver também [XA97].

⁸⁹⁵Ver o Capítulo 10 e em especial a Nota de rodapé 223 na página 127.

⁸⁹⁶[Ger98] com tradução para o inglês em [Ger]; [Ger17]; [Sch25] com tradução para o português em [XA94], e traduções para o inglês em [Sch95] e [Sch21]; [Eby77] e [Ass89]. Ver também [Meh87, pág. 1157], [MR87, págs. 372-373 e 459] e [BP95, pág. 51], [XA97], [AP01] e [Bun01].

de Mach com uma teoria relacional. Eby estava seguindo os trabalhos de Barbour e Bertotti sobre o princípio de Mach e também trabalhou com uma formulação Lagrangeana.

O físico e matemático francês Henri Poincaré (1854-1912) discutiu o trabalho de Tisserand sobre a lei de Weber aplicada à gravitação em 1906-1907.⁸⁹⁷ Os trabalhos de Gerber foram criticados por Hugo von Seeliger (1849-1924), que estava ciente da eletrodinâmica de Weber.⁸⁹⁸ Outros cientistas aplicaram a lei de Weber para a gravitação na segunda metade do século XX.⁸⁹⁹

A eletrodinâmica de Weber era a principal teoria eletromagnética durante a segunda metade do século XIX. Contudo, a lei de Weber foi essencialmente esquecida durante todo o século XX com o advento da teoria eletromagnética da luz devida a Maxwell, com as experiências sobre ondas elétricas devidas a Heinrich Hertz (1857-1894) em 1887, com a expressão de força sobre uma partícula eletrizada na presença de campos elétricos e magnéticos devida a Lorentz em 1895, e com as teorias da relatividade devidas a Albert Einstein (1879-1955) em 1905 e 1916. É relevante mencionar aqui alguns aspectos do artigo de 1925 de Schrödinger para mostrar quão rapidamente a lei de Weber desapareceu do ensino de física, sendo completamente esquecida já no início do século XX.

Em seu trabalho de 1925 Schrödinger utilizou uma energia potencial para a gravitação que é essencialmente a energia potencial que Weber havia introduzido na física em 1848. Contudo, Schrödinger não estava ciente da força e energia potencial de Weber. Ele mencionou que havia obtido sua energia potencial “heurísticamente”. A palavra “heurístico” refere-se a técnicas baseadas na experiência para resolver problemas, tipicamente por tentativa e erro. Ele não citou os trabalhos de Weber, Seegers, Holzmüller, Tisserand, Reissner, nem qualquer outro autor. Contudo, se de fato ele tivesse obtido sua equação heurísticamente, então ele teria chegado a essa expressão por si próprio. Cito aqui a passagem relevante, minha ênfase:⁹⁰⁰

Pode-se perguntar se talvez não fosse possível que a energia cinética, assim como a potencial, dependesse não apenas de uma partícula, mas da energia de interação das duas massas, e, assim sendo, da distância e velocidade relativa das duas partículas. De todas as expressões para essa energia, escolhemos **heurísticamente** a que satisfaz às seguintes exigências:

1. A energia cinética como energia de interação deve depender das massas e distâncias das partículas da mesma maneira que o potencial de Newton;
2. Deve ser proporcional ao quadrado da velocidade de variação da distância.

Para a energia de interação total de duas massas pontuais, μ e μ' , à distância r , isso resulta na expressão

$$W = \gamma \frac{\mu\mu'\dot{r}^2}{r} - \frac{\mu\mu'}{r} .$$

As massas são aqui, dadas de tal forma que a constante gravitacional seja igual a 1. A constante indeterminada γ tem dimensão de recíproco de uma velocidade quadrática.

⁸⁹⁷[Poi53, págs. 125 e 201-203].

⁸⁹⁸[See17a] e [See17b].

⁸⁹⁹Referências em [Ass94, Seção 7.5], [Ass13, Seções 24.3 e 24.4], [Ass14b, Seções 25.3 e 25.4] e [Ass15a, Seções 5.2 e 5.3].

⁹⁰⁰[Sch25] com tradução para o português em [XA94], e traduções para o inglês em [Sch95, págs. 148-149] e [Sch21]. Ver ainda [Ass13, Seção 24.4].

Como ela deve ser universal, esperamos que se trate, a menos de um fator numérico, da velocidade da luz e veremos que ela pode ser reduzida a um fator numérico quando escolhermos o segundo-luz como unidade de tempo. Posteriormente, mostraremos que esse fator é igual a 3.

Contudo, essa não é toda a história de como Schrödinger chegou a essa energia potencial. Recentemente foram publicadas suas obras completas. No final da reimpressão desse artigo há uma nota datilografada, assinada por Schrödinger, na qual ele pediu profundas desculpas por ter plagiado inconscientemente a ideia de Hans Reissner.⁹⁰¹ Schrödinger disse nessa nota que definitivamente conhecia o primeiro artigo de Reissner de 1914, mas não tinha certeza em relação ao segundo artigo de 1915. Ele considerou os artigos de Reissner “muito interessantes” e esperava que seu próprio artigo iria ser de algum interesse por apresentar um tratamento do assunto um pouco diferente. Pode ser que o fato de ele ter utilizado as ideias de Reissner sem citá-lo e o constrangimento de ter de se corrigir mais tarde (outros podem ter percebido a similaridade entre os trabalhos de Reissner e Schrödinger) tenham influído para que ele não mais tratasse desse assunto.

De qualquer forma, é uma grande ironia que a força e a energia potencial de Weber para o eletromagnetismo tenham sido publicadas em 1846 e 1848, respectivamente, uns 70 anos antes de Reissner (80 anos antes de Schrödinger). Aplicações detalhadas da lei de Weber para a gravitação datam de pelo menos a década de 1860, uns 50 anos antes de Reissner. Weber publicou em alemão, assim como Reissner e Schrödinger. Muitos dos trabalhos de Weber foram publicados no periódico *Annalen der Physik*, assim como os artigos de Reissner de 1915 e Schrödinger de 1925 que estão sendo discutidos aqui.⁹⁰² O trabalho de Weber foi discutido no último Capítulo da principal obra de Maxwell publicada em 1873, *Tratado sobre Eletricidade e Magnetismo*, que foi traduzida para o alemão em 1883.⁹⁰³ Os trabalhos de Weber também foram discutidos por muitos outros cientistas importantes. É incrível que Reissner e Schrödinger não tivessem conhecimento dos artigos pioneiros de Weber e que até mesmo após a publicação de seus trabalhos de 1915 e 1925 ninguém tivesse chamado a atenção deles para esses trabalhos anteriores de Weber.

Esse simples fato ilustra muito bem como o ensino de ciências apresenta apenas o paradigma dominante, relegando outras visões de mundo ao esquecimento total, como apontado por Thomas Kuhn (1922-1996).⁹⁰⁴ A substituição de paradigmas ocorre algumas vezes em um intervalo de tempo muito curto. Quando isso ocorre, infelizmente os estudantes deixam de aprender linhas de raciocínio extremamente importantes.

29.8 Unificação da Gravitação com a Eletrodinâmica Através da Força de Weber

A força de Weber entre partículas eletrizadas é proporcional ao produto de suas cargas, dependendo também da distância entre elas, de sua velocidade relativa e de sua aceleração relativa. Na força de Weber gravitacional, por outro lado, simplesmente substituímos na

⁹⁰¹[Sch84, pág. 192] com tradução para o português em [XA97].

⁹⁰²[Rei16] e [Sch25]. Ver também a Nota de rodapé 234 na página 135.

⁹⁰³[Max73b] e [Max73a] com traduções para o alemão em [Max83b] e [Max83a]. Uma tradução para o português do último Capítulo do *Tratado* de Maxwell encontra-se em [Ass92c].

⁹⁰⁴[Kuh62] com tradução para o português em [Kuh82].

força eletrodinâmica original de Weber de 1846 o produto das cargas com o produto das massas gravitacionais das partículas que estão interagindo. Aplicações da força de Weber para a gravitação foram discutidas na Seção 29.7.

Contudo, é possível deduzir a lei de Newton da gravitação a partir da força de Weber para a eletrodinâmica? Indo um passo além, será possível deduzir a força de Weber gravitacional (que depende também da velocidade e da aceleração relativas entre as partículas interagentes) a partir da eletrodinâmica de Weber, ou então a partir de uma generalização da lei eletrodinâmica de Weber? A resposta a essas questões parece ser positiva. Discuto nessa Seção dois enfoques diferentes que podem levar à unificação da gravitação com a eletrodinâmica.

O primeiro enfoque é devido ao próprio Weber e foi apresentado em seu trabalho póstumo publicado em 1894.⁹⁰⁵

Mossotti assumiu em 1836 que a força atrativa entre partículas eletrizadas com cargas e e $-e$ era ligeiramente maior do que a força repulsiva entre e e e , e também ligeiramente maior do que a força repulsiva entre $-e$ e $-e$.⁹⁰⁶ Considere agora uma molécula M_1 composta de n_1 cargas positivas e n_1 cargas negativas, e uma outra molécula M_2 composta de n_2 cargas positivas e n_2 cargas negativas. Ao considerar a força elétrica resultante entre as moléculas M_1 e M_2 com essa suposição, teremos então uma força resultante atrativa, apesar da neutralidade elétrica das duas moléculas. Dessa maneira podemos derivar ou deduzir uma força atrativa análoga à lei de Newton para a gravitação ao começar apenas com forças eletrostáticas.

Weber considerou uma ideia similar. Contudo, aplicou-a para a sua força fundamental de 1846 que depende não apenas da distância, mas também da velocidade relativa e da aceleração relativa entre as partículas eletrizadas que estão interagindo. Ele então assumiu que todas as moléculas ponderáveis são conexões de quantidades iguais de partículas eletrizadas positivamente e negativamente. Assim como Mossotti, ele supôs que a força atrativa entre quantidades iguais de tipos diferentes de eletricidade era ligeiramente maior do que a força repulsiva entre quantidades iguais de partículas eletrizadas com cargas de mesmo tipo. Dessa maneira ele derivou ou deduziu uma força análoga à lei de Newton para a gravitação, porém apresentando agora uma componente dependendo da velocidade relativa entre as moléculas ponderáveis e uma outra componente dependendo da aceleração relativa entre as moléculas ponderáveis.

Essencialmente Weber obteve a unificação da gravitação com a eletrodinâmica utilizando a hipótese de Mossotti em conjunto com sua força fundamental de 1846.

Há um segundo enfoque, totalmente independente do primeiro, de deduzir uma força Weberiana para a gravitação a partir da eletrodinâmica.⁹⁰⁷ As Equações (29.6) e (29.7) sugerem que a lei de Weber pode ser uma expansão até segunda ordem em $1/c$ de uma função mais complexa. Um modelo mais completo poderia incluir derivadas temporais de todas as ordens da distância r entre as partículas que estão interagindo. Isto é, a força entre as partículas poderia incluir não apenas r , $dr/dt = \dot{r}$ e $d^2r/dt^2 = \ddot{r}$, mas também todas as outras derivadas temporais tais como d^3r/dt^3 , d^4r/dt^4 , etc. Além disso, a expressão geral

⁹⁰⁵[Web94d] com traduções para o inglês em [Web08] e [Web21b], e tradução para o português no Capítulo 18. Ver também [Whi73a, págs. 51-52]; [Whi73b, pág. 150]; [Woo81]; [Wis81, págs. 282-283]; [Aep79, págs. 119-120 e 223-224]; Seção 7.5 (Weber's law applied to gravitation) de [Ass94]; Seção 10.1 (Deduzindo uma Lei de Força Gravitacional a partir da Força Elétrica de Weber) de [AWW11] com tradução para o português em [AWW14] e para o alemão em [AWW18].

⁹⁰⁶[Mos36] com tradução para o inglês em [Mos66].

⁹⁰⁷[Ass92b]; [Ass94, Seção 8.5]; [Ass95a] e [BT18].

dessa lei de força completa poderia incluir também potências diferentes dessas derivadas, tais como $(dr/dt)^m$, $(d^2r/dt^2)^n$, $(d^3r/dt^3)^o$, $(d^4r/dt^4)^p$, ... Aqui as potências m , n , o , p , ..., devem ser consideradas como números inteiros ainda a serem determinados no futuro.

Propus em 1992 uma possível maneira de deduzir a lei de Weber para a gravitação a partir de uma força de Weber generalizada para a eletrodinâmica incluindo termos de quarta ordem em $\dot{r}/c$, juntamente com ordens superiores dessa grandeza. Estudei a interação entre dois dipolos neutros nos quais as partículas negativas oscilam ao redor de partículas positivas em torno de configurações de equilíbrio. Foi mostrado que esses termos adicionais fornecem uma força atrativa entre dois dipolos neutros. Essa força atrativa pode ser interpretada como sendo a interação gravitacional Newtoniana usual. Só que nesse caso além da força entre corpos parados que varia com o inverso do quadrado da distância entre eles, aparece também uma componente que depende da velocidade relativa entre os dipolos que estão interagindo e uma outra componente que depende da aceleração relativa entre esses dipolos. A justificativa para essa interpretação é que essa força atrativa resultante aponta ao longo da linha reta que conecta os dipolos, seguindo a lei de ação e reação de Newton. Além disso, a componente dessa força que não depende da velocidade relativa entre os dipolos, nem da aceleração relativa entre eles, varia com o inverso do quadrado da distância entre os dipolos, assim como ocorre com a lei da gravitação universal de Newton.

29.9 Unificação da Inércia com a Gravitação e Implementação do Princípio de Mach: Dedução da Segunda Lei do Movimento de Newton a partir da Força de Weber

Corpos interagem entre si através de forças elétricas, magnéticas ou gravitacionais. Os corpos também possuem propriedades inerciais (suas massas inerciais, energias cinéticas, momentos lineares, momentos angulares, forças inerciais atuando sobre eles em referenciais não inerciais, etc.). Ernst Mach (1838-1916) propôs a ideia de que as propriedades inerciais de um corpo poderiam ser devidas à sua interação com a matéria distante que está espalhada pelo cosmos.⁹⁰⁸

Mach sugeriu que a inércia de um corpo deve estar ligada com a matéria distante, especialmente com o conjunto de estrelas fixas (na sua época as galáxias ainda não eram conhecidas). Ele não discutiu nem enfatizou a proporcionalidade da massa inercial de qualquer corpo com a massa gravitacional desse corpo. Ele também não disse que a inércia deve ser devida a uma interação *gravitacional* com as massas distantes. Ele não propôs qualquer lei de força específica para implementar quantitativamente suas ideias. Newton, por exemplo, com sua famosa experiência do balde girante mostrou que as forças centrífugas são produzidas pela rotação de um corpo ao redor de seu eixo, como mostrado pelo formato parabólico da superfície da água nesse experimento. Para Newton essa experiência provou a existência de um espaço absoluto que não estava relacionado com nada material. Ou seja, a curvatura da água não seria devida à sua rotação em relação ao balde, nem em relação à Terra, nem em relação aos outros corpos materiais do universo, mas sim devido à sua rotação em relação ao vácuo ou espaço vazio. Mach, por outro lado, sugeriu que esse efeito era devido à rotação relativa

⁹⁰⁸[Mac83] com tradução para o inglês em [Mac60] e tradução para o espanhol em [Mac49].

entre a água e a matéria distante do universo (no caso específico de Mach ele mencionou a rotação relativa entre a água e o conjunto de estrelas fixas). Se fosse possível, por exemplo, manter o balde e a água em repouso em relação ao solo, enquanto que o conjunto de estrelas e galáxias fosse girado em conjunto uma vez por segundo ao redor do eixo do balde, seria possível saber quem estava certo. Se Newton estivesse certo, então a superfície da água deveria permanecer horizontalmente plana. Por outro lado, se Mach estivesse certo, então a superfície da água deveria adquirir um formato parabólico. Suas ideias ficaram conhecidas como o princípio de Mach. Contudo, ele não foi capaz de mostrar matematicamente que o conjunto de estrelas girando juntos ao redor do eixo do balde uma vez por segundo deveriam produzir forças centrífugas sobre a água que deformariam o formato da água deixando-a com o perfil parabólico. De qualquer forma, seu livro *A Ciência da Mecânica* foi extremamente influente na física. Ele foi publicado em 1883 e desse momento em diante algumas pessoas começaram a tentar implementar suas ideias intuitivas que tinham um apelo muito grande. Essas tentativas foram tanto experimentais quanto matemáticas.

No meu livro *Mecânica Relacional e Implementação do Princípio de Mach com a Força de Weber Gravitacional* citei diversos cientistas que sugeriram a lei de Weber para a gravitação com o objetivo de implementar teoricamente o princípio de Mach.⁹⁰⁹ Entre essas pessoas estavam os irmãos Gottfried Immanuel Friedlaender (1871-1948) e Benedict Friedlaender (1866-1908), Alois Höfler (1853-1922), Wenzel Hofmann, Hans Reissner, Erwin Schrödinger, P. B. Eby etc.⁹¹⁰

Mostrei nesse livro sobre a Mecânica Relacional como implementar matematicamente o princípio de Mach utilizando a lei de Weber para a gravitação juntamente com o princípio do equilíbrio dinâmico. De acordo com esse princípio, a soma de todas as forças atuando sobre qualquer corpo é sempre nula em todos os sistemas de referência e para todos os observadores. Mostrei como deduzir muitas coisas:

1. Uma lei análoga à segunda lei do movimento de Newton.
2. A energia cinética como sendo uma energia gravitacional surgindo da interação entre o corpo de teste e os corpos distantes no cosmos.
3. A explicação quantitativa da proporcionalidade entre a massa inercial de qualquer corpo e sua massa gravitacional.
4. O fato de que o sistema de referência universal definido pelo conjunto de galáxias distantes é um sistema inercial (na mecânica Newtoniana não há explicação para esse fato, sendo isso uma coincidência).
5. Uma dedução das forças inerciais (como a força centrífuga e a força de Coriolis) em todo referencial no qual o conjunto de galáxias distantes está girando como um todo. Essas forças inerciais aparecem sempre que há uma rotação relativa entre o corpo de teste que está sofrendo essas forças e o conjunto de galáxias distantes.

⁹⁰⁹[Ass13, Seção 24.4] e [Ass14b, Seção 25.4].

⁹¹⁰[FF96] com tradução parcial para o inglês em [FF95] e com tradução completa para o inglês em [FF07]; [Hof00, Nota na pág. 126], [Nor95, págs. 21 e 41] e [BP95, págs. 21, 24, 34-35, 40-41, 46, 53 e 164]; [Hof95]; [Rei14] com tradução para o inglês em [Rei95b]; [Rei15] com tradução parcial para o inglês em [Rei95a]; [Sch25] com tradução para o português em [XA94] e traduções para o inglês em [Sch95] e [Sch21]; [Eby77], [Eby79] e [Eby97].

6. Uma explicação do achatamento da Terra como vindo de sua rotação diária em relação ao conjunto de galáxias distantes.
7. Uma explicação da experiência de 1851 do pêndulo de Jean Bernard Léon Foucault (1819-1868) com a mecânica relacional.⁹¹¹
8. Uma explicação da experiência do balde de Newton utilizando a lei de Weber para a gravitação.
9. Etc.

Detalhes de todos esses fatos encontram-se no livro *Mecânica Relacional e Implementação do Princípio de Mach com a Força de Weber Gravitacional*.⁹¹²

29.10 Conclusão

A força e a energia potencial de Weber dadas pelas Equações (29.6) e (29.7) são relativamente simples. É impressionante que a partir de origens tão humildes possamos deduzir uma quantidade tão surpreendente de fatos extremamente importantes tais como:

- Toda a eletrostática (incluindo a força de Coulomb e a lei de Gauss relacionando o fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada com a carga elétrica que existe dentro do volume limitado por essa superfície).
- Toda a magnetostática (a interação entre dois ímãs, juntamente com a interação entre um ímã e a Terra).
- A interação entre condutores conduzindo correntes constantes (incluindo a força de Ampère entre elementos de corrente e a assim chamada lei circuital magnética).
- O eletromagnetismo (a interação entre um condutor com corrente e um ímã, ou a interação entre um condutor com corrente e a Terra).
- A lei da indução de Faraday.
- A conexão quantitativa entre a eletrodinâmica e a óptica pela introdução por Weber da grandeza $c/\sqrt{2} = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, juntamente com a primeira medição dessa grandeza realizada por Weber e Kohlrausch encontrando $c/\sqrt{2} = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = v_L = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, onde v_L é a velocidade da luz no vácuo.
- A dedução da completa equação do telégrafo ao levar em consideração a auto-indutância do fio.
- A primeira dedução teórica de uma equação de onda descrevendo a propagação de um sinal eletromagnético deslocando-se com a velocidade da luz. Isso foi feito por Weber e Kirchhoff em 1857, antes do desenvolvimento por Maxwell de sua teoria eletromagnética da luz.

⁹¹¹[Fou51a] com tradução para o inglês em [Fou51b].

⁹¹²[Ass13] e [Ass14b].

- Weber concluiu baseado em sua lei que partículas eletrizadas com cargas de mesmo sinal devem se atrair quando se deslocam entre si separadas por uma distância menor do que uma certa distância crítica.
- Isso levou à previsão de seu modelo planetário para o átomo com núcleos estáveis. Esse modelo é uma unificação da física nuclear com a eletrodinâmica.
- Quando aplicada à supercondutividade a lei de Weber explica o efeito Meissner, o momento de London, e a profundidade de penetração de London (que caracteriza a distância que um campo magnético penetra na superfície de um supercondutor, com uma queda de intensidade exponencial).
- Etc.

Quando aplicada à gravitação, a lei de Weber também leva a inúmeros resultados notáveis:

- A precessão do periélio dos planetas.
- É possível deduzir uma lei gravitacional análoga à lei de Newton começando com o enfoque de Mossotti e Weber, ou então começando com uma generalização de ordem superior em $1/c$ da lei eletrodinâmica de Weber.
- Além disso, a lei de Weber aplicada à gravitação leva a uma implementação matemática do princípio de Mach, mostrando a unificação da inércia com a gravitação!
- Deduzimos a segunda lei do movimento de Newton.
- Deduzimos a proporcionalidade entre a massa inercial de qualquer corpo e sua massa gravitacional.
- Deduzimos as forças fictícias da mecânica clássica (força centrífuga e força de Coriolis) mostrando que elas surgem da interação gravitacional entre o corpo de prova e as galáxias distantes em todo referencial no qual o conjunto das galáxias distantes está girando como um todo.
- Deduzimos uma explicação relacional do achatamento da Terra, da precessão do pêndulo de Foucault e da experiência do balde de Newton.
- Etc.

Essencialmente todos os aspectos importantes da física parecem estar contidos na lei de Weber. Só precisamos abrir nossos olhos para esse paradigma, ser inspirados por ele e deixar a nossa imaginação voar. A força de Weber contém apenas derivadas ordinárias ou comuns, não aparecendo nem mesmo as derivadas parciais. Ela não é apenas extremamente simples, mas tem também um forte apelo filosófico e intuitivo. Ela contém apenas grandezas relacionais tais como a distância r entre as partículas que estão interagindo, a velocidade radial *relativa* entre elas, dr/dt , assim como a aceleração radial *relativa* entre elas, d^2r/dt^2 . Essa força atua ao longo da linha reta que conecta as partículas que estão interagindo e satisfaz à lei de ação e reação de Newton. Além disso, ela segue as leis de conservação do momento linear, momento angular e energia.

Se você quer fazer uma diferença real na vida de seus estudantes, espero que comece a ensinar a eles a força de Ampère entre elementos de corrente e a eletrodinâmica de Weber, juntamente com as intuições brilhantes e ideias revolucionárias desses dois grandes cientistas. Dessa maneira seus alunos vão começar a apreciar a história da ciência, vão aprender sobre os conflitos entre paradigmas, vão desenvolver um raciocínio crítico na física e vão desenvolver o pensamento independente. Além disso, ao transmitir a eletrodinâmica de Weber aos seus estudantes, eles terão a oportunidade de participar efetivamente nos desenvolvimentos experimentais e teóricos dessa teoria fascinante e notável.

Newton, Coulomb, Ampère e Weber abriram caminho para as gerações passadas e presentes. Não tenho dúvidas de que o futuro da física pertencerá aos estudantes e cientistas que seguirão seus passos. Ao ficarem sobre os ombros desses gigantes, eles verão mais longe e nos levarão a um futuro melhor e mais brilhante!

Referências Bibliográficas

- [AB23] A. K. T. Assis and L. L. Bucciarelli. *Coulomb's Memoirs on Torsion, Electricity, and Magnetism Translated into English*. Apeiron, Montreal, 2023. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [AC92] A. K. T. Assis and R. A. Clemente. The ultimate speed implied by theories of Weber's type. *International Journal of Theoretical Physics*, 31:1063–1073, 1992.
- [AC11] A. K. T. Assis and J. P. M. d. C. Chaib. *Eletrodinâmica de Ampère: Análise do Significado e da Evolução da Força de Ampère, Juntamente com a Tradução Comentada de Sua Principal Obra sobre Eletrodinâmica*. Editora da Unicamp, Campinas, 2011.
- [AC15] A. K. T. Assis and J. P. M. C. Chaib. *Ampère's Electrodynamics — Analysis of the Meaning and Evolution of Ampère's Force between Current Elements, together with a Complete Translation of His Masterpiece: Theory of Electrodynamic Phenomena, Uniquely Deduced from Experience*. Apeiron, Montreal, 2015. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Aep79] F. U. T. Aepinus. *Aepinus's Essay on the Theory of Electricity and Magnetism*. Princeton University Press, Princeton, 1979. Translation by P. J. Connor. Introductory monograph and notes by R. W. Home.
- [AGV07] R. Achilles and J. Guala-Valverde. Action at a distance: a key to homopolar induction. *Apeiron*, 14:169–183, 2007.
- [AH06] A. K. T. Assis and J. A. Hernandes. Magnetic energy and effective inertial mass of the conduction electrons in circuit theory. *Electromagnetic Phenomena*, 6:31–35, 2006.
- [AH07] A. K. T. Assis and J. A. Hernandes. *The Electric Force of a Current: Weber and the Surface Charges of Resistive Conductors Carrying Steady Currents*. Apeiron, Montreal, 2007. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [AH09] A. K. T. Assis and J. A. Hernandes. *A Força Elétrica de uma Corrente: Weber e as Cargas Superficiais de Condutores Resistivos com Correntes Constantes*. Edusp e Edufal, São Paulo e Maceió, 2009. Volume 73 da Coleção Acadêmica.
- [AH13] A. K. T. Assis and J. A. Hernandes. *Elektrischer Strom und Oberflächenladungen: was Wilhelm Weber schon vor mehr als 150 Jahre wußte*. Apeiron,

Montreal, 2013. Tradução de H. Härtel. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

- [Amp20a] A.-M. Ampère. Analyse des mémoires lus par M. Ampère a l'Académie des Sciences, dans les séances des 18 et 25 septembre, des 9 et 30 octobre 1820. *Annales Générales des Sciences Physiques*, 6:238–257, 1820.
- [Amp20b] A.-M. Ampère. Analyse des mémoires lus par M. Ampère a l'Académie des Sciences, dans les séances des 18 et 25 septembre, des 9 et 30 octobre 1820. 20 páginas. Reimpressão de *Annales Générales des Sciences Physiques*, Vol. 6, págs. 238-257 (1820), 1820.
- [Amp20c] A.-M. Ampère. Suite du mémoire sur l'action mutuelle entre deux courans électriques, entre un courant électrique et un aimant ou le globe terrestre, et entre deux aimans. *Annales de Chimie et de Physique*, 15:170–218, 1820.
- [Amp21] A.-M. Ampère. Suite de la note sur un appareil à l'aide duquel on peut vérifier toutes les propriétés des conducteurs de l'électricité voltaïque, découvertes par M. Ampère. *Annales de Chimie et de Physique*, 18:313–333, 1821.
- [Amp23] A.-M. Ampère. Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques uniquement déduite de l'expérience, dans lequel se trouvent réunis les Mémoires que M. Ampère a communiqués à l'Académie royale des Sciences, dans les séances des 4 et 26 décembre 1820, 10 juin 1822, 22 décembre 1823, 12 septembre et 21 novembre 1825. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, 6:175–387, 1823. Apesar da data, este volume foi publicado apenas em 1827.
- [Amp26] A.-M. Ampère. *Théorie des Phénomènes Électro-dynamiques, Uniquement Déduite de l'Expérience*. Méquignon-Marvis, Paris, 1826.
- [Amp65] A.-M. Ampère. On the Mathematical Theory of Electrodynamic Phenomena, Experimentally Deduced. In R. A. R. Tricker, *Early Electrodynamics — The First Law of Circulation*, pages 155–200, New York, 1965. Pergamon. Partial English translation by O. M. Blunn of Ampère's work “Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques uniquement déduite de l'expérience”, *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, Vol. 6, pp. 175-387 (1823), issued 1827.
- [Amp69] A. M. Ampère. The solenoid. Circuits and magnetic shells. In W. F. Magie, editor, *A Source Book in Physics*, pages 456–460, New York, 1969. McGraw-Hill. Extracts from “Théorie des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience,” Paris, 1826.
- [Amp12] A.-M. Ampère. Mathematical Theory of Electrodynamic Phenomena, Uniquely Derived from Experiments. Traduzido por M. D. Godfrey. Disponível em <https://archive.org/details/AmpereTheorieEn> e <https://sites.google.com/site/michaeldgodfrey/physics-information-and-communication>, 2012.

- [And07] R. J. Anderton. Einstein, ether and unified field. *The General Science Journal*, 2007. Disponível em www.gsjournal.net/Science-Journals/Essays/View/408.
- [And13] É. Andrade. O mecanicismo em questão: o magnetismo na filosofia natural cartesiana. *Scientiae Studia*, 11:785–810, 2013.
- [Ano18] Anonymous. *Advances in Weber and Maxwell Electrodynamics*. CreateSpace, USA, 2018.
- [Ano19] Anonymous. *A Field Approach to Weber Electrodynamics: A Short Introduction*. Independently published, USA, 2019.
- [AP92] A. K. T. Assis and F. M. Peixoto. On the velocity in the Lorentz force law. *The Physics Teacher*, 30:480–483, 1992.
- [AP01] A. K. T. Assis and O. Pessoa Jr. Erwin Schrödinger e o princípio de Mach. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 11, n. 2:131–152, 2001.
- [Arc86] T. Archibald. Carl Neumann versus Rudolf Clausius on the propagation of electrodynamic potentials. *American Journal of physics*, 54:786–790, 1986.
- [ARV09] A. K. T. Assis, J. E. A. Ribeiro, and A. Vannucci. The field concepts of Faraday and Maxwell. In M. S. D. Cattani, L. C. B. Crispino, M. O. C. Gomes, and A. F. S. Santoro, editors, *Trends in Physics: Festschrift in Homage to Prof. José Maria Filardo Bassalo*, pages 31–38. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2009.
- [ARW02] A. K. T. Assis, K. Reich, and K. H. Wiederkehr. Gauss and Weber’s creation of the absolute system of units in physics. *21st Century Science & Technology*, Vol. 15, No. 3:40–48, 2002.
- [ARW04] A. K. T. Assis, K. Reich, and K. H. Wiederkehr. On the electromagnetic and electrostatic units of current and the meaning of the absolute system of units — For the 200th anniversary of Wilhelm Weber’s birth. *Sudhoffs Archiv*, 88:10–31, 2004.
- [Ass89] A. K. T. Assis. On Mach’s principle. *Foundations of Physics Letters*, 2:301–318, 1989.
- [Ass90] A. K. T. Assis. Deriving Ampère’s law from Weber’s law. *Hadronic Journal*, 13:441–451, 1990.
- [Ass92a] A. K. T. Assis. *Curso de Eletrodinâmica de Weber*. Setor de Publicações do Instituto de Física da Universidade Estadual de Campinas — UNICAMP, Campinas, 1992. Notas de Física IFGW Número 5. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis e www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?down=60362.
- [Ass92b] A. K. T. Assis. Deriving gravitation from electromagnetism. *Canadian Journal of Physics*, 70:330–340, 1992.

- [Ass92c] A. K. T. Assis. Teorias de ação a distância — uma tradução comentada de um texto de James Clerk Maxwell. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 7:53–76, 1992.
- [Ass94] A. K. T. Assis. *Weber's Electrodynamics*. Kluwer, Dordrecht, 1994. Hoje em dia esse livro está disponível pela Springer. Doi: 10.1007/978-94-017-3670-1 e www.springer.com/gp/book/9780792331377.
- [Ass95a] A. K. T. Assis. Gravitation as a fourth order electromagnetic effect. In T. W. Barrett and D. M. Grimes, editors, *Advanced Electromagnetism: Foundations, Theory and Applications*, pages 314–331, Singapore, 1995. World Scientific.
- [Ass95b] A. K. T. Assis. Weber's force versus Lorentz's force. *Physics Essays*, 8:335–341, 1995.
- [Ass97] A. K. T. Assis. Circuit theory in Weber electrodynamics. *European Journal of Physics*, 18:241–246, 1997.
- [Ass98a] A. K. T. Assis. *Mecânica Relacional*. Editora do Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da UNICAMP/FAPESP, Campinas, 1998. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass98b] A. K. T. Assis. Newton e suas grandes obras: o Principia e o Óptica. In M. J. P. M. de Almeida and H. C. da Silva, editors, *Linguagens, Leituras e Ensino da Ciência*, pages 37–52. Mercado de Letras/Associação de Leitura do Brasil, Campinas, 1998.
- [Ass99a] A. K. T. Assis. Arguments in favour of action at a distance. In A. E. Chubykalo, V. Pope, and R. Smirnov-Rueda, editors, *Instantaneous Action at a Distance in Modern Physics — “Pro” and “Contra”*, pages 45–56, Commack, 1999. Nova Science Publishers.
- [Ass99b] A. K. T. Assis. *Relational Mechanics*. Apeiron, Montreal, 1999. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass99c] A. K. T. Assis. *Uma Nova Física*. Editora Perspectiva, São Paulo, 1999.
- [Ass03] A. K. T. Assis. Tradução de uma obra de Gauss. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 25:226–249, 2003.
- [Ass10a] A. K. T. Assis. *The Experimental and Historical Foundations of Electricity*. Apeiron, Montreal, 2010. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass10b] A. K. T. Assis. *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade*. Apeiron, Montreal, 2010. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass11] A. K. T. Assis. Newton and inverse problems. In D. Krause and A. Videira, editors, *Brazilian Studies in Philosophy and History of Science: An Account of Recent Works*, volume 290 of Boston Studies in the Philosophy of Science, chapter 3, pages 71–76. Springer, Dordrecht, 2011. Doi: 10.1007/978-90-481-9422-3_3.

- [Ass13] A. K. T. Assis. *Mecânica Relacional e Implementação do Princípio de Mach com a Força de Weber Gravitacional*. Apeiron, Montreal, 2013. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass14a] A. K. T. Assis. Argumente zugunsten der Fernwirkung. Traduzido em 2014 a partir do inglês por M. Pohl. Artigo original: A. K. T. Assis, “Arguments in favour of action at a distance,” in: *Instantaneous Action at a Distance in Modern Physics — “Pro” and “Contra”*, Editado por A. E. Chubykalo, V. Pope e R. Smirnov-Rueda (Nova Science Publishers, Commack, 1999), págs. 45-56. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis, 2014.
- [Ass14b] A. K. T. Assis. *Relational Mechanics and Implementation of Mach’s Principle with Weber’s Gravitational Force*. Apeiron, Montreal, 2014. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass15a] A. K. T. Assis. *Eletrodinâmica de Weber: Teoria, Aplicações e Exercícios*. Editora da Unicamp, Campinas, 2015. Segunda edição. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis e <https://editoraunicamp.com.br/catalogo/?id=1718>.
- [Ass15b] A. K. T. Assis. *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade*. Apeiron, Montreal, 2015. Livro em russo traduzido da versão em inglês por A. Baraov. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass17a] A. K. T. Assis. *I Fondamenti Sperimentali e Storici dell’Elettricità*. Associazione per l’Insegnamento della Fisica, Parma, 2017. La Fisica nella Scuola, Anno L, n. 2 Supplemento, Quaderno 26. Traduzido por P. Cerreta, A. Cerreta e R. Cerreta. Editado por P. Cerreta, R. Serafini e R. Urigu. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass17b] A. K. T. Assis. Newton e os problemas inversos. In E. T. César, T. C. Soares, and E. E. Reinehr, editors, *Ciência em Dia: Jornadas de Divulgação Científica — Ano Internacional da Luz*, pages 9–24. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2017.
- [Ass18a] A. K. T. Assis. *The Experimental and Historical Foundations of Electricity*, volume 2. Apeiron, Montreal, 2018. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass18b] A. K. T. Assis. *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade*, volume 2. Apeiron, Montreal, 2018. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass19a] A. K. T. Assis. Argumentos a favor da ação a distância. *Revista Educar Mais*, 3:202–218, 2019. Doi: 10.15536/reducarmais.3.2019.202-218.1505.
- [Ass19b] A. K. T. Assis. *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade*, volume 2. Apeiron, Montreal, 2019. Livro em russo traduzido do volume 2 da versão em inglês por A. Baraov. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

- [Ass21a] A. K. T. Assis. Editor’s comments on Poggendorff’s 1857 paper. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume III: Measurement of Weber’s Constant c , Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, pages 227–228, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass21b] A. K. T. Assis. Editor’s introduction to Weber’s first memoir on electrodynamic measurements. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume II: Weber’s Fundamental Force and the Unification of the Laws of Coulomb, Ampère and Faraday, pages 27–31, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass21c] A. K. T. Assis. Editor’s introduction to Weber’s second memoir on electrodynamic measurements. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume II: Weber’s Fundamental Force and the Unification of the Laws of Coulomb, Ampère and Faraday, pages 287–290, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass21d] A. K. T. Assis. Gauss and Weber’s absolute system of units and its difference to the modern “Gaussian” system of units. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume I: Gauss and Weber’s Absolute System of Units, pages 207–212, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass21e] A. K. T. Assis. The origins and meanings of Weber’s constant c , of Maxwell’s constant c and the relation of these two different constants with light velocity in vacuum. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume III: Measurement of Weber’s Constant c , Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, pages 385–396, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass21f] A. K. T. Assis. Overview and future developments of Weber’s law applied to electromagnetism and gravitation. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume IV: Conservation of Energy, Weber’s Planetary Model of the Atom and the Unification of Electromagnetism and Gravitation, pages 215–238, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass21g] A. K. T. Assis. Why did I decide to work in this project of the English translation of Weber’s main works on electrodynamics. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume I: Gauss and Weber’s Absolute System of Units, pages 15–19, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass21h] A. K. T. Assis (editor). *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume 1: Gauss and Weber’s Absolute System

- of Units. Apeiron, Montreal, 2021. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass21i] A. K. T. Assis (editor). *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume 2: Weber's Fundamental Force and the Unification of the Laws of Coulomb, Ampère and Faraday. Apeiron, Montreal, 2021. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass21j] A. K. T. Assis (editor). *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume 3: Measurement of Weber's Constant c , Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity. Apeiron, Montreal, 2021. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass21k] A. K. T. Assis (editor). *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume 4: Conservation of Energy, Weber's Planetary Model of the Atom and the Unification of Electromagnetism and Gravitation. Apeiron, Montreal, 2021. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass22] A. K. T. Assis. *Tradução Comentada das Principais Obras de Coulomb sobre Eletricidade e Magnetismo*. Apeiron, Montreal, 2022. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass24] A. K. T. Assis (editor). *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume 5: Unipolar Induction, Galvanometry, Biographical Studies, and Weber's Electrodynamics Versus Different Field Theories. Apeiron, Montreal, 2024. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [AT17] A. K. T. Assis and M. Tajmar. Superconductivity with Weber's electrodynamics: the London moment and the Meissner effect. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 42:307–350, 2017.
- [AW03] A. K. T. Assis and K. H. Wiederkehr. Weber quoting Maxwell. *Mitteilungen der Gauss-Gesellschaft*, 40:53–74, 2003.
- [AWW11] A. K. T. Assis, K. H. Wiederkehr, and G. Wolfschmidt. *Weber's Planetary Model of the Atom*, volume 19 of *Nuncius Hamburgensis — Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften*. Tredition Science, Hamburg, 2011. Edited by G. Wolfschmidt.
- [AWW14] A. K. T. Assis, K. H. Wiederkehr, and G. Wolfschmidt. *O Modelo Planetário de Weber para o Átomo*. Apeiron, Montreal, 2014. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [AWW18] A. K. T. Assis, K. H. Wiederkehr, and G. Wolfschmidt. *Webers Planeten-Modell des Atoms*. Apeiron, Montreal, 2018. Traduzido por H. Härtel. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

- [BA01] M. d. A. Bueno and A. K. T. Assis. *Inductance and Force Calculations in Electrical Circuits*. Nova Science Publishers, Huntington, New York, 2001.
- [BA15] M. Bueno and A. K. T. Assis. *Cálculo de Indutância e de Força em Circuitos Elétricos*. Apeiron, Montreal, 2015. 2ª edição. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Bak17] Y. Bakman. Interrelation between electrodynamics and gravitation. Disponível em <https://sites.google.com/site/bakmanyef/home/interrelations-between-electrodynamics-and-gravitation>, 2017.
- [Bau22] C. Baumgärtel. *Aspects of Weber Electrodynamics*. PhD thesis, Faculty of Science and Engineering, The University of Liverpool, UK, Liverpool, 2022. Disponível em <https://livrepository.liverpool.ac.uk/3165052>.
- [BC97] F. Bunchaft and S. Carneiro. Weber-like interactions and energy conservation. *Foundations of Physics Letters*, 10:393–401, 1997.
- [Bee65] A. Beer. *Enleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik*. Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1865. Nach dem Tode des Verfassers herausgegeben von Julius Plücker.
- [Ber36a] Berzelius. Considerations respecting a new power which acts in the formation of organic bodies. *The Edinburgh New Philosophical Journal*, 21:223–228, 1836.
- [Ber36b] Berzélius. Quelques idées sur une nouvelle force agissant dans les combinaisons des corps organiques. *Annales de Chimie et de Physique*, 61:146–151, 1836.
- [Ber36c] J. Berzelius. Einige Ideen über eine bei der Bildung organischer Verbindungen in der lebenden Natur wirksame, aber bisher nicht bemerkte Kraft. *Jahres-Bericht über die Fortschritte der physischen Wissenschaften von Jacob Berzelius*, 15:237–245, 1836.
- [Blo05] C. Blondel, 2005. Ampère et l’Histoire de l’Électricité. Homepage do CNRS que foi criada e coordenada por Christine Blondel. Disponível em www.ampere.cnrs.fr.
- [BM22a] C. Baumgärtel and S. Maher. Foundations of electromagnetism: a review of Wilhelm Weber’s electrodynamic force law. *Foundations*, 2:949–980, 2022. Doi: 10.3390/foundations2040065.
- [BM22b] C. Baumgärtel and S. Maher. Resolving the paradox of unipolar induction: new experimental evidence on the influence of the test circuit. *Scientific Reports*, 12:16791, 2022. Doi: 10.1038/s41598-022-21155-x. Disponível em <https://www.nature.com/articles/s41598-022-21155-x>.
- [BP95] J. B. Barbour and H. Pfister (editors). *Mach’s Principle: From Newton’s Bucket to Quantum Gravity*. Birkhäuser, Boston, 1995.
- [Bri69] C. Briot. *Théorie Mécanique de la Chaleur*. Gauthier-Villars, Paris, 1869.

- [BSM20] C. Baumgärtel, R. T. Smith, and S. Maher. Accurately predicting electron beam deflections in fringing fields of a solenoid. *Scientific Reports*, 10:10903, 2020. Doi: 10.1038/s41598-020-67596-0.
- [BT18] C. Baumgärtel and M. Tajmar. The Planck constant and the origin of mass due to a higher order Casimir effect. *Journal of Advanced Physics*, 7:135–140, 2018. Doi: 10.1166/jap.2018.1402.
- [Bue94] M. A. Bueno. Phipps’s lagrangian and hamiltonian. *Foundations of Physics Letters*, 7:311–318, 1994.
- [Bun01] F. Bunchaft. Velocidades de desligamento nas interações de tipo weberiano e na força gravitacional relativística de Schrödinger. In O. Pessoa Jr., editor, *Fundamentos da Física*, volume 2, pages 73–80. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2001.
- [Bus26] V. Bush. The force between moving charges. *Journal of Mathematical Physics*, 5:129–157, 1926.
- [BW13] C. Blondel and B. Wolff. De l’électricité “en + ou en –” de Franklin aux lois de l’électricité. Disponível em www.ampere.cnrs.fr/histoire/parcours-historique, 2013.
- [CA91] R. A. Clemente and A. K. T. Assis. Two-body problem for Weber-like interactions. *International Journal of Theoretical Physics*, 30:537–545, 1991.
- [CA09] J. P. M. d. C. Chaib and A. K. T. Assis. Sobre os efeitos das correntes elétricas (segunda parte) — Tradução da primeira obra de Ampère sobre eletrodinâmica. *Revista Brasileira de História da Ciência*, 2:118–145, 2009.
- [Can19] K. L. Caneva. Helmholtz, the conservation of force and the conservation of *vis viva*. *Annals of Science*, 76:17–57, 2019. Doi: 10.1080/00033790.2018.1564936.
- [Cha09] J. P. M. d. C. Chaib, 2009. Tese de Doutorado: “Análise do Significado e da Evolução do Conceito de Força de Ampère, juntamente com a Tradução Comentada de Sua Principal Obra sobre Eletrodinâmica.” Universidade Estadual de Campinas — UNICAMP (Campinas, SP). Orientador: A. K. T. Assis. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis e <http://repositorio.unicamp.br/Acervo/Detalhe/435449>.
- [Chi64] R. A. Chipman. Contributions from the museum of history and technology: Science and technology paper 38: The earliest electromagnetic instruments. *Bulletin of the United States National Museum*, pages 121–136, 1964. Disponível em <https://www.gutenberg.org/ebooks/34061>.
- [CL99] O. Costa de Beauregard and G. Lochak. Comment on Mikhailov’s article. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 24:159–160, 1999.
- [CL18] L. M. Costa and F. M. S. Lima. Força de uma casca esférica em um corpo acelerado: independência da posição. *Physicae Organum*, 4:68–77, 2018.

- [Cla52] R. Clausius. Ueber die Anordnung der Elektrizität auf einer einzelnen sehr dünnen Platte und auf den beiden Belegungen einer Franklin’schen Tafel. *Annalen der Physik und Chemie*, 86:161–205, 1852.
- [Cla57a] R. Clausius. The nature of the motion which we call heat. *Philosophical Magazine*, 14:108–127, 1857. Reimpresso em S. G. Brush (ed.), *Kinetic Theory* (Pergamon Press, 1965), Vol. 2, págs. 111-134.
- [Cla57b] R. Clausius. Ueber die Art der Bewegung, welche wir Wärme nennen. *Annalen der Physik und Chemie*, 100:353–379, 1857.
- [Cla68] R. Clausius. Ueber die von Gauss angeregte neue Auffassung der elektrodynamische Erscheinungen. *Annalen der Physik und Chemie*, 135:606–621, 1868.
- [Cla69] R. Clausius. Upon the new conception of electrodynamic phenomena suggested by Gauss. *Philosophical Magazine*, 37:445–456, 1869.
- [Cla79] R. Clausius. *Die mechanische Wärmetheorie*, volume 2. F. Vieweg, Braunschweig, 1879.
- [Coh66] I. B. Cohen. *Franklin and Newton: An Inquiry into Speculative Newtonian Experimental Science and Franklin’s Work in Electricity as an Example Thereof*. Harvard University Press, Cambridge, 1966.
- [Coh96] I. B. Cohen. *Benjamin Franklin’s Science*. Harvard University Press, Cambridge, 1996.
- [Cor90] P. Cornille. Review of the application of Newton’s third law in physics. *Progress in Energy and Combustion Science*, 25:161–210, 1990.
- [Cos99] O. Costa de Beauregard. “Effet Mikhailov” et “moment angulaire caché dans un aimant”. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 24:171–173, 1999.
- [Cos03] O. Costa de Beauregard. Comments on Mikhailov’s new measurement. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 28:237–241, 2003.
- [Cro74] W. Crookes. On attraction and repulsion resulting from radiation. *Philosophical Transactions*, 164:501–527, 1874.
- [CS02] R. W. Chabay and B. A. Sherwood. *Matter & Interactions*, volume 2: Electric and Magnetic Interactions. Wiley, New York, 2002.
- [Cur09] J. C. Curé. *Einstein on Trial or Metaphysical Principles of Natural Philosophy*. Shirley Ramsey, Caracas, 3rd edition, 2009.
- [Des47] R. Descartes. *Les Principes de la Philosophie*. Henry le Gras, Paris, 1647. Traduzido por C. Picot. Reimpresso em R. Descartes, *Oeuvres*, D. Adam e P. Tannery (editores), Volume IX.
- [Des97] R. Descartes. *Princípios da Filosofia*. Edições 70, Lisboa, 1997. Traduzido por J. Gama.

- [Des02] R. Descartes. *Princípios da Filosofia*. Editora da UFRJ, Rio de Janeiro, 2002. Tradução de G. A. d. Almeida (coordenador), R. Landim Filho, E. M. Rocha, M. Gleizer e U. Pinheiro.
- [Dör91] M. Dörries. Prior history and aftereffects: hysteresis and “Nachwirkung” in 19th-century physics. *Historical Studies in the Physical and Biological Sciences*, 22:25–55, 1991.
- [Dru97] D. M. Drury. The electromagnetic momentum of a charged particle in Weber’s theory. *Galilean Electrodynamics*, 8:75–78, 1997.
- [Eby77] P. B. Eby. On the perihelion precession as a Machian effect. *Lettere al Nuovo Cimento*, 18:93–96, 1977.
- [Eby79] P. Eby. Gyro precession and Mach’s principle. *General Relativity and Gravitation*, 11:111–117, 1979.
- [Eby97] P. Eby. Machian mechanics with isotropic inertia. *General Relativity and Gravitation*, 29:621–635, 1997.
- [Edl67] E. Edlund. Untersuchung über den galvanischen Lichtbogen. *Annalen der Physik und Chemie*, 131:586–607, 1867.
- [Edl75] E. Edlund. Erwiderung auf zwei gegen die unitarische Theorie der Elektrizität gemachte Einwürfe. *Annalen der Physik und Chemie*, 156:590–601, 1875.
- [Edl86] E. Edlund. On the resistance in the voltaic arc. *Philosophical Magazine*, 21:131:366–368, 1886.
- [EI38] A. Einstein and L. Infeld. *The Evolution of Physics*. Cambridge University Press, London, 1938.
- [Ein05] A. Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik*, 17:891–921, 1905.
- [Ein20a] A. Einstein. *Relativity: The Special and General Theory*. Henry Holt and Company, New York, 1920. Translated by R. W. Lawson. Disponível em www.bartleby.com/173/.
- [Ein20b] A. Einstein. *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie (Gemeinverständlich)*. F. Vieweg, Braunschweig, 1920. 5ª edição.
- [Ein22] A. Einstein. *Sidelights on Relativity*. Methuen, London, 1922. Translated by G. B. Jeffery.
- [Ein24] A. Einstein. Über den Äther. *Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft*, 105:85–93, 1924.
- [Ein89] A. Einstein. On the electrodynamics of moving bodies. In *The Collected Papers of Albert Einstein*, volume 2 — The Swiss Years: Writings, 1900–1909, pages 140–171, Princeton, 1989. Princeton University Press. Anna Beck, translator.

- [Ein91] A. Einstein. On the ether. In S. Saunders and H. R. Brown, editors, *The Philosophy of Vacuum*, pages 13–20. Clarendon, Oxford, 1991. Translated by S. W. Saunders.
- [Ein14] A. Einstein. Sobre a electrodinâmica dos corpos em movimento. In H. A. Lorentz, A. Einstein e H. Minkowski, *O Princípio da Relatividade*, Lisboa, 6^a edição, 2014. Fundação Calouste Gulbenkian. Págs. 47-86. Tradução de M. J. Saraiva.
- [Elk70] Y. Elkana. Helmholtz’ “Kraft”: an illustration of concepts in flux. *Historical Studies in the Physical Sciences*, 2:263–298, 1970. Doi: 10.2307/27757308.
- [Erl99] H. Erlichson. Ampère was not the author of “Ampère’s circuital law”. *American Journal of Physics*, 67:448–450, 1999.
- [Euc56a] Euclid. *The Thirteen Books of The Elements*, volume 1-3, Books I-XIII. Dover, New York, 1956. Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath.
- [Euc56b] Euclid. *The Thirteen Books of The Elements*, volume 2, Books III-IX. Dover, New York, 1956. Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath.
- [Euc09] Euclides. *Os Elementos*. Editora da Unesp, São Paulo, 2009. Tradução e introdução de I. Bicudo.
- [Far32a] M. Faraday. Experimental researches in electricity. *Philosophical Transactions*, 122:125–162, 1832. Lido em 24 de novembro de 1831. Reimpresso em *Great Books of the Western World*, R. M. Hutchins (editor), (Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952), Vol. 45: Lavoisier, Fourier, Faraday. Págs. 265-285, parágrafos 1-139.
- [Far32b] M. Faraday. Experimental-Untersuchungen über Elektrizität. *Annalen der Physik und Chemie*, 25:91–142, 1832.
- [Far43] M. Faraday. Experimental researches in electricity. Eighteenth series. *Philosophical Transactions*, 133:17–32, 1843. Reimpresso em *Great Books of the Western World*, R. M. Hutchins (editor), (Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952), Vol. 45: Lavoisier, Fourier, Faraday. Págs. 584-594, parágrafos 2075-2145.
- [Far46a] M. Faraday. Experimental researches in electricity. Nineteenth series. *Philosophical Transactions*, 136:1–20, 1846. Lido em 20 de novembro de 1845. Reimpresso em *Great Books of the Western World*, R. M. Hutchins (editor), (Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952), Vol. 45: Lavoisier, Fourier, Faraday. Págs. 595-607, parágrafos 2146-2242.
- [Far46b] M. Faraday. Experimental researches in electricity. Twentieth series. *Philosophical Transactions*, 136:21–40, 1846. Lido em 18 de dezembro de 1845. Reimpresso em *Great Books of the Western World*, R. M. Hutchins (editor), (Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952), Vol. 45: Lavoisier, Fourier, Faraday. Págs. 607-619, parágrafos 2243-2342.

- [Far46c] M. Faraday. Experimental researches in electricity. Twenty-first series. *Philosophical Transactions*, 136:41–62, 1846. Lido em 8 de janeiro de 1846. Reimpresso em *Great Books of the Western World*, R. M. Hutchins (editor), (Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952), Vol. 45: Lavoisier, Fourier, Faraday. Págs. 619-632, parágrafos 2343-2453.
- [Far46d] M. Faraday. Zwanzigste Reihe von Experimental-Untersuchungen über Elektrizität. *Annalen der Physik und Chemie*, 69:289–320, 1846.
- [Far47] M. Faraday. Ein und zwanzigste Reihe von Experimental-Untersuchungen über Elektrizität. *Annalen der Physik und Chemie*, 70:24–59, 1847.
- [Far89] M. Faraday. *Experimental-Untersuchungen über Elektrizität*, volume I. Springer, Berlin, 1889. Deutsche Uebersetzung von S. Kalischer.
- [Far52] M. Faraday. *Experimental Researches in Electricity*, volume 45, pp. 253-898 of *Great Books of the Western World*. Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952.
- [Far11] M. Faraday. Pesquisas experimentais em eletricidade. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, 28:152–204, 2011. Tradução de A. K. T. Assis e L. F. Haruna. Doi: 10.5007/2175-7941.2011v28n1p152.
- [Fec45] G. T. Fechner. Ueber die Verknüpfung der Faraday’schen Inductions-Erscheinungen mit den Ampère’schen elektro-dynamischen Erscheinungen. *Annalen der Physik und Chemie*, 64:337–345, 1845.
- [Fec60] G. T. Fechner. *Elemente der Psychophysik*, volume I. Breitkopf und Härtel, Leipzig, 1860.
- [Fec21] G. T. Fechner. On the connection between Faraday’s induction phenomena and Ampère’s electrodynamic phenomena. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume II: Weber’s Fundamental Force and the Unification of the Laws of Coulomb, Ampère and Faraday, pages 19–26, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [FF96] B. Friedlaender and I. Friedlaender. *Absolute oder relative Bewegung?* Leonhard Simion, Berlin, 1896.
- [FF95] B. Friedlaender and I. Friedlaender. Absolute or relative motion? In J. B. Barbour and H. Pfister, editors, *Mach’s Principle, From Newton’s Bucket to Quantum Gravity*, pages 114–119 and 309–311, Boston, 1995. Birkhäuser. Translated by J. B. Barbour.
- [FF07] B. Friedlaender and I. Friedlaender. Absolute or relative motion? In J. Renn, editor, *The Genesis of General Relativity*, volume 3, pages 127–144. Springer, Berlin, 2007. Boston Studies in the Philosophy and History of Science, 2007, Vol. 250, Part 2, pp. 1053-1071, Doi: 10.1007/978-1-4020-4000-9_14.

- [FK97] J. Fukai and E. T. Kinzer. Compatibility of Weber’s force with Maxwell’s equations. *Galilean Electrodynamics*, 8:53–55, 1997.
- [FLS63] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman Lectures on Physics*. Addison-Wesley, Reading, 1963. Volume 1: Mainly Mechanics, Radiation, and Heat.
- [FLS64] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman Lectures on Physics*. Addison-Wesley, Reading, 1964. Volume 2: Mainly Electromagnetism and Matter.
- [Fou22] J. B. J. Fourier. *Théorie Analytique de la Chaleur*. Firmin Didot, Paris, 1822.
- [Fou51a] L. Foucault. Démonstration physique du mouvement de rotation de la terre au moyen du pendule. *Comptes Rendues de l’Académie des Sciences de Paris*, Feb. 03:135–138, 1851.
- [Fou51b] L. Foucault. Physical demonstration of the rotation of the earth by means of the pendulum. *Journal of the Franklin Institute*, 21:350–353, 1851.
- [Fou52] J. B. J. Fourier. Analytical Theory of Heat. In *Great Books of the Western World, Vol. 45*, pages 161–251, Chicago, 1952. Encyclopaedia Britannica. Translated by A. Freeman.
- [Fra69] B. Franklin. *Experiments and Observations on Electricity, Made at Philadelphia in America*. David Henry, London, 1769.
- [Fra04] B. Franklin. *The Works of Benjamin Franklin*. G. P. Putnam’s Sons, 1904. 12 Volumes.
- [Fra41] B. Franklin. *Benjamin Franklin’s Experiments — A new edition of Franklin’s Experiments and Observations on Electricity*, I. B. Cohen (ed.). Harvard University Press, Cambridge, 1941.
- [Fra81] O. I. Franksen. *H. C. Ørsted — A Man of the Two Cultures*. Strandbergs Forlag, Birkerød, 1981.
- [Fre25] A. Fresnel. Ueber das Licht. *Annalen der Physik und Chemie*, 3:89–128, 1825. Doi: 10.1002/andp.18250790107.
- [FS16] É. J. B. Ferreira and A. P. B. Silva. Termomagnetismo ou termoeletricidade? Um estudo do trabalho de Thomas Johan Seebeck. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, 33:861–878, 2016. Doi: 10.5007/2175-7941.2016v33n3p861.
- [Fuk03] J. Fukai. *A Promenade Along Electrodynamics*. Vales Lake Publishing, Pueblo West, 2003.
- [FW19] U. Frauenfelder and J. Weber. The fine structure of Weber’s hydrogen atom: Bohr-Sommerfeld approach. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 70:105, 2019. Doi: 10.1007/s00033-019-1149-4.

- [FW24] U. Frauenfelder and J. Weber. A mathematical description of the Weber nucleus as a classical and quantum mechanical system. *Analysis and Mathematical Physics*, 14, 2024. Doi: 10.1007/s13324-024-00891-5.
- [GA94] P. Graneau and A. K. T. Assis. Kirchhoff on the motion of electricity in conductors. *Apeiron*, 19:19–25, 1994.
- [Gal54] Galileo Galilei. *Dialogues Concerning Two New Sciences*. Dover, New York, 1954. Translated by H. Crew and A. d. Salvio.
- [Gal85] Galileu Galilei. *Duas Novas Ciências*. Ched Editorial, Instituto Italiano di Cultura e Nova Stella, São Paulo, 1985. Tradução e Notas: L. Mariconda e P. R. Mariconda.
- [Gal93] G. Galeczki. The ultimate speed and Weber’s potential. *Physics Essays*, 6:448–450, 1993.
- [Gar04] D. Gardelli, 2004. Concepções de Interação Física: Subsídios para uma Abordagem Histórica do Assunto no Ensino Médio. Dissertação de Mestrado, Instituto de Física, Universidade de São Paulo, Brasil.
- [Gau32] C. F. Gauss. Anzeige der “Intensitas Vis Magneticae Terrestris ad Mensuram Absolutam Revocata”. *Göttingische gelehrte Anzeigen*, 205-207:2041–2058, 1832. Vol. 205 de 24 de dezembro, 1832, págs. 2041-2048; Vols. 206 e 207 de 27 de dezembro, 1832, págs. 2049-2058. Reimpresso em C. F. Gauss’ *Werke*, Vol. 5, págs. 293-304 (Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1867). Versão corrigida em: *Astronomische Nachrichten* 10, 1833, Nr. 238, págs. 349-360: Anzeige der Abhandlung des Herrn Hofraths Gauß: Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata.
- [Gau33a] C. F. Gauss. [abstract of the paper:] Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata. *Philosophical Magazine*, 2:291–299, 1833.
- [Gau33b] C. F. Gauss. Die Intensität der erdmagnetischen Kraft, zurückgeführt auf absolutes Maass. *Annalen der Physik und Chemie*, 28:241–273 and 591–615, 1833. Traduzido por J. C. Poggendorff.
- [Gau34] C. F. Gauss. Measure absolue de l’intensité du magnétisme terrestre. *Annales de Chimie et de Physique*, 57:5–69, 1834.
- [Gau36] C. F. Gauss, 1836. Ob ismĕrenii zemnago magnitizma. (Soč[inenie] Karl[a] Frid[richa] Gaussa). Per[evĕl] A. Drašusov. Učenyja zapiski Imperatorskago universiteta čast 11, 1836, Nr. 7 (Januar), str. 3-22; Nr. 8 (Februar), str. 246-271; Nr. 9 (März), str. 341-381.
- [Gau37] C. F. Gauss. [abstract of the paper:] Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata. *Abstracts of the Papers Printed in the Philosophical Transactions of the Royal Society of London, from 1830 to 1837 inclusive*, 3:166–174, 1837.

- [Gau38] C. F. Gauss. Anleitung zur Bestimmung der Schwingungsdauer einer Magnetenadel. In C. F. Gauss and W. Weber, editors, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837*, volume II, chapter IV, pages 58–80. Dieterichschen Buchhandlung, Göttingen, 1838. Reimpresso em Carl Friedrich Gauss’ *Werke*, Vol. 5, págs. 374–394 (Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1867).
- [Gau39] C. F. Gauss. Misura assoluta dell’ intensità della forza magnetica terrestre. *Effemeridi astronomiche di Milano*, primo supplemento:3–132, 1839. Tradotta e commentata da P. Frisiani.
- [Gau41] C. F. Gauss. Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata. *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Goettingensis Recentiores*, 8:3–44, 1841. Apresentado na Sociedade Real de Ciências de Göttingen em 15 de dezembro de 1832. Reimpresso em Carl Friedrich Gauss’ *Werke*, Vol. 5, págs. 79–118 (Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1867).
- [Gau67] C. F. Gauss. Grundgesetz für alle Wechselwirkungen galvanischer Ströme. In Carl Friedrich Gauss’ *Werke*, volume 5, pages 616–617. Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Göttingen, 1867. Disponível em <https://gdz.sub.uni-goettingen.de/volumes/id/PPN235957348>.
- [Gau94] C. F. Gauss. Die Intensität der erdmagnetischen Kraft auf absolutes Maass zurückgeführt. In E. Dorn, editor, *Ostwald’s Klassiker der exakten Wissenschaften, Vol. 53*. Wilhelm Engelmann Verlag, Leipzig, 1894. Tradução de A. Kiel, Notas de E. Dorn. Reimpresso em *Carl Friedrich Gauss’ — Werke — Supplement — Volume 3: Varia: 15 Abhandlungen in deutscher Übersetzung. Mit einer Einleitung, einer Bibliographie und Registern herausgegeben von Karin Reich. Hrsg. von der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen, Universitätsverlag Göttingen 2019*, págs. 533–594.
- [Gau35] C. F. Gauss. The absolute measure of magnetic force. In W. F. Magie, editor, *A Source Book in Physics*, pages 519–524, New York, 1935. McGraw-Hill.
- [Gau52] C. F. Gauss, 1952. Intensivnost semnoj magnitnoj sily, privedennaja k absolutnoj mere. In: B. M. Janovskij (Hrsg): Karl Fridrich Gauss. Izbrannye trudy po zemnomu magnetizmu. Perevod A. N. Krylova. Moskau 1952, str. 23–75.
- [Gau75] C. F. Gauss. Letter from Gauss to Schumacher, April 29, 1845. In *Carl Friedrich Gauss, Werke, Ergänzungsreihe, Vol. V, Briefwechsel C. F. Gauss — H. C. Schumacher, Part 2*, pages 436–440. Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1975.
- [Gau03] C. F. Gauss. The intensity of the earth’s magnetic force reduced to absolute measurement. Traduzido em 1995 por Susan P. Johnson, editado por L. Hecht. Disponível desde 2003 em <http://21sci-tech.com/translation.html>, 2003.

- [Gau21a] C. F. Gauss. Fundamental law for all interactions of galvanic currents. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume IV: Conservation of Energy, Weber's Planetary Model of the Atom and the Unification of Electromagnetism and Gravitation, page 11, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Gau21b] C. F. Gauss. [Gauss, 1832, Abstract of the paper:] Intensitas vis magneticae terrestres ad mensuram absolutam revocata. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume I: Gauss and Weber's Absolute System of Units, pages 37–45, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Gau21c] C. F. Gauss. The absolute measure of the earth's magnetic force. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume I: Gauss and Weber's Absolute System of Units, pages 49–80, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ger] P. Gerber. The spatial and temporal propagation of gravity. *The General Science Journal*. Translation by H. Jones. Disponível em <https://www.gsjournal.net/Science-Journals/Historical%20Papers/View/4011> e <http://www.alternativephysics.org/gerber/Perihelion.htm>.
- [Ger98] P. Gerber. Die räumliche und zeitliche Ausbreitung der Gravitation. *Zeitschrift für Mathematik und Physik II*, 43:93–104, 1898.
- [Ger17] P. Gerber. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation. *Annalen der Physik*, 52:415–444, 1917. Ursprünglich erschienen in Programmabhandlung des städtischen Realgymnasiums zu Stargard i. Pomm., 1902.
- [GG93] P. Graneau and N. Graneau. *Newton Versus Einstein — How Matter Interacts with Matter*. Carlton Press, New York, 1993.
- [Gil71a] C. S. Gillmor. *Coulomb and the Evolution of Physics and Engineering in Eighteenth-Century France*. Princeton University Press, Princeton, 1971.
- [Gil71b] C. S. Gillmor. Coulomb, Charles Augustin. In C. C. Gillispie, editor, *Dictionary of Scientific Biography*, Vol. 3, pages 439–447. Charles Scribner's Sons, New York, 1971.
- [GM95] G. Galeczki and P. Marquardt. Über die longitudinalen Ampèreschen Kräfte und Webers Elektrodynamik. *Fusion*, 16:15–17, 1995.
- [Gra45] H. Grassmann. Neue Theorie der Elektrodynamik. *Annalen der Physik und Chemie*, 64:1–18, 1845.
- [Gra77] H. Grassmann. Zur Elektrodynamik. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 83:57–64, 1877.

- [Gra65] H. Grassmann. A new theory of electrodynamics. In R. A. R. Tricker, *Early Electrodynamics — The First Law of Circulation*, pages 201–214, New York, 1965. Pergamon.
- [Gra90a] P. Graneau. Far-action versus contact action. *Speculations in Science and Technology*, 13:191–201, 1990.
- [Gra90b] P. Graneau. Has the mystery of inertia been solved? In U. Bartocci and J. P. Wesley, editors, *Proceedings of the Conference on Foundations of Mathematics and Physics*, pages 129–136, Blumberg, 1990. Benjamin Wesley Publisher.
- [Gra90c] P. Graneau. Interconnecting action-at-a-distance. *Physics Essays*, 3:340–343, 1990.
- [Gra90d] P. Graneau. The riddle of inertia. *Electronics and Wireless World*, 96:60–62, 1990.
- [Gra90e] P. Graneau. Some cosmological consequences of Mach’s principle. *Hadronic Journal Supplement*, 5:335–349, 1990.
- [Gra21] H. Grassmann, 2021. On electrodynamics. Translated by D. H. Delphenich. Disponível em <http://www.neo-classical-physics.info/index.html>.
- [Gre94] T. B. Greenslade Jr. The hydro-electrical machine. *The Physics Teacher*, 32:210–211, 1994.
- [Gri89] D. J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 2nd edition, 1989.
- [Gri10] D. J. Griffiths. *Eletrodinâmica*. Pearson, 2010. 3ª edição. Tradução de H. C. d. Souza.
- [GT19] P. M. Grant and J. S. Thompson. Standardization of the Ohm as a unit of electrical resistance, 1861-1867. *Proceedings of the IEEE*, 107:2281–2289, 2019. Doi: 10.1109/JPROC.2019.2945495.
- [GV97] J. Guala-Valverde. Centrifugal potential energy in a machian universe. *Galilean Electrodynamics*, 8:100, 1997.
- [GV98] J. Guala-Valverde. Gravitational mutual energy in Weber-type mechanics. *Physics Essays*, 11:164–165, 1998.
- [GV99a] J. Guala-Valverde. *Inercia y Gravitacion*. Fundacion Julio Palacios, Neuquen, Argentina, 1999. Em colaboração com J. Tramaglia e R. Rapacioli. Disponível em: www.educ.ar/recursos/90380.
- [GV99b] J. Guala-Valverde. Inertial mass in Mach-Weber-Assis theory. *Apeiron*, 6:202–204, 1999.
- [GV01] J. Guala-Valverde. A new theorem in relational mechanics. *Apeiron*, 8:132–138, 2001.

- [GV04] J. Guala-Valverde. Distant matter in physics. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 29:635–640, 2004.
- [GVAB05] J. Guala-Valverde, R. Achilles, and R. Blas. Inertial mass: a changing entity? — Weber vs. Einstein, Weber plus Einstein or none? *Apeiron*, 12:351–352, 2005.
- [GVM01] J. Guala-Valverde and P. Mazzoni. The unipolar dynamotor: a genuine relational engine. *Apeiron*, 8:41–52, 2001.
- [GW37] C. F. Gauss and W. Weber. *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1836*, volume I. Dieterichschen Buchhandlung, Göttingen, 1837.
- [GW38] C. F. Gauss and W. Weber. *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837*, volume II. Dieterichschen Buchhandlung, Göttingen, 1838.
- [GW39] C. F. Gauss and W. Weber. *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1838*, volume III. Dieterichschen Buchhandlung, Göttingen, 1839.
- [GW40a] C. F. Gauss and W. Weber. *Atlas des Erdmagnetismus nach den Elementen der Theorie Entworfen — Supplement zu den Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins unter Mitwirkung von C. W. B. Goldschmidt*. Weidmann’sche Buchhandlung, Leipzig, 1840. Reimpresso em Carl Friedrich Gauss’ *Werke*, Vol. 12, págs. 335-408 (Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1929).
- [GW40b] C. F. Gauss and W. Weber. *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839*, volume IV. Weidmannschen Buchhandlung, Leipzig, 1840.
- [GW41] C. F. Gauss and W. Weber. *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840*, volume V. Weidmannschen Buchhandlung, Leipzig, 1841.
- [GW43] C. F. Gauss and W. Weber. *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1841*, volume VI. Weidmannschen Buchhandlung, Leipzig, 1843.
- [Ham78] P.-G. Hamamdjian. Contribution d’Ampère au “théorème d’Ampère”. *Revue d’Histoire des Sciences*, 31:249–268, 1978.
- [Han74] W. G. Hankel. *Elektrische Untersuchungen*, volume 9: Über die thermoelektrischen Eigenschaften des Schwerspathes. Hirzel, Leipzig, 1874.
- [Har82] P. M. Harman. *Energy, Force, and Matter — The Conceptual Development of Nineteenth-Century Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

- [Här12a] H. Härtel. Spannung und Oberflächenladungen: Was Wilhelm Weber schon vor mehr als 150 Jahren wusste. *Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule*, 5:25–31, 2012.
- [Här12b] H. Härtel. Tensão e cargas superficiais — o que Wilhelm Weber já sabia há 150 anos. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, 29:1015–1029, 2012. Tradução de A. K. T. Assis. Doi: 10.5007/2175-7941.2012v29n3p1015.
- [Här18] H. Härtel. Electromagnetic induction from a new perspective. *European Journal of Physics Education*, 9:29–36, 2018. Doi: 10.20308/ejpe.v9i2.215.
- [Här20] H. Härtel. Electromagnetic induction: an alternative for teaching and understanding. *European Journal of Physics Education*, 9:1–13, 2020. Doi: 10.20308/ejpe.v9i2.210.
- [Hea89] O. Heaviside. On the electromagnetic effects due to the motion of electrification through a dielectric. *Philosophical Magazine*, 27:324–339, 1889.
- [Hec96] L. Hecht. The significance of the 1845 Gauss-Weber correspondence. *21st Century Science & Technology*, 9(3):22–34, 1996. Disponível em https://21sci-tech.com/articles/Atomic_Science.pdf e <https://archive.org/details/WeberAmpereElectrodynamicsHistory>.
- [Hei81] J. L. Heilbron. The electrical field before Faraday. In G. N. Cantor and M. J. S. Hodge, editors, *Conceptions of Ether: Studies in the History of Ether Theories 1740-1900*, pages 187–213. Cambridge University Press, Cambridge, 1981.
- [Hei99] J. L. Heilbron. *Electricity in the 17th and 18th Centuries — A Study in Early Modern Physics*. Dover, New York, 1999.
- [Hel47] H. von Helmholtz. *Über die Erhaltung der Kraft*. Engelmann, Leipzig, 1847. Reimpresso em H. Helmholtz, *Wissenschaftliche Abhandlungen* (Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1882), Vol. 1, Artigo 2, págs. 12-75.
- [Hel53] H. Helmholtz. On the conservation of force; a physical memoir. In J. Tyndall and W. Francis, editors, *Scientific Memoirs*, Volume on Natural Philosophy, pages 114–162, London, 1853. Taylor and Francis. Translated by J. Tyndall. Disponível em https://books.google.com.br/books?id=C1i4AAAAIAAJ&hl=pt-BR&source=gbs_navlinks_s.
- [Hel70] H. v. Helmholtz. Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 72:57–129, 1870.
- [Hel72a] H. Helmholtz. Ueber die Theorie der Elektrodynamik. *Monatsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften*, pages 247–256, 1872. Reimpresso em H. Helmholtz, *Wissenschaftliche Abhandlungen* (Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1882), Vol. 1, Artigo 34, págs. 636-646.
- [Hel72b] H. von Helmholtz. On the theory of electrodynamics. *Philosophical Magazine*, 44:530–537, 1872.

- [Hel73] H. v. Helmholtz. Ueber die Theorie der Elektrodynamik. Zweite Abhandlung. Kritisches. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 75:35–66, 1873. Reimpresso em H. Helmholtz, *Wissenschaftliche Abhandlungen* (Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1882), Vol. 1, Artigo 35, págs. 647-683; com material adicional de 1881 nas páginas 684-687.
- [Hel82] H. Helmholtz. Ueber die Theorie der Elektrodynamik. In H. Helmholtz, editor, *Wissenschaftliche Abhandlungen*, volume 1, pages 636–646. Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1882.
- [Hel66] H. von Helmholtz. On the conservation of force; a physical memoir. In J. Tyndall and W. Francis, editors, *Scientific Memoirs*, Volume on Natural Philosophy, pages 114–162, New York, 1966. Johnson Reprint Corporation. Translated by J. Tyndall.
- [Her94] H. Hertz. *Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft*. Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 2nd edition, 1894. Reimpresso em H. Hertz, *Gesammelte Werke*, Volume 2 (Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1894).
- [Her00] H. Hertz. *Electric Waves: Being Researches on the Propagation of Electric Action With Finite Velocity Through Space*. Macmillan, London, 2nd edition, 1900. Translated by D. E. Jones.
- [HM95] M. A. Heald and J. B. Marion. *Classical Electromagnetic Radiation*. Saunders, Fort Worth, 3rd edition, 1995.
- [Hob13] A. Hobson. There are no particles, there are only fields. *American Journal of Physics*, 81:211–223, 2013. Doi: 10.1119/1.4789885.
- [Hof00] A. Hofler. *Studien zur gegenwärtigen Philosophie der Mechanik*. Als Nachwort zu Kant’s [sic] *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*. *Veröffentlichungen der Philosophischen Gesellschaft an der Universität zu Wien*, volume III. C. E. M. Pfeffer, Leipzig, 1900.
- [Hof95] W. Hofmann. Motion and inertia. In J. B. Barbour and H. Pfister, editors, *Mach’s Principle, From Newton’s Bucket to Quantum Gravity*, pages 128–133, Boston, 1995. Birkhäuser. Translated by J. B. Barbour.
- [Hol70] G. Holzmüller. Ueber die anwendung der Jacobi-Hamilton’schen Methode auf den Fall der Anziehung nach dem electrodynamischen Gesetze von Weber. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 15:69–91, 1870.
- [Hol17] G. Holzmüller, 2017. On the application of the Jacobi-Hamilton method to the case of attraction according to Weber’s electrodynamical law. Translated by D. H. Delphenich. Disponível em <http://www.neo-classical-physics.info/index.html>.
- [Hur10] P. G. Huray. *Maxwell’s Equations*. Wiley: IEEE, Hoboken, 2010.
- [Jac66] C. G. J. Jacobi. *Vorlesungen über Dynamik*. Reimer, Berlin, 1866. Herausgegeben von A. Clebsch.

- [Jac84] C. G. J. Jacobi. *Vorlesungen über Dynamik*. Reimer, Berlin, 1884. 2. Auflage 1884 als Supplementband der Gesammelten Werke von C. G. J. Jacobi (Herausgegeben von E. Lottner).
- [Jac75] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, New York, second edition, 1975.
- [Jac09] C. G. J. Jacobi. Lectures on dynamics. In A. Clebsch, editor, *Jacobi's Lectures on Dynamics*. Hindustan Book Agency, New Delhi, 2nd edition, 2009. Texts and Readings in Mathematics, Volume 51. Delivered at the University of Königsberg in the winter semester 1842-1843 and according to the notes prepared by C. W. Brockardt. Translated by K. Balagangadharan. Translation edited by B. Banerjee. Disponível em <https://link.springer.com/book/10.1007/978-93-86279-62-0>.
- [Jac15] R. Jackson. John Tyndall and the early history of diamagnetism. *Annals of Science*, 72:435–489, 2015. Doi: 10.1080/00033790.2014.929743.
- [Jam00] M. Jammer. *Concepts of Mass in Contemporary Physics and Philosophy*. Princeton University Press, Princeton, 2000.
- [Jea41] J. Jeans. *The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism*. Cambridge University Press, Cambridge, 1941. Reprint of the 5th edition of 1925.
- [Jou41a] J. P. Joule. On the heat evolved by metallic conductors of electricity, and in the cells of a battery during electrolysis. *Philosophical Magazine*, 19:260–277, 1841. Reimpresso em *The Annals of Electricity, Magnetism, and Chemistry; and Guardian of Experimental Science*, Vol. 8, págs. 287-301 (1842).
- [Jou41b] J. P. Joule. On the production of heat by voltaic electricity. *Proceedings of the Royal Society of London*, 4:280–281, 1841. Reimpresso em *Athenaeum*, Vol. 697, 192 (1841) e *Philosophical Magazine*, Vol. 18, págs. 308-309 (1841).
- [Jou42] J. P. Joule. Sur la chaleur développée dans les conducteurs métalliques et dans les auges d'une pile sous l'influence de l'électricité. *Archives de l'Électricité. Supplément a la Bibliothèque Universelle de Genève*, 2:54–79, 1842.
- [Jou43] J. P. Joule. On the caloric effects of magneto-electricity and on the mechanical value of heat. *Philosophical Magazine*, 23:263–276, 347–355 and 435–443, 1843.
- [JP04] J. E. Junginger and Z. D. Popovic. An experimental investigation of the influence of an electrostatic potential on electron mass as predicted by Weber's force law. *Canadian Journal of Physics*, 82:731–735, 2004.
- [KF96] E. T. Kinzer and J. Fukai. Weber's force and Maxwell's equations. *Foundations of Physics Letters*, 9:457–461, 1996.

- [Kir57a] G. Kirchhoff. On the motion of electricity in wires. *Philosophical Magazine*, 13:393–412, 1857. Disponível em <https://archive.org/stream/londonedinburghp13maga#page/392/mode/2up>.
- [Kir57b] G. Kirchhoff. Ueber die Bewegung der Elektrizität in Drähten. *Annalen der Physik und Chemie*, 100:193–217, 1857. Reimpresso em G. Kirchhoff's *Gesammelte Abhandlungen* (Barth, Leipzig, 1882), págs. 131-154.
- [Kir57c] G. Kirchhoff. Ueber die Bewegung der Elektrizität in Leitern. *Annalen der Physik und Chemie*, 102:529–544, 1857. Reimpresso em G. Kirchhoff's *Gesammelte Abhandlungen* (Barth, Leipzig, 1882), págs. 154-168.
- [Kir64] G. Kirchhoff. Zur Theorie der Entladung einer Leydener Flasche. *Annalen der Physik und Chemie*, 197:551–566, 1864. Reimpresso em G. Kirchhoff's *Gesammelte Abhandlungen* (Barth, Leipzig, 1882), págs. 168-182.
- [Kir21a] G. Kirchhoff. On the motion of electricity in conductors. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume III: Measurement of Weber's Constant c , Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, pages 229–241, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Kir21b] G. Kirchhoff. On the motion of electricity in wires. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume III: Measurement of Weber's Constant c , Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, pages 201–220, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Koe89] A. Koestler. *O Homem e o Universo*. Ibrasa, São Paulo, 1989. Tradução de A. Denis.
- [Koh73] F. Kohlrausch. Zurückführung der Siemens'schen Widerstandseinheit auf absolutes Maass. *Annalen der Physik und Chemie*, 6 (Supplementary Volume):1–35, 1873.
- [Koh74] F. Kohlrausch. Ueber Thermoelektricität, Wärme- und Elektrizitätsleitung. *Nachrichten der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften*, 4:65–86, 1874.
- [Koh83] F. Kohlrausch. *An Introduction to Physical Measurements — with appendices on absolute electrical measurement, etc.* J. & A. Churchill, London, 2nd edition, 1883. Translated from the fourth German edition by T. H. Waller and H. R. Procter.
- [Krö56] A. Krönig. Grundzüge einer Theorie der Gase. *Annalen der Physik und Chemie*, 99:315–322, 1856.
- [KS05] S. Krapas and M. C. d. Silva. Forças que atuam a distância: representações em livros didáticos do ensino médio e a história da ciência. In M. A. Moreira,

- C. C. Sahelices, and J. M. Villagr , editors, *Actas do II Encontro Ibero-americano sobre Investigación Básica em Educación em Ciências*, pages 351–366. Servicios de Publicaciones de la Universidad de Burgos, Burgos, 2005.
- [KS08] S. Krapas and M. C. d. Silva. O conceito de campo: polissemia nos manuais, significados na física do passado e da atualidade. *Ciência & Educação*, 14:15–33, 2008.
- [Kuh62] T. S. Kuhn. *The Structure of Scientific Revolutions*. The University of Chicago Press, Chicago, 1962.
- [Kuh82] T. S. Kuhn. *A Estrutura das Revoluções Científicas*. Editora Perspectiva, São Paulo, 1982. Volume 115 da Coleção Debates. Tradução de B. V. Boeira e N. Boeira.
- [K h21] S. K hn. Experimental investigation of an unusual induction effect and its interpretation as a necessary consequence of Weber electrodynamics. *Journal of Electrical Engineering*, 72:366–373, 2021. Doi: 10.2478/jee-2021-0052.
- [K h23a] S. K hn. Analytical solution of Maxwell’s equations for arbitrarily moving point charges and its application for ultra-fast, high-quality simulation of electromagnetic signals. *TechRxiv*, September 29:1–8, 2023. Doi: 10.36227/techrxiv.24087840.v2.
- [K h23b] S. K hn. The importance of Weber-Maxwell electrodynamics in electrical engineering. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 71:6698–6706, 2023. Doi: 10.1109/TAP.2023.3278078.
- [K h24] S. K hn. Weber-Maxwell electrodynamics: classical electromagnetism in its most compact and pure form. *TechRxiv*, January 18:1–10, 2024. Doi: 10.36227/techrxiv.170555316.64424848/v1.
- [KW57] R. Kohlrausch and W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Zurückführung der Stromintensit ts-Messungen auf mechanisches Maass. *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physischen Classe*, 3:221–292, 1857. Reimpresso em *Wilhelm Weber’s Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), p gs. 609-676.
- [KW21] R. Kohlrausch and W. Weber. Electrodynamic measurements, fourth memoir, specially attributing mechanical units to measures of current intensity. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume III: Measurement of Weber’s Constant c , Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, pages 141–199, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [LA98] E. K. Lauridsen and N. Abrahamsen. The history of astatic magnet systems and suspensions. *Centaurus*, 40:135–169, 1998.

- [Lar82] D. B. Larson. *The Neglected Facts of Science*. North Pacific Publishers, Portland, 1982. Disponível em <https://www.calameo.com/books/0072567018dc66898732d>.
- [Lei86] Leibniz. *La Monadologie*. Eugène Belin, Paris, 1886.
- [Lei48] Leibniz. *The Monadology and Other Philosophical Writings*. Oxford University Press, Oxford, 1948. Translated with introduction and notes by R. Latta. Disponível em <https://ia803402.us.archive.org/22/items/monadologyotherp00gott/monadologyotherp00gott.pdf>.
- [Lei83] G. W. Leibniz. Os Princípios da Filosofia ditos A Monadologia. In Victor Civita, editor, *Os Pensadores*, volume Newton Leibniz, pages 103–115. Abril, São Paulo, 1983. 2ª edição. Tradução de M. d. S. Chaui.
- [Lév90] M. Lévy. Sur l’application des lois électrodynamiques au mouvement des planètes. *Comptes Rendues de l’Academie des Sciences de Paris*, 110:545–551, 1890.
- [Lév24] M. Lévy. On the application of electrodynamic laws to the movement of planets. Traduzido por J. Plaice: The precession of mercury’s perihelion can be derived from Weber’s and Riemann’s force laws, without general relativity. Disponível em <https://johnplaice.substack.com/p/the-precession-of-mercurys-perihelion>, 2024.
- [Li22] Q. Li. Electric field theory based on Weber’s electrodynamics. *International Journal of Magnetism and Electromagnetism*, 7:039:1–6, 2022. Doi: 10.35840/2631-5068/6539.
- [Li25] Q. Li. Transverse wave equation from Weber’s electrodynamics. Doi: 10.20944/preprints202502.0649.v1, 2025.
- [Lim20] F. M. S. Lima. Nonzero gravitational force exerted by a spherical shell on a body moving inside it, and cosmological implications. *Gravitation and Cosmology*, 26:387–398, 2020.
- [LL75] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields*. Butterworth-Heinemann, Burlington, 1975. Fourth revised English edition. Course of Theoretical Physics, Volume 2.
- [LL00] C. W. Lucas Jr. and J. C. Lucas. Weber’s force law for realistic finite-size elastic particles. *Journal of New Energy*, 5:70–89, 2000.
- [Llo80] J. T. Lloyd. Lord Kelvin demonstrated. *The Physics Teacher*, 18:16–24, 1980.
- [Llo07] J. T. Lloyd. Lorde Kelvin demonstrado. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 29:499–508, 2007. Traduzido por A. K. T. Assis.
- [LM23] Q. Li and S. Maher. Deriving an electric wave equation from Weber’s electrodynamics. *Foundations*, 3:323–334, 2023. Doi: 10.3390/foundations3020024.

- [Lol83] G. Lolling. Ueber Bewegungen elektrischer Theilchen nach dem Weber'schen Grundgesetz der Elektrodynamik. *Verhandlungen der Kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher*, 44:273–336, 1883.
- [Lor67a] L. Lorenz. On the identity of the vibrations of light with electrical currents. *Philosophical Magazine*, 34:287–301, 1867.
- [Lor67b] L. Lorenz. Ueber die Identität der Schwingungen des Lichts mit den elektrischen Strömen. *Annalen der Physik und Chemie*, 131:243–263, 1867. Aus dem “Oversigt over det K. Danske Vidensk. Selsk. Forhandl.” 1867. No. 1, vom Hrn. Verfatter übersandt.
- [Lor92] H. A. Lorentz. La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants. *Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles*, 25:363–552, 1892. Reimpresso em H. A. Lorentz, *Collected Papers* (Springer, Dordrecht, 1936), Vol. II, págs. 164–343.
- [Lor95] H. A. Lorentz. *Versuch einer Theorie der Electricischen und Optischen Erscheinungen in Bewegten Körpern*. E. J. Brill, Leiden, 1895. Reimpresso em H. A. Lorentz, *Collected Papers* (Springer, Dordrecht, 1937), Vol. V, págs. 1–138. Tradução para o inglês pelo Wikisource disponível em https://en.wikisource.org/wiki/Translation:Attempt_of_a_Theory_of_Electrical_and_Optical_Phenomena_in_Moving_Bodies.
- [Lor09] H. A. Lorentz. *The Theory of Electrons and Its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat*. Macmillan, New York, 1909. A course of lectures delivered in Columbia University, New York, in March and April, 1906.
- [Lor15] H. A. Lorentz. *The Theory of Electrons*. Teubner, Leipzig, second edition, 1915. Reimpresso em *Selected Works of H. A. Lorentz*, Vol. 5, N. J. Nersessian (ed.), (Palm Publications, Nieuwerkerk, 1987).
- [Lor31] H. A. Lorentz. *Lectures on Theoretical Physics*, volume 3. MacMilan, London, 1931.
- [LSM24] Q. Li, R. T. Smith, and S. Maher. Instantaneous action at a distance and the principle of locality, a new proposal about their possible connection. *Preprints*, 2024. Doi: 10.20944/preprints202404.1741.v2.
- [LSN21] A. R. d. S. Lima, A. P. B. d. Silva, and L. F. d. Nascimento. Uma proposta histórica e experimental para o estudo dos multiplicadores do efeito magnético. *Experiências em Ensino de Ciências*, 16:185–206, 2021.
- [LT17] I. Lorincz and M. Tajmar. Experimental investigation of the influence of spatially distributed charges on the inertial mass of moving electrons as predicted by Weber's electrodynamics. *Canadian Journal of Physics*, 95:1023–1029, 2017.

- [Mac83] E. Mach. *Die Mechanik in Ihrer Entwicklung, historisch-kritisch Dargestellt*. F. A. Brockhaus, Leipzig, 1883.
- [Mac49] E. Mach. *Desarrollo Histórico Crítico de la Mecánica*. Espasa Calpe Argentina S. A., Buenos Aires, 1949. Trad. de J. Babini.
- [Mac60] E. Mach. *The Science of Mechanics — A Critical and Historical Account of Its Development*. Open Court, La Salle, sixth edition, 1960. Translated by J. McCormack.
- [Mar84] R. d. A. Martins. Mayer e a conservação da energia. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 6:63–84, 1984.
- [Mar86] R. d. A. Martins. Ørsted e a descoberta do eletromagnetismo. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 10:89–114, 1986.
- [Mar90] S. Marinov. *The Thorny Way of Truth*, volume VIII. International Publishers East-West, Graz, 1990.
- [Mar22] R. d. A. Martins. Joule’s 1840 manuscript on the production of heat by voltaic electricity. *Notes and Records*, 76:117–153, 2022. Doi: 10.1098/rsnr.2020.0027.
- [Mar24] J. M. M. Martos. Pseudo-instantaneous action-at-a-distance with Weberian potentials. Doi: 10.20944/preprints202402.0881.v1, 2024.
- [Mat90] J.-P. Mathieu. Sur le théorème d’Ampère. *Revue d’Histoire des Sciences*, 43:333–338, 1990. pdf.
- [Max62] J. C. Maxwell, 1861-62. On physical lines of force. *Philosophical Magazine*, Vol. 21, págs. 161-175, 281-291 e 338-348 (1861); Vol. 23, págs. 12-24 e 85-95 (1862). Reimpresso em W. D. Niven (ed.), *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell* (Cambridge University Press, Cambridge, 1890), Vol. 1, págs. 451-513.
- [Max58] J. C. Maxwell. On Faraday’s lines of force. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 10:27–83, 1858. Lido em 10 de dezembro de 1855 e 11 de fevereiro de 1856. Reimpresso em W. D. Niven (ed.), *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell* (Cambridge University Press, Cambridge, 1890), Vol. 1, págs. 155-229.
- [Max65] J. C. Maxwell. A dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical Transactions*, 155:459–512, 1865. Lido em 8 de dezembro de 1864. Reimpresso em W. D. Niven (ed.), *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell* (Cambridge University Press, Cambridge, 1890), Vol. 1, págs. 526-597.
- [Max67] J. C. Maxwell. On the dynamical theory of gases. *Philosophical Transactions*, 157:49–88, 1867. Reimpresso em W. D. Niven (ed.), *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell* (Cambridge University Press, Cambridge, 1890), Vol. 2, págs. 26-78.

- [Max73a] J. C. Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism*, volume II. Clarendon Press, Oxford, 1873.
- [Max73b] J. C. Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism*, volume I. Clarendon Press, Oxford, 1873.
- [Max83a] J. C. Maxwell. *Lehrbuch der Electricität und des Magnetismus*. Springer, Berlin, 1883. 2 Bde. Deutsche Übersetzung von B. Weinstein.
- [Max83b] J. C. Maxwell. *Lehrbuch der Electricität und des Magnetismus*. Springer, Berlin, 1883. 1 Bde. Deutsche Übersetzung von B. Weinstein.
- [Max54a] J. C. Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Dover, New York, 1954. Two volumes. Unabridged republication of the third edition of 1891.
- [Max54b] J. C. Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism*, volume II. Dover, New York, 1954. Unabridged republication of the third edition of 1891.
- [Max65a] J. C. Maxwell. A dynamical theory of the electromagnetic field. In W. D. Niven, editor, *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, pages 526–597 (Vol. 1), New York, 1965. Dover. Article originally published in 1865.
- [Max65b] J. C. Maxwell. On physical lines of force. In W. D. Niven, editor, *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, pages 451–513 (Vol. 1), New York, 1965. Dover. Article originally published in 1861/2.
- [Max65c] J. C. Maxwell. On the dynamical theory of gases. In W. D. Niven, editor, *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, pages 26–78 (Vol. 2), New York, 1965. Dover. Article originally published in 1867.
- [Max95] J. C. Maxwell. *The Scientific Letters and Papers of James Clerk Maxwell*, volume II: 1862-1873. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Edited by P. M. Harman.
- [May42] J. R. Mayer. Bermerkungen über die Kräfte der unbelebten Natur. *Annalen der Chemie und Pharmacie*, 42:233–240, 1842.
- [May62] J. R. Mayer. Remarks on the forces of inorganic nature. *Philosophical Magazine*, 24:371–377, 1862. Translated by G. C. Foster.
- [May78] A. Mayer. Ueber den allgemeinsten Ausdruck der inneren Potentialkräfte eines Systems bewegter materieller Punkte, welcher sich aus dem Princip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung ergibt. *Mathematische Annalen*, 13:20–34, 1878. Mit unbedeutenden Veränderungen abgedruckt aus den Berichten der Kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. vom 23. April 1877.
- [May84] J. R. Mayer. Observações sobre as forças da natureza inanimada. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 6:85–95, 1984. Tradução de R. d. A. Martins.

- [MB17] B. A. Moura and T. Bonfim. Benjamin Franklin e a formação de temporais com raios e trovões: tradução comentada de uma carta a John Mitchel. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, 34:460–478, 2017. Doi: 10.5007/2175-7941.2017v34n2p460.
- [Meh87] J. Mehra. Erwin Schrödinger and the rise of wave mechanics. II. The creation of wave mechanics. *Foundations of Physics*, 17:1141–1188, 1987.
- [Mer84] U. C. Merzbach. *Carl Friedrich Gauss: A Bibliography*. Scholarly Resources Inc., Wilmington, Delaware, 1984.
- [MF94] F. Merkel and O. Fischer. Untitled. In *Wilhelm Weber’s Werke*, volume 6: Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge, page iii, Berlin, 1894. Springer.
- [Mik99] V. F. Mikhailov. The action of an electrostatic potential on the electron mass. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 24:161–169, 1999.
- [Mik01] V. F. Mikhailov. Influence of an electrostatic potential on the inertial electron mass. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 26:33–38, 2001.
- [Mik03] V. F. Mikhailov. Influence of a field-less electrostatic potential on the inertial electron mass. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 28:231–236, 2003.
- [MJ64] J. C. Maxwell and F. Jenkin. On the elementary relations between electrical measurements. *Report of the Thirty-Third Meeting of the British Association for the Advancement of Science; held at Newcastle-upon-Tyne in August and September 1863*, pages 130–163, 1864.
- [MJ65] J. C. Maxwell and F. Jenkin. On the elementary relations between electrical measurements. *Philosophical Magazine*, 29:507–525, 1865. Doi: 10.1080/14786446508643913.
- [ML22] B. C. d. S. Matos and M. C. d. Lima. Efeito Faraday: entre a atividade óptica natural e a teoria dos elétrons. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 44, 2022. Doi: 10.1590/1806-9126-RBEF-2021-0395.
- [Möl20] D. Möller. *History, Change and Sustainability*. Walter de Gruyter, Berlin, 2020.
- [Mon17] J. M. Montes. On limiting velocity with Weber-like potentials. *Canadian Journal of Physics*, 95:770–776, 2017. Doi: 10.1139/cjp-2017-0101.
- [Mon23] J. M. Montes. On the modernisation of Weber’s electrodynamics. *Magnetism*, 3:102–120, 2023. Doi: 10.3390/magnetism3020009.
- [Mor04a] B. Morse. Pointy tab blunt tab. Electrostatic Video Series. Wright Center for Innovative Science Education. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=6pnXOHjYj00>, 2004.

- [Mor04b] R. A. Morse, 2004. Benjamin Franklin and Electrostatics. Homepage criada por R. A. Morse. Disponível em: <https://www.compadre.org/student/items/detail.cfm?ID=3383>.
- [Mos36] O. F. Mossotti. *Sur les forces qui régissent la constitution intérieure des corps, apperçu pour servir à la détermination de la cause et des lois de l'action moléculaire*. L'Imprimerie Royale, Turin, 1836. Reimpresso em F. Zöllner, *Erklärung der Universellen Gravitation aus den statischen Wirkungen der Elektrizität und die allgemeine Bedeutung des Weber'schen Gesetzes* (L. Staackmann, Leipzig, 1882), págs. 83-112.
- [Mos66] O. F. Mossotti. On forces which regulate the internal constitution of bodies. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs*, Vol. 1, pages 448–469, New York, 1966. Johnson Reprint Corporation.
- [Mou18] B. A. Moura. As contribuições de Benjamin Franklin para a eletricidade no século XVIII. *A Física na Escola*, 16:27–35, 2018.
- [Mou19] B. A. Moura. *A Filosofia Natural de Benjamin Franklin: Traduções de Cartas e Ensaaios sobre a Eletricidade e a Luz*. Editora UFABC, São Paulo, 2019.
- [Mou20] B. A. Moura. Opinion page - Franklin and the kite: what can we learn from this episode? *HPS& ST Newsletter*, September:11–17, 2020.
- [Mou23] B. A. Moura. Picturing Benjamin Franklin's kite experiment in the nineteenth century: iconography, errors and implications for science education. *Science & Education*, 2023. Doi: 10.1007/s11191-023-00421-y.
- [MR87] J. Mehra and H. Rechenberg. *The Historical Development of Quantum Theory*, volume 5: Erwin Schrödinger and the Rise of Wave Mechanics. Part 1. Springer, New York, 1987.
- [MS20] R. A. Martins and A. P. B. Silva. Joule's experiments on the heat evolved by metallic conductors of electricity. *Foundations of Science*, pages 1–77, 2020. Doi: 10.1007/s10699-020-09681-1.
- [Ner33] J. J. Nervander. Mémoire sur un galvanomètre à châssis cylindrique par lequel on obtient immédiatement et sans calcul la mesure de l'intensité du courant électrique qui produit la déviation de l'aiguille aimantée. *Annales de Chimie et de Physique*, 55:156–184, 1833.
- [Ner89] N. J. Nersessian. Faraday's field concept. In D. Gooding and F. A. J. L. James, editors, *Faraday Rediscovered*, pages 175–187. Macmillan Press, Basingstoke, 1989.
- [Neu46] F. E. Neumann. Allgemeine Gesetze der inducirten elektrischen Ströme. *Annalen der Physik und Chemie*, 67:31–43, 1846.

- [Neu47] F. E. Neumann. Allgemeine Gesetze der inducirten elektrischen Ströme. *Abhandlungen der Königlich Akademien der Wissenschaften zu Berlin*, pages 1–87, 1847. Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 27. October 1845.
- [Neu48a] F.-E. Neumann. Essai d’une théorie mathématique de l’induction. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 13:113–178, 1848. Traduit par M. A. Bravais.
- [Neu48b] F. E. Neumann. Über ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirte elektrischer Ströme. G. Reimer, Berlin, 1848. Vorgelesen in der Berliner Akademie der Wissenschaften am 9. August 1847.
- [Neu49] F. Neumann. Über ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirte elektrischer Ströme. *Abhandlungen der Königlich Akademien der Wissenschaften zu Berlin*, pages 1–70, 1849. Vorgelegt in der Akademie der Wissenschaften am 9. August 1847.
- [Neu58] C. Neumann. *Explicare tentatur quomodo fiat ut lucis planum polarisationis per vires electricas vel magneticas declinetur*. Halis Saxonum, 1858.
- [Neu60] C. Neumann. Zur Theorie der Elasticität. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 57:281–318, 1860.
- [Neu63] C. Neumann. *Die magnetische Drehung der Polarisationssebene des Lichts — Versuch einer mathematischen Theorie*. Verlag des Buchhandlung des Waisenhauses, Halle, 1863.
- [Neu68a] C. Neumann. *Die Principien der Elektrodynamik. Eine mathematische Untersuchung*. H. Laupp, Tübingen, 1868. Reimpresso em *Mathematische Annalen*, Vol. 17, págs. 400–434 (1880).
- [Neu68b] C. Neumann. Resultate einer Untersuchung über die Principien der Elektrodynamik. *Nachrichten der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften*, 10:223–234, 1868.
- [Neu69a] C. Neumann. Notizen zu einer kürzlich erschienenen Schrift über die Principien der Elektrodynamik. *Mathematische Annalen*, 1:317–324, 1869.
- [Neu69b] C. Neumann. Ueber die oscillirende Entladung einer Franklin’schen Tafel. *Nachrichten der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften*, 2:17–26, 1869.
- [Neu71a] C. Neumann. Elektrodynamische Untersuchungen mit besonderer Rücksicht auf das Princip der Energie. *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-Physische Classe*, 23:386–449, 1871.
- [Neu71b] C. Neumann. Ueber die von Helmholtz in die Theorie der elektrischen Vorgänge eingeführten Prämissen, mit besonderer Rücksicht auf das Princip der Energie. *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-Physische Classe*, 23:450–478, 1871.

- [Neu72] C. Neumann. Ueber die Elementargesetze der Kräfte elektrodynamischen Ursprungs. *Mathematische Annalen*, 5:602–624, 1872.
- [Neu74] C. Neumann. Ueber das von Weber für die elektrischen Kräfte aufgestellte Gesetz. *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physischen Classe*, 11:77–200, 1874.
- [Neu75] C. Neumann. Ueber die gegen das Weber’schen Gesetz erhobenen Einwände. *Annalen der Physik und Chemie*, 155:211–230, 1875.
- [Neu77] C. Neumann. Ueber die gegen das Weber’schen Gesetz erhobenen Einwände. *Mathematische Annalen*, 11:318–340, 1877.
- [Neu21a] C. Neumann. Notes on a recently published essay on the principles of electrodynamics. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume IV: Conservation of Energy, Weber’s Planetary Model of the Atom and the Unification of Electromagnetism and Gravitation, pages 49–54, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Neu21b] C. Neumann. Principles of electrodynamics. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume IV: Conservation of Energy, Weber’s Planetary Model of the Atom and the Unification of Electromagnetism and Gravitation, pages 17–47, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [New34] I. Newton. *Mathematical Principles of Natural Philosophy*. University of California Press, Berkeley, 1934. Cajori edition.
- [New52] I. Newton. *Mathematical Principles of Natural Philosophy*, volume 34, pp. 1-372 of *Great Books of the Western World*. Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952. Translated by A. Motte and revised by F. Cajori.
- [New79] I. Newton. *Opticks*. Dover, New York, 1979.
- [New90] I. Newton. *Principia — Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*. Nova Stella/Edusp, São Paulo, 1990. Livro I: O Movimento dos Corpos. Tradução de T. Ricci, L. G. Brunet, S. T. Gehring e M. H. C. Célia.
- [New96] I. Newton. *Óptica*. Edusp, São Paulo, 1996. Tradução, introdução e notas de A. K. T. Assis.
- [New99] I. Newton. *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy*. University of California Press, Berkeley, 1999. A new translation by I. B. Cohen and A. Whitman, assisted by J. Budenz.
- [New08] I. Newton. *Principia — Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*. Edusp, São Paulo, 2008. Livro II: O Movimento dos Corpos (em Meios com Resistência). Livro III: O Sistema do Mundo (Tratado Matematicamente). Tradução de A. K. T. Assis.

- [New10] I. Newton. *Principia — Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*. Folha de São Paulo, São Paulo, 2010. Livro III: O Sistema do Mundo (Tratado Matematicamente). Tradução de A. K. T. Assis. Coleção Folha de São Paulo: Livros que Mudaram o Mundo, Volume 9.
- [Nor96] H. S. Norrie. *Ruhmkorff Induction-Coils, Their Construction, Operation and Application*. Spon & Chamberlain, New York, 1896.
- [Nor65] J. D. North. *The Measure of the Universe — A History of Modern Cosmology*. Clarendon Press, Oxford, 1965.
- [Nor95] J. D. Norton. Mach's principle before Einstein. In J. B. Barbour and H. Pfister, editors, *Mach's Principle — From Newton's Bucket to Quantum Gravity*, pages 9–57, Boston, 1995. Birkhäuser.
- [Oer20a] H. C. Oersted. Expériences sur l'effet du conflit électrique sur l'aiguille aimantée. *Annales de Chimie et de Physique*, 14:417–425, 1820.
- [Oer20b] H. C. Oersted. Experiments on the effect of a current of electricity on the magnetic needle. *Annals of Philosophy*, 16:273–277, 1820. Traduzido a partir de uma versão impressa escrita em latim pelo autor e transmitida por ele ao Editor dos *Annals of Philosophy*. Reimpresso em *Selected Works of Hans Christian Ørsted* (Princeton, Princeton University Press, 1998), traduzido e editado por K. Jelved, A. D. Jackson e O. Knudsen.
- [Oer20c] J. C. Oersted. Versuche über die Wirkung des electrischen Conflicts auf die Magnetnadel. *Annalen der Physik und Chemie*, 6:295–304, 1820. Traduzido por Gilbert.
- [Oer65] H. C. Oersted. Experiments on the effect of a current of electricity on the magnetic needle. In R. A. R. Tricker, *Early Electrodynamics — The First Law of Circulation*, pages 113–117, New York, 1965. Pergamon. Translation from Thomson's *Annals of Philosophy*, October 1820. Translated from a printed account drawn up in Latin by the author and transmitted by him to the Editor of the *Annals of Philosophy*.
- [Ohm26a] G. S. Ohm. Bestimmung des Gesetzes, nach welchem Metalle die Kontakt-Elektrizität leiten, nebst einem Entwurfe zu einer Theorie des Voltaschen Apparates und des Schweiggerschen Multiplikators. *Journal für Chemie und Physik*, 46:137–166, 1826. Reimpresso em *Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften*, Número 244, C. Piel (ed.), (Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1938), págs. 8-29.
- [Ohm26b] G. S. Ohm. Ein Nachtrag zu dem vorstehenden Aufsatz. *Annalen der Physik und Chemie*, 7:117–118, 1826.
- [Ohm26c] G. S. Ohm. Versuch einer Theorie der durch galvanische Kräfte hervorgebrachten elektroskopischen Erscheinungen. *Annalen der Physik und Chemie*, 6:459–469, 1826.

- [Ohm26d] G. S. Ohm. Versuch einer Theorie der durch galvanische Kräfte hervorgebrachten elektroskopischen Erscheinungen (Beschluss). *Annalen der Physik und Chemie*, 7:45–54, 1826.
- [Ohm27] G. S. Ohm. *Die Galvanische Kette, mathematisch bearbeitet*. T. H. Riemann, Berlin, 1827.
- [Ohm60] G. S. Ohm. *Théorie Mathématique des Courants Électriques*. L. Hachette et Co., Paris, 1860. Traduction, préface et notes de J.-M. Gaugain.
- [Ohm66] G. S. Ohm. The galvanic circuit investigated mathematically. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs*, Vol. 2, pages 401–506, New York, 1966. Johnson Reprint Corporation. English translation by W. Francis.
- [O’R65] A. O’Rahilly. *Electromagnetic Theory — A Critical Examination of Fundamentals*. Dover, New York, 1965.
- [Ørs86] H. C. Ørsted. Experiências sobre o efeito do conflito elétrico sobre a agulha magnética. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 10:115–122, 1986. Tradução de R. d. A. Martins.
- [Ørs98] H. C. Ørsted. Experiments on the effect of the electric conflict on the magnetic needle. In K. Jelved, A. D. Jackson, and O. Knudsen, editors, *Selected Scientific Works of Hans Christian Ørsted*, pages 413–416. Princeton University Press, Princeton, 1998. Article originally written in Latin in 1820.
- [Pai82] A. Pais. ‘*Subtle is the Lord...*’ — *The Science and the Life of Albert Einstein*. Oxford University Press, Oxford, 1982.
- [Pai86] A. Pais. *Inward Bound — Of Matter and Forces in the Physical World*. Clarendon Press, Oxford, 1986.
- [Pel34] Peltier. Nouvelles expériences sur la caloricité des courans électriques. *Annales de Chimie et de Physique*, 56:371–386, 1834.
- [Phi90a] T. E. Phipps Jr. Toward modernization of Weber’s force law. *Physics Essays*, 3:414–420, 1990.
- [Phi90b] T. E. Phipps Jr. Weber-type laws of action-at-a-distance in modern physics. *Apeiron*, 8:8–14, 1990.
- [Phi92] T. E. Phipps Jr. Derivation of a modernized Weber force law. *Physics Essays*, 5:425–428, 1992.
- [Phi96] T. E. Phipps, Jr. Clock rates in a machian universe. *Toth-Maatian Review*, 13:5910–5917, 1996.
- [Phi99] T. E. Phipps Jr. Meditations on action-at-a-distance. In A. E. Chubykalo, V. Pope, and R. Smirnov-Rueda, editors, *Instantaneous Action at a Distance in Modern Physics: “Pro” and “Contra”*, pages 137–155, Commack, 1999. Nova Science Publishers.

- [Phi13] T. E. Phipps Jr. *Old Physics for New: a worldview alternative to Einstein's relativity theory*. Apeiron, Montreal, 2nd edition, 2013.
- [PK74] J. M. Pearson and A. Kilambi. Velocity-dependent nuclear forces and Weber's electrodynamics. *American Journal of Physics*, 42:971–975, 1974.
- [Plü52] Plücker. Ueber die Reciprocität der elektro-magnetischen und magneto-elektrischen Erscheinungen. *Annalen der Physik und Chemie*, 87:352–386, 1852.
- [Pog57] J. C. Poggendorff. Bemerkung zu dem Aufsatz des Herrn Prof. Kirchhoff. *Annalen der Physik und Chemie*, 100:351–352, 1857. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 4, pág. 242, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1894).
- [Pog21] J. C. Poggendorff. Comment on the paper by Prof. Kirchhoff. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume III: Measurement of Weber's Constant c , Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, page 225, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Poi12a] Poisson. Extrait d'un mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs. *Journal de Physique, de Chimie, d'Histoire Naturelle et des Arts*, 75:229–237, 1812.
- [Poi12b] Poisson. Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs. *Mémoires de la Classe des Sciences Mathématiques et Physiques*, pages 1–92, 1812. Année 1811. Première partie. Lu les 9 mai et 3 août 1812.
- [Poi13] Poisson. Second mémoire sur la distribution de l'électricité a la surface des corps conducteurs. *Journal de Physique, de Chimie, d'Histoire Naturelle et des Arts*, 77:380–386, 1813. Lu à l'Institut, le 6 septembre 1813.
- [Poi22a] S. D. Poisson. Mémoire sur la théorie du magnétisme. Lu à l'Académie royale des Sciences le 2 Février 1824. *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France*, 5:247–338, 1821-1822. Histoire de l'Académie. Analyse des travaux de l'Académie royale des sciences pendant l'année 1821, partie mathématique; par M. le chevalier Delambre, secrétaire perpétuel. Apesar da data, este volume foi publicado apenas em 1826.
- [Poi22b] S. D. Poisson. Second Mémoire sur la théorie du magnétisme. Lu à l'Académie royale des Sciences le 27 Décembre 1824. *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France*, 5:488–533, 1821-1822. Histoire de l'Académie. Analyse des travaux de l'Académie royale des sciences pendant l'année 1821, partie mathématique; par M. le chevalier Delambre, secrétaire perpétuel. Apesar da data, este volume foi publicado apenas em 1826.

- [Poi25a] Poisson. Solution d'un problème relatif au magnétisme terrestre. *Annales de Chimie et de Physique*, 30:257–263, 1825.
- [Poi25b] Poisson. Solution d'un problème relatif au magnétisme terrestre. *Connaissance des Temps, ou des Mouvements Célestes, à l'usage des Astronomes et des Navigateurs, pour l'An 1828*, pages 322–330, 1825. Paris.
- [Poi53] H. Poincaré. Les limites de la loi de Newton. *Bulletin Astronomique*, 17:121–178 and 181–265, 1953.
- [Poi19] Poisson. Essay on the distribution of electricity on the surface of conducting bodies. Traduzido por S. Gallagher. Disponível em <https://histomathsci.blogspot.com>, 2019.
- [Pot84] A. Potier. *Collection de Mémoires relatifs à la Physique*, volume 1: *Mémoires de Coulomb*. Gauthiers-Villars, Paris, 1884.
- [Pou37] Pouillet. Mémoire sur la pile de Volta et sur la loi générale de l'intensité que prennent les courants, soit qu'ils proviennent d'un seul élément, soit qu'ils proviennent d'une pile à grande ou à petite tension. *Comptes Rendues de l'Académie des Sciences de Paris*, 4:267–279, 1837.
- [PPL16] F. A. Palacios, R. B. Passaglia, and F. M. S. Lima. Força gravitacional exercida por uma casca esférica sobre um corpo acelerado dentro dela. *Physicae Organum*, 2:1–7, 2016.
- [Pry15] K. Prytz. *Electrodynamics: The Field-Free Approach*. Springer, New York, 2015.
- [Pry18] K. A. Prytz. Meissner effect in classical physics. *Progress in Electromagnetics Research M*, 64:1–7, 2018.
- [Rag92] S. Ragusa. Gravitation with a modified Weber force. *Foundations of Physics Letters*, 5:585–589, 1992.
- [Rei14] H. Reissner. Über die Relativität der Beschleunigungen in der Mechanik. *Physikalische Zeitschrift*, 15:371–375, 1914.
- [Rei15] H. Reissner. Über eine Möglichkeit die Gravitation als unmittelbare Folge der Relativität der Trägheit abzuleiten. *Physikalische Zeitschrift*, 16:179–185, 1915.
- [Rei16] H. Reissner. Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie. *Annalen der Physik*, 50:106–120, 1916.
- [Rei95a] H. Reissner. On a possibility of deriving gravitation as a direct consequence of the relativity of inertia. In J. B. Barbour and H. Pfister, editors, *Mach's Principle — From Newton's Bucket to Quantum Gravity*, pages 143–146, Boston, 1995. Birkhäuser. Translated by J. B. Barbour.

- [Rei95b] H. Reissner. On the relativity of accelerations in mechanics. In J. B. Barbour and H. Pfister, editors, *Mach's Principle, From Newton's Bucket to Quantum Gravity*, pages 134–142, Boston, 1995. Birkhäuser. Translated by J. B. Barbour.
- [Rei02] K. Reich. *Gauß' Werke in Kurzfassung*. Erwin Rauner, Augsburg, 2002. Algorismus, Studien zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften, Vol. 39.
- [Rei13] K. Reich. Die Beziehungen zwischen Kopenhagen und Göttingen auf dem Gebiet des Erdmagnetismus: Ergebnisse einer Analyse der Briefe, die “Hans Christian Oersted” mit “Carl Friedrich Gauß” und “Wilhelm Weber” wechselte. *Sudhoffs Archiv*, 97:21–38, 2013.
- [Rei19] K. Reich, 2019. Die Intensität der erdmagnetischen Kraft: Nr. 15, pp. xxxix–xlii. In *Carl Friedrich Gauss' — Werke — Supplement — Band 3: Varia: 15 Abhandlungen in deutscher Übersetzung*. Mit einer Einleitung, einer Bibliographie und Registern herausgegeben von Karin Reich. Hrsg. von der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen, Universitätsverlag Göttingen 2019, pp. 533–594.
- [Rib08] J. E. A. Ribeiro, 2008. Sobre a Força de Lorentz, os Conceitos de Campo e a “Essência” do Eletromagnetismo Clássico. Dissertação de Mestrado, Instituto de Física, Universidade de São Paulo, Brasil.
- [Rie67a] B. Riemann. A contribution to electrodynamics. *Philosophical Magazine*, 34:368–372, 1867. Esse texto foi escrito em 1858.
- [Rie67b] B. Riemann. Ein Beitrag zur Elektrodynamik. *Annalen der Physik und Chemie*, 131:237–243, 1867. Esse texto foi escrito em 1858.
- [Rie74] E. Riecke. Ueber Molecularbewegung zweier Theilchen, deren Wechselwirkung durch das Webersche Gesetz der electrischen Kraft bestimmt wird. *Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augustus-Universität*, 27:665–672, 1874.
- [Rie76] B. Riemann. *Schwere, Elektrizität und Magnetismus*. Carl Rümpler, Hannover, 1876. Nach den Vorlesungen von Bernhard Riemann bearbeitet von Karl Hattendorff.
- [Rie92a] E. Riecke. Vorwort zum zweiten Bande. In *Wilhelm Weber's Werke*, volume 2: Magnetismus, pages iii–vi, Berlin, 1892. Springer.
- [Rie92b] E. Riecke. *Wilhelm Weber (geb. 24. October 1804, gest. 23. Juni 1891)*. Dieterichsche Verlags-Buchhandlung, Göttingen, 1892. Rede gehalten in der öffentlichen Sitzung der K. Gesellschaft der Wissenschaften am 5. December 1891. Reimpresso em Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Vol. 38, págs. 1–44 (1892).
- [Rie93] E. Riecke. Vorwort zum fünften Bande. In *Wilhelm Weber's Werke*, volume 5: Wellenlehre, pages iii–v, Berlin, 1893. Springer.

- [Rie77a] B. Riemann. A contribution to electrodynamics. In C. White, *Energy Potential: Toward a New Electromagnetic Field Theory*, pages 295–300, New York, 1977. Campaigner. Translated by J. J. Cleary Jr.
- [Rie77b] B. Riemann. Gravity, electricity, and magnetism. In C. White, *Energy Potential: Toward a New Electromagnetic Field Theory*, pages 173–293, New York, 1977. Campaigner. According to the lectures of Bernhard Riemann compiled by Karl Hattendorf. Translated by J. J. Cleary Jr.
- [Rie24] E. Riecke. Memorial speech. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume V: Unipolar Induction, Galvanometry, Biographical Studies, and Weber’s Electrodynamics Versus Different Field Theories, pages 179–202, Montreal, 2024. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Rit92] E. Ritter. Bewegung eines materiellen mit Elektrizität geladenen Theilchens unter der Einwirkung eines ruhenden Centrums bei Gültigkeit des Weber’schen Gesetzes. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 37:8–24, 1892.
- [RVA08] J. E. A. Ribeiro, A. Vannucci, and A. K. T. Assis. The multiple definitions of ‘field’ in the context of electromagnetism. In M. G. P. Batista, editor, *Proceedings of the VI Taller Internacional “ENFIQUI 2008” — La Enseñanza de la Física y la Química*, pages 1–4, Matanzas, Cuba, 2008. Universidad Pedagógica “Juan Marinello”.
- [Sch20] J. S. Schweigger. Zusätze zu Oersted’s elektro-magnetische Versuchen. *Allgemeine Literatur-Zeitung*, 296:cols. 622–624, 1820.
- [Sch21a] Schweiger. Sur l’electro-magnétisme. *Bibliothèque Universelle des Sciences, Belles-Lettres, et Arts*, 16:197–200, 1821.
- [Sch21b] J. S. Schweigger. Noch einige Worte über diese neuen elektromagnetischen Phänomene. *Journal für Chemie und Physik*, 31:35–41, 1821.
- [Sch21c] J. S. Schweigger. Über Elektromagnetismus. *Journal für Chemie und Physik*, 31:7–17, 1821.
- [Sch21d] J. S. Schweigger. Zusätze zu Oersted’s elektromagnetische Versuchen. *Journal für Chemie und Physik*, 31:1–6, 1821.
- [Sch97] W. Scheibner. Ueber die formale Bedeutung des Hamiltonschen Principis und das Weber’sche Gesetz. *Berichte über die Verhandlung der königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-Phys. Classe*, 49:578–601, 1897.
- [Sch25] E. Schrödinger. Die Erfüllbarkeit der Relativitätsforderung in der klassischen Mechanik. *Annalen der Physik*, 77:325–336, 1925.
- [Sch84] E. Schrödinger. *Collected Papers*, volume 2. Austrian Academy of Sciences, Vienna, 1984.

- [Sch95] E. Schrödinger. The possibility of fulfillment of the relativity requirement in classical mechanics. In J. B. Barbour and H. Pfister, editors, *Mach's Principle — From Newton's Bucket to Quantum Gravity*, pages 147–158, Boston, 1995. Birkhäuser. Translated by J. B. Barbour.
- [Sch04] K.-H. Schlote. Carl Neumann's contributions to electrodynamics. *Physics in Perspective*, 6:252–270, 2004. Doi: 10.1007/s00016-003-0192-9.
- [Sch21] E. Schrödinger, 2021. Fulfilling the demand of relativity in classical mechanics. Traduzido por D. H. Delphenich. Disponível em <http://www.neo-classical-physics.info/index.html>.
- [See25] Seebeck. Magnetische Polarisation der Metalle und Erze durch Temperatur-Differenz. *Abhandlungen der Königlichten Akademie der Wissenschaften zu Berlin — Aus den Jahren 1822 und 1823*, pages 265–373, 1825. Auszug aus vier Vorlesungen, welche in der Akademie der Wissenschaften am 16. August, am 18. und 25. Oktober 1821 und am 11. Februar 1822 gehalten worden.
- [See26] T. J. Seebeck. Ueber die Magnetische Polarisation der Metalle und Erze durch Temperatur-Differenz. *Annalen der Physik und Chemie*, 6:1–10, 133–160 and 253–286, 1826. Ausgezogen aus den so eben erschienen Denkschriften für 1822 und 1823.
- [See64] C. Seegers, 1864. De motu perturbationibusque planetarum secundum legem electrodynamicae Weberianae solum ambientium. Dissertation, Göttingen.
- [See17a] H. Seeliger. Bemerkung zu P. Gerbers Aufsatz: “Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation”. *Annalen der Physik*, 53:31–32, 1917.
- [See17b] H. Seeliger. Weitere Bemerkungen zur “Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation”. *Annalen der Physik*, 54:38–40, 1917.
- [See24] C. Seegers. *Über die Bewegung und die Störungen der Planeten, wenn dieselben sich nach dem Weberschen elektrodynamischen Gesetz um die Sonne bewegen*. Kommissionsverlag von Friedr. Vieweg & Sohn Akt. Ges., Braunschweig, 1924. Neu herausgegeben von P. Heylandt. Übersetzt von F. Diestel.
- [See69] T. J. Seebeck. Thermoelectric currents. In W. F. Magie, editor, *A Source Book in Physics*, pages 461–464, New York, 1969. McGraw-Hill.
- [Ser85] A. Servus, 1885. Untersuchungen über die Bahn und die Störungen der Himmelskörper mit Zugrundelegung des Weber'schen elektrodynamischen Gesetzes. Dissertation, Halle.
- [She91] C. W. Sherwin. The Weber radar. *Physics Essays*, 4:417–419, 1991.
- [Sie60] W. Siemens. Vorschlag eines reproducirbaren Widerstandsmaaßes. *Annalen der Physik und Chemie*, 186:1–20, 1860. Doi: 10.1002/andp.18601860502.

- [Sie61] W. Siemens. Proposal for a new reproducible standard measure of resistance to galvanic currents. *Philosophical Magazine*, 21:25–38, 1861. Translated by F. Guthrie.
- [Sih21] A. Sihvola. Johan Jacob Nervander and the quantification of electric current. *IEEE Antennas & Propagation Magazine*, 63:123–128, 2021. Doi: 10.1109/MAP.2020.3039803.
- [SJM15] R. T. Smith, F. P. M. Jjunju, and S. Maher. Evaluation of electron beam deflections across a solenoid using Weber-Ritz and Maxwell-Lorentz electrodynamics. *Progress in Electromagnetics Research*, 151:83–93, 2015.
- [SJY⁺16] R. T. Smith, F. P. M. Jjunju, I. S. Young, S. Taylor, and S. Maher. A physical model for low-frequency electromagnetic induction in the near field based on direct interaction between transmitter and receiver electrons. *Proceedings of the Royal Society A*, 472:20160338, 2016. Doi: 10.1098/rspa.2016.0338.
- [SK07] M. C. d. Silva and S. Krapas. Controvérsia ação a distância/ação mediada: abordagens didáticas para o ensino das interações físicas. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 29:471–479, 2007.
- [SM17] R. T. Smith and S. Maher. Investigating electron beam deflections by a long straight wire carrying a constant current using direct action, emission-based and field theory approaches of electrodynamics. *Progress in Electromagnetics Research B*, 75:79–89, 2017.
- [SP06] C. C. Silva and A. C. Pimentel, 2006. Benjamin Franklin e a história da eletricidade em livros didáticos. Anais do X Encontro de Pesquisa em Ensino de Física, Londrina, PR, 15 a 19/08/2006. Disponível em: www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/epef/x/sys/resumos/T0150-1.pdf.
- [SP08] C. C. Silva and A. C. Pimentel. Uma análise da história da eletricidade presente em livros didáticos: o caso de Benjamin Franklin. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, 25:141–159, 2008.
- [SP13] K. W. Scheller and T. J. Pickett. $F = qv \times b$: v is with respect to what? *The Physics Teacher*, 51:169–170, 2013.
- [SS87] A. G. Sokol’skii and A. A. Sadovnikov. Lagrangian solutions for Weber’s law of attraction. *Soviet Astronomy (Astronomical Journal)*, 31:90–93, 1987.
- [STM15] R. T. Smith, S. Taylor, and S. Maher. Modelling electromagnetic induction via accelerated electron motion. *Canadian Journal of Physics*, 93:802–806, 2015. Doi: 10.1139/cjp-2014-0366.
- [Tai68] P. G. Tait. *Sketch of Thermodynamics*. Edmonston and Douglas, Edinburgh, 1868.
- [Taj13] M. Tajmar. Propellantless propulsion with negative matter generated by electric charges. *AIAA Joint Propulsion Conference*, AIAA-2013-3913, 2013.

- [Taj15] M. Tajmar. Derivation of the Planck and fine-structure constant from Assis’s gravity model. *Journal of Advanced Physics*, 4:219–221, 2015.
- [TCA04] A. C. Tort, A. M. Cunha, and A. K. T. Assis. Uma tradução comentada de um texto de Maxwell sobre a ação a distância. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 26:273–282, 2004.
- [Ten97] J. Tennenbaum. Wilhelm Weber’s ‘Aphorisms’ — On the hypotheses of temporal ordering. *21st Century Science & Technology*, 10(2):50–51, 1997.
- [Tho53a] W. Thomson. On the dynamical theory of heat, with numerical results deduced from Mr. Joule’s equivalent of a thermal unit, and M. Regnault’s observations on steam. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 20:261–288 and 475–482, 1853. Lido em 17 de março de 1851. Reimpresso em *Philosophical Magazine*, Vol. 4, págs. 8-21, 105-117, 168-176 e 424-434 (1852) e Vol. 9, págs. 523-531 (1855); e também em W. Thomson (editor), *Mathematical and Physical Papers*, Vol. 1, artigo XLVIII, págs. 174-332 (Cambridge University Press, Cambridge, 1882).
- [Tho53b] W. Thomson. On transient electric currents. *Philosophical Magazine*, 5:393–405, 1853.
- [Tho81] J. J. Thomson. On the electric and magnetic effects produced by the motion of electrified bodies. *Philosophical Magazine*, 11:229–249, 1881.
- [Tho86] J. J. Thomson. Report on electrical theories. *Report of the Fifty-Fifth Meeting of the British Association for the Advancement of Science (B. A. Report)*, pages 97–155, 1886. Held at Aberdeen in September 1885.
- [Tho01] S. P. Thompson. *Michael Faraday: His Life and Work*. Cassell and Company, London, 1901.
- [Tho04] J. J. Thomson. *Electricity and Matter*. Yale University Press, New Haven, 1904.
- [Tho21] J. J. Thomson. *Elements of the Mathematical Theory of Electricity and Magnetism*. Cambridge University Press, Cambridge, 5th edition, 1921.
- [Tho29] J. J. Thomson. *Beyond the Electron*. Cambridge University Press, Cambridge, 1929.
- [Tis72] F. Tisserand. Sur le mouvement des planètes autour du soleil, d’après la loi électrodynamique de Weber. *Comptes Rendues de l’Academie des Sciences de Paris*, 75:760–763, 1872.
- [Tis90] F. Tisserand. Sur les mouvements des planètes, en supposant l’attraction représentée par l’une des lois électrodynamiques de Gauss ou de Weber. *Comptes Rendues de l’Academie des Sciences de Paris*, 110:313–315, 1890.
- [Tis96] F. F. Tisserand. *Traité de Mécanique Céleste*, volume 4, Chapter 28 (Vitesse de propagation de l’attraction), pp. 499-503, “Loi d’attraction conforme à la loi électrodynamique de Weber”. Gauthier-Villars, Paris, 1896.

- [Tis17a] F. Tisserand, 2017. On the motion of planets around the Sun according to Weber’s electrodynamical law. Translated by D. H. Delphenich. Disponível em <http://www.neo-classical-physics.info/index.html>.
- [Tis17b] F. Tisserand, 2017. On the motion of planets when one supposes that the attraction is represented by either the electrodynamical law of Gauss or that of Weber. Translated by D. H. Delphenich. Disponível em <http://www.neo-classical-physics.info/index.html>.
- [Tis21] F. F. Tisserand. On the motion of planets around the sun according to Weber’s electrodynamic law. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume IV: Conservation of Energy, Weber’s Planetary Model of the Atom and the Unification of Electromagnetism and Gravitation, pages 115–118, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Tis24a] F. Tisserand. About the movement of the planets around the sun, according to Weber’s electrodynamic law. Traduzido por J. Plaice: The precession of mercury’s perihelion can be derived from Weber’s and Riemann’s force laws, without general relativity. Disponível em <https://johnplaice.substack.com/p/the-precession-of-mercurys-perihelion>, 2024.
- [Tis24b] F. Tisserand. On the movements of the planets, supposing the attraction represented by one of Gauss’s or Weber’s electrodynamic laws. Traduzido por J. Plaice: The precession of mercury’s perihelion can be derived from Weber’s and Riemann’s force laws, without general relativity. Disponível em <https://johnplaice.substack.com/p/the-precession-of-mercurys-perihelion>, 2024.
- [Tom12a] F. D. Tombe. Maxwell’s original equations. *The General Science Journal*, 2012. Disponível em: www.gsjournal.net/Science-Journals/Essays/View/3889.
- [Tom12b] F. D. Tombe. The significance of Maxwell’s equations. *The General Science Journal*, 2012. Disponível em: www.gsjournal.net/Science-Journals/Essays/View/4258.
- [Tra18] M. Tran. Evidence for Maxwell’s equations, fields, force laws and alternative theories of classical electrodynamics. *European Journal of Physics*, 39:063001, 2018. Doi: 10.1088/1361-6404/aadf9b.
- [TSLBLVRR15] H. Torres-Silva, J. López-Bonilla, R. López-Vázquez, and J. Rivera-Rebolledo. Weber’s electrodynamics for the hydrogen atom. *Indonesian Journal of Applied Physics*, 5:39–47, 2015.
- [TT67] W. Thomson and P. G. Tait. *Treatise on Natural Philosophy*. Clarendon Press, Oxford, 1867.
- [TT71] W. Thomson and P. G. Tait. *Handbuch der Theoretischen Physik*, volume 1, Part 1. Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1871. Authorized translation by H. Helmholtz and G. Wertheim.

- [Tyn54] J. Tyndall. On the diamagnetic force. *British Association Report, Notes and Abstracts of Miscellaneous Communications to the Sections*, pages 14–16, 1854. London: Murray.
- [Tyn55a] J. Tyndall. On the nature of the force by which bodies are repelled from the poles of a magnet. *Proceedings of the Royal Institution of Great Britain*, 2:13–16, 1855.
- [Tyn55b] J. Tyndall. On the nature of the force by which bodies are repelled from the poles of a magnet; to which is prefixed, an account of some experiments on molecular influences. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 145:1–51, 1855.
- [Tyn55c] J. Tyndall. On the nature of the force by which bodies are repelled from the poles of a magnet; to which is prefixed, an account of some experiments on molecular influences. *Philosophical Magazine*, 10:153–179 and 257–290, 1855.
- [Tyn56] J. Tyndall. Further researches on the polarity of the diamagnetic force. *Philosophical Transactions*, 146:237–259, 1856.
- [Tyn88] J. Tyndall. *Researches on Diamagnetism and Magne-crystallic Action including the Question of Diamagnetic Polarity*. D. Appleton and Company, New York, 1888.
- [Ver63] É. Verdet. Recherches sur les propriétés optiques développées dans les corps transparents par l’action du magnétisme. *Annales de Chimie et de Physique*, 69:415–491, 1863.
- [Voi92] W. Voigt. Vorwort zum ersten Bande. In *Wilhelm Weber’s Werke*, volume 1: Akustik, Mechanik, Optik und Wärmelehre, pages iii–iv, Berlin, 1892. Springer.
- [Voi24] W. Voigt *et al.* Prefaces to the Collected Works of Wilhelm Weber (1892–1894). In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume V: Unipolar Induction, Galvanometry, Biographical Studies, and Weber’s Electrodynamics Versus Different Field Theories, pages 257–268, Montreal, 2024. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [VS08] J. Venermo and A. Sihvola. The tangent galvanometer of Johan Jacob Nervander. *IEEE Instrumentation & Measurement Magazine*, 11:16–23, 2008.
- [War13] V. P. Warkulwiz. *Universe without Space and Time*. Albertus Magnus Apostolate for Religion and Science, Bensalem, 2013.
- [Web35] W. Weber. Ueber die Elasticität der Seidenfäden. *Annalen der Physik und Chemie*, 34:247–257, 1835. Reimpresso em *Wilhelm Weber’s Werke*, Vol. 1, W. Voigt (ed.), (Springer, Berlin, 1892), págs. 438–444.

- [Web38] W. Weber. Das Induktions-Inklinatorium. In C. F. Gauss and W. Weber, editors, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837*, volume II, chapter V, pages 81–96. Dieterichschen Buchhandlung, Göttingen, 1838. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 2, E. Riecke (ed.), (Springer, Berlin, 1892), págs. 75-88.
- [Web39] W. Weber. Der Induktor zum Magnetometer. In C. F. Gauss and W. Weber, editors, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1838*, volume III, chapter IV, pages 86–101. Weidmannschen Buchhandlung, Leipzig, 1839. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 2, E. Riecke (ed.), (Springer, Berlin, 1892), págs. 105-118.
- [Web41] W. Weber. Über magnetische Friction. In C. F. Gauss and W. Weber, editors, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840*, volume V, chapter IV, pages 46–58. Weidmannschen Buchhandlung, Leipzig, 1841. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 2, E. Riecke (ed.), (Springer, Berlin, 1892), págs. 200-211.
- [Web46] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen — Über ein allgemeines Grundgesetz der elektrischen Wirkung. *Abhandlungen bei Begründung der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften am Tage der zweihundertjährigen Geburtstagfeier Leibnizens herausgegeben von der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft (Leipzig)*, pages 211–378, 1846. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 25-214.
- [Web48a] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen. *Annalen der Physik und Chemie*, 73:193–240, 1848. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 215-254.
- [Web48b] W. Weber. Über die Erregung und Wirkung des Diamagnetismus nach den Gesetzen inducirter Ströme. *Annalen der Physik und Chemie*, 73:241–256, 1848. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 255-268.
- [Web48c] W. Weber. Über die Erregung und Wirkung des Diamagnetismus nach den Gesetzen inducirter Ströme. *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Klasse*, Band I aus den Jahren 1846 und 1847:346–358, 1848. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 255-265.
- [Web51] W. Weber. Messungen galvanischer Leitungswiderstände nach einem absolutem Maasse. *Annalen der Physik und Chemie*, 82:337–369, 1851. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 276-300.
- [Web52a] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere über Diamagnetismus. *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physischen Classe*, 1:485–577,

1852. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 473-554.
- [Web52b] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Widerstandsmessungen. *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physischen Classe*, 1:199–381, 1852. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 301-471.
- [Web52c] W. Weber. On the measurement of electro-dynamic forces. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs*, Vol. 5, pages 489–529, London, 1852. Taylor and Francis. Disponível em <https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.212784> e <https://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/2501#/summary>.
- [Web55] W. Weber. Vorwort bei der Übergabe der Abhandlung: Elektrodynamische maassbestimmungen, insbesondere zurückführung der stromintensitäts-messungen auf mechanisches maass. *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Klasse*, 17:55–61, 1855. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 591-596.
- [Web61] W. Weber. On the measurement of electric resistance according to an absolute standard. *Philosophical Magazine*, 22:226–240 and 261–269, 1861. Traduzido pelo Dr. E. Atkinson.
- [Web62] W. Weber. Zur Galvanometrie. *Abhandlungen der Königlich Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematische Klasse*, 10:3–96, 1862. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 4, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1894), págs. 17-96.
- [Web64] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere über elektrische Schwingungen. *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physischen Classe*, 6:571–716, 1864. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 4, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1894), págs. 105-241.
- [Web69] W. Weber. Ueber einen einfachen Ausspruch des allgemeinen Grundgesetzes der elektrischen Wirkung. *Annalen der Physik und Chemie*, 136:485–489, 1869. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 4, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1894), págs. 243-246.
- [Web71] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie. *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physischen Classe*, 10:1–61, 1871. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 4, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1894), págs. 247-299.

- [Web72] W. Weber. Electrodynamic measurements — Sixth memoir, relating specially to the principle of the conservation of energy. *Philosophical Magazine*, 43:1–20 and 119–149, 1872. Translated by Professor G. C. Foster, F.R.S., from the *Abhandlungen der mathem.-phys. Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften*, Vol. X (January 1871).
- [Web74] W. Weber. Ueber das Aequivalent lebendiger Kräfte. *Annalen der Physik und Chemie*, Jubelband:199–213, 1874. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 4, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1894), págs. 300-311.
- [Web75] W. Weber. Ueber die Bewegung der Elektrizität in Körpern von molekularer Konstitution. *Annalen der Physik und Chemie*, 156:1–61, 1875. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 4, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1894), págs. 312-357.
- [Web76] W. Weber. Bemerkungen zu Edlund's Erwiderung auf zwei gegen die unitarische Theorie der Elektrizität gemachte Einwürfe. *Annalen der Physik und Chemie*, 157:146–149, 1876. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 4, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1894), págs. 358-360.
- [Web78a] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere über die Energie der Wechselwirkung. *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physischen Classe*, 11:641–696, 1878. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 4, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1894), págs. 361-412.
- [Web78b] W. Weber. Ueber die Energie der Wechselwirkung. *Annalen der Physik und Chemie*, 4:343–373, 1878. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 4, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1894), págs. 413-419.
- [Web82] W. Weber. Beiträge zur elektrischen Gravitationstheorie. In F. Zöllner, editor, *Erklärung der universellen Gravitation aus den statischen Wirkungen der Elektrizität und the allgemeine Bedeutung des Weber'schen Gesetzes*, pages 67–82. L. Staackmann, Leipzig, 1882.
- [Web87] W. Weber. Mesures électrodynamiques. In J. Joubert, editor, *Collection de Mémoires relatifs à la Physique*, Vol. III: *Mémoires sur l'Électrodynamique*, pages 289–402. Gauthier-Villars, Paris, 1887.
- [Web92a] W. Weber. *Wilhelm Weber's Werke*, E. Riecke (ed.), volume 2, *Magnetismus*. Springer, Berlin, 1892. Disponível em <http://archive.org/details/wilhelmweberswe01fiscgoog>.
- [Web92b] W. Weber. *Wilhelm Weber's Werke*, W. Voigt, (ed.), volume 1, *Akustik, Mechanik, Optik und Wärmelehre*. Springer, Berlin, 1892.
- [Web93a] H. Weber. Vorwort zum dritten Bande. In *Wilhelm Weber's Werke*, volume 3: *Galvanismus und Elektrodynamik*. Erster Theil, pages iii–v, Berlin, 1893. Springer.

- [Web93b] W. Weber. *Wilhelm Weber's Werke*, H. Weber (ed.), volume 3, *Galvanismus und Elektrodynamik*, primeira parte. Springer, Berlin, 1893. Disponível em <http://archive.org/details/wilhelmweberswe02fiscgoog>.
- [Web94a] H. Weber. Vorwort zum vierten Bande. In *Wilhelm Weber's Werke*, volume 4: *Galvanismus und Elektrodynamik*. Zweiter Theil, pages iii–viii, Berlin, 1894. Springer.
- [Web94b] W. Weber. Aphorismen. In H. Weber, editor, *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 4, pages 630–632, Berlin, 1894. Springer.
- [Web94c] W. Weber. Bemerkungen zu der Abhandlung: “Untersuchung über den galvanischen Lichtbogen” von Prof. E. Edlund. In H. Weber, editor, *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 4, pages 578–583, Berlin, 1894. Springer.
- [Web94d] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere über den Zusammenhang des elektrischen Grundgesetzes mit dem Gravitationsgesetze. In H. Weber, editor, *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 4, pages 479–525, Berlin, 1894. Springer.
- [Web94e] W. Weber. Elektroskopische und elektrodynamische Wirkungen der freien Elektrizität geschlossener Ketten. In H. Weber, editor, *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 4, pages 616–621, Berlin, 1894. Springer.
- [Web94f] W. Weber. Ueber Elektrothermismus. (Ueber Elektrizität und Wärme). In H. Weber, editor, *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 4, pages 622–629, Berlin, 1894. Springer.
- [Web94g] W. Weber. *Wilhelm Weber's Werke*, H. Weber, (ed.), volume 4, *Galvanismus und Elektrodynamik*, segunda parte. Springer, Berlin, 1894.
- [Web94h] W. Weber. Zur Galvanometrie (Auszug). In H. Weber, editor, *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 4, pages 526–538, Berlin, 1894. Springer.
- [Web66] W. Weber. On the measurement of electro-dynamic forces. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs*, Vol. 5, pages 489–529, New York, 1966. Johnson Reprint Corporation.
- [Web97] W. Weber. Aphorisms. *21st Century Science & Technology*, 10(2):52–53, 1997. English translation by J. Tennenbaum.
- [Web07] W. Weber, 2007. Determinations of electrodynamic measure: concerning a universal law of electrical action, *21st Century Science & Technology*, traduzido para o inglês por S. P. Johnson, editado por L. Hecht e A. K. T. Assis. Disponível desde março de 2007 em <http://21sci-tech.com/translation.html> e www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web08] W. Weber, 2008. Determinations of electrodynamic measure: particularly in respect to the connection of the fundamental laws of electricity with the law of gravitation, *21st Century Science & Technology*, traduzido para o inglês por G. Gregory, editado por L. Hecht e A. K. T. Assis. Disponível

desde novembro de 2008 em <http://21sci-tech.com/translation.html> e www.ifi.unicamp.br/~assis.

- [Web19] W. Weber, 2019. On the measurement of electro-dynamic forces. Classics of Measure no. 1. Second edition. Version of 21 February 2019. This English translation appeared originally in R. Taylor (editor), *Scientific Memoirs, selected from the Transactions of Foreign Academies of Science and Learned Societies*, Volume V, part 20, article 14 (London: Taylor and Francis, 1852). Disponível em www.sizes.com/library/classics/Weber1.pdf.
- [Web21a] W. Weber. Aphorisms. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume IV: Conservation of Energy, Weber's Planetary Model of the Atom and the Unification of Electromagnetism and Gravitation, pages 211–213, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web21b] W. Weber. Electrodynamic measurements, eighth memoir, relating specially to the connection of the fundamental law of electricity with the law of gravitation. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume IV: Conservation of Energy, Weber's Planetary Model of the Atom and the Unification of Electromagnetism and Gravitation, pages 173–210, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web21c] W. Weber. Electrodynamic measurements, fifth memoir, relating specially to electric oscillations. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume III: Measurement of Weber's Constant c , Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, pages 267–383, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web21d] W. Weber. Electrodynamic measurements, first memoir, relating specially to a general fundamental law of electric action. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume II: Weber's Fundamental Force and the Unification of the Laws of Coulomb, Ampère and Faraday, pages 33–203, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web21e] W. Weber. Electrodynamic measurements, second memoir, relating specially to measures of resistance. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume II: Weber's Fundamental Force and the Unification of the Laws of Coulomb, Ampère and Faraday, pages 291–441, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web21f] W. Weber. Electrodynamic measurements, seventh memoir, relating specially to the energy of interaction. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume IV: Conservation of Energy, Weber's Planetary Model of the Atom and the

Unification of Electromagnetism and Gravitation, pages 123–164, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

- [Web21g] W. Weber. Electrodynamic measurements, sixth memoir, relating specially to the principle of the conservation of energy. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume IV: Conservation of Energy, Weber's Planetary Model of the Atom and the Unification of Electromagnetism and Gravitation, pages 67–111, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web21h] W. Weber. Electrodynamic measurements, third memoir, relating specially to diamagnetism. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume III: Measurement of Weber's Constant c , Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, pages 11–83, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web21i] W. Weber. Foreword to the submission of the treatise: Electrodynamic measurements, specially attributing mechanical units to measures of current intensity. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume III: Measurement of Weber's Constant c , Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, pages 125–129, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web21j] W. Weber. Foreword to the submission of the treatise: electrodynamic measurements, specially attributing mechanical units to measures of current intensity. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume III: Measurement of Weber's Constant c , Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, pages 125–129, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web21k] W. Weber. On a simple formulation of the general fundamental law of electric action. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume IV: Conservation of Energy, Weber's Planetary Model of the Atom and the Unification of Electromagnetism and Gravitation, pages 55–58, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web21l] W. Weber. On the energy of interaction. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume IV: Conservation of Energy, Weber's Planetary Model of the Atom and the Unification of Electromagnetism and Gravitation, pages 165–172, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web21m] W. Weber. On the excitation and action of diamagnetism according to the laws of induced currents. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume II: Weber's Fundamental Force and the Unification of the Laws of Coulomb, Ampère and

Faraday, pages 249–257, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

- [Web21n] W. Weber. On the measurement of electric resistance according to an absolute standard. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume II: Weber's Fundamental Force and the Unification of the Laws of Coulomb, Ampère and Faraday, pages 267–286, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web21o] W. Weber. On the measurement of electro-dynamic forces. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume II: Weber's Fundamental Force and the Unification of the Laws of Coulomb, Ampère and Faraday, pages 207–247, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web21p] W. Weber. Remarks on Edlund's reply to two objections against the unitary theory of electricity. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume IV: Conservation of Energy, Weber's Planetary Model of the Atom and the Unification of Electromagnetism and Gravitation, pages 119–121, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web24a] W. Weber. Comments on the paper: “Investigation into the electric arc” by Prof. E. Edlund. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume V: Unipolar Induction, Galvanometry, Biographical Studies, and Weber's Electrodynamics Versus Different Field Theories, pages 279–283, Montreal, 2024. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web24b] W. Weber. Electroscopic and electrodynamic actions of free electricity in closed circuits. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume V: Unipolar Induction, Galvanometry, Biographical Studies, and Weber's Electrodynamics Versus Different Field Theories, pages 289–294, Montreal, 2024. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web24c] W. Weber. On electrothermism. (On electricity and heat). In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume V: Unipolar Induction, Galvanometry, Biographical Studies, and Weber's Electrodynamics Versus Different Field Theories, pages 295–300, Montreal, 2024. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web24d] W. Weber. On galvanometry. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume V: Unipolar Induction, Galvanometry, Biographical Studies, and Weber's Electrodynamics Versus Different Field Theories, pages 59–123, Montreal, 2024. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

- [Web24e] W. Weber. On galvanometry (excerpt). In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume V: Unipolar Induction, Galvanometry, Biographical Studies, and Weber's Electrodynamics Versus Different Field Theories, pages 269–278, Montreal, 2024. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web24f] W. Weber. On the equivalent of vis viva. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume V: Unipolar Induction, Galvanometry, Biographical Studies, and Weber's Electrodynamics Versus Different Field Theories, pages 129–138, Montreal, 2024. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web24g] W. Weber. On the motion of electricity in bodies of molecular constitution. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume V: Unipolar Induction, Galvanometry, Biographical Studies, and Weber's Electrodynamics Versus Different Field Theories, pages 139–175, Montreal, 2024. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Wes87] J. P. Wesley. Weber electrodynamics extended to include radiation. *Speculations in Science and Technology*, 10:47–61, 1987.
- [Wes90a] J. P. Wesley. Evidence for Weber-Wesley electrodynamics. In U. Bartocci and J. P. Wesley, editors, *Proceedings of the Conference on Foundations of Mathematics and Physics*, pages 289–343, Blumberg, 1990. Benjamin Wesley Publisher.
- [Wes90b] J. P. Wesley. Weber electrodynamics, Part I. General theory, steady current effects. *Foundations of Physics Letters*, 3:443–469, 1990.
- [Wes90c] J. P. Wesley. Weber electrodynamics, Part II. Unipolar induction, Z-antenna. *Foundations of Physics Letters*, 3:471–490, 1990.
- [Wes90d] J. P. Wesley. Weber electrodynamics, Part III. Mechanics, gravitation. *Foundations of Physics Letters*, 3:581–605, 1990.
- [Wes91] J. P. Wesley. *Selected Topics in Advanced Fundamental Physics*. Benjamin Wesley Publisher, Blumberg, 1991.
- [Wes02] J. P. Wesley. *Selected Topics in Scientific Physics*. Benjamin Wesley Publisher, Blumberg, 2002.
- [Whi73a] E. T. Whittaker. *A History of the Theories of Aether and Electricity*, volume 1: *The Classical Theories*. Humanities Press, New York, 1973.
- [Whi73b] E. T. Whittaker. *A History of the Theories of Aether and Electricity*, volume 2: *The Modern Theories*. Humanities Press, New York, 1973.
- [Wie60] K. H. Wiederkehr. Wilhelm Webers Stellung in der Entwicklung der Elektrizitätslehre. Dissertation, Universität Hamburg, 1960.

- [Wie67] K. H. Wiederkehr. *Wilhelm Eduard Weber — Erforscher der Wellenbewegung und der Elektrizität (1804-1891)*, volume 32 of *Grosse Naturforscher*, H. Degen (ed.). Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1967.
- [Wis81] M. N. Wise. German concepts of force, energy, and the electromagnetic ether: 1845–1880. In G. N. Cantor and M. J. S. Hodge, editors, *Conceptions of Ether — Studies in the History of Ether Theories 1740–1900*, pages 269–307, Cambridge, 1981. Cambridge University Press.
- [WK56] W. Weber and R. Kohlrausch. Über die Elektrizitätsmenge, welche bei galvanischen Strömen durch den Querschnitt der Kette fließt. *Annalen der Physik und Chemie*, J. C. Poggendorff (ed.), 99:10–25, 1856. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 597-608.
- [WK68] W. Weber and R. Kohlrausch. Über die Einführung absoluter elektrischer Maße. In S. Balke, H. Gericke, W. Hartner, G. Kerstein, F. Klemm, A. Portmann, H. Schimank, and K. Vogel, editors, *Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften*, new series, Vol. 5. Friedrich-Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1968. Comentado por F. Kohlrausch e K. H. Wiederkehr.
- [WK03] W. Weber and R. Kohlrausch. On the amount of electricity which flows through the cross-section of the circuit in galvanic currents. In F. Bevilacqua and E. A. Giannetto, editors, *Volta and the History of Electricity*, pages 287–297. Università degli Studi di Pavia and Editore Ulrico Hoepli, Milano, 2003. Traduzido por S. P. Johnson e editado por L. Hecht. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [WK08] W. Weber and R. Kohlrausch. Sobre a quantidade de eletricidade que flui através da seção reta do circuito em correntes galvânicas. *Revista Brasileira de História da Ciência*, 1:94–102, 2008. Traduzido por A. K. T. Assis.
- [WK21] W. Weber and R. Kohlrausch. On the amount of electricity which flows through the cross-section of the circuit in galvanic currents. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume III: Measurement of Weber's Constant c , Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, pages 131–140, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Woo66] A. E. Woodruff. William Crookes and the radiometer. *Isis*, 57:188–198, 1966.
- [Woo81] A. E. Woodruff. Weber, Wilhelm Eduard. In C. C. Gillispie, editor, *Dictionary of Scientific Biography*, Vol. 14, pages 203–209, New York, 1981. Charles Scribner's Sons.
- [WSH03] D. Warner, R. Sherman, and K. Hentschel. The several faces of earth induction. *Bulletin of the Scientific Instrument Society*, 76:30–34, 2003.

- [WT19] M. Weikert and M. Tajmar. Investigation of the influence of a field-free electrostatic potential on the electron mass with Barkhausen-Kurz oscillation. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 44:23–37, 2019.
- [WW25] E. H. Weber and W. Weber. *Wellenlehre auf Experimente gegründet oder über die Wellen tropfbarer Flüssigkeiten mit Anwendung auf die Schall- und Lichtwellen*. Gerhard Fleischer, Leipzig, 1825. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 5, E. Riecke (ed.), (Springer, Berlin, 1893). Disponível em <http://archive.org/details/wilhelmweberswe00fiscgoog>.
- [WW36] W. Weber and E. Weber. *Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge. Eine anatomisch-physiologische Untersuchung*. Dietrich, Göttingen, 1836. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 6, F. Merkel e O. Fischer (eds.), (Springer, Berlin, 1894). Disponível em <http://archive.org/details/wilhelmweberswe03fiscgoog>.
- [WW93] E. H. Weber and W. Weber. *Wilhelm Weber's Werke*, E. Riecke (ed.), volume 5, *Wellenlehre auf Experimente gegründet oder über die Wellen tropfbarer Flüssigkeiten mit Anwendung auf die Schall- und Lichtwellen*. Springer, Berlin, 1893. Publicado originalmente em 1825. Disponível em <http://archive.org/details/wilhelmweberswe00fiscgoog>.
- [WW94] W. Weber and E. Weber. *Wilhelm Weber's Werke*, F. Merkel and O. Fischer (editors), volume 6, *Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge. Eine anatomisch-physiologische Untersuchung*. Springer, Berlin, 1894. Publicado originalmente em 1836. Disponível em <http://archive.org/details/wilhelmweberswe03fiscgoog>.
- [WW92] W. Weber and E. Weber. *Mechanics of the Human Walking Apparatus*. Springer, Berlin, 1992. Translated by P. Maquet and R. Furlong.
- [WZ80] W. Weber and F. Zöllner. Ueber Einrichtungen zum Gebrauch absoluter Maasse in der Elektrodynamik mit praktischer Anwendung. *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Klasse*, 32:77–143, 1880. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 4, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1894), págs. 420-476.
- [XA94] A. L. Xavier Jr. and A. K. T. Assis. O cumprimento do postulado de relatividade na mecânica clássica — uma tradução comentada de um texto de Erwin Schrödinger sobre o princípio de Mach. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 12:3–18, 1994. Errata disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [XA97] A. L. Xavier Jr. and A. K. T. Assis. Schrödinger, Reissner, Weber e o princípio de Mach. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 17:103–106, 1997.
- [Yag20] A. D. Yaghjian. Maxwell's derivation of the Lorentz force from Faraday's law. Disponível em <https://arxiv.org/abs/1911.04605>, 2020.

- [You07] T. Young. *A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts*, volume 1. J. Johnson, London, 1807.
- [Zen21] J. Zenneck. Gravitation. In A. Sommerfeld, editor, *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss Ihrer Anwendungen*, volume 5, Part 1, chapter 2, pages 25–67. B. G. Teubner, Leipzig, 1903-1921. Abgeschlossen im August 1901.
- [Zöl72] J. C. F. Zöllner. *Über die Natur der Cometen. Beiträge zur Geschichte und Theorie der Erkenntnis*. Engelmann, Leipzig, 1872.
- [Zöl76a] F. Zöllner. Ueber die physikalischen Beziehungen zwischen hydrodynamischen und elektrodynamischen Erscheinungen. *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig — Mathematisch-physische Classe*, I. II:59–226, 1876.
- [Zöl76b] J. C. F. Zöllner. *Principien einer elektrodynamischen Theorie der Materie*. Engelmann, Leipzig, 1876.
- [Zöl78] J. C. F. Zöllner. Ueber die Ableitung der Newton’schen Gravitation aus den statischen Wirkungen der Elektrizität. In J. C. F. Zöllner, editor, *Wissenschaftliche Abhandlungen*, pages 417–459 (Vol. 1), Leipzig, 1878. L. Staackmann.
- [Zöl82] F. Zöllner. *Erklärung der Universellen Gravitation aus den statischen Wirkungen der Elektrizität und die allgemeine Bedeutung des Weber’schen Gesetzes*. L. Staackmann, Leipzig, 1882.
- [Zöl83] J. C. F. Zöllner. *Über die Natur der Cometen. Beiträge zur Geschichte und Theorie der Erkenntnis*. L. Staackmann, Leipzig, 1883. Terceira edição.
- [Zyl94] A. Zylbersztajn. Newton’s absolute space, Mach’s principle and the possible reality of fictitious forces. *European Journal of Physics*, 15:1–8, 1994.

Esse é o quarto Volume do livro “Obras de Weber sobre Eletrodinâmica Traduzidas e Comentadas”.

Este quarto Volume começa com a tradução de um artigo póstumo de Gauss, publicado em 1867. Ele chegou a uma lei de força dependente das posições e velocidades das partículas eletrizadas em interação, a partir da qual pôde deduzir não apenas a eletrostática, mas também a força entre elementos de corrente de Ampère. Em seguida, vem o artigo de Carl Neumann, de 1868, sobre os princípios da eletrodinâmica. Neste trabalho Neumann introduziu as formulações lagrangiana e hamiltoniana da eletrodinâmica de Weber. Além disso, ele também demonstrou que a lei de Weber era compatível com o princípio de conservação da energia.

Em seguida vem a sexta grande memória de Weber sobre Medições Eletrodinâmicas, publicada em 1871. Ele mostrou mais uma vez em detalhes que sua lei de força era compatível com o princípio da conservação da energia. Além disso, estudou o problema de dois corpos de acordo com sua eletrodinâmica. Ele mostrou que, em algumas condições, duas partículas eletrizadas com cargas do mesmo sinal poderiam se atrair. Esse Volume também contém a tradução do artigo de 1872 de Tisserand sobre o movimento dos planetas ao redor do Sol de acordo com a lei de Weber. Ele calculou, por exemplo, a precessão do periélio dos planetas.

A sétima memória principal de Weber sobre Medições Eletrodinâmicas foi publicada em 1878, sendo dedicada à energia da interação. Sua oitava grande memória sobre Medições Eletrodinâmicas, que se acredita ter sido escrita na década de 1880, foi publicada postumamente em 1894 em suas Obras Reunidas. Ela lida com a conexão entre a força de Weber e a lei da gravitação de Newton. Além disso, contém seu modelo planetário do átomo, no qual o núcleo é mantido unido por forças puramente eletrodinâmicas, de acordo com sua lei de força.

Um capítulo compara a velocidade que aparece na força de Weber com as velocidades que aparecem na força eletromagnética de diferentes teorias de campo. Há também uma comparação entre as deduções de Weber e Lorentz de suas diferentes leis de força. Mostra-se que na teoria eletromagnética ensinada nos livros didáticos atuais existem várias definições do conceito de campo, com muitas contradições entre essas diferentes definições. Mostra-se que Newton, Coulomb, Ampère e Weber nunca trabalharam com o conceito de campo.

Este trabalho termina com uma visão geral da lei de Weber aplicada ao eletromagnetismo e à gravitação, juntamente com alguns possíveis desenvolvimentos futuros de sua teoria. Os principais tópicos são as unificações na física: (a) unificação de Ampère do magnetismo, eletrodinâmica e eletromagnetismo; (b) unificação de Weber das leis de Coulomb, Ampère e Faraday; (c) unificação da óptica com a eletrodinâmica; (d) unificação da física nuclear com a eletrodinâmica; (d) aplicações da lei de Weber para a gravitação; (e) unificação da gravitação com a eletrodinâmica; (e) unificação da inércia com a gravitação, em particular, a implementação do princípio de Mach e a dedução da segunda lei do movimento de Newton a partir da força de Weber.

Sobre o Autor: O Prof. André Koch Torres Assis nasceu em 1962. Concluiu o bacharelado e o doutorado no Instituto de Física da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP (1983 e 1987, respectivamente). Realizou um pós-doutorado no Laboratório Culham (Oxfordshire, Inglaterra, United Kingdom Atomic Energy Authority, 1988) e outro no Centro de Pesquisas Eletromagnéticas da Northeastern University (Boston, EUA, 1991-1992). Trabalhou por quatro períodos na Alemanha: (a) de agosto de 2001 até novembro de 2002, assim como (b) de fevereiro a maio de 2009, nessas duas vezes no Instituto para a História das Ciências Naturais da Universidade de Hamburgo; (c) de abril a junho de 2014 na Universidade Técnica de Dresden; e (d) de setembro a dezembro de 2023 na Universidade de Augsburg. Essas quatro estadias foram apoiadas por bolsas de pesquisa concedidas pela Fundação Alexander von Humboldt, da Alemanha. Suas obras “*Eletrodinâmica de Weber*” e “*Eletrodinâmica de Ampère*” receberam os Prêmios Jabuti 1996 e 2012 concedidos pela Câmara Brasileira do Livro como livros do ano na área de ciências exatas. É professor do Instituto de Física da UNICAMP desde 1989, onde orienta estudantes de graduação e de pós-graduação, realizando pesquisas sobre os fundamentos do eletromagnetismo, da gravitação e da cosmologia.

Em particular trabalha sobre a Mecânica Relacional, o princípio de Mach, a origem da inércia, a força de Ampère entre elementos de corrente, e a eletrodinâmica de Weber. É o autor de diversos livros de física e de várias traduções de trabalhos científicos clássicos (obras de Arquimedes, Newton, Coulomb, Ampère, Weber etc.) disponíveis gratuitamente em sua homepage: <https://www.ifi.unicamp.br/~assis>

9781987980431



9 781987 980431