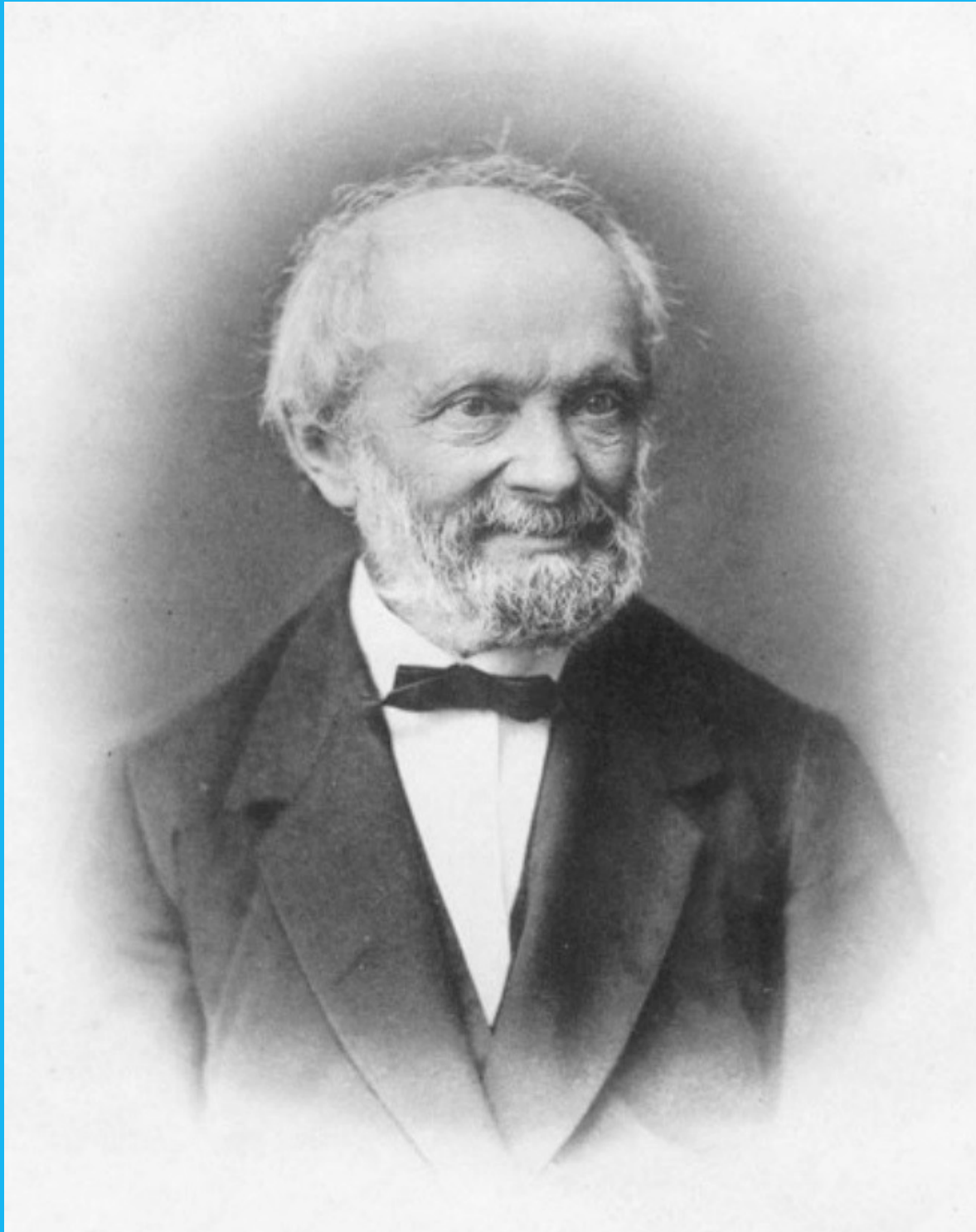


Obras de Weber sobre Eletrodinâmica Traduzidas e Comentadas

**Volume III: Medição da Constante c de Weber,
Diamagnetismo, a Equação do Telégrafo, e a
Propagação de Ondas Elétricas na Velocidade da Luz**



André Koch Torres Assis

Obras de Weber sobre Eletrodinâmica Traduzidas e Comentadas

*Volume III: Medição da Constante c de Weber,
Diamagnetismo, a Equação do Telégrafo,
e a Propagação de Ondas Elétricas
na Velocidade da Luz*

André Koch Torres Assis



Apeiron
Montreal

Published by C. Roy Keys Inc.
4405, rue St-Dominique
Montreal, Quebec H2W 2B2 Canada

© André Koch Torres Assis, 2025

First Published 2025

Library and Archives Canada Cataloguing in Publication

Title: Obras de Weber sobre eletrodinâmica traduzidas e comentadas / André Koch Torres Assis.

Other titles: Weber's works on electrodynamics translated and commented. Portuguese

Names: Assis, André Koch Torres, 1962- author, translator

Description: Includes bibliographical references. | Contents: Volume III: Medição da constante c de Weber, diamagnetismo, a equação do telégrafo, e a propagação de ondas elétricas na velocidade da luz.

Identifiers: Canadiana (print) 20250223821 | Canadiana (ebook) 20250223864 | ISBN 9781987980417

(v. 3 ; softcover) | ISBN 9781987980424 (v. 3 ; ebook)

Subjects: LCSH: Weber, Wilhelm Eduard, 1804-1891. | LCSH: Electrodynamics.

Classification: LCC QC631 .A8713 2025 | DDC 537.6—dc23

A imagem na capa do Volume 3 mostra Wilhelm Weber (1804-1891) ao redor de 1876. Ela vem do frontispício de um livro de 1876 de Friedrich Zöllner (1834-1882) sobre os princípios de uma teoria eletrodinâmica da matéria, J. C. F. Zöllner, *Principien einer elektrodynamischen Theorie der Materie* (Engelmann, Leipzig, 1876). Ela também aparece, por exemplo, em K. H. Wiederkehr, *Wilhelm Webers Stellung in der Entwicklung der Elektrizitätslehre* (Dissertation, Universität Hamburg, 1960, pág. 208); K. H. Wiederkehr, Wilhelm Eduard Weber – *Erforscher der Wellenbewegung und der Elektrizität (1804-1891)*, Volume 32 de *Grosse Naturforscher*, H. Degen (editor), (Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1967, pág. 155); e H. Kragh, *Zöllner's universe, Physics in Perspective*, Vol. 14, págs. 392-420 (2012).

Obras de Weber sobre Eletrodinâmica Traduzidas e Comentadas

Volume III: Medição da Constante c de Weber,
Diamagnetismo, a Equação do Telégrafo, e a
Propagação de Ondas Elétricas na Velocidade da Luz



André Koch Torres Assis

Homepage: www.ifi.unicamp.br/~assis

© A. K. T. Assis

Sumário

1	Introdução ao Volume III	11
2	Introdução à Terceira Memória de Weber sobre Medições Eletrodinâmicas	13
3	[Weber, 1852b, ME3] Medições Eletrodinâmicas, Terceira Memória, Relacionada Especialmente ao Diamagnetismo	15
	I - Introdução. Conceito de Polaridade Diamagnética	15
	II - Eletrodiamagnetismo e Medição do Momento [Magnético] de um Eletrodiaímã	18
3.1	Eletroímã e Eletrodiaímã	18
3.2	Instrumento de Medição Eletrodiamagnética	18
3.3	Experiências e Medições	24
3.4	Cálculo das Experiências	28
3.5	O Instrumento Mais Conveniente para Observar a Polaridade Diamagnética	31
	III - Diamagnetoelétricidade e Medição das Correntes Elétricas Induzidas Diamagneticamente	35
3.6	Indução Diamagnética	35
3.7	Descrição do Aparelho de Indução Diamagnética	35
3.7.1	O Eletrodiaímã Utilizado para a Indução	36
3.7.2	A Bobina de Indução	38
3.7.3	As Outras Partes do Indutor	39
3.8	Experiências	40
3.9	Cálculo dos Experimentos	49
3.10	Comparação das Duas Determinações da Intensidade de um Eletrodiaímã a partir de Suas Ações Magnéticas e Magnetoelétricas	52
3.11	As Experiências de Faraday	59
3.12	As Experiências e a Teoria de Feilitzsch	62
	IV - Sobre a Conexão da Teoria do Diamagnetismo com a Teoria do Magnetismo e da Eletricidade	64
3.13	Sobre os Fundamentos de uma Teoria do Diamagnetismo	64
3.14	Sobre a Maneira de Pesquisar as Causas do Diamagnetismo	64
3.15	Classificação das Causas Internas que Podem Estar na Base das Ações Representadas por uma Distribuição Ideal	65
3.16	Dependência da Distribuição Ideal em Relação à Força de Separação Magnética, de Acordo com a Diferença entre as Quatro Possíveis Causas Internas Mencionadas Anteriormente	66
3.17	Causa Interna do Diamagnetismo	68

3.18	Determinação da Força de Separação Eletromagnética em uma Bobina Galvânica	68
3.19	Determinação do Eletrodiamagnetismo Usando a Força de Separação Eletromagnética	70
3.20	Comparação da Interação entre Moléculas Diamagnéticas com a Interação entre Moléculas Magnéticas	73
3.21	Distinção entre Materiais Magnéticos e Diamagnéticos com o Auxílio dos Valores Positivos e Negativos de uma Constante	74
3.22	Sobre a Existência dos Fluidos Magnéticos	76
V	Sobre a Dependência do Momento Magnético e Diamagnético em Relação à Intensidade da Força de Separação	79
3.23	Sobre a Hipótese de Fluidos Magnéticos Realmente Existentes, Baseada na Analogia com a Teoria da Eletricidade, e Sobre a Lei Resultante da Dependência do Momento Magnético em Relação à Intensidade da Força de Separação	79
3.24	Conexão entre a Existência de um Valor Máximo do Momento Magnético e a Suposição de que as Moléculas Podem Girar	81
3.25	Experiências para Provar a Existência de um Valor Máximo para o Momento Magnético	82
3.26	A Lei da Dependência do Momento Magnético em Relação ao Valor da Força de Separação de Acordo com a Suposição de Moléculas Rotatórias e Sua Comparação com as Experiências	86
3.27	Aplicação [dessa Lei] à Comparação Feita na Seção 3.10	89
4	[Weber, 1852c] Sobre a Conexão do Diamagnetismo com o Magnetismo e a Eletricidade	95
4.1	Teoria	95
4.1.1	Classificação das Causas Internas que Podem Ser Assumidas como as Fontes das Ações que São Explicadas por uma Distribuição Ideal	97
4.1.2	Causa Interna do Diamagnetismo	99
4.1.3	Determinação do Diamagnetismo ou do Eletrodiamagnetismo de um Corpo a partir da Força de Separação Magnética ou Eletromagnética Exercida sobre Ele	100
4.1.4	A Interação entre Moléculas Diamagnéticas Comparada com a Interação entre Moléculas Magnéticas	102
4.1.5	Distinção entre Corpos Magnéticos e Diamagnéticos, Através dos Valores Positivos e Negativos de uma Constante	103
4.1.6	Sobre a Existência dos Fluidos Magnéticos	105
4.1.7	Dependência do Magnetismo Variável em Relação à Intensidade da Força de Separação Magnética ou Eletromagnética	107
4.2	Experiências	110
4.2.1	Eletrodiamagnetismo e Medição do Momento [Magnético] de um Eletrodiaímã	110
4.2.2	Diamagnetoelasticidade e Medição das Correntes Elétricas Induzidas Diamagneticamente	117
4.2.3	O Eletrodiaímã Utilizado para a Indução Diamagnética	117
4.2.4	A Bobina de Indução	118

4.2.5	As Outras Partes do Aparelho de Indução	119
4.2.6	Sobre a Dependência da Intensidade do Magnetismo dos Ímãs Variáveis em Relação ao Valor da Força de Separação Magnética ou Eletromag- nética	127
5	[Weber, 1855a] Sobre a Teoria do Diamagnetismo. Carta do Prof. Weber para o Prof. Tyndall	133
5.1	Nota Introdutória de Tyndall	133
5.2	Carta do Prof. Weber para o Prof. Tyndall	133
5.3	Comentários de Tyndall	136
6	[Weber, 1855b] Prefácio à Submissão do Tratado: <i>Medições Eletrodinâmicas, Especialmente Atribuindo Unidades Mecânicas às Medidas de Intensidade de Cor- rente</i>	139
7	[Weber e Kohlrausch, 1856] Sobre a Quantidade de Eletricidade que Flui Através da Seção Reta de um Circuito com Corrente Galvânica	145
	Nota Introdutória de Rudolf Kohlrausch	145
7.1	Problema	145
7.2	Solução Desse Problema	148
7.3	Aplicações	152
8	[Kohlrausch e Weber, 1857, ME4] Medições Eletrodinâmicas, Quarta Me- mória, Especialmente Atribuindo Unidades Mecânicas às Medidas de In- tensidade de Corrente	157
8.1	Medição da Intensidade de Corrente com Base na Observação de Ações Mag- néticas, Eletrodinâmicas e Eletrolíticas	157
8.2	Unidade Mecânica da Intensidade de Corrente com Base nas Seguintes Causas: Velocidade de Deriva e Conteúdo de Eletricidade do Condutor de Corrente .	161
	I - Redução das Unidades Magnética, Eletrodinâmica e Eletrolítica da Intensidade de Corrente para a Unidade Mecânica	162
8.3	Inexistência de Medição Eletrostática de uma Quantidade Acumulada de Ele- tricidade que Deve Ser Colocada em Movimento	162
8.4	Problema: Determinar Eletrostaticamente a Quantidade de Eletricidade que Flui Através da Seção Reta de um Condutor em 1 Segundo de Acordo com a Unidade Magnética de Intensidade de Corrente	164
8.5	Planejamento para Resolver o Problema — Medição Eletrostática da Quan- tidade de Eletricidade Acumulada em uma Garrafa de Leiden — Medição Eletromagnética da Corrente Gerada pela Descarga da Garrafa	165
8.6	Determinação da Razão na Qual a Eletricidade é Dividida entre o Revesti- mento Interior de uma Garrafa de Leiden e uma Grande Esfera, enquanto o Revestimento Exterior da Garrafa está Conectado à Terra	169
8.7	Observações Correspondentes da Deflexão do Galvanômetro Tangente Produ- zida pela Quantidade E de Eletricidade Fluindo Através do Multiplicador, e da Torção da Balança de Torção de Coulomb, pela Qual as Duas Esferas Ele- trizadas com a Quantidade e de Eletricidade São Mantidas à Mesma Distância que as Esferas Descarregadas	173
8.8	Cálculo da Razão entre as Duas Quantidades de Carga $E' : e$	176

8.9	Cálculo da Quantidade de Eletricidade ε com a Qual as Duas Esferas da Balança de Torção de Coulomb Precisam ser Carregadas para Exercer Uma Unidade de Torque na Balança de Torção Através da Repulsão entre Elas . . .	177
8.10	Cálculo da Torção ϑ que o Fio no Qual Está Suspensa a Balança de Torção de Coulomb Deve Receber para Exercer Uma Unidade do Torque na Balança de Torção Através de Sua Força de Torção	181
8.11	Cálculo das Quantidades de Eletricidade E' e e nas Observações que foram Descritas na Seção 8.7	183
8.12	Cálculo da Correção Causada pela Perda de Eletricidade e Acúmulo de Resíduos na Garrafa de Leiden no Intervalo de Tempo Decorrido desde a Divisão da Eletricidade até a Descarga da Garrafa, que é Igual a $E' - E$	184
8.13	Cálculo da Duração Temporal que uma Corrente com a Intensidade Normal que foi Descrita na Seção 8.4 Precisa Possuir para Produzir as Deflexões do Galvanômetro Tangente que foram Observadas na Seção 8.7	187
8.14	Cálculo da Grandeza $\frac{1}{2\pi} \cdot E$	192
8.15	Reduzindo as Unidades Magnética, Eletrodinâmica e Eletrolítica da Intensidade de Corrente para a Unidade Mecânica	193
II - Aplicações		195
8.16	Determinação da Quantidade de Eletricidade que é Necessária para Liberar 1 Miligrama de Hidrogênio de 9 Miligramas de Água	195
8.17	Determinação da Constante c	196
8.17.1	Observação	198
8.18	As Leis Elétricas, com a Determinação Numérica de Suas Constantes	200
8.19	Aplicação na Eletrólise — Medição de uma Força de Afinidade Química . . .	202
8.20	Conteúdo de Eletricidade dos Condutores	208
8.21	Aplicação para as Unidades — Dedução de Todas as Unidades a partir da Unidade Espacial	210
Apêndices		212
I. Descrição da Balança de Torção		212
II. Descrição do Galvanômetro Tangente		217
9	[Kirchhoff, 1857a] Sobre o Movimento da Eletricidade nos Fios	219
10	Comentários sobre o Artigo de 1857 de Kirchhoff sobre o Movimento da Eletricidade nos Fios	239
10.1	Solução de uma Integral que Aparece no Artigo de Kirchhoff	239
10.2	A Equação do Telégrafo Obtida por Kirchhoff	240
11	[Poggendorff, 1857] Comentário sobre o Artigo do Prof. Kirchhoff	243
12	Comentários sobre o Artigo de 1857 de Poggendorff	245
13	[Kirchhoff, 1857b] Sobre o Movimento da Eletricidade nos Condutores	249
14	[Weber, 1858] Relatório sobre Alguns Experimentos Realizados no Instituto de Física de Göttingen	263

15 [Weber, 1861] Sobre a Introdução Pretendida de um Padrão ou Estalão de Resistência Galvânica	269
16 [Weber, 1862] Sobre a Galvanometria	275
I - O Método de Medição Absoluta de Resistência	279
16.1 Razão de uma Força Eletromotriz para uma Intensidade de Corrente	279
16.2 Representação de uma Velocidade Igual à Resistência de um Condutor	281
16.3 Determinação da Resistência Através da Razão $\int edt / \int idt$ para um Impulso de Indução	284
16.4 Execução com o Inclínômetro de Indução	285
16.5 Separação entre o Indutor e o Galvanômetro	286
16.6 Amortecimento como uma Medida da Sensibilidade do Galvanômetro	287
16.7 Indução pela Componente Horizontal do Magnetismo Terrestre	289
II - Construção do Galvanômetro	290
16.8	290
16.9 Limites no Tamanho da Deflexão e Atenuação	290
16.10 Suspensão Unifilar e Bifilar da Agulha do Galvanômetro	291
16.11 Sistema Astático de Agulhas com Suspensão Unifilar	293
16.12 Teoria do Multiplicador	294
16.13	298
16.14	302
III - Observações Galvanométricas	303
16.15	303
16.16	306
16.17	309
16.18	310
16.19 O Padrão de Thomson e Outros Estalões	312
16.20	313
IV - Métodos de Cópia	315
16.21	315
16.22 Métodos de Cópia Sem Divisão de Corrente	317
16.23 Método de Cópia com Divisão Simples de Corrente	317
16.24	318
16.25	319
16.26	320
16.27 Método de Cópia com Divisão Dupla de Corrente	321
V - Sobre os Princípios Gerais de Medição de Resistência	324
16.28	324
16.29 Trabalho Elétrico de Acordo com as Leis Elétricas	326
16.30 Trabalho Elétrico Máximo	328
16.31 Conversão do Trabalho dos Corpos Ponderáveis Móveis em Trabalho Elétrico Através da Interação Elétrica	329
16.32 Determinação do Trabalho Elétrico Através da Medição de Calor, de Acordo com os Experimentos de Becquerel e Lenz	333
16.33 Sobre a Conversão de Trabalho Elétrico em Calor	337

17 [Weber, 1863] Sobre o Tratado “Medições Eletrodinâmicas, Relacionadas Especialmente às Oscilações Elétricas”	341
18 [Weber, 1864, ME5] Medições Eletrodinâmicas, Quinta Memória, Relacionada Especialmente às Oscilações Elétricas	347
Introdução	347
I - Leis do Movimento	350
18.1 Kirchhoff, <i>Sobre o Movimento da Eletricidade nos Condutores</i>	350
18.2 Dedução da Expressão para a Força Eletromotriz Exercida pela Eletricidade Livre e pelos Movimentos Elétricos em um Pequeno Pedaco do Fio Condutor, Considerado como um Cilindro, sobre Qualquer Ponto da Seção Reta Central Desse Pedaco	355
18.3 Simplificação das Equações Gerais	362
18.4 Exame das Condições Estabelecidas na Seção Anterior	365
18.5 Dedução da Equação de Movimento Independente da Suposição da Lei de Ohm	366
18.6 Comparação dos Resultados	369
18.7 Desenvolvimento da Expressão da Força Eletromotriz Exercida sobre um Ponto de um Condutor Linear Fechado pela Eletricidade Livre e pelos Movimentos Elétricos em Todo o Condutor, com Exceção do Elemento que Contém o Ponto que está sendo Considerado	370
18.8 Equação de Movimento da Eletricidade em um Condutor Fechado	373
18.9 Equação para os Valores Médios das Forças Eletromotrizes e Intensidades de Corrente em Condutores Fechados de Formato Arbitrário	377
18.10 Leis do Movimento da Eletricidade em um Fio Condutor Circular	379
18.11 Equilíbrio da Eletricidade em um Condutor Circular	382
18.12 Correntes Constantes em um Condutor Circular	383
18.13 Leis de Movimento da Eletricidade Deixada por Conta Própria Após Qualquer Perturbação do Equilíbrio em um Condutor Circular	385
18.14 Comparação com a Lei de Ohm	388
18.15 Movimentos das Ondas Elétricas em um Condutor Circular	389
18.16 Velocidade de Propagação dos Trens de Ondas em um Condutor Circular	392
18.17 Amortecimento dos Movimentos Elétricos em um Condutor Circular	396
18.18 Relação com a Condução de Calor	401
18.19 Oscilações da Eletricidade em um Condutor Circular	403
18.20 Oscilações Devidas à Indução [Ocasionalada] por um Ímã Girando	404
18.21 Igualdade das Fases e Amplitudes das Oscilações Elétricas em Condutores Circulares	408
18.22 Distribuição da Eletricidade Livre em um Condutor Circular Durante a Oscilação Elétrica	412
18.23 Guia para as Observações	413
II - Observações das Oscilações	417
18.24 Método de Observação	417
18.25 Os Comutadores	423
18.26 Os Longos Fios Condutores	430
18.27 Observações para Comparar a Amplitude das Oscilações Elétricas em Dois Lugares Diferentes de um Longo Circuito Fechado	432

18.28 Observações para Determinar a Diferença de Fase das Oscilações Elétricas em Dois Lugares Diferentes de um Longo Circuito Fechado	440
18.29 Resultado do Teste	445
18.30 Observações da Dependência da Amplitude de Oscilação em Relação à Velocidade Angular do Ímã	447
18.31 Teste do Dinamômetro	448
18.32 Primeira Série	451
18.33 Cálculos das Observações	454
18.34 Segunda Série	458
18.35 Razão da Força Eletrostática de Duas Quantidades Iguais de Eletricidade em Relação à Sua Massa	461
18.36 Conclusão	465
19 As Origens e os Significados da Constante c de Weber, da Constante c de Maxwell, e a Relação Dessas Duas Constantes Diferentes com a Velocidade da Luz no Vácuo	467
19.1 A Constante c de Weber	467
19.2 A Relação da Constante c de Weber com a Velocidade da Luz	470
19.3 A Constante c de Maxwell e a Confusão Introduzida por Muitos Cientistas, Incluindo Einstein	473
Referências Bibliográficas	482

Capítulo 1

Introdução ao Volume III

A imagem na capa do Volume 3 mostra Wilhelm Weber (1804-1891) ao redor de 1876. Ela vem do frontispício de um livro de 1876 de Friedrich Zöllner (1834-1882) sobre os princípios de uma teoria eletrodinâmica da matéria.¹

O Volume III contém os principais trabalhos de Weber relacionados com diamagnetismo, incluindo sua Terceira Memória principal sobre Medições Eletrodinâmicas (1852).

Esses trabalhos são seguidos por três artigos publicados por Weber e Rudolf Kohlrausch (1809-1858) em 1855-1857 nos quais apresentaram a primeira medição da constante fundamental c de Weber que aparece na sua lei de força. O trabalho de 1857 de Weber e Kohlrausch é a Quarta Memória principal sobre Medições Eletrodinâmicas.

Logo após essa medição, Gustav Kirchhoff (1824-1887) e Weber deduziram pela primeira vez na história a equação completa do telégrafo. Ambos partiram da eletrodinâmica de Weber e seus artigos foram publicados em 1857 e 1864. Quando a resistência do fio é desprezível, a equação do telégrafo reduz-se à equação de onda. Eles mostraram que nesse caso a velocidade de propagação de uma onda elétrica ao longo do fio era independente da área de seção reta do fio, de sua condutividade e da densidade de eletricidade ao longo da superfície do fio. Mostraram que seu valor era igual à conhecida velocidade de propagação da luz no vácuo. Esse resultado notável da eletrodinâmica de Weber indicou pela primeira vez na história da física uma conexão direta e quantitativa entre a eletrodinâmica e a óptica. Esse terceiro Volume contém traduções dos dois artigos de Kirchhoff de 1857, juntamente com um trabalho de 1857 de J. C. Poggendorff (1796-1877), por muito anos editor do famoso periódico *Annalen der Physik und Chemie* (atualmente conhecido como *Annalen der Physik*), enfatizando as pesquisas independentes feitas por Weber e Kirchhoff sobre esse assunto nas quais ambos chegaram simultaneamente em resultados similares. O trabalho de 1864 de Weber é sua Quinta Memória principal sobre Medições Eletrodinâmicas. A tradução desse trabalho fundamental também está incluída nesse terceiro Volume.

Inseri as palavras entre colchetes, [], no meio de algumas sentenças para clarificar o significado dessas frases.

Escrevi todas as Notas de rodapé nas quais não aparece o nome do autor. Em todos os outros casos indiquei o nome da pessoa que escreveu aquela Nota de rodapé.

¹[Zöl76]. Ela também aparece, por exemplo, em [Wie60, pág. 208], [Wie67, pág. 155] e [Kra12].

Capítulo 2

Introdução à Terceira Memória de Weber sobre Medições Eletrodinâmicas

A. K. T. Assis²

Apresento aqui alguns comentários de Maxwell sobre essa obra de Weber.³

Teoria de Weber sobre o Magnetismo Induzido

442.] Vimos que Poisson supôs que a magnetização do ferro consistia em uma separação dos fluidos magnéticos dentro de cada molécula magnética.⁴ Se quisermos evitar a suposição da existência de fluidos magnéticos, podemos apresentar a mesma teoria de outra forma, dizendo que cada molécula de ferro, quando a força magnetizante atua sobre ela, torna-se um ímã.

A teoria de Weber difere dessa ao assumir que as moléculas do ferro são sempre ímãs, mesmo antes da aplicação da força de magnetização, mas que no ferro comum os eixos magnéticos das moléculas são girados indiferentemente em todas as direções, de modo que o ferro como um todo não exhibe propriedades magnéticas.

Quando uma força magnética atua sobre o ferro, ela tende a girar os eixos das moléculas em uma única direção, fazendo com que o ferro, como um todo, se torne um ímã.

Se os eixos de todas as moléculas fossem paralelos entre si, o ferro apresentaria a maior intensidade de magnetização de que é capaz. Portanto, a teoria de Weber implica a existência de uma intensidade limite de magnetização, e a evidência experimental de que esse limite existe é, portanto, necessária para a teoria. Experimentos que mostram uma aproximação de um valor limite de magnetização foram feitos por

²Homepage: www.ifi.unicamp.br/~assis

³[Max54, Vol. 2, Cap. 6, Artigos 442-448, págs. 79-94].

⁴Siméon Denis Poisson (1781-1840). Ver [Poi12a], [Poi12b] com tradução para o inglês em [Poi19], [Poi13], [Poi25a], [Poi25b], [Poi22a] e [Poi22b].

Joule,^{5,6} J. Müller,^{7,8} Ewing e Low.^{9,10}

Os experimentos de Beetz^{11,12} sobre ferro eletrotipado depositado sob a ação de força magnética fornecem a evidência mais completa desse limite:

Um fio de prata foi envernizado e uma linha muito estreita no metal foi revelada por meio de um fino risco longitudinal no verniz. O fio foi então imerso em uma solução de sal de ferro e colocado em um campo magnético com o risco na direção de uma linha de força magnética. Ao tornar o fio como sendo o cátodo de uma corrente elétrica através da solução, o ferro foi depositado na estreita superfície exposta do fio, molécula por molécula. O filamento de ferro assim formado foi então examinado magneticamente. Verificou-se que seu momento magnético era muito grande para uma massa tão pequena de ferro e, quando uma força magnetizante poderosa foi aplicada na mesma direção, o aumento da magnetização temporária foi muito pequeno e a magnetização permanente não foi alterada. Uma força de magnetização na direção inversa reduziu imediatamente o filamento à condição de ferro magnetizado da maneira comum.

A teoria de Weber, que supõe que, nesse caso, a força de magnetização colocou o eixo de cada molécula na mesma direção durante o instante de sua deposição, concorda muito bem com o que foi observado.

Beetz descobriu que, quando a eletrólise continua sob a ação da força de magnetização, a intensidade da magnetização do ferro depositado posteriormente diminui. Os eixos das moléculas provavelmente são desviados da linha de força magnetizante quando estão sendo depositados lado a lado com as moléculas já depositadas, de modo que uma aproximação do paralelismo pode ser obtida somente no caso de um filamento muito fino de ferro.

Se, como Weber supõe, as moléculas de ferro já são ímãs, qualquer força magnética suficiente para tornar seus eixos paralelos à medida que são depositadas eletroliticamente será suficiente para produzir a maior intensidade de magnetização no filamento depositado.

Se, por outro lado, as moléculas de ferro não forem ímãs, mas apenas capazes de magnetização, a magnetização do filamento depositado dependerá da força de magnetização da mesma forma que a do ferro macio em geral. Os experimentos de Beetz não deixam espaço para essa última hipótese.

⁵[Nota de Maxwell:] *Annals of Electricity*, iv, pág. 131, 1839; *Phil. Mag.*, [4] iii, pág. 32.

⁶[Jou40a] e [Jou52].

⁷[Nota de Maxwell:] *Pogg. Ann.*, lxxix, pág. 337, 1850.

⁸[Mül50].

⁹[Nota de Maxwell:] *Phil. Trans.* 1889. A, pág. 221.

¹⁰[EL89].

¹¹[Nota de Maxwell:] *Pogg.* cxi. 1860.

¹²[Bee60].

Capítulo 3

[Weber, 1852b, ME3] Medições Eletrodinâmicas, Terceira Memória, Relacionada Especialmente ao Diamagnetismo

Wilhelm Weber^{13,14}

I - Introdução. Conceito de Polaridade Diamagnética

O *diamagnetismo* tornou-se um tópico de várias pesquisas nos poucos anos desde sua descoberta. Essas pesquisas não apenas ampliaram o assunto mas levaram à descoberta e ao exame de vários outros fenômenos naturais novos. Portanto, o interesse nessas pesquisas cresceu continuamente. Contudo, o tema do *diamagnetismo* ainda necessita de uma *lei fundamental* para que se torne comparável ao magnetismo, eletromagnetismo e magnetoelectricidade, aos quais está intimamente relacionado. Parecia haver uma perspectiva de chegar a essa *lei fundamental* desde o início, porque Faraday¹⁵ conseguiu explicar os dois principais fatos que havia descoberto, a saber, a *repulsão* diamagnética e a *orientação equatorial* de corpos diamagnéticos na vizinhança de um ímã forte, sob uma expressão muito simples e geral, que, mesmo que não pudesse ser considerada uma lei fundamental, parecia ter que estar em uma conexão próxima e íntima com essa lei. A saber, Faraday deduziu essas ações diamagnéticas a partir das leis dos *ímãs variáveis* (ímãs de ferro), ao comparar as ações dos materiais diamagnéticos às ações do ferro magnetizado, para os quais o magnetismo Norte e o magnetismo Sul eram trocados. A relação do diamagnetismo com o magnetismo que existe de acordo com isso forma a lei da *polaridade diamagnética* estabelecida por ele.

Para não deixar nenhuma incerteza quanto ao significado a ser associado com a expressão *polaridade magnética* ou *diamagnética*, pode-se acrescentar aqui uma explicação do sentido em que esta expressão é tomada nesse Tratado. É bem conhecido que Gauss¹⁶ provou que

¹³[Web52b] com tradução para o inglês em [Web21e].

¹⁴As Notas de Wilhelm Weber são representadas por [Nota de Wilhelm Weber:]; as Notas de Heinrich Weber, o Editor do Volume 3 das *Obras* de Wilhelm Weber, são representadas por [Nota de Heinrich Weber:]; todas as outras Notas são de minha autoria.

¹⁵Michael Faraday (1791-1867). Ver [Far46a] e [Far46b] com tradução para o alemão em [Far46c] e [Far47].

¹⁶Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Ver [Gau39a] com traduções para o inglês em [Gau41a] e [GT14], e

todas as ações pelas quais um ímã (ou um material que contém correntes galvânicas) atua sobre outros materiais podem ser deduzidas a partir de dois fluidos magnéticos que estão distribuídos sobre *sua superfície* de uma maneira específica. Ele denominou essa distribuição como sendo *a distribuição ideal dos fluidos magnéticos*. Dessa forma, no Tratado a seguir, a *polaridade magnética* ou *diamagnética* de um corpo deve ser entendida como um estado do corpo em virtude do qual ele exerce ações sobre outros corpos que são de tal natureza que podem ser explicadas *a partir de uma distribuição ideal de fluidos magnéticos*.

Portanto, a lei da *polaridade diamagnética* implica que todas as ações de um material diamagnético podem ser explicadas em termos de *uma distribuição de dois fluidos magnéticos* sobre sua superfície. Ora, uma vez que a mesma afirmação decorre da lei da *polaridade magnética* para os corpos magnéticos, segue-se que, se realmente existe uma *polaridade diamagnética* no sentido dado,

os corpos diamagnéticos diferem dos corpos magnéticos não essencialmente por suas ações, mas apenas pela maneira como são *formados* ou como são *modificados*.

Pois, supondo que seja dada a *distribuição ideal* dependente de sua origem (ou mudança), então todas as ações também são dadas, independente se é o *magnetismo*, *galvanismo* ou *diamagnetismo*, que leva a essa *distribuição ideal*.

Caso a lei da *polaridade diamagnética* seja de fato universalmente válida, então ela não será aplicável apenas aos fenômenos descobertos por Faraday, a saber, a interação do material diamagnético com aquele ímã por cuja influência o corpo tornou-se diamagnético, mas também será aplicável a todos os fenômenos em que um material pode atuar sobre outros materiais devido a uma certa distribuição de seus fluidos magnéticos. Todos esse diferentes tipos de fenômenos podem ser classificados em *puramente magnéticos*, *eletromagnéticos* e *magnetoeletrônicos*. Portanto, é altamente interessante detectar a ocorrência real desses *diferentes modos de ação*. Caso a *segunda* ação realmente existisse para os materiais diamagnéticos, ela levaria à experiência fundamental do *eletrodiamagnetismo*.¹⁷ A *terceira* ação levaria à experiência fundamental da *diamagnetoeletricidade* (ou à indução diamagnética de correntes elétricas).¹⁸ Por outro lado, caso não ocorram todos essas três ações, isso vai implicar que a lei da *polaridade diamagnética* não será universalmente válida, de tal forma que ela perderia sua importância e seu significado teórico.

No que diz respeito à ocorrência desses diferentes modos de ação, os resultados dos vários pesquisadores ainda não concordam entre si. Isso é facilmente explicável, se levarmos em consideração quão fracos têm necessariamente de ser os últimos tipos de ação. Portanto, pode facilmente acontecer que nem todos os pesquisadores possam detectá-las, especialmente já que eles não utilizam exatamente os mesmos tipos de instrumentos. Faraday, em particular, não conseguiu convencer-se da existência da última ação (indutora) dos corpos diamagnéticos, embora tenha se esforçado e tomado muito cuidado para repetir as experiências correspondentes.

Pode ser facilmente compreendido quão fracas são, por exemplo, as ações de um material diamagnético sobre uma bússola, ao notar que mesmo as forças exercidas por fortes eletroímãs sobre um corpo diamagnetizado por eles,¹⁹ mesmo atuando a uma pequena distância, são muito fracas, embora elas sejam proporcionais às forças intensas dos eletroímãs. Mas se

tradução para o espanhol em [Gau21c].

¹⁷Em alemão: *Elektrodiamagnetismus*.

¹⁸Em alemão: *Diamagnetelektricität (oder der diamagnetischen Induktion elektrischer Ströme)*.

¹⁹Ou seja, o corpo foi diamagnetizado pelos eletroímãs.

considerarmos agora, em vez da interação de um corpo diamagnetizado de uma determinada maneira com eletroímãs tão potentes, a interação do mesmo corpo diamagnético com uma bússola fraca, é óbvio que dessa última interação, à mesma distância, surge uma força que, na proporção entre a força magnética desses eletroímãs e a dessa bússola, é ainda menor do que a força resultante da primeira interação, que por si só já era muito pequena.

Sob essas circunstâncias nas quais podemos ver *a priori* que as interações em questão, se elas de fato existirem, são extremamente fracas, precisaremos de arranjos especiais para distingui-las de outras pequenas ações para com isso provar a existência delas. Não é suficiente melhorar e refinar os instrumentos observacionais, temos de obter uma compreensão mais aprofundada do tamanho das ações que estão sendo questionadas e que poderiam ser observadas, de tal forma que possamos estar certos de que as *ações observadas* correspondem de fato ao que estamos *procurando*. Para dizer isso em poucas palavras, a observação de tais pequenas ações necessita de um *controle quantitativo* para produzir resultados confiáveis. Porém, até o momento não houve esse controle quantitativo. Em particular, a questão sobre a existência ou não existência de uma *indução diamagnética de correntes elétricas*, que é um dos temas principais, só pode ser decidida experimentalmente, caso o *valor da corrente* que tem de ser induzida diamagneticamente possa ser aproximadamente estimado. De fato, somente após essa estimativa poderemos decidir sobre os meios necessários para verificar sua existência.

Contudo, para alcançar tal *controle quantitativo* dessas considerações, precisamos discutir mais cuidadosamente a suposição que levou à conjectura de uma *indução diamagnética das correntes elétricas*. De acordo com essa consideração, assumimos que todas as ações de um material diamagnético podem ser explicadas em termos de uma certa distribuição dos dois fluidos magnéticos sobre sua superfície e que, inversamente, um material diamagnético exerce *todas* as ações dos fluidos magnéticos assim distribuídos. Segue-se disso que temos de associar a cada material diamagnético um certo *momento magnético*. Além disso, cada tipo de ação diamagnética tem de ser utilizado para determinar o valor desse momento magnético de tal forma que possamos prever precisamente, ou com boa aproximação, todos os tipos de ações diamagnéticas. Se essa consideração for verdadeira, ela mostra o caminho para inferir os fenômenos diamagnéticos desconhecidos a partir dos fenômenos diamagnéticos conhecidos, e também de prever seus valores, de tal forma que cada experiência que não tenha a precisão necessária possa ser imediatamente descartada. Por outro lado, cada experiência que tenha a precisão necessária mas que não forneça o resultado, ou que forneça um resultado completamente diferente, poderá ser usada para falsificar toda a suposição [inicial]. Uma decisão séria só pode ser alcançada dessa maneira.

Tentei seguir dessa maneira durante todo esse Tratado e acredito que os resultados obtidos aqui não deixam dúvida, embora seja desejável que no futuro as medições quantitativas possam ser realizadas com precisão ainda maior. Caso eu tivesse um financiamento maior, poderia ter facilmente obtido equipamentos melhores e obtido resultados mais precisos, o que é definitivamente desejável, embora o resultado principal pareça estar suficientemente estabelecido.

II - Eletrodiamagnetismo e Medição do Momento [Magnético] de um Eletrodiaímã

3.1 Eletroímã e Eletrodiaímã

Assim como os ímãs de ferro podem ser divididos em ímãs *comuns* (cujo magnetismo se deve à influência de outros ímãs) e eletroímãs, os diaímãs também podem ser divididos em diaímãs *comuns* (cujo diamagnetismo se deve à influência magnética) e eletrodiaímãs.²⁰ No entanto, existe uma grande diferença entre *eletroímãs* e *eletrodiaímãs*, o que é importante para as observações, a saber, quando correntes galvânicas iguais são passadas em torno de uma haste de ferro e de uma haste de bismuto,²¹ o ferro exerce forças magnéticas à distância, contra as quais as forças da corrente galvânica quase desaparecem, enquanto que as forças diamagnéticas exercidas pelo bismuto desaparecem em relação às forças da corrente galvânica. Esse é o motivo pelo qual é difícil provar a *existência do eletrodiamagnetismo*. Contudo, essa dificuldade pode ser superada e obtemos até mesmo que a força de um eletrodiaímã é muito mais apropriada para as *medições* reais do que a força de um diaímã comum. Porém, para isso é necessário um instrumento especial para ficarmos livres da influência da corrente galvânica. Quero aqui, *em primeiro lugar*, descrever o *instrumento* com o qual obtive a ação *pura* de um *eletrodiaímã* de tal forma que pude comparar o valor de sua força com o valor da força de um *eletroímã*. *Em seguida*, descrevo os *resultados* experimentais que obtive com esse instrumento.

3.2 Instrumento de Medição Eletrodiamagnética

O objetivo era observar a ação de um *eletrodiaímã* sobre uma *agulha magnética* colocada a uma grande distância. Já foi mencionado quão pequena deve ser a ação do material diamagnético sobre uma agulha magnética usual, especialmente se essa agulha estiver a algumas polegadas do diaímã. Quanto menor for a ação esperada, mais precisos devem ser os métodos de observação. Portanto, foi utilizado um pequeno magnetômetro, cuja agulha tinha 100 milímetros de comprimento e vinha equipada com um espelho para ser observado de acordo com o método de Gauss utilizando telescópio e escala.²² Esse método pode ser usado para medir com precisão as deflexões da agulha com amplitudes de um minuto de

²⁰A palavra alemã *Diamagnete* pode ser traduzida como diaímãs ou diamagnetos. Já a palavra alemã *Elektrodiamagnete* pode ser traduzida como eletrodiaímãs ou eletrodiamagnetos. Ou seja, ímãs e eletroímãs feitos de materiais diamagnéticos.

²¹O bismuto é o mais diamagnético entre todos os metais e também o metal que menos conduz corrente elétrica.

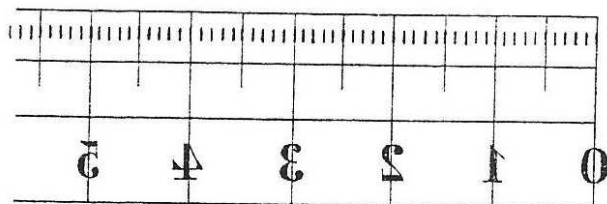
²²Em alemão: *Skala*. Essa palavra pode ser traduzida como escala ou régua. Essa régua ou escala com pelo menos 1 metro de comprimento é fixada abaixo do telescópio. A imagem dela refletida no espelho preso à extremidade da barra magnetizada é observada com o telescópio. Coloquei nessa Nota de rodapé uma imagem de uma escala desse tipo que aparece no artigo de 1837 de Weber, [Web37] com traduções para o inglês em [Web41b], [GW66], [GW39] e [Web21p]; e tradução para o francês em [Web38c], a saber:

arco. A sensibilidade²³ de tal agulha depende, como é bem conhecido, do valor da força defletora horizontal exercida pelo magnetismo terrestre. O período de oscilação da agulha²⁴ era de 7,687 segundos quando a força defletora do magnetismo terrestre não foi enfraquecida. Para aumentar a sensibilidade [das medições], a força defletora foi enfraquecida de tal forma que o período de oscilação aumentou para 18,45 segundos. Isso pode ser obtido de uma maneira bem simples com o auxílio da intensa barra magnética SN da Figura 2,²⁵ que é colocada com os polos invertidos na direção da agulha NS a uma distância apropriada. Com a ajuda de um pequeno deslocamento dessa barra magnética, pode ser regulada à vontade a sensibilidade da agulha. Contudo, uma sensibilidade muito alta coloca em ligeiro perigo a precisão das observações. Além disso, encontrou-se que era suficiente a sensibilidade mencionada anteriormente. Vale à pena mencionar que a agulha estava equipada com um amortecedor feito de cobre, o que provocava uma redução dos arcos de oscilação na proporção 3 : 2 ou, mais precisamente, o *decremento logarítmico*²⁶ era

$$= 0,17887 .$$

Após essa descrição do instrumento de medição magnética, procedemos com a apresentação do próprio *eletrodiaímã* e sua instalação. O eletrodiaímã consistia, *em primeiro lugar*, em dois cilindros iguais de bismuto cujo comprimento era de 92 milímetros, cuja largura era de 16 milímetros, e cujo peso combinado era de 343 500 miligramas. Eles eram conectados entre si em posição vertical a uma distância de 100 milímetros, como representado por aa na Figura 1.

Fig. 10.



²³Em alemão: *Empfindlichkeit*.

²⁴Em alemão: *Die Schwingungsdauer der Nadel*. Gauss e Weber utilizavam a antiga definição francesa do período de oscilação t , que tem o valor de metade da definição inglesa do período de oscilação T , isto é, $t = T/2$, [Gil71a, págs. 154 e 180]. Por exemplo, o período de oscilação T para pequenas oscilações de um pêndulo simples de comprimento ℓ é dado por $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$, onde g é a aceleração de queda livre nesse local devido à gravidade terrestre, enquanto que $t = T/2 = \pi\sqrt{\ell/g}$.

²⁵Ver a página 22.

²⁶Em latim: *decrementum logarithmicum*. O decremento logarítmico é definido como o logaritmo da razão de quaisquer dois picos sucessivos. Por exemplo, se o decremento logarítmico é $\log(x_{n-1}/x_n) = 0,17887$, então $x_{n-1}/x_n = 10^{0,17887} = 1,50963 \approx 3/2$.

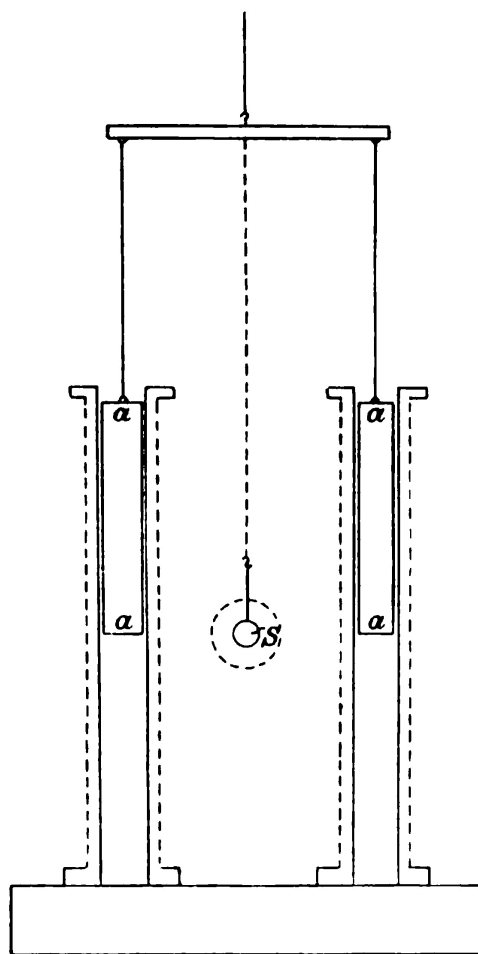


Fig. 1.

Usando um mecanismo simples de alavanca eles podiam ser levantados e abaixados. O eletrodiâimã consistia, *em segundo lugar*, de dois fios de cobre enrolados em espiral.²⁷ Cada uma dessas espirais tinha um comprimento de 190 milímetros, um diâmetro interno de 17 milímetros e consistia em quatro camadas, cada camada contendo 146 enrolamentos. Elas foram montadas verticalmente como pilares, separadas por 100 milímetros, em um tripé, e seus fios conectados entre si de tal forma que uma corrente passando de um [pilar] para o outro fluía por elas em direções opostas. Os dois cilindros de bismuto podiam ser abaixados simultaneamente dentro dessas duas espirais e eram transformados em *eletrodiâimãs* devido à corrente galvânica.²⁸ Um polo Norte era voltado para cima e o outro polo Norte era voltado para baixo. Seis células de Grove²⁹ foram usadas para transmitir a corrente.

Essas duas espirais foram agora arranjadas de tal forma que um plano horizontal passando através da agulha as dividia ao meio. A extremidade Sul da agulha, *S*, estava flutuando precisamente no meio entre as duas espirais. Podemos ver na Figura 2 uma seção horizontal da posição da agulha *NS* e das duas espirais ao redor de *aa*. Os dois cilindros de bismuto

²⁷Ou seja, funcionando como bobinas ou solenoides.

²⁸A corrente fluía nos enrolamentos da bobina que estava ao redor dos cilindros de bismuto, de forma análoga a um eletroímã no qual um cilindro de ferro está dentro de uma bobina com corrente.

²⁹Em alemão: *Grove'sche Becher*. A célula voltaica de Grove, também chamada de elemento, bateria ou pilha de Grove, recebeu esse nome em homenagem ao seu inventor, William Robert Grove (1811-1896), [Gro39]. Essa bateria elétrica consistia em um ânodo de zinco no ácido sulfúrico diluído e um cátodo de platina no ácido nítrico concentrado. Os dois líquidos eram separados por um pote de cerâmica poroso.

foram abaixados nas espirais até que suas extremidades superiores alcançassem o nível da agulha, ou então foram levantados até que suas extremidades inferiores alcançassem o nível da agulha.

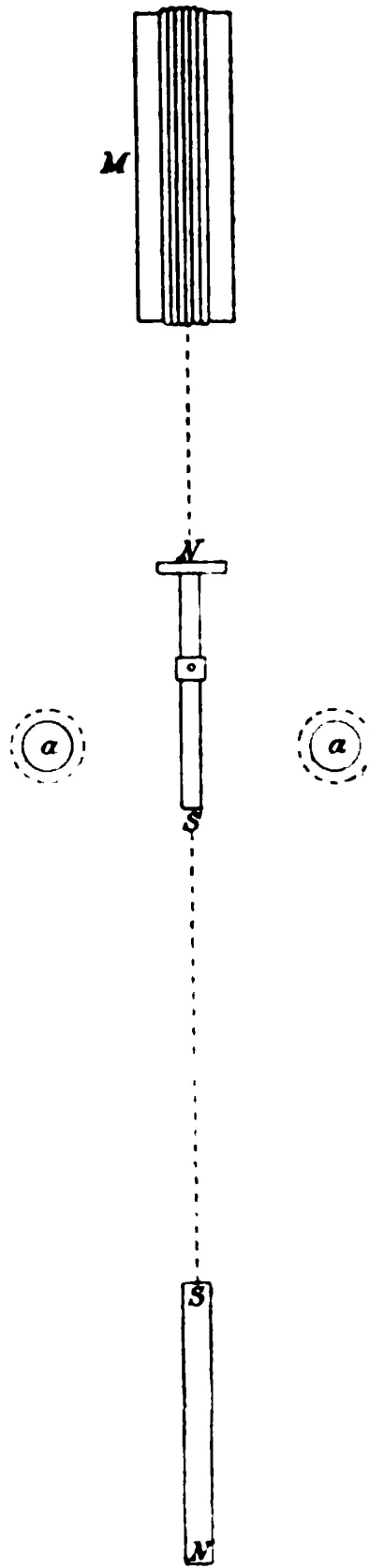


Fig. 2.

As razões para esse arranjo são as seguintes. *Em primeiro lugar*, era importante que a

corrente galvânica que atravessava as duas espirais não afetasse diretamente a agulha embora [a corrente] fosse forte e estivesse próxima à agulha, e apesar da sensibilidade da agulha. Devido à posição simétrica das duas espirais pelo mesmo valor tanto acima quanto abaixo do plano horizontal atravessando a agulha, as deflexões se cancelavam. Devido à mesma distância entre as duas espirais e a agulha, e devido à direção oposta de suas correntes, também se cancelavam as forças verticais. Se isso não ocorresse, as forças verticais fariam a agulha oscilar. Contudo, como uma simetria completa não pode ser alcançada, na prática foi necessário um dispositivo especial para compensar os pequenos desvios inevitáveis. Para esse propósito foi usado um terceiro fio que foi enrolado 18 vezes ao redor de uma armação quadrangular M e ele foi incorporado ao circuito. Essa armação tinha um comprimento de 244 milímetros, uma altura de 146 milímetros e era colocada verticalmente no plano da agulha. A mesma corrente que passava através das duas espirais exercia um torque³⁰ sobre a agulha ao atravessar o terceiro fio. Ao aproximar ou afastar a armação, o torque podia facilmente ser aumentado ou diminuído até que fosse alcançada com precisão a compensação desejada.

Em segundo lugar, era importante que os dois cilindros de bismuto pudessem ser trazidos alternadamente para a posição inferior (onde suas extremidades *superiores* agiam mais fortemente sobre a agulha), e para a posição superior (onde suas extremidades *inferiores* agiam mais fortemente), *sem que a intensidade de seu diamagnetismo mudasse e sem que esse movimento induzisse uma corrente no bismuto [comportando-se] como condutor*. Aqui ficou evidente a vantagem de um *eletrodiaímã* quando comparado a um *[material diamagnético] comum*. Pois o diamagnetismo *comum* produzido pela proximidade de um polo magnético muda com cada deslocamento de seu portador³¹ e, ao mesmo tempo, correntes são sempre induzidas neste portador [diamagnético], se ele for um condutor. Isso é bem diferente para um *eletrodiaímã*, onde o cilindro diamagnético de bismuto é envolvido pela espiral galvânica.³² Quando essa espiral é enrolada uniformemente e é tão longa tal que o cilindro de bismuto esteja sempre a alguma distância das extremidades da espiral, a força eletromagnética da espiral é quase constante em todas as partes do espaço no qual se encontra o cilindro de bismuto, de acordo com as conhecidas leis do eletromagnetismo. Portanto, podemos mover o cilindro de bismuto dentro da espiral sem mudar seu diamagnetismo e sem induzir nele correntes galvânicas. Além disso, toda a massa de bismuto é diamagnetizada *uniformemente*, o que não acontece com a diamagnetização usual causada pela proximidade de um polo magnético, porque aqui³³ as partes mais próximas do polo se tornam muito mais intensas do que as mais distantes, uma circunstância que impede todas as medições.

Se nenhuma influência direta da corrente sobre a agulha ocorreu durante o cancelamento descrito e se nenhuma corrente foi induzida nos cilindros de bismuto [comportando-se] como condutores durante seus movimentos para cima e para baixo, então a deflexão observada da agulha teve que ser considerada como uma ação pura da *força diamagnética* das hastes de bismuto, e essa deflexão teve que ser *positiva* ou *negativa* de acordo com a lei da *polaridade diamagnética*, dependendo se as hastes de bismuto receberam sua *posição inferior* ou *superior*

³⁰Em alemão: *Drehungsmoment*. Essa expressão pode ser traduzida como torque, torque de rotação, momento de torção, par de forças, binário de rotação ou binário.

³¹Isto é, as propriedades magnéticas do material diamagnético, tal como a intensidade de sua polaridade diamagnética, que são produzidas pelo ímã permanente colocado em sua proximidade, são alteradas por cada variação de distância entre o ímã e o material diamagnético.

³²Ou seja, o cilindro de bismuto é envolvido pelo fio enrolado ao redor dele, com esse fio atuando como uma bobina ou solenoide.

³³Ou seja, na diamagnetização usual.

nas espirais de fio.³⁴ Isso resulta na circunstância, favorável a uma observação mais nítida, de que essa deflexão pode ser aumentada por *multiplicação*, sempre mudando a posição das hastes de bismuto no momento em que a agulha atinge o fim de seu arco de oscilação, até que, finalmente, por meio da ação do amortecedor com o qual a agulha é equipada, seu arco de oscilação diminui durante cada oscilação tanto quanto aumenta por meio da ação diamagnética das hastes de bismuto. O *limite* correspondente pode ser calculado com grande precisão ao levar em consideração a sequência dos arcos de oscilação observados. Se o amortecimento for conhecido, ele pode ser usado como uma *medida da intensidade do eletrodiamagnetismo* das hastes de bismuto.

Se, em vez das barras de bismuto, usarmos um *cilindro de ferro* do mesmo comprimento e se repetirmos as mesmas experiências, poderemos *comparar a intensidade de um eletrodiaímã com a intensidade de um eletroímã*. É claro que devido à alta sensibilidade do instrumento, temos de enfraquecer tanto quanto possível a ação do eletroímã utilizando uma barra de ferro muito *fin*a. Nas próximas experiências a barra de ferro era tão fina que seu peso era de apenas a 59200^a parte do peso das duas barras de bismuto. Mesmo nesse caso sua ação era muito mais forte do que aquela das duas barras juntas de bismuto.

Finalmente, um *terceiro* aspecto importante dessas experiências é o de determinar a *direção* da deflexão para cada posição das barras de bismuto e compará-la com a direção que a deflexão tinha para barras de ferro colocadas no mesmo lugar. Portanto, durante as observações registramos a posição das barras para cada período de oscilação. Os experimentos a seguir mostram que a deflexão da agulha, com as hastes de bismuto e de ferro na mesma posição, sempre ocorreu *em direções opostas*, de modo que, como já é sabido para os *diaímãs comuns* por outras ações, também para os *eletrodiaímãs* o fluido magnético Norte e Sul, sob as mesmas condições de corrente, também devem ser distribuídos *de maneira oposta* à dos *eletroímãs*, o que foi comprovado por esses experimentos.

3.3 Experiências e Medições

As experiências e medições usando os instrumentos descritos anteriormente foram feitas por pessoas diferentes para remover a incerteza encontrada por um único observador com ações tão fracas. Além de mim, os seguintes senhores tiveram a gentileza de repetir as mesmas medições em dias diferentes, a saber, o Professor Listing, o Professor Sartorius von Waltershausen, o Dr. von Quintus Icilius e o Dr. Riemann.³⁵ Por exemplo, em vez do registro de minhas próprias medições, darei aqui na íntegra o registro das medições feitas com muito cuidado pelo Professor Listing, apenas observando que as minhas, como todas as outras, concordam estreitamente com elas.

Göttingen 1851. 21 de Junho.

Observador: Professor Listing.

Corrente Galvânica [produzida por] seis elementos de platina-zinco de Grove.

³⁴Em alemão: *Drahtspiralen*. Essa expressão pode ser traduzida como espirais de fio, bobinas de fio ou solenoides. Normalmente uma bobina consiste em um enrolamento de várias espiras.

³⁵Johann Benedict Listing (1808-1882), Wolfgang Sartorius Freiherr von Waltershausen (1809-1876), Ernst Wilhelm Gustav von Quintus Icilius (1824-1885) e Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).

1. Experiências com Duas Barras de Bismuto

Número da oscilação	Posição das barras	Posição da agulha no início e no final de cada oscilação	Posição de equilíbrio da agulha	Arco de oscilação da agulha
1.	acima	500,0		
2.	abaixo	467,0	487,6	-40,0
3.	acima	513,9	488,3	-50,4
4.	abaixo	459,9	488,3	-56,3
5.	acima	518,5	489,2	-58,5
6.	abaixo	460,0	487,3	-55,2
7.	acima	512,0	489,3	-46,5
8.	abaixo	471,1	484,9	$\mp 29,7$
9.	acima	489,7	487,3	$\pm 7,0$
10.	abaixo	494,2	489,3	-8,9
11.	acima	480,9	488,9	-15,6
12.	abaixo	498,9	482,7	-30,0
13.	acima	457,0	483,1	-50,4
14.	abaixo	516,0	487,2	-57,8
15.	acima	459,3	484,2	-50,9
16.	abaixo	504,4	487,6	$\mp 35,6$
17.	acima	478,3	483,1	$\pm 12,4$
18.	abaixo	476,9	485,6	-14,7
19.	acima	504,9	485,7	-36,6
20.	abaixo	459,6	480,6	-42,6
21.	acima	499,4	479,6	-39,6
22.	abaixo	460,1	484,1	-46,6
23.	acima	513,9	488,2	-51,7
24.	abaixo	464,2	486,8	-45,9
25.	acima	506,2	480,0	-50,6
26.	abaixo	446,9	474,1	-55,2
27.	acima	498,0	476,4	$\mp 44,5$
28.	abaixo	460,0	465,6	$\pm 15,5$
29.	acima	453,1	462,5	-16,8
30.	abaixo	479,8	464,6	-29,8
31.	acima	446,9	467,8	-40,3
32.	abaixo	494,6	471,8	-46,0
33.	acima	450,4	471,3	-42,2
34.	abaixo	490,5	468,2	-44,0
35.	acima	442,6		

2. Experiências com Uma Barrinha de Ferro

Devido à sensibilidade da agulha, para reduzir a ação do ferro usamos apenas uma única barra pequena e foram realizadas duas séries de medições com ela, nas quais a pequena barra foi primeiro movida para cima e para baixo na primeira espiral e então na segunda [espiral]. A pequena barra de ferro tinha o mesmo comprimento que as pequenas barras de bismuto, mas seu peso era de apenas 5,8 miligramas, isto é, ela era 59200 vezes mais leve do que as duas barras pequenas de bismuto juntas. Apesar disso, a ação era tão forte que a deflexão só podia ser medida de forma simples *sem multiplicação*.

	<i>Primeira série</i>			
Número	Posição da barrinha de ferro	Elongação da agulha	Posição de repouso da agulha	Média
1.	abaixo	428,1	300,4 303,8 301,7	302,0
		215,2		
		362,8		
		261,0		
2.	acima	451,2	571,7 569,8 571,9 570,6	571,0
		652,0		
		515,0		
		609,9		
		544,4		
3.	abaixo	435,5	298,2 301,5 298,6 304,0	300,6
		206,7		
		364,7		
		254,6		
		336,9		
4.	acima	503,2	560,1 561,3	560,7
		598,0		
		536,9		

	<i>Segunda série</i>			
Número	Posição da barrinha de ferro	Elongação da agulha	Posição de repouso da agulha	Média
1.	acima	524,0	563,9 565,8	564,9
		590,5		
		549,3		
2.	abaixo	227,4	323,2 320,1 324,9	322,7
		387,1		
		275,4		
		357,9		
3.	acima	450,9	577,4 579,9 570,1	575,8
		661,8		
		525,3		
		600,0		
4.	abaixo	217,8	322,4 318,9 317,6	319,6
		392,2		
		270,0		
		349,4		
5.	acima	439,7	559,2 553,0 555,3	555,8
		638,8		
		495,8		
		595,0		

É importante mencionar que a intensidade da corrente produzida por seis elementos de Grove foi medida com um galvanômetro tangencial³⁶ cujo anel tinha um diâmetro de 211 milímetros. A corrente defletia a agulha magnética [do galvanômetro] de [um ângulo de] 28° 21', sendo que a partir disso a intensidade da corrente (com a componente horizontal da

³⁶Weber sempre menciona dois tipos principais de galvanômetro, denominados em alemão de *Sinus-Boussole* e *Tangenten-Boussole*. O galvanômetro tangencial (também denominado de galvanômetro tangente ou galvanômetro de tangente), foi inventado por Johan Jakob Nervander (1805-1848). Já o galvanômetro senoidal (também denominado galvanômetro seno ou galvanômetro de seno) foi inventado por Claude Servais Mathias Pouillet (1790-1868), [Ner33], [Pou37], [VS08] e [Sih21]. Friedrich Kohlrausch discutiu a medição de correntes usando os galvanômetros tangencial e senoidal, [Koh83, Capítulos 64 e 65, págs. 188-192].

força magnética terrestre colocada = 1,8)³⁷ torna-se

$$= 105,5 \cdot \frac{1,8}{2\pi} \cdot \tan 28^\circ 21' = 16,31 .$$

3.4 Cálculo das Experiências

Na Tabela contendo as experiências com duas *barras de bismuto* as posições da agulha observadas no início e no final de uma oscilação estão escritas na *terceira* coluna. A partir de cada três dessas posições observadas consecutivamente da agulha estão calculadas na *quarta* e *quinta* coluna o estado correspondente de repouso e o arco de oscilação levando em consideração o amortecimento. Um sinal *positivo* na frente do arco de oscilação significa que a agulha foi de divisões menores para maiores na *posição superior* das barras de bismuto, ou de divisões maiores para menores na posição inferior; o inverso é verdadeiro para o sinal *negativo*. Após a posição das barras de bismuto ser modificada várias vezes ao final de cada oscilação e o arco de oscilação ter quase alcançado seu limite, foi produzida uma interrupção deixando a posição das barras de bismuto inalterada durante duas oscilações, mas depois regularmente mudando-as novamente. O arco de oscilação *negativo* foi transformado dessa maneira em um arco *positivo* que, contudo, rapidamente diminuiu a zero e logo tornou-se novamente *negativo*. Dessa maneira tornou-se mais aparente a direção produzida pelas hastes de bismuto. — Se contarmos os arcos de oscilação a partir daquele que está mais próximo de zero, então os valores observados que se aproximam mais do valor limite podem ser facilmente reduzidos ao *valor limite* com a ajuda do conhecido *decremento logarítmico*, e com isso pode ser encontrado um valor médio mais exato do valor limite. No presente caso, onde o *decremento logarítmico* é próximo do valor $= \log \frac{3}{2}$, basta dividir o valor do n -ésimo arco por $(1 - (\frac{2}{3})^n)$, ou mais precisamente, já que o *decremento logarítmico* $= 0,17887$, por $(1 - 0,6624^n)$. Usando esse procedimento obtemos os seguintes valores reduzidos:

³⁷Na linguagem da teoria de campos do eletromagnetismo ensinado nos livros didáticos atuais, esse valor da componente horizontal T do magnetismo terrestre dado por $T = 1,8 \sqrt{mg}/(s\sqrt{mm})$ corresponde à componente horizontal $B_{horizontal}$ do campo magnético terrestre dado por $B_{horizontal} = 1,8 \times 10^{-5}$ *Tesla*, ver [MB82], [Mal82], [Sch88] e [Mal07].

Número	Observado	Reduzido	Média
1.	-40,0	-63,4	-61,8
2.	-50,4	-66,6	
3.	-56,3	-67,1	
4.	-58,5	-65,5	
5.	-55,2	-59,4	
6.	-46,5	-48,8	
11.	-30,0	-47,5	-59,8
12.	-50,4	-66,6	
13.	-57,8	-68,5	
14.	-50,9	-56,8	
19.	-42,6	-67,5	-56,1
20.	-39,6	-52,3	
21.	-46,6	-55,5	
22.	-51,7	-57,9	
23.	-45,9	-49,4	
24.	-50,6	-53,1	
25.	-55,2	-57,0	
30.	-40,3	-63,9	-55,8
31.	-46,0	-60,2	
32.	-42,2	-50,0	
33.	-44,0	-49,3	

Combinando todas as observações obtemos o seguinte limite:

$$x = -58,4 .$$

O sinal *negativo* significa que a agulha foi conduzida para *maiores* divisões de escala quando as hastes de bismuto estavam na *posição inferior*, e para *menores* divisões de escala na *posição superior*. Além disso, a partir dessas experiências realizadas de acordo com o *método da multiplicação*, segue-se a partir do *limite* dos arcos de oscilação encontrado como sendo $= x$, que a *deflexão E correspondendo ao equilíbrio da agulha* [é dada por:]

$$E = \frac{x}{2} \cdot \frac{1 - e^{-\lambda}}{1 + e^{-\lambda}} ,$$

de acordo com a regra que forneci no artigo anterior.³⁸ Aqui $\log e^{\lambda}$ denota o decremento logarítmico, isto é, $\log e^{\lambda} = 0,17887$. A partir disso segue a *deflexão correspondendo ao equilíbrio da agulha*:

$$E = -5,93 .$$

A partir das experiências com a *pequena barra de ferro* realizadas sem multiplicação, foram obtidos alternadamente os seguintes estados de repouso da agulha para a *posição superior* e *inferior*:

³⁸[Web52c, pág. 440 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21c].

	Primeira série	Segunda série
acima	—	564,9
abaixo	302,0	322,7
acima	571,0	575,8
abaixo	300,6	319,6
acima	560,7	555,8

A partir disso seguem imediatamente os valores da deflexão E :

Primeira série	Segunda série
+134,50	+121,10
+135,20	+126,55
+130,05	+128,10
	+118,10

Portanto, fazendo a média das duas colunas obtemos para a deflexão

$$E' = +128,4 .$$

O sinal *positivo* significa que a agulha foi conduzida para *menores* divisões de escala na *posição inferior* da barrinha de ferro, e para *maiores* divisões de escala na *posição superior*, isto é, *exatamente o oposto das barras de bismuto*.

Portanto, o *momento do magnetismo* da pequena barra de ferro comparado com o momento do *diamagnetismo* das duas barras de bismuto comporta-se como

$$+128,4 : -5,93 ,$$

isto é, o momento do ferro é igual a 21,7 vezes o momento do bismuto com sinal oposto, apesar do fato que a massa do ferro era 59 200 vezes menor. Portanto, reduzindo a massas iguais, o *diamagnetismo do bismuto* torna-se 1 285 000 vezes menor do que o *magnetismo do ferro*.

A partir de uma série similar de experiências conduzidas pelo Professor Sartorius von Waltershausen, foi obtido o *limite*

$$x = -48,2 ,$$

a partir de uma terceira série devida ao Dr. Quintus Icilius,

$$x = -47,3 ,$$

a partir de uma quarta série do Dr. Riemann,

$$x = -45,0 ,$$

e a partir da série que realizei,

$$x = -55,8 .$$

Portanto, a média de todas essas experiências é

$$x = -50,9 ,$$

$$E = -5,17 ,$$

e, portanto, o *diamagnetismo* do bismuto torna-se 1 470 000 vezes menor do que o magnetismo do ferro.

As experiências anteriores nos permitem provar a existência do *eletrodiamagnetismo* do bismuto. A determinação deduzida disso para sua *intensidade* pode, como é facilmente percebido, ser considerada apenas como aproximada; mas essa determinação aproximada é suficiente para ser usada como um ponto fixo de apoio na investigação seguinte sobre a *indução diamagnética de correntes galvânicas*.

3.5 O Instrumento Mais Conveniente para Observar a Polaridade Diamagnética

As experiências anteriores provam três coisas:

- (i) Na representação de diaímãs, assim como na representação de ímãs, as forças puramente magnéticas podem ser substituídas por *forças eletromagnéticas* das correntes galvânicas.
- (ii) Que a *polaridade diamagnética* é observada de forma clara e confiável em uma haste de bismuto que é uniformemente diamagnetizada ao longo de seu comprimento, pois pode ser representada pela força eletromagnética de uma espiral galvânica na qual ela é colocada, na medida em que exerce *forças rotacionais opostas*³⁹ em uma agulha magnética, dependendo de sua aproximação [em relação à agulha] com uma ou outra extremidade, assim como a *polaridade magnética* é observada em uma haste de ferro magnetizada pela mesma corrente.
- (iii) Sob as condições dadas, a força de torção exercida pela barra de bismuto diamagnetizada em uma agulha magnética pode ser determinada tanto em direção quanto em magnitude, e pode ser comparada com a direção e magnitude da força rotacional exercida na mesma agulha magnética por um barra de ferro magnetizada pelas mesmas forças, da qual segue que a *direção* da força de torção é sempre *oposta*, enquanto que a determinação da *magnitude* leva a uma *comparação entre si dos correspondentes momentos magnéticos e diamagnéticos*.

Todas essas experiências podem ser realizadas de maneira simples caso sejam feitas apropriadamente. Isso é ainda mais notável ao observar que as forças que estão sendo examinadas são extremamente pequenas, como observado na Introdução.⁴⁰ Portanto, poderíamos pensar que a observação das ações claramente observáveis dessas pequenas forças necessitaria da utilização de instrumentos altamente sofisticados, o que não é o caso. De fato, uma pilha de Grove ou de Bunsen⁴¹ de seis ou oito elementos e algumas libras de fio de cobre de calibre razoável são instrumentos necessários para muitas experiências diferentes. Além disso,

³⁹Em alemão: *Entgegengesetzted Drehungskräfte*. Essa expressão pode ser traduzida como “forças rotacionais opostas”, “torques opostos” ou “forças de torção opostas”.

⁴⁰Ver a Parte I - Introdução. Conceito de Polaridade Diamagnética na página 15.

⁴¹A pilha, bateria, célula voltaica ou elemento de Bunsen recebeu esse nome em homenagem a seu inventor, Robert Wilhelm Eberhard Bunsen (1811-1899). Essa bateria elétrica consistia em um ânodo de zinco no ácido sulfúrico diluído e um cátodo de carbono no ácido nítrico concentrado. Os dois líquidos eram separados por um pote de cerâmica poroso. Bunsen substituiu o cátodo de platina da bateria de Grove por um eletrodo de carbono.

precisamos apenas de uma pequena agulha magnética equipada com um espelho para ser observada por um telescópio (para o qual é suficiente um telescópio sextante) assim como ocorre com um magnetômetro.

Para facilitar ao máximo a execução desses experimentos, que são particularmente importantes para a fundação da teoria do diamagnetismo, e em particular para reduzir o esforço necessário para a montagem do aparelho, fiz o seguinte arranjo, que pode ser recomendado como o mais conveniente para repetir os experimentos. Sua característica principal é que em vez das duas espirais galvânicas que foram colocadas em posição vertical nas experiências descritas anteriormente na Seção 3.2, de tal forma que um dos polos de uma agulha magnética *reta* fique simetricamente entre elas, o novo instrumento necessita de apenas uma *única* espiral.⁴² Essa espiral única é instalada simetricamente no meio dos dois polos de uma agulha magnética com o *formato de ferradura*. Na Figura 3 a seção reta dessa espiral é representada por *A*, que está simetricamente colocada entre os polos *N* e *S* de uma agulha magnética *NBS* curvada na forma de uma ferradura. Essa agulha magnética é segurada pelo grampo *DE*, sendo que no centro *C* [desse grampo] está presa a linha de suspensão. A Figura 4 e a Figura 5 ilustram o instrumento em uma visão lateral.⁴³

⁴²Isto é, um único solenoide finito.

⁴³Uma outra reprodução das Figuras 3, 4 e 5 aparece na página 93.

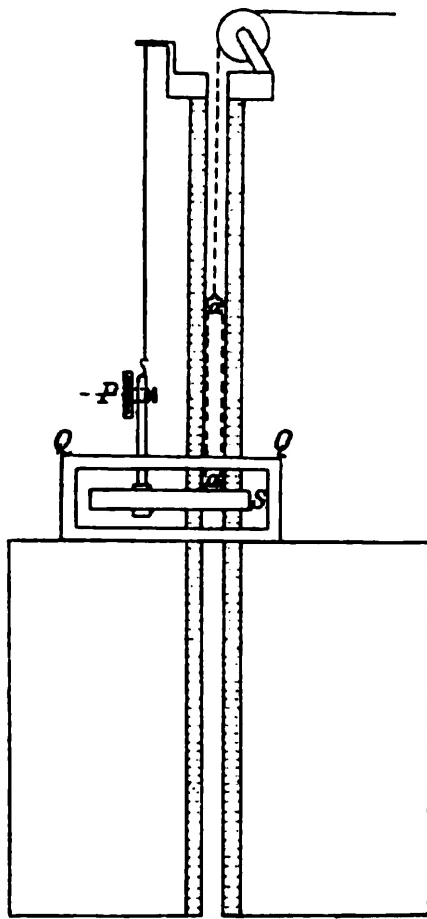


Fig. 4

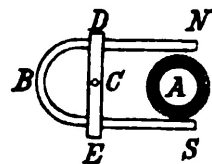


Fig. 3.

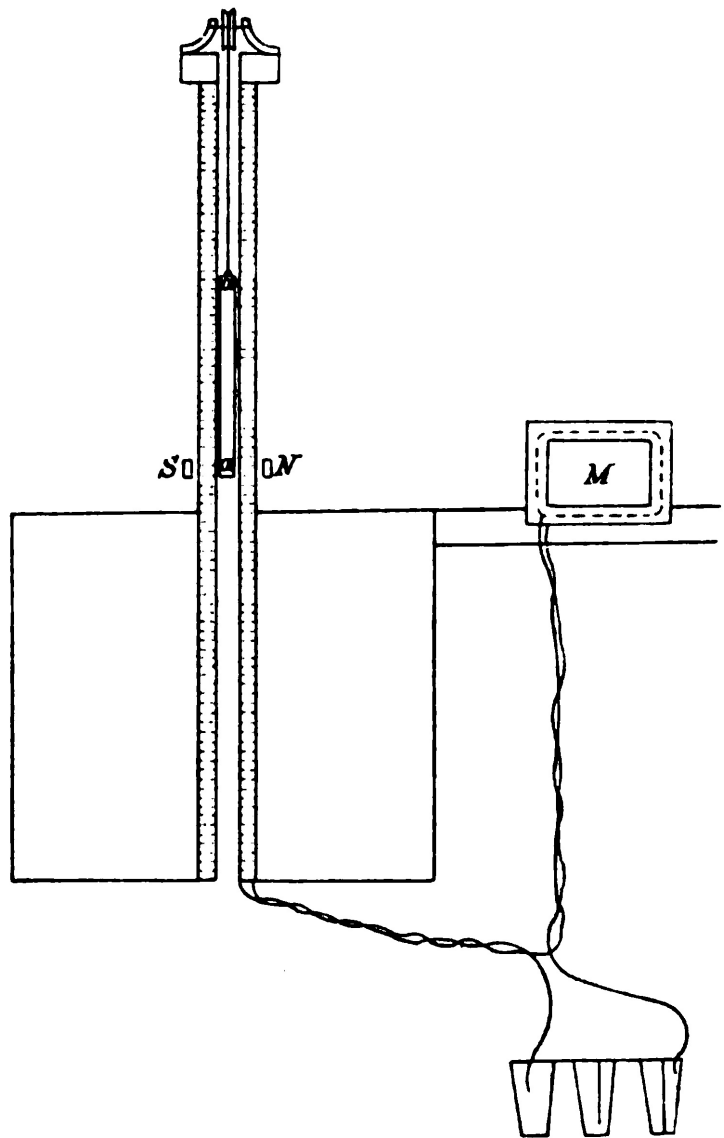


Fig. 5.

É vantajoso dar à espiral um comprimento considerável, por exemplo, de 400 a 500 milímetros, o que facilita o ajuste da suspensão da agulha para que ela levite no plano horizontal que divide ao meio o comprimento da espiral, onde então a corrente que passa pela espiral não exerce torque na agulha. No caso em que exista um pequeno torque, ele pode ser facilmente compensado como explicado na Seção 3.2 por um multiplicador M consistindo em poucos enrolamentos (ver a Figura 5).⁴⁴ Para observar a agulha, é necessário que ela seja

⁴⁴Um multiplicador é um galvanômetro usado para medir a intensidade da corrente elétrica passando por ele. Dependendo do contexto essa palavra também pode se referir à bobina de um galvanômetro ou a uma bobina genérica com seus enrolamentos ou espiras. Algumas vezes também o multiplicador ou bobina pode ser usado como um indutor de correntes elétricas em outros circuitos ou para produzir torques eletrodinâmicos sobre outros circuitos. O instrumento recebeu esse nome “multiplicador” do químico, físico e matemático alemão Johann Schweigger (1779-1857) que construiu o primeiro galvanômetro em 1820. Ele amplificou o efeito que Oersted observou pela primeira vez em 1820 ao formar uma bobina com várias espiras enroladas ao redor de uma estrutura retangular, no centro da qual estava suspensa uma agulha imantada, [Sch20] e [Sch21d]; [Sch21c] com tradução para o francês em [Sch21a]; e [Sch21b]. Ver também [Chi64] e [LSN21].

equipada com um espelho P como na Figura 4, e observar nele com um telescópio o reflexo de uma escala distante. Além disso, a agulha magnética é cercada por um amortecedor QQ como na Figura 4. A barra de bismuto aa é suspensa verticalmente na espiral com um filamento (Figura 4 e Figura 5). Ela pode ser levantada ou abaixada de tal forma que sua extremidade inferior esteja entre os polos da agulha magnética, como representado nas Figuras 4 e 5, ou então sua extremidade superior. As observações podem ser feitas mais facilmente se o dispositivo for montado por meio de roletes ou um simples dispositivo de alavanca, de modo que o próprio observador no telescópio possa provocar a descida ou elevação da haste de bismuto levantando ou abaixando o pé. Quando a corrente está fechada e a agulha magnética encontra-se em repouso completo, se levantarmos a barra de bismuto, observaremos então um pequeno movimento da agulha. Tão logo a agulha alcance sua maior elongação, a barra de bismuto é novamente abaixada e a agulha magnética desloca-se de volta com uma maior velocidade. Tão logo ela alcance sua maior elongação desse lado, a barra de bismuto é novamente levantada e assim por diante. Se trocarmos a barra de bismuto por um fio muito fino de ferro com o mesmo comprimento, podemos nos convencer que a deflexão da agulha acontece na direção oposta à deflexão da barra de bismuto.

III - Diamagnetoelasticidade e Medição das Correntes Elétricas Induzidas Diamagneticamente

3.6 Indução Diamagnética

As experiências sobre *indução diamagnetoelétrica*⁴⁵ são obviamente mais difíceis do que os experimentos anteriores sobre *eletrodiamagnetismo*, por causa de sua maior delicadeza de observação. Há necessidade de técnicas especiais para arranjar as experiências para alcançar de fato o objetivo com recursos limitados. As próximas experiências mostram como isso é possível. Mesmo que as ações obtidas com o auxílio desses meios sejam pequenas, elas mostram tal concordância que as tornam bem notáveis levando em conta as circunstâncias, caso a tarefa a ser alcançada seja estabelecer o fato da *indução diamagnética* e ter certeza de que não fomos enganados por circunstâncias externas. Como veremos, as ações podem ser usadas para determinações *quantitativas* da *intensidade* da indução diamagnética que são aplicáveis para tais verificações para as quais é suficiente um menor grau de precisão. Apenas o desejo de fornecer a essas determinações quantitativas a precisão necessária para algumas pesquisas especiais vai fazer com que seja necessário no futuro aplicar instrumentos mais sofisticados. Descrevo inicialmente o indutor diamagnético e procedo então com as experiências realizadas com ele.

3.7 Descrição do Aparelho de Indução Diamagnética

Descrevo aqui um indutor diamagnético diferente daquele com o qual encontrei um fraco sinal de indução diamagnética (*Berichte* 1847 e *Annalen* de Poggendorff, 1848, Vol. 73),^{46,47} que, no entanto, não possuía a delicadeza e precisão desejáveis para esses experimentos. Esse instrumento era essencialmente o mesmo que Faraday utilizou mais tarde e que está descrito nas *Philos. Transact. 1850, P. I.*⁴⁸ Contudo, Faraday não conseguiu detectar a indução diamagnética com esse instrumento, embora tenha feito várias aplicações diferentes interessantes com ele. O motivo para esse sucesso variado está provavelmente nos instrumentos galvanométricos mais refinados que usei. Também não teria sido capaz de observar tal indução diamagnética se não tivesse à minha disposição um galvanômetro cuja agulha é observada com espelho e telescópio como os magnetômetros de Gauss. Contudo, minhas experiências realizadas com esse instrumento também não podem ser consideradas suficientes, já que as ações fracas parecem estar combinadas com outras ações das quais dificilmente podem ser separadas. Além disso, as circunstâncias não admitem um *controle quantitativo*. O indutor descrito aqui difere do anterior essencialmente nos seguintes aspectos:

1. Em vez de um [eletroímã] comum, é usado um *eletrodiaímã* para a indução, cujo momento [magnético] é conhecido ao menos aproximadamente pela investigação anterior, segundo a qual pode ser prevista a razão da ação indutora do instrumento ao usar uma barra de bismuto em comparação com a ação ao usar uma barra de ferro.

⁴⁵Em alemão: *diamagnetelektrische Induktion*.

⁴⁶[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 255.

⁴⁷[Web48b], [Web48c, pág. 255 das *Obras* de Weber] com traduções para o inglês em [Web52d], [Web66c] e [Web21k].

⁴⁸[Far50].

2. A indução é produzida pelo *simples movimento* do material diamagnético em uma espiral de fio em repouso.⁴⁹ Através desse procedimento, o diamagnetismo [da barra de bismuto] permanece *inalterado* e evitamos a indução de correntes galvânicas no bismuto [que se comporta] como um condutor. Caso isso não tivesse sido feito, essas correntes galvânicas [induzidas no bismuto] poderiam ser facilmente confundidas com as correntes induzidas diamagneticamente [na bobina de indução que vai ser descrita a seguir].

3.7.1 O Eletrodiâimã Utilizado para a Indução

O *eletrodiâimã* utilizado para a indução consistia em uma barra de bismuto em um longo fio espiral,⁵⁰ *cccc* da Figura 6 A, através do qual era conduzida uma corrente de oito elementos de Bunsen de carvão e zinco.⁵¹ A barra de bismuto tinha um comprimento de 186 milímetros e pesava 339 300 miligramas. A espiral consistia em um fio de cobre, que era coberto com lã e também isolado por uma cobertura de guta-percha. O fio de cobre puro tinha uma espessura de 2,3 milímetros e o fio enrolado consistia de oito camadas, tendo cada uma 120 enrolamentos. A espiral inteira tinha 383 milímetros de comprimento, 23,9 milímetros de diâmetro interior e 70 milímetros de diâmetro exterior.⁵²

⁴⁹Isto é, pelo movimento do material diamagnético dentro de um solenoide finito.

⁵⁰Isto é, a barra de bismuto fica dentro de um solenoide finito.

⁵¹Ver a Nota de rodapé 41 na pág. 31.

⁵²Uma outra reprodução da Figura 6 aparece na página 94.

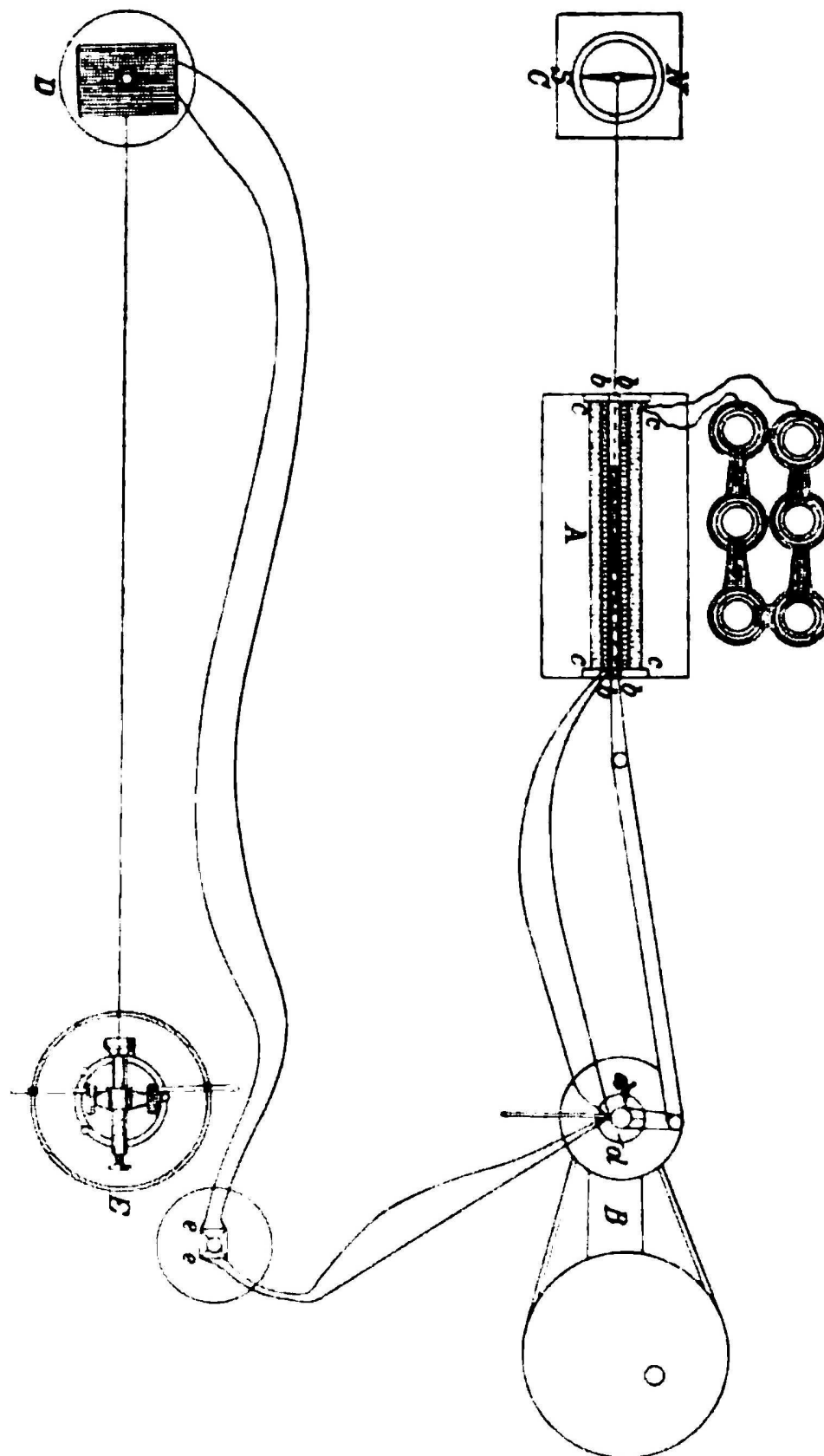


Fig. 6.

3.7.2 A Bobina de Indução

A bobina de indução⁵³ da Figura 6 A é aquela espiral na qual é induzida uma corrente devido ao movimento do *eletrodiaímã* [em seu interior]. Essa espiral tem de ser cuidadosamente isolada da espiral que pertence ao eletrodiaímã através da qual flui a corrente da pilha galvânica e tem de ser conectada ao multiplicador do galvanômetro para observar a corrente induzida. Essa espiral consistia em um fio de cobre com a espessura de 1 milímetro e coberta com seda formando três camadas, cada uma tendo 294 espiras. O comprimento era de 383 milímetros, o diâmetro interior era de 19 [mm] e o exterior era de 23 milímetros. Após ela ter sido envolta com guta-percha fina para melhor isolamento, ela foi firmemente colocada no outro tubo da espiral pertencente ao eletrodiaímã, ou melhor, a última espiral foi enrolada em torno dela.

O ponto essencial a ser observado para essa espiral, é que ela está decomposta em duas metades completamente simétricas. Isso significa que o fio não enrola uniformemente na mesma direção, em vez disso, a espiral é decomposta em duas metades nas quais o fio é enrolado em direções opostas. Isso é necessário caso uma corrente tenha que ser induzida nessa espiral através do movimento de uma barra diamagnética de bismuto ou de uma barra de ferro magnética, sendo que essa corrente pode ser observada com o galvanômetro conectado a ela. Pois se esta haste indutiva fosse colocada no meio da espiral e movida em relação a ela, a força indutora exercida por sua extremidade Norte em uma metade da espiral seria exatamente oposta à [força indutora] exercida por sua extremidade Sul na outra metade, e a a ação das duas [forças] se anularia, se ambas as metades da espiral estivessem enroladas no mesmo sentido. Seu enrolamento oposto faz com que as duas forças de indução não se anulem, mas dobrem [de intensidade].

Esse mecanismo necessário para a finalidade da indução tem uma outra vantagem importante para a implementação prática. É claro que a corrente da pilha galvânica na espiral do eletrodiaímã, desde que seja *constante*, não exerce uma força indutora sobre a bobina de indução com relação à qual ela tem uma posição fixa e inalterável. Contudo, devido à *menor mudança em sua intensidade*, uma corrente seria induzida na espiral que seria muito maior do que a corrente induzida diamagneticamente e iria perturbar a observação dessa última corrente. Porém, é óbvio que o mesmo mecanismo da bobina de indução através do qual a indução diamagnética é dobrada nas duas metades dessa bobina, também leva a um cancelamento das forças de indução exercidas pela corrente da pilha galvânica na bobina externa, de tal forma que se for perfeita a simetria das duas metades, mesmo grandes mudanças de intensidade da corrente da pilha galvânica não terão qualquer influência. Além disso, em primeiro lugar, é muito fácil checar se esse cancelamento ocorre exatamente ao desligar ou inverter toda a corrente, em vez de produzir pequenas mudanças [em sua intensidade]. Em segundo lugar, se acontecer que o cancelamento não seja exato, é fácil torná-lo perfeito ao enrolar uma extremidade da bobina de indução uma vez ou algumas vezes ao redor da espiral através da qual flui a corrente da pilha galvânica. Dessa forma, é fácil tornar as ações da indução diamagnética livre de todas as influências externas.

⁵³Em alemão: *Die Induktionsspirale*. Isto é, a bobina ou solenoide ao redor da barra de bismuto. Essa expressão pode ser traduzida como bobina, solenoide ou espiral de indução.

3.7.3 As Outras Partes do Indutor

No que diz respeito às outras partes do aparelho de indução que são deixadas mais ou menos ao gosto do observador, acrescento apenas os seguintes aspectos. Para mover a barra de bismuto na espiral de indução para a frente e para trás, eu a conecto à manivela de uma roda, Figura 6 *B*. Além disso, para que a corrente induzida na espiral de indução quando a haste de bismuto é empurrada para trás tenha a mesma direção no galvanômetro como quando ela é empurrada para frente, um *comutador dd* é anexado à roda, *que gira com a roda*, e por meio do qual a conexão entre as extremidades do fio da bobina de indução e as do multiplicador do galvanômetro é alterada a cada meia volta da roda (no momento em que a haste de bismuto atinge o ponto inicial ou final de sua trajetória). Portanto, a direção sempre constante na qual fluem todas as correntes induzidas através do multiplicador do galvanômetro vai sempre defletir a agulha para o mesmo lado. Para permitir ao observador que produza também uma deflexão da agulha para o outro lado, um segundo comutador *ee* é montado ao lado do telescópio de observação na Figura 6 *E*, que é trocado apenas pelo próprio observador. Esse comutador é designado de *comutador auxiliar*. Ele conecta as duas extremidades do fio do multiplicador com as duas extremidades dos condutores vindo do *comutador giratório*. Além disso, atenção especial deve ser dada aos dois pontos a seguir. Em primeiro lugar, tentamos intensificar a indução mais através da aceleração da rotação da roda do que através do tamanho da trajetória na qual movemos a barra de bismuto para a frente e para trás. Nas próximas experiências a barra de bismuto foi movida para frente e para trás em uma trajetória de apenas 58,2 milímetros de comprimento. Contudo, ela atravessou essa trajetória 10,58 vezes em cada segundo. Se a trajetória fosse maior, uma parte da barra de bismuto teria se aproximado da extremidade da bobina através da qual fluía a corrente da pilha galvânica. Isso mudaria não apenas a intensidade de seu diamagnetismo, mas também induziria nela, [por se comportar] como um condutor, uma corrente que produziria uma corrente induzida secundária na bobina de indução. Isso tem de ser evitado se quisermos obter uma ação pura de indução diamagnética. Em segundo lugar, o comutador giratório necessita de atenção especial, pois é facilmente criada nele uma corrente termomagnética. Portanto, temos de arranjar o comutador de tal forma que metais iguais (latão em latão) se atritem. Isso também apenas enfraquece as correntes termomagnéticas, não as elimina completamente. De fato, as correntes termomagnéticas excitadas nos vários pontos de atrito se cancelam reciprocamente; mas como esse cancelamento muitas vezes não ocorre completamente, a influência resultante, por menor que seja, deve ser neutralizada levando-a em consideração, o que pode ser feito facilmente se as observações nas quais a haste de bismuto é movida para frente e para trás forem imediatamente precedidas e seguidas exatamente pelas mesmas observações nas quais o comutador rotativo é movido sem a haste de bismuto. A propósito, as observações anteriores podem ser facilmente organizadas de modo que as pequenas ações da corrente termomagnética fortaleçam e enfraqueçam alternadamente as ações da indução diamagnética, obtendo-se assim um valor médio que independe da influência da corrente termomagnética. Isso é alcançado ao mudar de tempos em tempos a direção da corrente na pilha galvânica, o que inverte o diamagnetismo na barra de bismuto.

Para o *galvanômetro* na Figura 6 *D* usei, assim como no caso do instrumento de medição eletrodiamagnética, um pequeno magnetômetro de acordo com o arranjo de Gauss, equipado com um multiplicador muito forte. O comprimento da agulha foi reduzido a 30 milímetros. A força defletora do magnetismo terrestre foi reduzida como anteriormente. A agulha também foi cercada por um espesso anel de cobre funcionando como um amortecedor. Dificilmente

precisa ser mencionado que o instrumento de indução tinha de ser tão afastado do galvanômetro de tal forma que a corrente da pilha galvânica utilizada não influenciasse diretamente a agulha. Se não há espaço suficiente para fazer isso, temos de fornecer ao instrumento de indução uma orientação especial em tal posição de maneira que sua força defletora sobre a agulha seja nula ou ao menos muito pequena. Finalmente, para ter uma estimativa grosseira da intensidade da corrente da própria pilha galvânica, uma bússola comum (Figura 6 *C*) foi instalada a uma distância apropriada da bobina através da qual fluía a corrente. Dessa maneira a deflexão da bússola produzida pela corrente podia ser usada para determinar a intensidade da corrente.

3.8 Experiências

As seguintes experiências não foram realizadas apenas por mim, sendo que também participaram, assim como na parte eletrodiamagnética anterior, o Prof. Listing, o Prof. Sartorius von Waltershausen, o Dr. Quintus Icilius, e o Dr. Riemann. A título de exemplo, também darei aqui o registro completo dos experimentos feitos pelo Prof. Listing, com os quais todos os outros quase concordaram.

O indutor foi instalado de tal forma que o plano vertical passando pelo centro do galvanômetro e pelo centro da bobina de fio fazia um ângulo de 45 graus com o meridiano magnético. O eixo dessa bobina de fio era perpendicular ao meridiano magnético. Segue das leis do eletromagnetismo confirmadas pela experiência que com esse arranjo a corrente não deflete a agulha do galvanômetro. Sob essas circunstâncias era mais vantajoso instalar a bússola usada para determinar a intensidade da corrente na direção do eixo estendido da bobina de fio através do qual passava a corrente. Isso aconteceu em uma distância de 708 milímetros do centro sobre o lado Oeste. Aquela corrente por meio da qual a extremidade Norte da bússola é defletida para *Oeste* é denominada de *corrente normal*, a corrente na qual a parte Norte [da bússola] é defletida para *Leste* é denominada de *corrente invertida*. Além disso, o deslocamento da barra de bismuto no aparelho de indução na direção de Oeste para Leste é denominado de *deslocamento normal*, e na direção de Leste para Oeste [é denominado] de *deslocamento invertido*. Finalmente, a posição que o *comutador rotatório* tinha durante o deslocamento normal da barra de bismuto é denominada de *posição normal* e aquela durante o deslocamento invertido é denominada de *posição invertida*. A rotação do volante⁵⁴ foi cronometrada de acordo com a batida de um relógio de pêndulo e descobriu-se que a haste de bismuto completava sua trajetória 10,58 vezes a cada segundo. A distância horizontal do espelho da agulha magnética até a escala do galvanômetro era de 1400 divisões da escala. O período de oscilação⁵⁵ do galvanômetro, que para a força defletora total do magnetismo terrestre era próximo de 9 segundos, foi trazido para 40,437 segundos através do cancelamento parcial da força do magnetismo terrestre devido ao método descrito anteriormente. O decremento logarítmico para a diminuição do arco de oscilação era = 0,12378.

Com a direção da corrente da pilha galvânica na bobina do eletrodiaímã inalterada, e com a posição do comutador auxiliar inalterada, a agulha do galvanômetro foi desviada pela indução diamagnética da haste de bismuto movendo-se de Oeste para Leste no mesmo sentido como quando a haste de bismuto foi movida inversamente de Leste para Oeste, por

⁵⁴Em alemão: *Schwungrads*. Essa expressão pode ser traduzida por volante, volante de inércia ou volante do motor.

⁵⁵Ver a Nota de rodapé 24 na página 19.

causa da mudança intermediária do *comutador rotatório*. Portanto, a deflexão ocorre com deslocamento rápido para frente e para trás, como se produzida por uma corrente constante. Contudo, se a posição do *comutador auxiliar* for alterada, a deflexão da agulha ocorrerá para o lado oposto. Isso implica em que, para obter observações mais precisas, a deflexão da agulha pode ser aumentada através da multiplicação, ao sempre modificar a posição do comutador auxiliar no instante em que a agulha alcançou o final do arco de oscilação, por tanto tempo, até que finalmente devido ao amortecimento da agulha seu arco de oscilação seja diminuído durante cada oscilação pela mesma quantidade quanto seu aumento devido à corrente induzida. Portanto, entre duas elongações observadas da agulha foi anotada a posição denominada + ou – do comutador auxiliar. Caso a agulha no início das observações já estivesse em oscilação, começávamos com aquela posição do comutador auxiliar na qual a corrente induzida criava uma diminuição do arco de oscilação atual, que então, por uma mudança contínua diminuía até zero e então começava a aumentar até que alcançasse seu limite. Quando a agulha ia de menores para maiores divisões da escala durante a posição denominada + do comutador auxiliar, no próximo conjunto de dados foi colocado o sinal + na frente do arco de oscilação, no caso oposto foi colocado o sinal –. Os sinais dos arcos de oscilação mostraram-se *opostos* pela indução *diamagnética* do bismuto comparados com a indução *magnética* do ferro. Além disso, os arcos de oscilação para o ferro foram muito maiores, embora a barra de ferro fosse muito mais fina do que a barra de bismuto. De fato, tendo o mesmo comprimento, a barra de ferro pesava 790,86 miligramas enquanto que a barra de bismuto pesava 339 300 miligramas. Para medir a ação da indução magnetoelétrica, portanto, não foi necessário mover a barra de ferro para frente e para trás tão rapidamente quanto a barra de bismuto, mas foi suficiente movê-la uma vez durante cada oscilação da agulha, no momento em que a agulha oscilante passou por sua posição de repouso. Os dois comutadores permaneciam em suas posições normais e durante cada duas observações da elongação sempre anotávamos a direção na qual a barra de ferro era deslocada. A direção de Oeste para Leste era denominada + e a direção de Leste para Oeste era denominada –, o que permitiu a comparação com a barra de bismuto. As observações mostram então, como já mencionado, ações *opostas* para o mesmo deslocamento das barras de ferro e bismuto.

Ae experiências começaram checando (1) se havia uma influência da corrente *termo-magnética* e quão grande ela era. Com esse objetivo, começávamos colocando o comutador rotatório em movimento sem mover a barra de bismuto para frente e para trás. A ação foi multiplicada ao modificar o comutador auxiliar em cada elongação. (2) A *barra de bismuto* foi colocada simultaneamente em movimento e foi realizado um conjunto de observações para *corrente normal*. (3) A mesma série foi feita para *corrente inversa*. (4) A mesma série novamente para *corrente normal*. (5) Para *corrente inversa*. (6) E finalmente para *corrente normal*. Após isso, (7) foi checado novamente se havia uma influência da corrente *termo-magnética*, e (8) a barra de bismuto foi trocada com a *barra de ferro* e foi medida a ação de indução dessa barra de ferro.

Göttingen 13 de julho de 1851.

Observador: Professor Listing.

Corrente galvânica de oito elementos de Bunsen de carvão-zinco.

	1. Corrente termomagnética.			
Número da oscilação	Posição do comutador auxiliar	Posição da agulha no início e no final de cada oscilação	Posição de repouso da agulha	Arco de oscilação da agulha
1.	+	497,0		
2.	—	496,2	496,45	—0,5
3.	+	496,4	496,35	—0,1
4.	—	496,4	496,30	+0,2
5.	+	496,0	496,15	+0,3
		496,2		

De acordo com essa Tabela, quase não houve influência da corrente termomagnética.

	2. Indução da barra de bismuto para <i>corrente normal</i> .				
Número da oscilação	Posição do comutador auxiliar	Posição da agulha no início e no final de cada oscilação	Posição de repouso da agulha	Arco de oscilação da agulha	Deflexão da bússola
1.	—	475,3			32° 10' para Oeste
2.	+	472,8	474,65	+ 3,70	
3.	—	477,7	475,00	+ 5,40	
4.	+	471,8	475,20	+ 6,80	
5.	—	479,5	475,32	+ 8,35	
6.	+	470,5	475,33	+ 9,65	
7.	—	480,8	475,52	+10,55	
8.	+	470,0	475,70	+11,40	
9.	—	482,0	475,87	+12,25	
10.	+	469,5	475,85	+12,70	
11.	—	482,4	475,90	+13,00	
		469,3			

	3. Para <i>corrente inversa</i> .				
Número da oscilação	Posição do comutador auxiliar	Posição da agulha no início e no final de cada oscilação	Posição de repouso da agulha	Arco de oscilação da agulha	Deflexão da bússola
1.	+	503,5			31° 50' para Leste
2.	—	515,9	511,15	+ 9,50	
3.	+	509,3	511,13	+ 3,65	
4.	—	510,0	510,62	—1,25	
5.	+	513,2	510,82	—4,75	
6.	—	506,9	510,58	—7,35	
7.	+	515,3	510,85	—8,90	
8.	—	505,9	510,70	—9,60	
9.	+	515,7	510,72	—9,95	
10.	—	505,6	510,53	—9,85	
		515,2			

Número da oscilação	4. Para <i>corrente normal</i> .				
	Posição do comutador auxiliar	Posição da agulha no início e no final de cada oscilação	Posição de repouso da agulha	Arco de oscilação da agulha	Deflexão da bússola
1.	+	480,5			31° 48' para Oeste
2.	—	471,0	474,57	—7,15	
3.	+	475,8	474,40	—2,80	
4.	—	475,0	474,58	+0,85	
5.	+	472,5	474,40	+3,80	
6.	—	477,6	474,47	+6,25	
7.	+	470,2	474,23	+8,05	
8.	—	478,9	474,27	+9,25	
9.	+	469,1	474,10	+10,00	
10.	—	479,3	473,93	+10,75	
11.	+	468,0	473,65	+11,30	
12.	—	479,3	473,65	+11,30	
		468,0			

5. Para <i>corrente invertida</i> .					
Número da oscilação	Posição do comutador auxiliar	Posição da agulha no início e no final de cada oscilação	Posição de repouso da agulha	Arco de oscilação da agulha	Deflexão da bússola
1.	+	501,5			32° 13' para Leste
2.	—	515,0	509,93	+10,15	
3.	+	508,2	510,35	+ 4,30	
4.	—	510,0	510,02	—0,05	
5.	+	511,9	510,20	—3,40	
6.	—	507,0	509,80	—5,60	
7.	+	513,3	509,68	—7,25	
8.	—	505,1	509,42	—8,65	
9.	+	514,2	509,38	—9,65	
10.	—	504,0	509,05	—10,10	
11.	+	514,0	508,72	—10,55	
12.	—	502,9	508,40	—11,00	
13.	+	513,8	508,15	—11,30	
14.	—	502,1	507,83	—11,45	
15.	+	513,3	567,67	—11,25	
		502,0			

	6. Para <i>corrente normal</i> .				
Número da oscilação	Posição do comutador auxiliar	Posição da agulha no início e no final de cada oscilação	Posição de repouso da agulha	Arco de oscilação da agulha	Deflexão da bússola
1.	+	486,0			31° 39' para Oeste
2.	—	461,0	471,20	—20, 40	
3.	+	476,8	470,60	—12, 40	
4.	—	467,8	470,87	—6, 15	
5.	+	471,1	470,48	—1, 25	
6.	—	471,9	470,52	+ 2,75	
7.	+	467,2	470,08	+ 5,75	
8.	—	474,0	470,45	+ 7,10	
9.	+	466,6	470,25	+ 7,30	
10.	—	473,8	469,92	+ 7,75	
11.	+	465,5	469,83	+ 8,90	
12.	—	475,0	470,02	+ 9,70	
13.	+	465,1	470,13	+10,05	
14.	—	575,3	470,17	+10,25	
15.	+	465,0	470,08	+10,15	
16.	—	475,0	469,95	+10,10	
		464,8			

	7. <i>Corrente termomagnética.</i>				
Número da oscilação	Posição do comutador auxiliar	Posição da agulha no início e no final de cada oscilação	Posição de repouso da agulha	Arco de oscilação da agulha	Deflexão da bússola
1.	+	486,1			
2.	—	486,5	486,30	+ 0,40	
3.	+	486,1	486,22	+ 0,25	
4.	—	486,2	486,25	—0,10	
5.	+	486,5	486,35	—0,30	
6.	—	486,2	486,20	0,00	
7.	+	485,9	486,25	+ 0,70	
8.	—	487,0	486,48	+ 1,05	
9.	+	486,0	486,72	+ 1,45	
10.	—	487,9	487,05	+ 1,70	
11.	+	486,4	487,35	+ 1,90	
		488,7			

8. Indução da barra de ferro para <i>corrente normal</i> .					
Número da oscilação	Posição do comutador auxiliar	Posição da agulha no início e no final de cada oscilação	Posição de repouso da agulha	Arco de oscilação da agulha	Deflexão da bússola
1.	+	461,0			31° 48' para Oeste
2.	—	457,2	464,85	—15, 30	
3.	+	484,0	467,17	—33, 65	
4.	—	443,5	466,30	—45, 60	
5.	+	494,2	466,73	—54, 95	
6.	—	435,0	466,10	—62, 20	
7.	+	500,2	466,47	—67, 45	
8.	—	430,5	466,25	—71, 50	
9.	+	503,8	466,55	—74, 50	
10.	—	428,1	466,55	—76, 90	
11.	+	506,2	466,90	—78, 60	
12.	—	427,1	467,05	—79, 90	
13.	+	507,8	467,38	—80, 85	
14.	—	426,8	467,35	—81, 10	
15.	+	508,0	467,35	—81, 30	
16.	—	426,6	467,35	—81, 50	
17.	+	508,2	467,33	—81, 75	
		426,3			

3.9 Cálculo dos Experimentos

Se iniciarmos a contar os arcos de oscilação começando daquele mais próximo do zero, aqueles que estão mais próximos do limite podem ser reduzidos ao *limite* ao dividir o n -ésimo arco de oscilação por $(1 - 0,752^n)$ tendo em vista o decremento logarítmico bem conhecido de

diminuição dos arcos de oscilação = 0,12378. Portanto, os seguintes valores reduzidos são obtidos para as experiências realizadas com bismuto:

	Arco de oscilação	observado	reduzido	Média
2.	8.	+11,40	+13,20	+13,60
	9.	+12,25	+13,65	
	10.	+12,70	+13,75	
	11.	+13,00	+13,80	
3.	8.	-9,60	-14,12	-13,08
	9.	-9,95	-13,10	
	10.	-9,85	-12,02	
4.	9.	+10,00	+13,17	+13,06
	10.	+10,75	+13,12	
	11.	+11,30	+13,08	
	12.	+11,30	+12,88	
5.	10.	-10,10	-12,33	-12,16
	11.	-10,55	-12,21	
	12.	-11,00	-12,25	
	13.	-11,30	-12,24	
	14.	-11,45	-12,15	
	15.	-11,25	-11,76	
6.	11.	+8,90	+10,86	+10,95
	12.	+9,70	+11,23	
	13.	+10,05	+11,20	
	14.	+10,25	+11,10	
	15.	+10,15	+10,77	
	16.	+10,10	+10,56	

Se denotarmos por x a pequena influência que a corrente *termomagnética* tinha sobre o resultado dessas medições, obteremos a partir dos valores anteriores o *limite* correspondendo apenas à indução diamagnética reduzida à *corrente normal*:

do 2.	$+13,60 + x$	+13,34
do 3.	$+13,08 - x$	
do 4.	$+13,06 + x$	+12,61
do 5.	$+12,16 - x$	
do 6.	$+10,95 + x$	+11,555

Portanto, na média

$$= +12,644 .$$

A partir desse *limite* dos arcos de oscilação obtidos de acordo com o método da multiplicação *para uma distribuição uniforme* dos pulsos de indução durante todo o período de oscilação da agulha, é agora fácil deduzir o valor limite que teria sido obtido pelo mesmo método de multiplicação se todos os pulsos de indução, em vez de estarem distribuídos em

tudo o período de oscilação, estivessem concentrados no *instante* no qual a agulha passou por sua posição de repouso. Dessa maneira o resultado obtido para o *bismuto* pode ser comparado ao resultado obtido para o *ferro*. A saber, utilizando o decremento logarítmico bem conhecido da diminuição dos arcos de oscilação $0,12378 = \lambda \log e$, onde e denota a unidade dos logaritmos naturais, encontramos a partir do limite anterior o limite desejado ao multiplicar por

$$\frac{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}{1 + e^{-\lambda}} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}} = 1,574\,235 \, .$$

Portanto, o limite desejado é

$$+1,574\,235 \cdot 12,644 = +19,905 \, .^{56}$$

A redução ao *limite* das experiências realizadas com *ferro* leva aos seguintes resultados:

Arco de oscilação	observado	reduzido	Média
8.	-71,50	-84,98	-83,876
9.	-74,50	-84,60	
10.	-76,90	-84,47	
11.	-78,60	-84,28	
12.	-79,90	-84,16	
13.	-80,85	-84,04	
14.	-81,10	-83,50	
15.	-81,30	-83,10	
16.	-81,50	-82,85	
17.	-81,75	-82,78	

⁵⁶[Nota de Wilhelm Weber:] Se houvessem muitos pulsos de indução distribuídos uniformemente por todo o período de oscilação, eles atuariam como uma corrente constante sobre a agulha. Nesse caso, a regra mencionada nas páginas 440 e 487, [[Web52c, pág. 440 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21c], e [Web52b, pág. 487 das *Obras* de Weber] que é equivalente à página 29 dessa tradução para o português], pode ser aplicada ao *limite* x encontrado de acordo com o método da multiplicação. De acordo com essa regra, temos $x = 2E \cdot (1 + e^{-\lambda})/(1 - e^{-\lambda})$, na qual E é a deflexão correspondendo ao equilíbrio da agulha no caso de uma corrente constante, enquanto que $\lambda \log e$ denota o decremento logarítmico da diminuição dos arcos de oscilação. Na posição de equilíbrio da agulha a força de deflexão é igual à força diretriz da agulha, que é dada por $\pi^2/T^2 \cdot E$, na qual T é o período de oscilação sem a influência do amortecimento. Se τ denotar o período de oscilação real levando em conta o amortecimento, então a velocidade que a agulha alcançará será $= \pi^2/T^2 \cdot E\tau$. Esse resultado é obtido com a suposição de que a força da corrente [em alemão: *Stromkraft*] distribuída uniformemente sobre todo o período de oscilação atua concentrada em um instante. A partir dessa velocidade podemos calcular o *limite* dos arcos de oscilação, que podemos aproximar de acordo com o método da multiplicação no caso em que a força concentrada atua sobre a agulha quando ela passa por sua posição de repouso. De fato, se denotarmos esse limite por y , então de acordo com a regra fornecida na Seção anterior na página 440, [[Web52c, pág. 440 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21c]], ao inserir para a velocidade o valor $= \pi^2/T^2 \cdot E\tau$, obteremos então:

$$\frac{\pi^2}{T^2} \cdot E\tau = \frac{y}{2} \cdot \frac{\pi}{T} (1 - e^{-\lambda}) e^{\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}} \, .$$

A comparação do valor de y com o valor de x dado anteriormente leva à proporção:

$$y : x = \frac{\pi\tau}{T} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}} : (1 + e^{-\lambda}) \, ,$$

na qual, de acordo com a teoria do *amortecimento*, o quociente τ/T pode ser substituído por $\sqrt{1 + \lambda^2/\pi^2}$.

A partir dessa Tabela, obtemos a razão dos dois limites correspondendo à *barra de bismuto* e à *barra de ferro*, a saber:

$$+19,905 : -83,876 .$$

Séries experimentais similares foram realizadas por mim, pelo Dr. von Quintus Icilius e pelo Dr. Riemann, nas quais foram encontradas as seguintes razões:

$$+18,158 : -83,82 ,$$

$$+15,357 : -82,80 ,$$

$$+14,890 : -83,45 .$$

Fazendo uma média de todas as séries, obtemos a seguinte razão:

$$+16,956 : -83,49 .$$

Agora a intensidade das correntes induzidas pelas *barras de bismuto* e pelas *barras de ferro* é diretamente proporcional a esses limites e inversamente proporcional ao *número* de pulsos de indução durante uma oscilação, isto é, ao número $10,58 \cdot 20,437 = 216,2$ para a *barra de bismuto* e 1 para a *barra de ferro*. Portanto, as correntes elétricas induzidas pela *barra diamagnética de bismuto* são, em relação às suas direções, *opostas* às correntes elétricas induzidas pela *barra magnética de ferro*, e a razão de suas intensidades é:

$$16,956 : 83,49 \cdot 216,2 = 1 : 1064,5 ,$$

apesar do fato que a barra de bismuto pesava 339 300 miligramas, enquanto que a barra de ferro pesava apenas 790,86 miligramas. A partir disso, calculamos que se a barra de bismuto tivesse o mesmo peso que a barra de ferro, a intensidade da corrente induzida *diamagneticamente* teria sido 456 700 vezes menor do que a intensidade da corrente induzida *magneticamente* pela barra de ferro.

3.10 Comparação das Duas Determinações da Intensidade de um Eletrodiaímã a partir de Suas Ações Magnéticas e Magnetoelétricas

Após termos considerado nas duas Seções anteriores a ação *magnética* e *magnetoelétrica* de um *eletrodiaímã* individualmente, comparamos finalmente *quantitativamente* os dois tipos de ação. Pode parecer que essa comparação poderia ser efetuada de maneira bem fácil ao expressar simplesmente, em primeiro lugar, a ação *magnética* observada de um eletrodiaímã em termos da também observada ação *magnética* do eletroímã. Expressaríamos então, em segundo lugar, a ação *magnetoelétrica* observada de um eletrodiaímã em termos da também observada ação *magnetoelétrica* do eletroímã. Isso já foi feito e levou aos seguintes resultados:

1. $\frac{\text{ação magnética do eletrodiaímã}}{\text{ação magnética do eletroímã}} = \frac{1\,470\,000}{1} .$
2. $\frac{\text{ação magnetoelétrica do eletrodiaímã}}{\text{ação magnetoelétrica do eletroímã}} = \frac{1}{456\,700} .$

Essa comparação simples somente estaria correta se, em primeiro lugar, *o mesmo eletrodiaímã* usado para a demonstração das ações magnéticas também tivesse sido usado para a demonstração das ações magnetoelétricas e, em segundo lugar, *o mesmo eletroímã* tivesse sido aplicado para a demonstração dos dois tipos de ação. Finalmente, em terceiro lugar, teria sido necessário que o eletrodiaímã, assim como o eletroímã, tivessem atuado a uma *distância* maior em comparação com suas próprias dimensões e com as dimensões do corpo que sofreu a ação. Contudo, essas condições não foram satisfeitas nas experiências descritas anteriormente e era impossível satisfazê-las, pois a demonstração das ações magnetoelétricas necessita a aplicação de instrumentos bem diferentes daqueles usados para ações magnéticas, e nos obrigou a tornar as distâncias entre os materiais atuando entre si tão pequenas quanto possíveis.

Porém se usarmos, como ocorreu de fato, *eletrodiaímãs diferentes* e *eletroímãs diferentes* para a demonstração das ações magnéticas e magnetoelétricas, não é para ser esperada igualdade das razões mencionadas, mesmo se eles estiverem atuando a distâncias maiores. A saber, a disparidade encontrada de que uma razão foi aproximadamente três vezes maior do que a outra, teria sido ainda muito maior, se a diferença entre as massas de bismuto e ferro que foram utilizadas nos vários eletrodiaímãs e eletroímãs, já não tivesse sido levada em conta ao determinar essas razões. Levando-se em consideração a desigualdade das massas, a diferença mais grosseira foi compensada, e é interessante notar que, por essa consideração, as razões mencionadas anteriormente já foram tão próximas umas das outras que podem ser consideradas como *quantidades da mesma ordem*.

A tarefa a ser feita agora é detectar e determinar as outras diferenças que, após a diferença na massa, possuem a maior influência, para com isso checar como mudam as razões anteriores e se essas razões ficam *mais próximas* da igualdade.

O motivo pelo qual é importante esse exame é que se os eletrodiaímãs e eletroímãs utilizados tivessem sido exatamente iguais e se tivessem atuado a uma distância maior, as duas razões teriam sido *exatamente as mesmas* de acordo com *as leis da polaridade diamagnética discutidas na Introdução*.⁵⁷ Mas como essa igualdade não pode ser verificada diretamente na prática, é importante, pelo menos, testar se essa igualdade pode ser *aproximada* quanto mais precisamente se determina e se leva em consideração a diferença real entre os eletrodiaímãs e eletroímãs usados e a diferente influência que a pequena distância a partir da qual eles atuam exerce sobre a *razão* de suas ações. Dessa maneira obtemos o mesmo, *por aproximação*, como se fôssemos capazes de testar diretamente a igualdade alegada.

A próxima análise e discussão de todas as possíveis diferenças em questão serve para essa finalidade.

Em primeiro lugar, tendo em vista a pequena distância a que se referem as ações observadas, a *distribuição ideal dos fluidos magnéticos* na superfície da barra de bismuto precisa ser melhor conhecida quando comparada com a distribuição ideal na superfície da barra de ferro. Como esse não é o caso, é óbvio que tal comparação, mesmo se a exatidão das observações fosse perfeita, só fornece uma estimativa grosseira, já que as ações que ocorrem a pequenas distâncias têm de ser colocadas como sendo proporcionais aos *momentos* [magnéticos], o que só é verdade para ações a distâncias maiores.

Em segundo lugar, a partir das experiências anteriores, foram utilizadas *duas barrinhas de ferro diferentes*, uma tinha um peso de 5,8 miligramas enquanto que a outra tinha 790,86 miligramas. Não podemos assumir que o ferro das duas barras se comporte da mesma maneira nos aspectos magnéticos. Portanto, foi comparado o magnetismo das duas pequenas

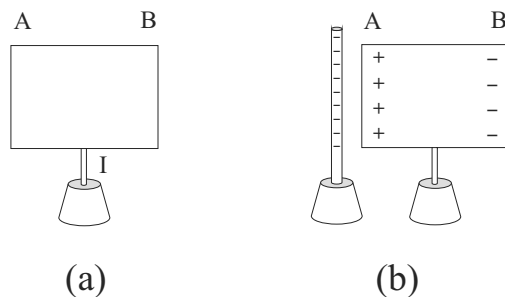
⁵⁷Ver a Parte I - *Introdução. Conceito de Polaridade Diamagnética* na página 15.

barras sujeitas à mesma corrente galvânica e, de fato, para uma pequena intensidade dessa corrente, a razão dos momentos magnéticos variou consideravelmente em relação à razão de suas massas. Contudo, ao aumentar a intensidade da corrente, essa disparidade desapareceu e encontrou-se que o magnetismo das duas pequenas barras era quase exatamente proporcional a suas massas. Segue-se que para nossas experiências onde foram utilizadas correntes ainda mais intensas, não era necessária uma redução devida à heterogeneidade do ferro.

Em terceiro lugar, nas experiências anteriores foram utilizadas barras de bismuto diferentes, a saber, duas barras menores para a observação das ações magnéticas e uma barra maior para a observação das ações magnetoelétricas. Não pode ser suposto que elas se comportaram exatamente da mesma maneira nos aspectos diamagnéticos. Portanto, a última barra foi dividida em duas metades que, comparadas às duas primeiras barras, quase coincidiam em comprimento e espessura. Foram então realizados com os dois pares alternadamente algumas experiências para comparar seu diamagnetismo, das quais apareceu uma diferença que não era insignificante. A ação do primeiro par comparada ao segundo par era como 1266 : 1000. Portanto, se a partir das ações de indução da barra maior de acordo com as duas Seções anteriores o momento diamagnético do bismuto comparado ao momento magnético do ferro mostrou-se ser $= 1/456\,700$, obtemos então para o bismuto da outra barra $= 1/360\,740$, o que não diminui a diferença dessa razão em relação à razão deduzida das ações magnéticas, mas até mesmo a aumenta.

Em quarto lugar, devemos considerar a diferença da força de separação eletromagnética⁵⁸

⁵⁸Em alemão: *Elektromagnetischen Scheidungskraft*. A expressão “Scheidungskraft” pode ser traduzida como “força de separação”, “força separadora”, “força de segregação” ou “força segregadora”. Apresento aqui um exemplo simples de uma força de separação. Considere uma placa metálica *AB* que está isolada eletricamente da Terra por meio de um suporte isolante *I* como mostrado na Figura (a) dessa Nota de rodapé:



Se um canudo plástico eletrizado negativamente for colocado próximo do lado *A* dessa placa, as partículas eletrizadas na placa vão se separar como mostrado na Figura (b). O lado *A* da placa vai ficar positivamente eletrizado, enquanto que o lado *B* vai ficar negativamente eletrizado. Essa polarização da placa é causada pela força elétrica do canudo eletrizado negativamente atuando nos elétrons livres da placa. Apresentei várias experiências interessantes sobre esse tópico feitas com material simples e barato, juntamente com muitas citações de fontes originais, nos dois volumes do livro *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade*, que estão disponíveis em português, inglês, italiano e russo: [Ass10a], [Ass10b], [Ass15b], [Ass17], [Ass18a], [Ass18b] e [Ass19b].

Um outro efeito de uma força de separação ocorre na eletrólise. Em geral as forças elétricas são proporcionais ao valor da carga q da partícula teste sobre a qual atuam. Uma partícula positivamente eletrizada com $q > 0$ sofre uma força em uma direção, enquanto que uma partícula negativamente eletrizada com $q < 0$ será forçada na direção oposta. Caso essas partículas estejam livres para se deslocar como no caso da eletrólise, será produzida uma corrente dupla devido a essa força elétrica de separação. Isto é, as partículas positivas vão se deslocar em uma direção e as partículas negativas vão se deslocar na direção oposta.

Já uma força de separação magnética pode ser entendida como qualquer força que ocasiona a magne-

dos dois instrumentos utilizados. Essa diferença pode ser deduzida com precisão suficiente a partir das determinações dadas para esses aparelhos, e segue-se que a força de separação eletromagnética do aparelho de indução foi 4,8 vezes maior do que a do aparelho de medição eletrodiamagnético.^{59,60} Ao mesmo tempo, segue que nos dois instrumentos a força de separação eletromagnética tinha uma tal *intensidade* que, de acordo com as experiências interessantes de Müller,⁶¹ o momento magnético da *pequena barra de ferro* não podia diferir

tização de um material como o ferro ou aço. Essa força pode ser ocasionada pela presença de um ímã nas proximidades desse pedaço de ferro ou aço. Nesse caso ela pode ser chamada de força magnetizadora ou força magnetizante. Essa força de separação magnética também pode ser ocasionada pela presença de um circuito no qual flui uma corrente constante, sendo esse circuito colocado nas proximidades ou ao redor do pedaço de ferro ou aço que se quer imantar. Nesse último caso pode-se falar de uma força de separação eletromagnética, força eletromagnetizadora, força eletromagnetizante, ou de uma magnetização produzida por correntes elétricas.

⁵⁹[Nota de Wilhelm Weber:] A espiral de fio [bobina] do instrumento de medição eletrodiamagnética tinha, de acordo com a Seção 3.2, quatro camadas, cada uma consistindo de 146 enrolamentos e tinha um comprimento de 190 milímetros. Seu diâmetro interior era de 17 milímetros, seu diâmetro exterior era de 26 milímetros e a intensidade de corrente era = 16,31 de acordo com a Seção 3.3. Segue-se disso que a força de separação eletromagnética no centro dela era muito próxima de

$$= \frac{4 \cdot 146 \cdot 2\pi \cdot 16,31}{\frac{1}{2} \cdot 190} = 629,9 .$$

Por outro lado, a bobina de fio do indutor, de acordo com a Seção 3.7, tinha oito camadas, cada uma consistindo de 120 enrolamentos e tinha 383 milímetros de comprimento. Seu diâmetro interior era de 23,9 milímetros, seu diâmetro exterior era de 70 milímetros e a deflexão de uma bússola que estava a 708 milímetros para Oeste era, de acordo com as experiências da Seção 3.7, ao redor de 32°, onde temos de colocar a intensidade da parte horizontal do magnetismo terrestre = 1,8. A partir disso podemos em primeiro lugar calcular a intensidade i da corrente e o resultado é bem próximo de

$$i = \frac{383}{S} \cdot \frac{1,8 \cdot \tan 32^\circ}{\frac{1}{(708 - \frac{1}{2}383)^2} - \frac{1}{(708 + \frac{1}{2}383)^2}} ,$$

onde S denota a área englobada pela bobina que foi encontrada = 1 793 200 milímetros quadrados, portanto, $i = 95,6$. A força de separação da bobina em questão pode ser obtida disso muito aproximadamente como sendo = $\frac{8 \cdot 120 \cdot 2\pi \cdot 95,6}{\frac{1}{2} \cdot 383} = 3012$. Contudo, 3012 : 629,9 é muito próximo de 4,8 : 1.

⁶⁰Ver também a Nota de rodapé 37 na página 28.

⁶¹[Mül50], [Mül51b] e [Mül51a].

consideravelmente de seu valor máximo,⁶² de tal forma que a força de separação 4,8 vezes maior do indutor não transmitiu à pequena barra de ferro um magnetismo mais forte do que ela teria recebido da força simples. Um comportamento diferente é mostrado pelas *barras de bismuto* cujo momento diamagnético, até mesmo para as forças de separação mais fortes que podem ser produzidas, tem de ser assumido como crescendo proporcionalmente [com essas

⁶²[Nota de Wilhelm Weber:] Uma barra de ferro doce às vezes assume um magnetismo mais fraco ou mais forte, conforme a força magnética ou eletromagnética que atua sobre ela seja menor ou maior. O Prof. Joh. Müller em Freiburg [Friburgo] publicou um exame interessante da dependência do magnetismo de tais barras de ferro em relação à intensidade da força de separação atuando sobre elas nos “Berichte über die neuesten Fortschritte der Physik”, Braunschweig 1850, pág. 494 e seguintes, [Mül51a]. Um aspecto interessante dessa publicação é que o magnetismo das barras de ferro foi determinado para forças de separação diferentes, até mesmo muito grandes. Segue-se dessa pesquisa o resultado notável que o magnetismo da barra de ferro não é de forma alguma sempre proporcional à força de separação atuando sobre o ferro, mas que ele se aproxima de um *limite* ao aumentar as forças de separação. Müller resumiu os resultados que mediu com uma bobina eletromagnética na seguinte fórmula:

$$s = 0,016 \cdot d^{\frac{3}{2}} \cdot \tan \frac{m}{0,00108 \cdot d^2} ,$$

na qual, se i denota a intensidade da corrente da bobina eletromagnética em termos da unidade absoluta (de acordo com a página 252 da mesma publicação)

$$i = 66,813 \cdot s ,$$

e (de acordo com a pág. 511 [da mesma publicação de Müller]), se M denota o magnetismo da barra de ferro na bobina eletromagnética de acordo com a unidade absoluta, então:

$$M = 5\,426\,021 \cdot m .$$

As barras de ferro utilizadas por Müller tinham 330 milímetros de comprimento (de acordo com a pág. 502 [de seu trabalho]) e estavam dispostas em uma bobina de 300 milímetros de comprimento, da qual se projetavam 15 milímetros em ambos os lados. A espessura da barra de ferro é representada por d . A bobina consistia em cinco camadas, cada uma tendo 76 enrolamentos. Seu diâmetro interior era de 49 milímetros e a espessura do fio era de 2,8 milímetros. De acordo com isso, a intensidade da *força de separação* exercida pela corrente de uma camada de bobinas, cujo raio = r , ao atuar sobre um ponto da barra de ferro que está a uma distância = a do centro da bobina, é representada pela seguinte expressão:

$$\frac{2 \cdot 76}{300} \pi r^2 i \int_{a-150}^{a+150} \frac{dx}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{152}{300} \pi i \left\{ \frac{a+150}{\sqrt{(a+150)^2 + r^2}} - \frac{a-150}{\sqrt{(a-150)^2 + r^2}} \right\} .$$

Isso significa que na média para toda a barra de ferro a intensidade da força é dada por:

$$\begin{aligned} & \frac{152 \cdot \pi i}{300 \cdot 330} \int_{-165}^{+165} \left[\frac{a+150}{\sqrt{(a+150)^2 + r^2}} - \frac{a-150}{\sqrt{(a-150)^2 + r^2}} \right] da \\ &= \frac{304 \cdot \pi i}{99\,000} \left\{ \sqrt{315^2 + r^2} - \sqrt{15^2 + r^2} \right\} . \end{aligned}$$

Finalmente, para todas as cinco camadas:

$$\frac{304 \cdot \pi i}{99\,000} \cdot \frac{5}{14} \int_{24,5}^{38,5} \left[\sqrt{315^2 + r^2} - \sqrt{15^2 + r^2} \right] dr = 13,562 \cdot i .$$

Essa força difere da força *magnética terrestre* apenas por sua intensidade e, portanto, pode ser determinada de acordo com a mesma *unidade absoluta*, o que também aconteceu aqui. Denotamos a intensidade dessa força por X , de tal forma que:

$$X = 13,562i .$$

Ao colocar esses valores na equação de Müller obtemos:

$$X = 14,498 \cdot d^{\frac{3}{2}} \cdot \tan \frac{M}{5860 \cdot d^2} .$$

Essa fórmula vale inicialmente para barras de ferro com 330 milímetros de comprimento. Para aplicá-la a barras com um comprimento diferente, o arco $M/(5860 \cdot d^2)$ precisa ser multiplicado por 330 e dividido pelo comprimento ℓ da barra, portanto:

$$X = 14,498 \cdot d^{\frac{3}{2}} \cdot \tan \frac{M}{17,76 \cdot d^2 \ell} .$$

Contudo, o próprio Müller observou que a influência do comprimento levada em conta dessa maneira não coincide completamente com a experiência e precisa ser confirmada mais detalhadamente. Se aplicarmos essa regra deduzida das experiências de Müller para determinar o magnetismo de duas pequenas barras de ferro, que estavam nas bobinas descritas anteriormente do *instrumento de medição eletrodiamagnética* e do *aparelho de indução*, obtemos para a *primeira* barra $\ell = 92$ e, além disso, para seu peso absoluto = 5,8 miligramas e seu peso específico = 7,78, a partir do qual sua espessura $d = 0,1016$. O valor de X para essa pequena barra foi determinado na Nota de rodapé anterior, $X = 629,9$. Portanto, obtemos para essa pequena barra:

$$\frac{M}{d^2 \ell} = 17,75 \text{arc tang } 89^\circ 57' 23'' = 27,886.$$

Para a *segunda* pequena barra temos $\ell' = 186$. Além disso, seu peso absoluto = 790,86 miligramas e seu peso específico = 7,78, de tal forma que encontramos para sua espessura $d' = 0,8342$. O valor de X' para essa pequena barra foi determinado na Nota de rodapé anterior, $X' = 3012$. Obtemos com isso:

$$\frac{M'}{d'^2 \ell'} = 17,76 \text{arc tang } 89^\circ 47' 23'' = 27,834.$$

Observando que $d^2 \ell$ e $d'^2 \ell'$ são proporcionais às massas das duas pequenas barras de ferro, obtemos uma razão quase igual entre o magnetismo e a massa das duas pequenas barras, embora na segunda pequena barra tenha atuado uma força de separação 4,8 vezes maior. Um tratamento mais completo encontra-se nas Seções 3.24 até 3.26, nas quais também são discutidas as dúvidas expressas por Buff e Zamminer contra as experiências de Müller, [BZ50].

forças].^{63,64} Portanto, se reduzirmos o resultado obtido pelas ações de indução para uma força de separação 4,8 vezes mais fraca para torná-lo comparável aos resultados obtidos pela ação magnética, o momento diamagnético do bismuto tem de ser assumido como sendo 4,8 vezes menor, enquanto que o momento magnético do ferro permanece inalterado. Obtemos então para o primeiro momento [magnético] comparado ao último [momento magnético], em vez de $1/360\,740$, apenas $1/4,8 \cdot 360\,740 = 1/1\,731\,560$.

Esse resultado deduzido da ação *magnetoelétrica* pode agora ser comparado diretamente ao resultado encontrado na Seção 3.4 de acordo com o qual o momento diamagnético do bismuto comparado ao momento magnético do ferro foi encontrado como sendo

$$= \frac{1}{1\,470\,000}.$$

A diferença entre as duas razões consideradas, que anteriormente era de 200 por cento, é reduzida a aproximadamente 17 ou 18 por cento ao levar em consideração a diferença mencionada. Esta aproximação à igualdade deve parecer ainda mais satisfatória, uma vez que, como o motivo da diferença mencionada anteriormente não foi considerado, só se poderia falar em uma comparação aproximada. Também temos de observar que a última razão mencionada, de longe a razão mais influente para essa diferença, ainda é passível de consideração mais precisa se, em vez das experiências mencionadas anteriormente de Müller, a análise for baseada nos resultados mais precisos descritos na Seção 3.24 até a Seção 3.26. Ao fazer isso, aquela razão de $1/1\,470\,000$ é reduzida para $1/1\,593\,000$ como explicado na Seção 3.27, de tal forma que sobra apenas uma diferença de aproximadamente 8 por cento em relação às outras razões.

Após essa comparação da razão entre as ações magnéticas e eletromagnéticas de um *eletrodiaímã* com a razão das ações magnéticas e magnetoelétricas de um *eletroímã*, é confirmado o resultado de que na natureza do diamagnetismo, a eficácia⁶⁵ *eletrodiamagnética* e *diamagnetoelétrica* é de fato justificada da mesma maneira que a eficácia *eletromagnética* e *magnetoelétrica* na natureza do magnetismo. De fato, as ações diamagnéticas no que diz respeito às suas intensidades possuem a mesma razão que as ações magnéticas até onde isso pode ser confirmado. Isso prova que *entre não há diferença* em muitos aspectos *em relação à eficácia diamagnética e magnética*. Isso fornece uma prova da lei mencionada na Introdução

⁶³[Nota de Wilhelm Weber:] Não existe fato conhecido que mostre um desvio da lei de proporcionalidade do diamagnetismo em relação à força de separação magnética. Em vez disso, embora ainda faltem medições, podem ser mencionados fatos diferentes em favor dessa lei [de proporcionalidade]. O fato mais importante e também em diferentes aspectos o mais interessante, é o fato descoberto e examinado em mais detalhes por Plücker, de acordo com o qual, *o mesmo polo magnético induz no mesmo material*, por exemplo em carvão, *dependendo da distância diferente [entre o polo e o material], diamagnetismo ou magnetismo*. A investigação mais detalhada que Plücker comunicou nos *Annalen* de Poggendorff, 1848, Vol. 73, págs. 616 e seguintes, [Plü48], prova que *a distância diferente [do material até] o polo magnético não é diretamente relevante como tal*, mas apenas *indiretamente, na medida em que uma distância maior corresponde a uma diminuição da força*. A saber, Plücker provou que *o magnetismo do carvão é transformado em diamagnetismo pelo simples aumento da força magnética atuando no carvão*. A explicação mais simples para esse fato interessante é a lei mencionada anteriormente da proporcionalidade entre o diamagnetismo e a força de separação magnética, tão logo a lei provada por Müller apenas para o ferro é assumida como válida também para o carvão. De fato, se o magnetismo do carvão para uma força de separação crescente se aproxima de um *limite* enquanto que o diamagnetismo do carvão aumenta uniformemente, é óbvio que o diamagnetismo tem de superar o magnetismo, o que significa que o magnetismo do carvão será transformado em diamagnetismo.

⁶⁴Ver ainda a Nota de rodapé 58 na página 54 para uma discussão do conceito de força de separação magnética.

⁶⁵Em alemão: *Wirksamkeit*. Essa palavra pode ser traduzida como eficácia, efetividade ou eficiência.

sobre a *polaridade diamagnética*.⁶⁶

Falta apenas utilizar os resultados das experiências anteriores para determinar a razão entre a *intensidade* do diamagnetismo do bismuto e a intensidade do magnetismo do ferro. As discussões anteriores tornam claro que em geral não podemos falar de uma razão *definida* entre o diamagnetismo do bismuto e o magnetismo do ferro. De fato, mesmo se assumirmos que as barras de bismuto e ferro possuem o mesmo tamanho e formato, essa razão ainda depende da intensidade da *força de separação* magnética. Enquanto que o diamagnetismo aumenta uniformemente ao aumentar a força de separação, o magnetismo se aproxima de um limite. Portanto, tal razão só pode ser determinada sob a restrição de que as forças de separação magnética são tão pequenas tal que ainda não é perceptível o desvio do magnetismo do ferro em relação à proporcionalidade com essas forças. Com essa restrição pode ser determinada a razão do *diamagnetismo do bismuto* para o *magnetismo do ferro* utilizando a lei de Müller mencionada na Nota de rodapé 62 dessa Seção. Contudo, é vantajoso adiar essa determinação com o objetivo de também levar em consideração para o magnetismo do ferro as experiências que conheceremos nas Seções 3.25 e 3.26, quando acrescentaremos a determinação dessa razão.

3.11 As Experiências de Faraday

Não discutiremos aqui as experiências iniciais de Faraday que o levaram à suposição que Plücker apresentou da maneira mais curta ao dizer:⁶⁷

No bismuto cada polo Norte de um ímã induz um polo Norte e cada polo Sul [induz] um polo Sul.

Plücker diz sobre essa suposição que todo físico teve que cair nela, e que a *polaridade diamagnética* é uma consequência necessária dela. Nos restringimos aqui às experiências que Faraday realizou recentemente para refutar essa *polaridade diamagnética*, que ele próprio havia assumido inicialmente.

De fato, tão logo foi percebido quão importante é a prova real da *polaridade diamagnética*, muitos fatos diferentes foram encontrados e comunicados, de tal maneira que essa polaridade parecia estar fora de dúvida. Em meu primeiro artigo (*Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften* 1847, pág. 346 e *Annalen* de Poggendorff, 1848, Vol. 73, pág. 242),^{68,69} enfatizei em particular a evidência do experimento de Reich em relação a isso.⁷⁰ De acordo com essa experiência, se o polo Norte e o polo Sul atuam do mesmo lado sobre um pedaço de bismuto, eles não o repelem de forma alguma como a soma das forças que estão exercendo individualmente, mas, ao invés disso, [repelem] com a diferença entre essas forças. Adicionei outros experimentos que permitiram reconhecer *os dois polos* de uma barra de bismuto em um estado diamagnético pelo contraste entre *atração* e *repulsão*. Finalmente, adicionei as experiências com o instrumento mencionado na Seção 3.7, que pareciam demonstrar *forças eletromotrizes* similares exercidas pelos *polos diamagnéticos*, assim como pelos *polos magnéticos*. Seguiram-se imediatamente algumas experiências de Poggendorff

⁶⁶Ver a Parte I - Introdução. Conceito de Polaridade Diamagnética na página 15.

⁶⁷[Plü48, págs. 614-615].

⁶⁸[Nota de Heinrich Weber:] Obras de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 255.

⁶⁹[Web48b], [Web48c] com traduções para o inglês em [Web52d], [Web66c] e [Web21k].

⁷⁰[Rei48a] e [Rei48b], com tradução para o inglês em [Rei49].

(*Annalen*, 1848, Vol. 73, pág. 475 e seguintes),⁷¹ que serviram por um lado como uma confirmação, por outro lado como um suplemento. Em particular, elas forneceram evidência para dois *polos diamagnéticos* pelo contraste da ação que a *corrente galvânica* está exercendo sobre eles. E realmente provou que uma barra de bismuto na posição equatorial seria um *ímã transversal* real, que virou a linha de seus polos Norte em direção ao polo Norte do ímã e a linha de seus polos Sul em direção ao polo Sul do ímã, o que Plücker (*Annalen* 1848, Vol. 73, pág. 613),⁷² também considerou confirmado por uma aplicação muito engenhosa baseada nisso, que forneceu um meio simples e praticamente importante de aumentar significativamente o diamagnetismo de corpos oscilantes. O próprio Plücker declarou que estava fora de dúvida que o *diamagnetismo* consiste em uma *excitação polar*. Anteriormente ele havia descartado essa teoria devido às enormes dificuldades em justificá-la. Após a polaridade ter sido confirmada de tal maneira decisiva, ele reviveu a teoria. Finalmente, nesse artigo Plücker superou uma das dificuldades mais importantes mencionadas por ele, a saber, o comportamento *magnético* observado em muitos corpos a uma distância *maior* do polo magnético, e o comportamento *diamagnético* encontrado em uma distância *menor* [do polo magnético] (ver a Nota de rodapé 63 na Seção anterior). Tendo em vista sua pesquisa mais detalhada, ele próprio afirmou que:⁷³

o resultado, que ele não suspeitava, mas que era de se esperar de um ponto de vista puramente teórico, forneceu, em vez da dificuldade anterior, uma notável confirmação da teoria do diamagnetismo adotada por Faraday, Reich, Weber e Poggendorff, à qual ele também agora professa resolutamente.

Todas essas confirmações da *polaridade diamagnética* conjecturada inicialmente por Faraday complementaram-se rapidamente e apareceram no mesmo Volume 73 dos *Annalen* de Poggendorff. Contudo, o próprio Faraday agora contradiz essa suposição em sua 23ª série de experiências,⁷⁴ sendo que o exame mais detalhado dessa série também é importante para os experimentos descritos aqui.

Tendo em vista a autoridade muito bem merecida que esse grande cientista possui e ao interesse que seus trabalhos geram em todo lugar, podemos assumir que sejam bem conhecidas suas experiências para refutar a *polaridade diamagnética*. Além disso, não há dúvida sobre a validade desses experimentos tendo em vista as reconhecidas habilidades experimentais de Faraday. A questão é saber se e até onde essas experiências refutam a *polaridade diamagnética* como definida aqui bem no início.⁷⁵ Existem três pontos principais a considerar. *Em primeiro lugar*, Faraday não repetiu todas as experiências realizadas para provar a polaridade diamagnética. *Em segundo lugar*, apesar de toda sua maestria no uso de suas ferramentas, Faraday estava limitado na delicadeza dos experimentos pelos instrumentos que utilizava. *Em terceiro lugar*, Faraday tentou explicar de maneira diferente muitos fenômenos que são, na opinião dos outros físicos, devidos à *polaridade diamagnética*. Portanto, parece até duvidoso que Faraday realmente negue a *polaridade diamagnética* no sentido em que foi definida aqui no início.

No que diz respeito às experiências não repetidas e desconsideradas por Faraday, menciono em primeiro lugar que no parágrafo 2689 de seu artigo, um experimento realizado por

⁷¹[Pog48].

⁷²[Plü48].

⁷³[Plü48, pág. 618].

⁷⁴[Far50].

⁷⁵Ver a Parte I - Introdução. Conceito de Polaridade Diamagnética na página 15.

mim parece ter sido confundido com um feito por Reich. Portanto, aconteceu que Faraday ignorou completamente a experiência de Reich cuja evidência para a *polaridade diamagnética* eu havia enfatizado em particular. De acordo com esse experimento, o polo Norte e o polo Sul atuando simultaneamente do mesmo lado de um pedaço de bismuto não o repelem com a soma de suas forças individuais, mas com a diferença entre essas forças. Essa experiência foi realizada por Reich com o instrumento mais preciso disponível, a saber, a balança de torção que ele utilizou para a repetição das clássicas experiências de Cavendish.⁷⁶ Só posso repetir aqui o que disse em meu primeiro artigo sobre esse experimento, a saber, que através dele pode ser deduzido com alta probabilidade que a causa da força diamagnética está em um ingrediente móvel e imponderável⁷⁷ presente no bismuto, que é movido ou distribuído de maneiras diferentes quando um polo magnético se aproxima dele. A aproximação simultânea de dois polos opostos do mesmo lado faz com que a componente imponderável não assumam nem um nem outro movimento ou distribuição aos quais está vinculado o aparecimento da força diamagnética, o que tem como consequência o desaparecimento desta força neste caso. Além disso, temos de mencionar nesse contexto as experiências realizadas por Poggendorff e descritas no mesmo volume 73 de seus *Annalen* (págs. 475-479),⁷⁸ através das quais ele obteve o mesmo resultado por um experimento simples convincente, de duas formas diferentes, sem o auxílio de instrumentos de medida precisos como aqueles que utilizei. Não há dificuldade em repetir as experiências de Poggendorff e muitos pesquisadores fizeram isso.

Entre os instrumentos que permitem um grau de precisão e acurácia ainda maior do que aqueles usados por Faraday, encontram-se principalmente o *magnetômetro* e o *galvanômetro* arranjados de acordo com as instruções de Gauss. Eu não teria sido capaz de realizar todas as minhas experiências sem esses instrumentos. Quando Faraday repetiu essas experiências sem o auxílio desses instrumentos, torna-se facilmente explicável que ele não foi capaz de ver as ações muito fracas que observei. A principal preocupação de Faraday contra as minhas observações descritas no volume 73 dos *Annalen* de Poggendorff, é que não mencionei a *indução eletrovoltaica secundária* observada por ele com grande cuidado, o que eu deveria ter sido capaz de ver mais claramente com a maior precisão dos meus instrumentos. Portanto, menciono aqui que o artigo anterior nos *Annalen* de Poggendorff, emprestado dos “Berichten der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften”,⁷⁹ era apenas uma nota preliminar do meu trabalho, sendo que uma discussão mais especializada foi deixada para um artigo posterior. Deve ser suficiente adicionar aqui que nessas experiências eu tentei eliminar tanto quanto possível a influência da indução eletrovoltaica secundária através de uma combinação apropriada de experiências, mas que, de qualquer modo, é preferível eliminar completamente essa influência, como foi feito nos experimentos descritos neste Tratado.

Se resumirmos brevemente a influência desta investigação de Faraday sobre a questão da *polaridade diamagnética*, no sentido em que foi aqui definida no início [desse Tratado],⁸⁰ ela deve parecer de pouca importância. Pois Faraday negligenciou várias experiências de Reich e Poggendorff. No que diz respeito a outras experiências, a saber, aquelas de Plücker,

⁷⁶Henry Cavendish (1731-1810). Ver [Cav98].

⁷⁷Em alemão: *beweglichen imponderablen Bestandtheile*. O adjetivo “ponderável” se refere a algo que pode ser pesado ou cujo peso pode ser avaliado, enquanto que “imponderável” se refere a algo que não se pode pesar ou que não tem peso apreciável. Portanto a expressão “um ingrediente móvel e imponderável” se refere a uma componente móvel e sem peso, ou com peso desprezível comparado ao peso das partículas ou átomos do bismuto.

⁷⁸[Pog48].

⁷⁹[Web48b], [Web48c] com traduções para o inglês em [Web52d], [Web66c] e [Web21k].

⁸⁰Ver a Parte I - Introdução. Conceito de Polaridade Diamagnética na página 15.

ele apenas forneceu uma explicação baseada em premissas diferentes, onde não fica claro se essas premissas contradizem a *polaridade diamagnética* como definida aqui no início [desse Tratado]. Finalmente, no que diz respeito à dúvida que Faraday mencionou sobre a validade dos resultados das minhas experiências, *em primeiro lugar*, essa dúvida deve ser eliminada pela observação que já fiz anteriormente, *em segundo lugar*, ela não se aplica às experiências descritas nesse Tratado.

3.12 As Experiências e a Teoria de Feilitzsch

Nas Seções 3.3 e 3.4 foi provado que uma barra de bismuto em uma bobina galvânica, funcionando como um *eletrodiaímã*, exerce sobre uma agulha magnética um torque em uma *direção oposta* em relação ao torque exercido por uma barra de ferro na mesma bobina funcionando como um *eletroímã*. Isso contradiz um resultado de Feilitzsch que, inspirado por uma teoria diferente, esperava um resultado diferente e tentou confirmá-lo experimentalmente (ver os *Annalen* de Poggendorff, 1851, Vol. 82, págs. 90–110).⁸¹ A saber, ele pensou que:⁸²

o bismuto dentro de uma bobina elétrica recebe uma polaridade mais fraca, mas igualmente direcionada, que o ferro doce.

O motivo dessa contradição encontra-se, creio, em uma diferença muito importante entre os instrumentos utilizados por mim e por Feilitzsch. Ele mencionou que:⁸³

A bobina foi colocada a cerca de 200 milímetros de distância no lado Oeste de uma pequena bússola suspensa por uma linha de seda, e a agulha foi devolvida à sua posição original *por um ímã secundário no lado Leste*.

Em contraste com isso, utilizei duas bobinas e as coloquei simetricamente em relação à bússola, de tal forma que não foi necessário um *ímã auxiliar* para trazer a agulha de volta à sua posição inicial. A diferença crucial entre esses dois arranjos é que no caso de Feilitzsch a agulha só fica ao longo do meridiano magnético para uma *determinada intensidade de corrente*, mas é desviada para um lado ou para outro lado para cada *variação* da intensidade de corrente. Em contraste com isso, no meu caso as variações das intensidades de corrente não têm influência sobre a posição de repouso da agulha. Contudo, essa *independência da posição de repouso da agulha em relação às variações da intensidade de corrente na bobina* é necessária caso a deflexão da agulha tenha de estar associada à *ação imediata da barra de bismuto sobre a agulha* quando a barra de bismuto é colocada dentro da bobina. Pois a inserção da barra de bismuto na bobina produz uma pequena mudança na intensidade de corrente, e isso pode ter sido o motivo, no caso de Feilitzsch, para a deflexão da agulha. A saber, ao colocar a barra de bismuto *fria* na bobina *aquecida* pela corrente, leva a um *esfriamento* da bobina e, portanto, a um *aumento* na intensidade de corrente, o que ocasiona necessariamente uma *deflexão da agulha na direção observada por Feilitzsch*. Há muito tempo, realizei vários experimentos usando o mesmo método de Feilitzsch e encontrei resultados semelhantes. Em um exame mais detalhado, no entanto, descobriu-se que a força observada *não* apareceu *instantaneamente* no momento em que a haste de bismuto foi

⁸¹[Fei51].

⁸²[Fei51, pág. 103].

⁸³[Fei51, pág. 103].

inserida, mas *gradualmente*. E ocorreu da mesma forma quando a barra foi retirada, isto é, a força desapareceu *gradualmente* novamente, o que é prova suficiente de que não foi um efeito *instantâneo* da haste de bismuto. Também podíamos aumentar, diminuir, ou inverter essas influências através de um simples esfriamento ou aquecimento da barra de bismuto. É provável que também as deflexões da agulha observadas por Feilitzsch tenham sido devidas às influências da temperatura sobre a intensidade de corrente.

No que diz respeito à *teoria do diamagnetismo* que Feilitzsch tentou fornecer nesse contexto, só quero mencionar o seguinte. Ele também quer explicar os fenômenos diamagnéticos a partir de uma certa distribuição de fluidos magnéticos. Contudo, assume que essa distribuição é devida à *separação de fluidos magnéticos na mesma direção que no caso do ferro* e que a única diferença é que essa separação em uma barra de ferro *diminui* do centro para as extremidades, enquanto que em uma barra de bismuto ela *aumenta*. Segue-se desse *aumento* entre o centro e a extremidade da barra, uma dispersão⁸⁴ de magnetismo livre oposto assim como nas extremidades, e se esse magnetismo livre oposto disperso entre o centro e a extremidade *pudesse ser mais forte* do que nas extremidades, os fenômenos diamagnéticos provavelmente poderiam ser explicados a partir disso. Se, no entanto, Feilitzsch tivesse examinado mais de perto as condições sob as quais, de acordo com seu próprio relato, este caso, que ele supunha explicar os fenômenos diamagnéticos, seria possível, ele teria descoberto que este caso só é possível se os fluidos magnéticos no meio da haste estiverem separados não na mesma direção, mas na direção oposta como em suas extremidades, o que, no entanto, contradiz sua premissa. De qualquer forma, vemos facilmente que é impossível explicar os fenômenos diamagnéticos a partir de uma distribuição de fluidos magnéticos que surgem da *mesma separação como ocorre no ferro no que diz respeito à direção*.

⁸⁴Em alemão: *Ausscheidung*. Essa expressão pode ser traduzida como dispersão, separação, precipitação, divisão ou eliminação.

IV - Sobre a Conexão da Teoria do Diamagnetismo com a Teoria do Magnetismo e da Eletricidade

3.13 Sobre os Fundamentos de uma Teoria do Diamagnetismo

Tentei nas duas primeiras Partes desse Tratado estabelecer com maior generalidade a lei da *polaridade diamagnética*, principalmente ao mostrar que ela também é válida para as ações *eletrodiamagnéticas* e *diamagnéticas*. Contudo, apenas essa lei, mesmo que seja geral, ainda não estabelece uma *teoria do diamagnetismo*. O motivo é que ela apenas define o diamagnetismo em termos de suas *ações*. Porém, para as fundações de uma teoria do diamagnetismo, é necessário defini-lo não apenas em termos de suas ações, mas também em termos de suas *causas*. Portanto, vou acrescentar nessa Parte o complemento necessário à teoria no que diz respeito às *causas* do diamagnetismo com uma generalidade maior do que fiz nos meus primeiros artigos (nos *Berichten* de 1847 e nos *Annalen* de Poggendorff de 1848, Vol. 73).⁸⁵

3.14 Sobre a Maneira de Pesquisar as Causas do Diamagnetismo

Na teoria do magnetismo distinguimos dois tipos de ímãs, a saber, os *permanentes* e os *variáveis*. Por exemplo, uma ímã feito de aço duro como vidro é um ímã permanente, um ímã de ferro doce é um ímã variável. A rigor, na realidade não há contraste estrito entre ímãs permanentes e variáveis, porque todos os ímãs, mesmo os mais persistentes, mostram-se variáveis sob a influência de forças muito grandes, e da mesma forma todos os ímãs, mesmo os feitos do ferro mais doce, mostram-se permanentes sob a influência de forças muito pequenas. Contudo, como escolhemos usualmente para as experiências físicas ímãs e condições sob as quais o aspecto permanente ou variável do ímã não aparece, podemos assumir essa distinção simples sem perda de generalidade. Na sequência apontamos as seguintes diferenças entre os dois tipos de ímãs, a saber, os ímãs permanentes só podem ser examinados em termos de suas *ações*, enquanto que os ímãs variáveis podem ser pesquisados de duas maneiras, a saber, em termos de suas *ações* e em termos de suas *causas*.

Se tentarmos aplicar essa distinção aos diaímãs, veremos que não existem *diaímãs permanentes* ou, mais precisamente, que eles não podem ser distinguidos dos ímãs permanentes. Portanto, só precisamos considerar os *diaímãs variáveis* e esses podem ser examinados de duas maneiras, parcialmente por suas *ações* e parcialmente por suas *causas*.

Sabe-se que ao examinar a ação de um ímã sobre outros materiais podemos obter a *distribuição ideal* de fluidos magnéticos sobre sua superfície. Gauss mostrou que se conhecemos a *distribuição ideal*, podemos prever todos as *ações* do ímã.⁸⁶ Muitas pesquisas se beneficiam do fato de que através do conhecimento da *distribuição ideal*, não precisamos de qualquer hipótese sobre o interior do material, especialmente quando as causas dessas ações são desconhecidas e ainda precisam ser investigadas. É óbvio disso que ao examinar as ações não podemos ir além de um conhecimento da distribuição ideal que tem de ser distinguida necessariamente da natureza real do interior de um ímã. Por exemplo, não é possível ao examinar

⁸⁵[Web48b] e [Web48c] com traduções para o inglês em [Web52d], [Web66c] e [Web21k].

⁸⁶Ver a Nota de rodapé 16 na página 15.

as ações chegar a um conhecimento da distribuição real dos fluidos magnéticos contidos no ímã, ou conhecer o número, intensidade e posição real das correntes elétricas dentro dele.

Portanto, o mesmo também vale para as ações de um diaímã. Podemos obter um conhecimento da *distribuição ideal* de fluidos magnéticos na superfície do diaímã e isso substitui o conhecimento de todo seu estado interno real no que concerne à consideração de todas as suas ações. Por outro lado, não obteríamos informação sobre o estado interno verdadeiro do diaímã nem sobre a natureza real do diamagnetismo, nem sua geração e transformação. Para ter uma ideia desses aspectos, não podemos nos restringir à consideração de suas *ações* e da *distribuição ideal* que dependem delas, mas é necessário levar em consideração pontos de vista diferentes que são independentes dessas ações.

Todas as possíveis *causas* do *diamagnetismo*, assim como do magnetismo, podem ser classificadas em causas *internas* e *externas*. A causa *externa* é dada (assim como as ações) pela observação. Ela é a mesma para o magnetismo e para o diamagnetismo, a saber, *uma força de separação magnética ou eletromagnética tendo determinado valor e direção*. O diamagnetismo seria determinado caso conhecêssemos, além dessa causa externa, também a causa interna no próprio material. Inversamente, isso abre uma maneira de determinar a causa interna desconhecida caso, além da causa externa conhecida, já seja conhecido a partir de suas ações o diamagnetismo resultando das duas causas. Se seguirmos o caminho esquematizado aqui e listarmos para o ferro e para o bismuto as forças de separação magnéticas conhecidas, juntamente com distribuição ideal deduzida a partir das ações, observaremos que a mesma força de separação leva a distribuições ideais opostas ou, inversamente, a mesma distribuição ideal para o ferro e para o bismuto produz forças de separação opostas. O motivo pelo qual causas externas opostas produzem as mesmas ações no ferro e no bismuto, tem de estar contido na diferença das causas *internas* no próprio ferro e no próprio bismuto. Para determinar mais detalhadamente a *diferença das causas internas* no ferro e no bismuto, é necessário classificar todas as possíveis causas internas que podem ter tais ações explicadas em termos de uma distribuição ideal. Após isso, temos de checar se, entre essas possíveis causas internas, existem algumas que podem dar origem às diferenças mencionadas anteriormente entre materiais magnéticos e diamagnéticos.

3.15 Classificação das Causas Internas que Podem Estar na Base das Ações Representadas por uma Distribuição Ideal

Podemos dar *quatro* tipos essencialmente diferentes de causas *internas* contidas nos materiais que podem dar origem a tais ações explicáveis em termos de uma distribuição ideal de fluidos magnéticos:

1. A causa interna de tais ações pode ser devida à existência de dois fluidos *magnéticos* que são mais ou menos *móveis independentemente de seus portadores ponderáveis*.⁸⁷
2. Ela pode ser devida à existência de dois fluidos *magnéticos* que apenas se *movem juntamente com as moléculas de seus portadores ponderáveis* (ímãs moleculares que podem girar).⁸⁸

⁸⁷Ou seja, esses fluidos magnéticos poderiam se mover independentemente das partículas ou moléculas com peso a que estão ligados. Ver a Nota de rodapé 77.

⁸⁸Quando Gauss e Weber utilizam as palavras “molécula” ou “molecular”, eles em geral não estão uti-

3. Ela pode ser devida à existência de *correntes moleculares permanentes constituídas pelos dois fluidos elétricos*, que podem ser giradas juntamente com as moléculas.

4. Ela pode ser devida à existência de dois *fluidos elétricos móveis*, que podem ser colocados em correntes moleculares.

Essas quatro possíveis causas internas mencionadas aqui das ações devidas a uma distribuição ideal na superfície, são as únicas que são conhecidas e que podem ser examinadas. O *primeiro* tipo é a base da teoria do magnetismo desenvolvida por Coulomb e Poisson.⁸⁹ O *terceiro* tipo é a base da teoria do magnetismo usando a eletrodinâmica desenvolvida por Ampère.⁹⁰ O *segundo* tipo pode ser reduzido ao terceiro tipo tendo em vista o teorema devido a Ampère de que ímãs moleculares e correntes moleculares coincidem em todos as suas ações se substituirmos os ímãs moleculares pelas correntes moleculares. Portanto, resta apenas o *quarto* tipo, que até agora passou despercebido e não foi discutido.

3.16 Dependência da Distribuição Ideal em Relação à Força de Separação Magnética, de Acordo com a Diferença entre as Quatro Possíveis Causas Internas Mencionadas Anteriormente

Para cada um desses quatro casos obtemos facilmente uma conexão entre o tipo de *distribuição ideal* e a *direção da força de separação magnética* que dá origem a essa distribuição. Para o *primeiro* caso, segue de acordo com a teoria de Poisson, que se denotarmos como *positiva* a direção da força de separação magnética na qual o polo Norte de uma agulha magnética aponta e se determinarmos para essas forças de separação os baricentros dos fluidos Norte e Sul da distribuição ideal correspondente, o primeiro desses dois baricentros é deslocado na direção *positiva* em relação ao último baricentro. Para o *terceiro* caso, essa conexão foi desenvolvida por Ampère e segue-se que ela leva à mesma dependência da distribuição ideal em relação à força de separação magnética. É óbvio que a mesma dependência também é

lizando o conceito moderno usado para distinguir, por exemplo, os termos “núcleo”, “átomo”, “molécula” ou “íon”. Naquela época até mesmo a existência dos átomos ainda não era totalmente aceita. A palavra “molécula” era um diminutivo derivado da palavra em latim “moles”, que significa massa ou grande massa. A palavra “molécula” foi aparentemente utilizada pela primeira vez em francês no século XVII, significando uma pequena massa ou partícula. Logo, usualmente Gauss e Weber utilizavam a palavra “molécula” significando uma partícula, massa microscópica ou corpúsculo. O adjetivo “molecular” se referia ao mundo microscópico ou à constituição corpuscular da matéria.

⁸⁹Charles Augustin de Coulomb (1736-1806) e Siméon Denis Poisson (1781-1840). As principais obras de Coulomb sobre torção, eletricidade e magnetismo já se encontram traduzidas e comentadas em português e inglês: [Ass22] e [AB23]. Ver ainda [Pot84]; [Gil71b] e [Gil71a]. Ver também [Poi12a], [Poi12b] com tradução para o inglês em [Poi19], [Poi13], [Poi25a], [Poi25b], [Poi22a] e [Poi22b].

⁹⁰André-Marie Ampère (1775-1836). Sua obra-prima foi publicada em 1826, *Teoria dos Fenômenos Eletrodinâmicos, Deduzida Unicamente da Experiência*, [Amp26] e [Amp23]. Há uma tradução completa em português desse trabalho, *Eletrodinâmica de Ampère: Análise do Significado e da Evolução da Força de Ampère, Juntamente com a Tradução Comentada de Sua Principal Obra sobre Eletrodinâmica*, [Cha09] e [AC11]. Traduções parciais para o inglês podem ser encontradas em [Amp65] e [Amp69]. Traduções completas e comentadas em inglês podem ser encontradas em [Amp12] e [AC15]. Uma quantidade imensa de material sobre Ampère e sobre sua força entre elementos de corrente pode ser encontrada na homepage *Ampère e a História da Eletricidade*, <http://www.ampere.cnrs.fr> e [Blo05], na homepage da Sociedade dos Amigos de André-Marie Ampère, <https://saama.fr>, e na homepage do Museu Ampère, <https://amperemusee.fr/en>.

válida para o *segundo* caso, pois o segundo caso pode ser deduzido do terceiro caso, como mencionado anteriormente. Portanto, falta discutir apenas o *quarto* caso.

O *quarto* caso assume a existência de *fluidos elétricos* que podem ser colocados em correntes moleculares. A possibilidade de que sejam desenvolvidas tais correntes moleculares é baseada na suposição de que em moléculas individuais, ou ao redor delas, existam órbitas fechadas nas quais os fluidos se deslocam *sem resistência*. Segue disso que só é necessária uma *força indutora de corrente*, isto é, uma força que atua sobre o fluido positivo e negativo em sentidos opostos, ao longo da direção dessa órbita, para mover de fato os fluidos nessa órbita. A teoria da magnetoelétricidade prova que, por meio de *um aumento ou diminuição da intensidade* da força de separação magnética, surge realmente uma *força eletromotriz* que atua em sentidos opostos sobre os dois fluidos elétricos móveis e deve, portanto, colocá-los em movimento de corrente. A *direção da corrente molecular* é dada pela lei fundamental da indução magnética que depende *do aumento ou diminuição da força de separação magnética*. Além disso, a *distribuição ideal* é dada em sua dependência em relação às correntes moleculares de acordo com a conexão entre eletrodinâmica e a teoria do magnetismo descoberta por Ampère para o terceiro caso. Segue-se disso a conexão entre a *distribuição ideal* e o *aumento ou diminuição da força de separação magnética* correspondente a essa distribuição.

Mas também é evidente que *em cada instante* no qual ocorre um aumento ou diminuição da força de separação magnética, será induzida uma tal corrente molecular. Portanto, as correntes induzidas, caso elas não se cancelem, têm de ser somadas. Contudo, essas correntes não desaparecem por si só. De fato, Ampère mostrou que temos de associar uma *permanência* às correntes moleculares elétricas, isto é, que os fluidos elétricos quando estão realizando seus movimentos circulares ao redor das moléculas ponderáveis, não estão sujeitos a uma tal *resistência* como ocorre para os fluidos elétricos fluindo através de um condutor, o que dá origem a uma explicação para o rápido desaparecimento das correntes elétricas nesse condutores. (Essa *permanência* provada por Ampère para as correntes moleculares é o motivo para o teorema mencionado anteriormente de que a *possibilidade* de colocar fluidos elétricos em corrente molecular pressupõe que existam *órbitas fechadas* nas moléculas individuais nas quais os fluidos podem se deslocar *sem resistência*.) Segue-se agora que, com um aumento *contínuo* da força de separação magnética, também deve ocorrer um acúmulo *contínuo* dos fluidos magnéticos na *distribuição ideal*, de onde segue que *cada intensidade dada da força de separação magnética corresponde a um momento [magnético] específico dos fluidos magnéticos idealmente distribuídos*. Contudo, essa soma só ocorre para *correntes moleculares*, pois apenas para elas *não há resistência* para o movimento dos fluidos elétricos. As outras correntes que são induzidas em órbitas maiores pela mesma força de separação, mas que rapidamente desaparecem de novo pela *resistência* que encontram nesses caminhos, produzem ações magnéticas em outros corpos apenas *no momento de sua excitação*, que imediatamente desaparecem juntamente com elas,⁹¹ assim que a força de separação, cuja *mudança* as produziu, se torna *constante*. Logo elas não estão em uma relação definida com a força de separação *existente*, o que seria necessário, se elas pudessem explicar as ações magnéticas observadas para as quais, portanto, apenas são úteis as *correntes moleculares*. Se desenvolvermos mais cuidadosamente essa dependência em relação às *correntes moleculares* de acordo com as leis da *indução magnética*, quando denotamos como *positiva* a direção na qual aponta o polo Norte de uma agulha magnética e quando determinamos a distribuição ideal dos baricentros dos fluidos Norte e Sul dependendo da força de separação, encontraremos que o primeiro desses dois baricentros está deslocado com relação ao último baricentro

⁹¹Isto é, as ações desaparecem juntamente com as correntes.

na direção *negativa*, isto é, *exatamente o inverso em relação aos outros três casos*.

3.17 Causa Interna do Diamagnetismo

Esse resultado notável pode agora ser aplicado para justificar a teoria dos fenômenos diamagnéticos que explicam o estado interno de um material diamagnético e as forças responsáveis por ele. Tal justificação não estava disponível anteriormente. De fato, não é suficiente para uma tal teoria que sejamos capazes de representar o estado diamagnético de um material em conexão com todas as suas ações por uma *distribuição ideal* de fluidos magnéticos em sua superfície, como já foi discutido anteriormente, mas é essencial que seja dada uma explicação das *forças* pelas quais esse estado é produzido, além disso, é necessário saber *sobre o que* essas forças agem e de *acordo com quais leis* elas atuam.

A partir da compilação e consideração anterior dos possíveis casos através dos quais o estado de um material pode ser representado por uma *distribuição ideal* de fluidos magnéticos, encontramos *apenas um caso* compatível com os *fenômenos fundamentais* durante o *surgimento* do diamagnetismo. Segue-se disso que podemos explicar a emergência de um estado diamagnético de uma material apenas se assumirmos que esse caso *realmente existe*. A saber, o caso no qual o estado diamagnético surge devido às forças indutoras que atuam sobre o material, e *dos fluidos elétricos induzidos no corpo que se deslocam sem resistência ao longo de órbitas circulares em torno das moléculas individuais*. Portanto, assumimos que uma barra de bismuto consiste de moléculas que *possuem órbitas fechadas* (ou canais), *nos quais os fluidos elétricos podem se deslocar sem resistência*, enquanto que em todas as outras órbitas eles só podem se mover após superar uma resistência proporcional às suas velocidades. A ocorrência de um diamagnetismo *puro*, que não seja misturado com magnetismo, também requer que as moléculas, juntamente com essas órbitas ou canais, *não possam ser giradas*; caso contrário, seriam criadas *correntes moleculares rotativas* que, como Ampère provou, resultariam em um *estado magnético* se sua intensidade não mudar durante a rotação.

3.18 Determinação da Força de Separação Eletromagnética em uma Bobina Galvânica

De acordo com a apresentação dada anteriormente, não é a própria *força de separação eletromagnética ou magnética* que é responsável pelo estado diamagnético de um material, mas essa força de separação determina o diamagnetismo apenas indiretamente no que diz respeito à *soma das forças eletromotrizes* que atuaram anteriormente no material diamagnético e colocaram os fluidos elétricos em movimento ao redor das moléculas individuais. A *intensidade das correntes moleculares (induzidas) existindo agora*, em que consiste a essência do *diamagnetismo*, depende da *soma das forças eletromotrizes* que atuaram sobre o material diamagnético. Dessa maneira, a determinação da *intensidade* da força de separação eletromagnética ou magnética *existente* é usada apenas *indiretamente* para a determinação do *diamagnetismo*, já que ela dá origem ao *valor integral de todas as mudanças* a que estava sujeita a força de separação eletromagnética ou magnética. A soma das forças eletromotrizes e, conseqüentemente, a intensidade das correntes moleculares (induzidas) que existem agora, são proporcionais a esse valor integral.

Suponha que o fio de uma corrente galvânica seja enrolado uniformemente ao redor de

um tubo cilíndrico. Denote por X a *força de separação eletromagnética* da corrente no centro do tubo na direção do eixo. De acordo com leis eletromagnéticas conhecidas, ela é dada por:

$$X = \frac{2\pi ni}{d} ,$$

onde n é o número de enrolamentos, i a intensidade da corrente, e $2d$ a diagonal do tubo (isto é, quando $2a$ é o comprimento do tubo e $2r$ o diâmetro, então $d = \sqrt{a^2 + r^2}$).⁹² Se a intensidade i da corrente for expressa de acordo com o artigo anterior sobre *Medições Eletrodinâmicas* (página 321 desse Volume),⁹³ em unidades absolutas determinadas, então na expressão anterior a *força de separação eletromagnética* é dada pela mesma unidade que Gauss utilizou para a determinação da *intensidade do magnetismo terrestre*.⁹⁴

Estritamente falando, o valor dado da *força de separação eletromagnética* é válido apenas para o centro da bobina. Na maioria dos casos esse valor pode ser usado com precisão suficiente para uma parte bem grande do espaço cercado pela bobina, em particular, se for muito pequeno o diâmetro da bobina comparado ao seu comprimento. Por exemplo, se considerarmos um ponto ao longo do eixo que está a uma distância b do centro da bobina, obtemos para esse ponto:

$$X = \frac{\pi ni}{a} \left[\left(1 + \frac{r^2}{(a-b)^2} \right)^{-\frac{1}{2}} + \left(1 + \frac{r^2}{(a+b)^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] ,$$

ou, se substituirmos a por $\sqrt{d^2 - r^2}$, e r/d por ρ :

$$X = \frac{2\pi ni}{d} \left[1 - \frac{3d^2 - b^2}{2(d^2 - b^2)^2} \cdot \rho^2 b^2 + \dots \right] .$$

Se, portanto, a diferença da força de separação eletromagnética, em partes do seu valor máximo válido para o centro, não exceder a pequena fração m , então estabelece-se

⁹²[Nota de Wilhelm Weber:] De fato, se r é o raio de um enrolamento, x a distância de seu centro até o centro da bobina, $rd\varphi$ o comprimento de um elemento de corrente e i a intensidade de corrente, é bem conhecido que $ir^2d\varphi/(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}$ é a expressão para a força devida ao elemento de corrente no centro da bobina na direção do eixo. Segue disso que a expressão da força devida a todo o enrolamento é $2\pi r^2i/(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}$, e a expressão para n enrolamentos da bobina cujo comprimento é $2a$ torna-se

$$2\pi r^2i \cdot \frac{n}{2a} \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{(r^2+x^2)} ,$$

isto é, se colocarmos $\sqrt{a^2 + r^2} = d$, obteremos $\frac{2\pi ni}{d}$.

⁹³[Web52c, pág. 321 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21c].

⁹⁴O trabalho de Gauss sobre a medição absoluta da força magnética terrestre foi anunciado na Sociedade Real de Ciências de Göttingen em dezembro de 1832, [Gau32], com traduções para o inglês em [Gau33a], [Gau37] e [Gau21a], ver ainda [Rei02, págs. 138-150]. O artigo original em latim só foi publicado em 1841, embora ele tenha circulado em pequena edição já em 1833, [Gau41b] e [Rei19]. Já foram publicadas várias traduções. Existem duas versões em alemão, uma traduzida por J. C. Poggendorff e publicada em 1833, a segunda traduzida por A. Kiel com notas de E. Dorn e publicada em 1894; uma versão em francês por F. J. D. Arago (1786-1853) publicada em 1834; duas versões em russo, uma por A. N. Drašusov publicada em 1836 e outra de A. N. Krylov publicada em 1952; uma versão em italiano de P. Frisiani publicada em 1837; um resumo em inglês foi publicado em 1935, com uma tradução completa em inglês de S. P. Johnson (1995) que foi publicada em 2003 e outra revisada e com Notas adicionais publicada em 2021; além de uma versão em português publicada em 2003: [Gau33b], [Gau34], [Gau36], [Gau39b], [Gau94], [Gau35], [Gau52], [Gau75], [Gau03], [Gau21d] e [Ass03b]. Ver ainda [Mer84].

$$\frac{3d^2 - b^2}{2(d^2 - b^2)^2} \cdot \rho^2 b^2 = m ,$$

ou

$$\frac{b^2}{d^2} = 1 + \frac{\rho^2}{4m + 2\rho^2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{16m}{\rho^2} + 9} \right) .$$

Portanto, se o diâmetro for, por exemplo, a 40ª parte do comprimento, em mais do que $\frac{7}{8}$ do total do espaço englobado pela bobina, a força de separação eletromagnética é constante dentro de 1 por cento, e em quase $\frac{2}{3}$ desse espaço ela é constante até $\frac{1}{10}$ por cento.

Logo tais bobinas podem ser utilizadas para fornecer de maneira fácil um espaço arbitrariamente longo no qual a força de separação eletromagnética possui uma intensidade conhecida exatamente, arbitrariamente grande e constante por todo lado. A reprodução de um tal espaço é, contudo, de grande importância para muitos estudos e as experiências descritas nas duas Seções anteriores podem servir como um exemplo disso. De fato, sem essas bobinas não teria sido possível realizar essas experiências.

Estritamente falando, a discussão anterior lida apenas com os pontos que estão sobre o eixo da bobina. Contudo, o resultado encontrado pode ser facilmente estendido ao espaço restante englobado pela bobina usando um teorema geral de Gauss encontrado na “Allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus — Teoria geral do magnetismo terrestre” (Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1838), Seção 38.^{95,96}

3.19 Determinação do Eletrodiamagnetismo Usando a Força de Separação Eletromagnética

O valor integral da força eletromotriz sobre um círculo de raio r para o [intervalo de] tempo necessário para mover o círculo da orientação perpendicular com relação à força de separação até uma orientação paralela, foi determinado no artigo anterior sobre *Medições Eletrodinâmicas* (página 323 desse Volume).⁹⁷ Para a força de separação eletromagnética dada por $X = 2\pi ni/d$, obtemos:

$$= \pi r^2 X .$$

Esse valor integral é a *soma dos produtos* da *intensidade* [da corrente], expressa de acordo com a unidade absoluta estabelecida na obra citada na página 321,⁹⁸ com o *elemento de tempo* durante o qual a força com essa intensidade está atuando.

A expressão dessa *soma* permanece inaltera se, em vez de girar o círculo de 90°, *desaparece* a força de separação eletromagnética $X = 2\pi ni/d$. Por outro lado, se essa força de separação for aumentada de $X = 0$ até $X = 2\pi ni/d$ (ao fechar a corrente), então a expressão dessa soma torna-se:

$$-\pi r^2 X = -\frac{2\pi^2 n r^2 i}{d} .$$

⁹⁵[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Gauss, Volume 5, pág. 170.

⁹⁶Ver a Nota de rodapé 16 na página 15.

⁹⁷[Web52c, pág. 323 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21c].

⁹⁸[Web52c, pág. 321 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21c].

O valor *negativo* significa que a corrente circular induzida tem uma tal direção que os polos de um ímã molecular *equivalente* a ela são direcionados em direções opostas àsquelas direções para as quais os polos de uma bússola são levados sob a influência da mesma força X .

Para a determinação do *valor integral* da força eletromotriz, utilizamos a medida das forças eletromotrices deduzida da unidade absoluta de *magnetismo* como explicada no artigo anterior, página 321.⁹⁹ Para valer com uma unidade puramente *eletrodinâmica*, essa expressão tem de ser multiplicada por um fator $\sqrt{\frac{1}{2}}$, como dado na página 361 da mesma obra,¹⁰⁰ portanto:

$$-\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot r^2 X = -\frac{\pi^2 \sqrt{2} \cdot nr^2 i}{d}.$$

De acordo com o artigo anterior, essa expressão precisa ser multiplicada (de acordo com a página 367 da mesma obra)¹⁰¹ por $4/c$ (onde c denota o valor constante da velocidade relativa para a qual duas massas elétricas não exercem força entre si), se quisermos expressar a força eletromotriz em termos *da unidade absoluta de forças utilizada geralmente na mecânica*, portanto:

$$-\frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \pi r^2 X = -\frac{4\sqrt{2} \cdot \pi^2 nr^2 i}{cd}.$$

Essa expressão fornece a *força eletromotriz para o comprimento da trajetória circular* com a suposição de que em cada unidade de comprimento dessa trajetória está localizada a unidade de fluido elétrico. Obtemos a partir disso *a força eletromotriz atuando em cada unidade de massa do fluido elétrico* ao dividir pela circunferência do círculo $2\pi r$:

$$= -\frac{\sqrt{2}}{c} \cdot r X = -\frac{2\sqrt{2} \cdot \pi nr i}{cd}.$$

Isto é, o *valor integral da aceleração* para o intervalo de tempo no qual a força de separação eletromagnética cresceu de $X = 0$ até $X = 2\pi ni/d$, se para cada unidade de fluido elétrico estiver ligada uma unidade ponderável de massa. Se ε denotar a pequena fração desconhecida que expressa a massa pertencendo à unidade de fluido elétrico em termos da unidade de massa ponderável, obteremos ao dividir essa expressão por ε a *velocidade de deriva*¹⁰² u produzida pelo *aumento da força de separação eletromagnética*. Se multiplicarmos essa expressão da *velocidade de deriva* u por $ae = 4e/c$ (ver a página 367 da mesma obra),¹⁰³ onde e representa a quantidade de fluido elétrico, expressa em termos da unidade elétrica, que está localizada em cada unidade de comprimento da trajetória circular, obteremos a *intensidade* da corrente circular *induzida* de acordo com a unidade deduzida de acordo com princípios puramente *eletrodinâmicos* (ver a página 359 da mesma obra).¹⁰⁴ Se além disso multiplicarmos essa

⁹⁹[Web52c, pág. 321 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21c].

¹⁰⁰[Web52c, pág. 361 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21c].

¹⁰¹[Web52c, pág. 367 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21c].

¹⁰²Em alemão: *Stromgeschwindigkeit*. Essa expressão pode ser traduzida como *velocidade de arraste*, *velocidade de deriva* ou *velocidade da corrente*. Weber está se referindo aqui à velocidade de deriva de cada partícula eletrizada em relação ao fio com corrente, isto é, em relação à matéria ou corpo material do condutor. Weber morreu em 1891. O elétron foi descoberto por J. J. Thomson (1856-1940) em 1897. A velocidade de deriva dos elétrons nos metais está tipicamente entre 10^{-3} e 10^{-5} m/s, sendo que a determinação experimental dessa velocidade também só ocorreu após a morte de Weber.

¹⁰³[Web52c, pág. 367 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21c].

¹⁰⁴[Web52c, pág. 359 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21c].

fórmula por $\sqrt{2}$, obteremos essa intensidade em termos da unidade de acordo com a qual uma intensidade de corrente = 1 atua de forma idêntica à *unidade de magnetismo*¹⁰⁵ de acordo com a unidade absoluta, quando essa corrente circula ao redor da unidade de área, a saber:

$$-\frac{8e}{c^2\varepsilon} \cdot rX = -\frac{16\pi nrei}{c^2d\varepsilon}.$$

Aqui i denota a intensidade da corrente *indutora* de acordo com a mesma unidade.

O *momento eletromagnético* dessa corrente circular induzida (corrente molecular) é encontrado ao multiplicar a *intensidade de corrente* especificada anteriormente pela área πr^2 englobada pela órbita circular:

$$= -\frac{8e}{c^2\varepsilon} \cdot \pi r^3 X = -\frac{16\pi^2 nr^3 ei}{c^2d\varepsilon}.$$

Aqui é assumido que a *normal* ao plano contendo a órbita circular é paralela à *direção* da força de separação eletromagnética. Isso pode acontecer para *todas* as órbitas circulares apenas para um arranjo *particular* das moléculas. No caso do *bismuto*, não assumimos tal arranjo. Em vez disso, supomos de acordo com a noção de *homogeneidade*, que as normais em relação às órbitas circulares não possuem uma direção predominante. Portanto, o número de órbitas circulares cujas normais fazem um ângulo φ com a direção da força de separação eletromagnética é proporcional a $\sin \varphi$. Logo, a *intensidade da corrente* é proporcional a $\cos \varphi$, e a *componente paralela à força de separação* é proporcional a $\cos^2 \varphi$.¹⁰⁶ Segue-se que ao multiplicar a expressão anterior por $\sin \varphi \cos^2 \varphi$ obteremos uma expressão proporcional à parcela de todas as correntes circulares (correntes moleculares), cujas normais fazem um ângulo φ com a direção da força de separação, no *momento eletrodiamagnético* do bismuto, a saber:

$$-\frac{8e}{c^2\varepsilon} \cdot \pi r^3 X \cdot \sin \varphi \cos^2 \varphi = -\frac{16\pi^2 nr^3 ei}{c^2d\varepsilon} \cdot \sin \varphi \cos^2 \varphi.$$

Ao multiplicar essa expressão por $d\varphi$, integrando entre $\varphi = 0$ e $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, e ao multiplicar o *valor integral* com o número m de correntes moleculares, obteremos o *momento eletrodiamagnético* total do bismuto expresso por:

$$= \frac{8e}{3c^2\varepsilon} \cdot \pi mr^3 X = -\frac{16\pi^2 mnr^3 ei}{3c^2d\varepsilon}.$$

Se v denotar o *volume* do bismuto e a a *distância* entre os centros de suas correntes moleculares cujo raio é r , o número de suas correntes moleculares será $m = v/a^3$. Com a suposição de que o tamanho das correntes moleculares seja proporcional ao estoque de moléculas, isto é, assumindo que $a/r = \kappa$ seja uma constante, a soma das áreas percorridas por todas as correntes moleculares será $m\pi r^2 = \pi v/\kappa^3 r$. Substituindo esse valor na expressão anterior do momento eletrodiamagnético, obtemos:

$$-\frac{8\pi}{3c^2\varepsilon} \cdot \frac{e}{\kappa^3} \cdot vX = -\frac{16\pi^2 ni}{3c^2d\varepsilon} \cdot \frac{e}{\kappa^3} \cdot v.$$

¹⁰⁵Uma agulha magnetizada com uma unidade de magnetismo possui uma unidade de momento magnético. Se representarmos o momento magnético por M , teremos então nesse caso $M = 1$ nas unidades absolutas de Gauss e Weber.

¹⁰⁶No original essa expressão está escrita como: $\cos \varphi^2$. Vou substituir nas próximas expressões $\cos \varphi^2$ por $\cos^2 \varphi$.

Portanto, o *momento eletrodiamagnético* de uma massa de bismuto é proporcional ao *momento de separação eletromagnético* X ¹⁰⁷ e ao volume v . Ele pode ser encontrado pela multiplicação do fator constante $8\pi/3c^2\varepsilon$ obtido da *teoria geral da eletricidade*, com o fator constante $-e/\kappa^3$ que depende da *natureza do bismuto*. Podemos denominar esse último fator de *constante diamagnética* do bismuto.

3.20 Comparação da Interação entre Moléculas Diamagnéticas com a Interação entre Moléculas Magnéticas

Na Seção anterior a indução de correntes moleculares nas órbitas circulares das moléculas foi considerada *individualmente* para determinar o *momento eletrodiamagnético*, como se em cada molécula apenas atuasse a força eletromotriz determinada pela *força de separação eletromagnética* existente. A rigor, esse não é o caso, mas em cada órbita circular, além disso, atuaram as forças eletromotrizes originadas da *interação* entre as moléculas diamagnéticas, assim como em uma partícula de uma barra de ferro atua não apenas a força de separação externa, por exemplo, exercida pelo magnetismo da Terra, mas também as forças de separação originadas da interação entre as partículas da barra entre si.

Se quisermos levar em consideração essa *interação*, embora ela seja tão pequena que sua influência dificilmente é perceptível, então vale à pena enfatizar um contraste notável que acontece entre a interação de moléculas *diamagnéticas* e *magnéticas*.

A saber, se duas *partículas de ferro* estiverem sobre uma linha reta *paralela* à direção da força de separação magnética atuando sobre elas e se denotarmos por m ao *momento magnético* que foi produzido pela força de separação em cada uma das partículas de ferro *individualmente*, a nova força de separação vindo da interação entre as partículas vai *aumentar* o momento m . Essa nova força de separação devida à *interação* entre as duas partículas é expressa de acordo com leis conhecidas por $2m/r^3$, onde r denota a distância entre as partículas. A força de separação *total* ($X + 2m/r^3$) produz agora na partícula que está sendo considerada um momento [magnético] *maior* $= (1 + 2m/Xr^3)M$.

Por outro lado, se duas *partículas de bismuto* estiverem sobre uma linha reta *paralela* à força de separação eletromagnética atuando sobre elas, e se denotarmos o *momento diamagnético* correspondendo a essa força de separação por $-\mu$ (o sinal negativo significa que para forças de separação atuando na mesma direção, o momento diamagnético é oposto ao momento magnético), a força de separação resultante devido à interação entre as partículas será $= -2\mu/r^3$, quando r é a distância entre as duas partículas. Portanto, a força de separação *total* $= (X - 2\mu/r^3)$ corresponde ao momento [magnético] *diminuído* $-(1 - 2\mu/Xr^3)\mu$. Há, portanto, o *contraste* de que o magnetismo das partículas de ferro situadas *na direção da força de separação* é *fortalecido* pela interação, enquanto o diamagnetismo das partículas de bismuto situadas nesta direção é *enfraquecido* pela interação.

O fenômeno oposto ocorre se as partículas de ferro e bismuto estiverem sobre uma linha reta *perpendicular* à direção da força de separação. Nesse caso o magnetismo das partículas de ferro fica *enfraquecido* pela interação, enquanto que o diamagnetismo das partículas de bismuto fica *intensificado* pela interação. De fato, ao usar a mesma notação, o *magnetismo*

¹⁰⁷Em alemão: *elektromagnetischen Scheidungsmomente* X .

enfraquecido das partículas de ferro resulta $= +(1 - m/Xr^3)m$, enquanto que o *diamagnetismo intensificado* das partículas de bismuto resulta $= -(1 + \mu/Xr^3)\mu$.

Segue-se disso que para fornecer a uma dada massa de ferro o maior magnetismo com uma dada força de separação, temos de colocá-la na forma de uma barra longa e delgada, ou um longo elipsoide *prolato* cujo eixo *maior* é *paralelo* à direção da força de separação. Por outro lado, para fazer com que uma massa de bismuto adquira o *diamagnetismo* mais intenso, temos de colocá-la na forma de uma placa tão fina quanto possível, ou na forma de um elipsoide *oblato* cujo eixo *menor* é *paralelo* à direção da força de separação. Essa conclusão poderia ser checada experimentalmente, mas temos de levar em consideração que no caso do bismuto a influência da interação entre as partículas é muito pequena devido à fraqueza do diamagnetismo correspondendo a uma dada força de separação. Contudo, se aplicarmos o resultado encontrado para a verificação do teorema mencionado pela primeira vez por Faraday de que o bismuto sob a influência de forças de separação magnéticas se comporta exatamente como o ferro, com a única diferença que os dois fluidos magnéticos parecem ter sido invertidos,¹⁰⁸ verifica-se então que esse teorema não é estritamente correto. Afinal de contas, de acordo com o teorema de Faraday, a forma elipsoidal esticada para o bismuto deveria ser a mais favorável para obter o diamagnetismo mais intenso, assim como a forma elipsoidal esticada para o ferro deveria ser a mais favorável para obter o magnetismo mais intenso, o que não é o caso. A dedução dessas leis de interação entre as moléculas diamagnéticas, comparada à interação entre moléculas magnéticas, leva a uma distinção simples entre materiais magnéticos e diamagnéticos, que é o assunto da próxima Seção.

3.21 Distinção entre Materiais Magnéticos e Diamagnéticos com o Auxílio dos Valores Positivos e Negativos de uma Constante

Em vez da distinção não totalmente precisa entre materiais magnéticos e diamagnéticos, na qual para a mesma força de separação os dois fluidos magnéticos são apenas invertidos, é possível fornecer uma distinção alternativa correta e igualmente simples que se baseia na diferença entre os valores de uma *constante* deduzida a partir da natureza de cada material.

De fato, se considerarmos por simplicidade apenas um *elipsoide de revolução* feito de ferro ou bismuto cujo eixo maior seja paralelo à direção da força de separação, foi provado por Neumann no “Journal für die reine und angewandte Mathematik” de Crelle, volume 37,¹⁰⁹ que, *no caso do ferro*, para uma dada força de separação X , o momento magnético do elipsoide é dado pela expressão

$$\frac{kvX}{1 + 4\pi kS} ,$$

onde v é o volume do elipsoide e S é uma quantidade determinada pela razão dos eixos, a saber:

$$S = \sigma(\sigma^2 - 1) \left\{ \frac{1}{2} \log \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} - \frac{1}{\sigma} \right\} ,$$

¹⁰⁸[Far46a, parágrafo 2429].

¹⁰⁹[Neu48b].

e

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{r^2}{\lambda^2}} ,$$

onde r e $\sqrt{r^2 - \lambda^2}$ são os eixos do elipsoide. Por fim, diz-se que k tem um valor constante para o ferro, que depende de sua natureza e que Neumann denominou de *constante magnética* do ferro. Esse valor é necessariamente *positivo* para o ferro e para *todos os materiais magnéticos*.

O valor de S para um *elipsoide infinitamente longo* é $S = 0$. Consequentemente, o momento magnético é:

$$= kvX ,$$

portanto, para $v = 1$ e $X = 1$, o momento magnético $= k$. A *constante magnética* k pode, portanto, ser definida como o valor *limite* ao qual o momento magnético da unidade de volume se aproxima sob a influência da unidade da força de separação magnética, se o elipsoide de volume unitário torna-se cada vez mais prolato. Como a constante k para todos os materiais magnéticos é positiva, o momento magnético é positivo ou negativo, dependendo se a força de separação é positiva ou negativa.

Para uma *esfera* obtemos o valor $S = \frac{1}{3}$, consequentemente o momento magnético é:

$$= \frac{kvX}{1 + \frac{4}{3}\pi k} .$$

Pode-se ver disso que no caso da forma esférica do ferro, como k tem um valor positivo, há menos magnetismo por unidade de volume do que no caso de uma forma elíptica esticada.

Para uma placa no formato de um disco infinitamente fino, o valor de S é igual a 1, consequentemente, o momento magnético é

$$= \frac{kvX}{1 + 4\pi k} .$$

A grandeza k pode agora ser usada para distinguir substâncias *magnéticas* diferentes. De acordo com a diferença entre as substâncias, seu valor pode diminuir até zero, porém, de acordo com a *natureza do magnetismo*, ela sempre permanece *positiva*.

Contudo, podemos generalizar o uso da grandeza k como uma maneira de distinguir as substâncias ao não restringi-la a materiais magnéticos, ou seja, estendendo-a para todos os materiais, permitindo *valores negativos* de k e vinculando o significado físico ao fato de que um corpo ao qual pertence tal valor *negativo* de k não é magnético, mas sim *diamagnético*. Em vez de introduzir valores negativos de k , vamos escrever $-k$ para materiais *diamagnéticos*. O momento diamagnético de um elipsoide de bismuto cujo volume $= v$ e no qual atua a força de separação eletromagnética X paralela à direção do eixo principal, pode então ser expresso como:

$$= -\frac{kvX}{1 - 4\pi kS} ,$$

onde S tem o mesmo significado que anteriormente. Para elipsoides infinitamente longos, nos quais $S = 0$, o momento diamagnético é:

$$= -kvX ,$$

para uma esfera onde $S = \frac{1}{3}$, seu valor é:

$$= -\frac{kvX}{1 - \frac{4}{3}\pi k},$$

e para um elipsoide infinitamente fino, no qual $S = 1$, seu valor é:

$$= -\frac{kvX}{1 - 4\pi k}.$$

Portanto, na forma *mais esticada* há o *menor* diamagnetismo por unidade de volume, na forma *mais achatada* há o *maior* diamagnetismo, exatamente o contrário do que acontecia com o magnetismo, como já foi provado na Seção anterior.

Contudo, como $-k$ possui um valor negativo muito *pequeno*, mesmo no caso do bismuto, que é o [metal] mais fortemente diamagnético, segue-se que o diamagnetismo do bismuto é sempre quase proporcional ao produto do volume com a força de separação, e pode ser considerado como aproximadamente independente do formato. Portanto, o significado de $-k$ pode ser comparado diretamente com o significado da *constante diamagnética* que discutimos no final da Seção 3.19. O momento diamagnético também foi expresso lá como o produto do volume com a força de separação, com um *coeficiente constante* que era decomposto em dois fatores, a saber, um fator $8\pi/3c^2\varepsilon$ obtido da *teoria geral da eletricidade*, e um fator $-e/\chi^3$ dependendo da *natureza do bismuto*, que foi denominado como a *constante diamagnética* do bismuto. Vemos facilmente que esses dois fatores não estão separados aqui em $-k$. Vemos também que $-k$ tem precisamente o significado do produto entre esses dois fatores.¹¹⁰

3.22 Sobre a Existência dos Fluidos Magnéticos

Quando uma certa classe de ações de um material sobre um outro material é tal que ela pode ser explicada em termos de uma *distribuição ideal* de fluidos magnéticos sobre suas superfícies, podemos pensar em possibilidades diferentes para as causas verdadeiras de todos essas ações, [causas essas] que estão no *interior* dos materiais, e podemos distinguir quatro casos diferentes, que foram mencionados na Seção 3.14 e discutidos mais detalhadamente nas Seções seguintes. Dois desses casos assumem que existem *dois fluidos magnéticos* aos quais é atribuída uma separação *constante* ou *variável* nas moléculas do material. Os outros dois casos assumem a existência, de acordo com a teoria da eletricidade, de dois *fluidos elétricos* que estão em uma certa órbita circular ao redor de cada uma das moléculas do material, seja em um movimento de corrente *constante* ou *variável*. Como podemos ver facilmente, esses quatro casos diferentes não são de forma alguma mutuamente exclusivos. De fato, uma parte dos fluidos magnéticos nas moléculas pode manter uma separação constante, enquanto que a separação da outra parte é variável. Da mesma forma, uma parte da corrente elétrica para as órbitas circulares de cada molécula pode ser constante, enquanto que a intensidade

¹¹⁰[Nota de Wilhelm Weber:] Gostaríamos de mencionar que o coeficiente *magnético* k só é uma *constante* de acordo com a teoria dos *fluidos magnéticos separáveis* (Seção 3.15, número 1), porém, de acordo com a teoria dos *ímãs moleculares rotatórios* (Seção 3.15, número 2), esse coeficiente tem de ser uma função do força de separação. Por outro lado, o coeficiente *diamagnético* $-k$, de acordo com a teoria da indução diamagnetoelétrica (Seção 3.15, número 4), por sua natureza, é *constante*, como mostrado na Seção 3.19. Nas Seções 3.23 até 3.26 vamos provar que, em relação ao *magnetismo*, a experiência está em contradição com a teoria dos *fluidos magnéticos separáveis*, com ela decidindo em favor de *ímãs moleculares rotatórios* (ou correntes moleculares, Seção 3.15, número 3), já que o valor de k para o ferro na realidade *não é constante*, mas depende do valor da força de separação X .

da outra parte varia. De fato, sem uma *parte variável*, as correntes *constantes* não podem existir tendo em vista as muitas forças eletromotrizes existentes. A saber, os fluidos elétricos, caso eles sejam de fato livremente móveis em certas órbitas circulares ao redor das moléculas, como é mostrado pela existência de correntes permanentes, precisam necessariamente seguir o ímpeto das forças eletromotrizes decompostas ao longo da direção das órbitas circulares. Portanto, o primeiro e o segundo casos podem ocorrer separadamente ou simultaneamente. Porém, o terceiro e o quarto casos estão em uma conexão necessária um com o outro, de modo que nenhum deles deve ocorrer, ou então ambos devem ocorrer juntos. Segue-se que esses quatro casos combinados mutuamente podem ser distinguidos em dois casos principais. A saber, em primeiro lugar, aqueles dois *fluidos magnéticos* separados ou separáveis existem nas moléculas do material. Em segundo lugar, de acordo com a teoria da eletricidade, os *fluidos elétricos* existindo em todo lugar são *livremente móveis* em certas órbitas circulares ao redor das moléculas. Contudo, esses dois casos principais podem ser considerados como mutuamente exclusivos, na medida em que a *prova real* de um dos dois faria o outro parecer uma hipótese *supérflua*.¹¹¹

Uma *teoria* pode ser desenvolvida para cada um dos dois casos principais e cada uma dessas teorias pode ser dividida *em duas partes*, a saber, uma parte na qual as duas teorias concordam em seus resultados e uma parte na qual elas se contradizem. A mesma coisa aconteceu na óptica no que diz respeito à teoria da emissão e à teoria ondulatória, cujos resultados também *concordaram* entre si em muitos aspectos, até que a descoberta dos *fenômenos de interferência* levou a uma discussão mais detalhada daquela parte na qual as duas teorias se *contradiziam* em seus resultados. Embora até agora as duas teorias baseadas respectivamente na existência de *fluidos magnéticos* e na existência de *correntes elétricas moleculares* tenham concordado admiravelmente em muitos aspectos em seus resultados, é justo esperar aqui, assim como na óptica, que finalmente a descoberta de uma nova classe de fenômenos também leve a uma discussão mais detalhada daquela parte na qual as duas teorias discordem em seus resultados, de tal forma que os fenômenos recém-descobertos decidiriam então a alternativa anterior entre as duas teorias.^{112,113}

As duas teorias ópticas discordaram em suas conclusões relacionadas à *coincidência* de dois raios homogêneos de luz. De acordo com uma teoria, deveria ocorrer amplificação, enquanto que de acordo com a outra teoria, algumas vezes deveria ocorrer amplificação e algumas vezes o cancelamento. O *fenômeno da interferência* confirmou os resultados da *teoria ondulatória*. Da mesma forma, a encruzilhada de nossas teorias também pode ser determinada. De fato, as duas teorias concordam, em primeiro lugar, em todos os resultados relacionados aos fenômenos dos ímãs *permanentes*. Em segundo lugar, elas também concor-

¹¹¹Ampère já havia argumentado contra a existência de polos magnéticos em sua obra-prima, ver a Seção 19 (Os polos magnéticos são hipóteses descartáveis) de [AC11] e [AC15].

¹¹²[Nota de Wilhelm Weber:] Tentei anteriormente, nos “Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839”, [Obras de Wilhelm Weber, Vol. II, pág. 171], justificar a conjectura de que os fenômenos denominados de “polaridade unipolar” poderiam levar a tal decisão. Contudo, esse não é o caso, pois pode ser dada uma explicação diferente para os fenômenos que são descritos lá, tão logo ocorra uma conexão entre os fluidos elétricos deslocando-se no interior do condutor e as partes ponderáveis do condutor, de tal forma que cada força atuando sobre os fluidos elétricos seja completamente ou quase completamente transferida para as partes ponderáveis, como expliquei mais detalhadamente nas “Medições Eletrodinâmicas” (*Abhandlungen bei Begründung der Königlich-sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften*, editado pela v. d. F. Jabl. Ges., Seção 19, pág. 309), [Obras de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 134].

¹¹³O que Weber chama aqui de “polaridade unipolar” também é conhecido como “indução unipolar”, uma expressão cunhada por ele mesmo. Ver [Web40, pág. 171 das Obras de Weber], e [Web46, Seção 19, pág. 134 das Obras de Weber] com traduções para o inglês em [Web07, Seção 19] e [Web21b, Seção 19].

dam no que diz respeito a ímãs variáveis, na medida em que cada uma delas leva a uma distinção deles *em duas classes*, a saber, na classe daqueles ímãs cujo magnetismo é devido à *simples orientação de moléculas rotatórias já existentes* (ímãs moleculares ou correntes moleculares), e na classe daqueles que devem seu magnetismo à *separação ou movimento de fluidos imponderáveis em moléculas em repouso* (a separação de fluidos magnéticos nas moléculas, ou a excitação de correntes elétricas em órbitas definidas em torno das moléculas). Finalmente, em terceiro lugar, as duas teorias concordam em seus resultados relacionados com a *primeira* classe de ímãs variáveis. Contudo, *elas se contradizem em seus resultados relacionados à segunda classe*. A saber, para essa segunda classe, segue das duas teorias *uma posição oposta dos polos*. De acordo com *uma das teorias*, a posição dos polos para a segunda classe deve *coincidir* com a posição da primeira classe, enquanto que, para a *outra teoria*, a posição dos polos para a segunda classe deve ser *oposta* comparada à posição para a primeira classe.

Enquanto conhecêssemos apenas tais ímãs variáveis nos quais a posição dos polos (para forças de separação apontando na mesma direção) *coincidissem*, as duas teorias explicariam esses ímãs e apenas na segunda teoria seria necessária a suposição de que os ímãs da segunda classe não existem de forma alguma, ou estão sempre ligados aos ímãs da primeira classe de tal maneira que a ação desses últimos [ímãs] seja sempre dominante. Como a primeira teoria não necessitava tal hipótese, ela parecia até mesmo ser a teoria preferida, enquanto conhecêssemos apenas ímãs com a *mesma* posição dos polos para forças de separação apontando na mesma direção. Tão logo foram descobertos os ímãs variáveis (diaímãs), nos quais a posição dos polos (para forças de separação apontando na mesma direção) era *oposta*, não havia mais escolha entre as duas teorias, porque então apenas a segunda teoria poderia ser usada, pois só ela explica a formação de duas classes de ímãs com posições *opostas* dos polos no caso de forças de separação direcionadas na mesma direção.

Os fenômenos *diamagnéticos* descobertos por Faraday decidem entre essas duas teorias da mesma maneira que os fenômenos de interferência decidiram entre a teoria de emissão e a teoria ondulatória na óptica. Esse é o significado mais essencial e importante associado a essa descoberta. Graças à descoberta do diamagnetismo, a hipótese das *correntes elétricas moleculares no interior dos materiais* é confirmada e a hipótese dos *fluidos magnéticos no interior dos materiais* é refutada.

Todas as nossas hipóteses ou concepções sobre corpos são sempre válidas dentro de um âmbito limitado de fenômenos, e diferem umas das outras pela maior limitação ou extensão dessa gama de fenômenos. Associamos uma *realidade* a elas enquanto não conhecemos quaisquer fenômenos fora dos seus alcances de aplicação. No caso oposto, as denominamos como *ideais*. Mesmo se os *fluidos magnéticos* tenham de ser tratados no futuro como noções *ideais*, eles manterão contudo a mesma importância e significado que tinham antes, desde que os apliquemos ao intervalo no qual são válidos. — E mesmo que por enquanto atribuamos *realidade* às *correntes elétricas moleculares* dentro do corpo, como o éter de luz que propaga ondas na ótica, ainda pode acontecer que no futuro, à medida que a ciência se desenvolva, elas também tenham que ser colocadas na classe de concepções *ideais*.

V - Sobre a Dependência do Momento Magnético e Diamagnético em Relação à Intensidade da Força de Separação

3.23 Sobre a Hipótese de Fluidos Magnéticos Realmente Existentes, Baseada na Analogia com a Teoria da Eletricidade, e Sobre a Lei Resultante da Dependência do Momento Magnético em Relação à Intensidade da Força de Separação

A correção do resultado obtido, de que não existem realmente fluidos magnéticos, mas apenas elétricos, para os quais, contudo, existem dois tipos diferentes de caminhos nos corpos ponderáveis nos quais eles podem se mover, ou seja, em parte aquelas [trajetórias] em que seu movimento encontra resistência proporcional à velocidade, e em parte aquelas [trajetórias] em que seu movimento não encontra resistência alguma (órbitas moleculares), baseia-se, conforme a discussão anterior, principalmente na consideração da *posição* oposta dos polos ou na *direção* oposta, segundo a qual, com a mesma força de separação magnética ou eletromagnética, ocorre a *separação ideal dos fluidos magnéticos* em corpos magnéticos e diamagnéticos. Porém, a correção desse resultado pode ser submetida a um teste adicional se, além da *direção* em que ocorre a *separação ideal* dos fluidos magnéticos com uma determinada força de separação magnética ou eletromagnética, também se examina mais de perto a *intensidade* dessa separação. De fato, não há contraste entre as duas teorias quanto à *intensidade* dessa separação, como há em relação à *direção*; mas mesmo no primeiro aspecto não há acordo completo. A decisão final entre as duas teorias necessita do desenvolvimento dessas diferenças que ocorrem nas duas teorias em conexão com a *intensidade* da separação ideal e seu teste pela experiência.

Se, por um lado, como observado na Nota no final da Seção 3.21,¹¹⁴ se seguisse que, de acordo com a teoria dos *fluidos magnéticos realmente existentes*, a proporcionalidade dos momentos magnéticos com as forças de separação deveria ocorrer, mas que essa proporcionalidade (de acordo com os experimentos de Müller) era contrária à experiência, e se pudesse ser demonstrado por outro lado que a teoria das *correntes moleculares* não estava em tal contradição com a experiência, então, a correção desta última teoria poderia ser provada dessa forma, sem que fosse necessário levar em conta os fenômenos *diamagnéticos* e a *posição invertida dos polos*, que se manifesta nesses [fenômenos diamagnéticos], como foi feito nas Seções anteriores. Contudo, temos de considerar uma circunstância crucial que mostra que apenas essa prova usando experiências *magnéticas*, sem referência às experiências *diamagnéticas*, não é completamente decisiva. Como já discutido na Seção 3.14, com a suposição da *existência real dos fluidos magnéticos*, existem *duas maneiras para o surgimento dos ímãs*, a saber, pela *separação* dos fluidos magnéticos em moléculas *em repouso*, ou pela *rotação* das moléculas nas quais os fluidos magnéticos estão separados *permanentemente*. A teoria já mencionada desenvolvida por Poisson e Neumann explicando que os momentos magnéticos são *proporcionais* às forças de separação, só lida com as leis para determinar o

¹¹⁴Ver a Nota de rodapé 110 na página 76.

magnetismo de ímãs que se originam de acordo com a *primeira* maneira. Um exame mais detalhado é necessário para saber se as mesmas leis também podem ser aplicadas completamente inalteradas à determinação do magnetismo dos ímãs criados da *segunda* maneira. Esse não é o caso, pois valem outras leis para os ímãs criados da *segunda* maneira e, de fato, *valem as mesmas leis* que aquelas válidas para ímãs que devem seu magnetismo à existência de *correntes moleculares rotatórias*. Portanto, quando as leis para os últimos ímãs coincidem com a experiência, segue imediatamente que a experiência também tem de coincidir com as leis dos ímãs cujo magnetismo é devido a *moléculas rotatórias com fluidos magnéticos separados permanentemente*. Consequentemente, nenhuma refutação *geral* da existência real de fluidos magnéticos pode ser baseada apenas nessas leis, mas somente uma refutação da origem dos ímãs por *separação* de fluidos magnéticos, como assumido na teoria desenvolvida por Poisson e Neumann.

Mas mesmo esta refutação *parcial* ganha um significado mais geral se considerarmos as razões que permitiram a Poisson e Neumann considerarem-se justificados em assumir uma *separação* dos fluidos magnéticos em moléculas em repouso e *nenhuma rotação* das moléculas com fluidos magnéticos permanentemente separados. Ao examinar mais atentamente como a hipótese da existência de fluidos *magnéticos* foi proposta, vemos facilmente que ela se originou principalmente por sua analogia com a *teoria da eletricidade estática*. Essa analogia consiste principalmente no fato de que se o ferro fica magnetizado, uma separação similar de fluidos magnéticos acontece nas moléculas de ferro, assim como ocorre a separação de fluidos elétricos quando pequenos condutores ficam eletrizados. Contudo, essa analogia é totalmente perdida quando a magnetização do ferro não é devida à *separação* de fluidos magnéticos nas moléculas de ferro, mas sim devido a uma *rotação* das próprias moléculas de ferro. Segue disso que a hipótese da existência de dois fluidos magnéticos perde sua fundação original baseada na *analogia com a teoria da eletricidade*, pela refutação da teoria de Poisson e Neumann. Em vez da hipótese original, ela teria de ser considerada como uma hipótese completamente nova. Isso também pode ser visto pelo fato de que nesse caso até mesmo o nome de *fluidos* magnéticos deixa de ser apropriado. De fato, quando essas substâncias estão *permanentemente* separadas nas moléculas de ferro e estão sempre fixadas no mesmo local nas partículas de ferro, sendo que só podem se mover *juntamente* com as partículas de ferro, não faz sentido falar de um estado *líquido* dessa matéria.¹¹⁵ É até mesmo questionável considerar essas substâncias como separadas do ferro, se na realidade elas sempre permaneceram conectadas com as partículas de ferro de maneira inalterada; pois bastaria então distinguir apenas *dois tipos de partículas de ferro*.

A refutação *parcial* mencionada também ganha um significado mais profundo no sentido de que ela destrói cada *analogia* que tentamos estabelecer anteriormente entre as hipóteses de fluidos *magnéticos* e *elétricos*. Essa analogia ganhou uma certa probabilidade pela hipótese cujo valor real é difícil de determinar exatamente e, portanto, pode facilmente ser superestimado. Contudo, tendo em vista a *refutação da teoria de separação* mencionada anteriormente, essa analogia desaparece completamente.

Contudo, na mesma proporção em que uma teoria, a saber, aquela baseada na *existência real de fluidos magnéticos*, perde probabilidade, a outra, a saber, aquela baseada na *existência de correntes moleculares*, ganha probabilidade, especialmente se puder ser provado que a *intensidade* dos momentos magnéticos para diferentes forças de separação se comporta exata-

¹¹⁵Em alemão: *von einem flüssigen Aggregatzustande dieser Stoffe*. Ou seja, não faz sentido falar de fluidos magnéticos, ou de um estado fluido da matéria, se essas substâncias estão sempre fixas nas partículas de ferro.

mente de acordo com esta teoria. A teoria, até então testada apenas pela *direção* observada da separação, seria então também testada e confirmada pela *intensidade* observada da separação. Segue-se que este segundo teste constitui um complemento essencial do primeiro teste, que será, portanto, dado em detalhes nas próximas Seções.

3.24 Conexão entre a Existência de um Valor Máximo do Momento Magnético e a Suposição de que as Moléculas Podem Girar

Embora a suposição de *ímãs moleculares giratórios* concorde na determinação da *localização dos polos* com a suposição de *fluidos magnéticos separáveis* para moléculas imóveis, como explicado na Seção 3.16, contudo as duas suposições discordam entre si de uma maneira essencial no que diz respeito à lei afirmando que a *intensidade do magnetismo de uma barra de ferro* varia de acordo com a *intensidade da força magnética* atuando sobre o ferro, como discutido na Seção anterior. Não é difícil entender que, de acordo com a *primeira* suposição, há um *limite* para a intensidade do magnetismo que não pode ser excedido e que corresponde ao caso no qual os eixos das moléculas alcançam uma *orientação paralela* por meio da rotação. Porém, tal *limite* para a intensidade do magnetismo *não existe* de acordo com a *segunda* suposição, que constitui o fundamento da teoria devida a Coulomb, Poisson e Neumann, porque de acordo com ela é assumida nas moléculas uma quantidade *inesgotável* de fluido magnético neutro separável (de acordo com a analogia com a teoria da eletricidade).¹¹⁶ Mas mesmo se alguém quisesse modificar um pouco esta última suposição e assumir que *todo* o fluido magnético neutro presente nas moléculas seria gradualmente separado pelo aumento da força que atua sobre o ferro, então ainda haveria uma diferença essencial entre as duas suposições. Essa diferença é que o crescimento do magnetismo, com força sempre crescente atuando sobre o ferro, deve, de acordo com a última suposição, estar sujeito a uma lei totalmente diferente *antes* que o fluido magnético neutro se esgote, do que *após* o esgotamento. A saber, até o momento em que o último remanescente de fluido neutro foi separado, a razão entre a intensidade do magnetismo do ferro e a magnitude da força que atua sobre o ferro deve permanecer *constante* (é por isso que essa razão também é comumente chamada de *constante magnética* do ferro).¹¹⁷ Contudo, a partir desse momento, essa razão deve diminuir rapidamente. Por outro lado, de acordo com a primeira suposição, segue que essa razão é *sempre variável* e tem de diminuir *continuamente* do início ao fim de acordo com a mesma lei.

Obtemos em vista disso a possibilidade de decidir diretamente a partir dos *fenômenos do magnetismo do ferro*, se a magnetização do ferro, *de acordo com a hipótese da existência real dos fluidos magnéticos*, deve ser atribuída a uma *rotação* de suas moléculas, ou à *separação* dos fluidos magnéticos dentro de suas moléculas. No primeiro caso, as moléculas giratórias podem ser também as portadoras de *correntes moleculares* assim como de *fluidos magnéticos*

¹¹⁶[Nota de Wilhelm Weber:] De acordo com esta suposição, o estado de equilíbrio magnético é definido pelo fato de que na superfície de todos os condutores moleculares existe uma distribuição dos dois fluidos magnéticos, que exercem tais forças em todos os pontos dentro da molécula que a ação de todas as forças externas de separação é anulada. Daí resulta facilmente que, se as forças externas de separação forem duplicadas, a quantidade de fluido magnético na superfície de todas as moléculas também deve ser duplicada, etc.

¹¹⁷Nome dado por Franz Neumann, ver a Nota de rodapé 109.

permanentemente separados, enquanto que no último caso a existência de fluidos magnéticos teria que ser dada como certa. De fato, apenas com a *rotação* das moléculas, mas não com a *separação* dos fluidos nas moléculas (por uma dada força de separação magnética ou eletromagnética), é possível substituir os fluidos magnéticos por correntes elétricas.

Tendo em vista as experiências de Müller mencionadas anteriormente, temos de considerar como refutada a *última* suposição de *fluidos magnéticos separáveis* em moléculas que não podem girar. Só faltou testar se a *diminuição contínua* da razão da intensidade do magnetismo do ferro com relação ao valor da força de separação atuando sobre o ferro, como determinada por Müller em suas experiências, está de acordo com a lei deduzida a partir de uma certa *capacidade de rotação* das moléculas de acordo com a *primeira* suposição. Pode ser deixado como indefinido se essas moléculas são as portadoras de fluidos magnéticos separados ou de correntes moleculares. Enquanto isso, as experiências de Müller foram repetidas por Buff e Zamminer (*Annalen der Chemie und Pharmacie* de Liebig, Wöhler e Kopp, Vol. 75, pág. 83).¹¹⁸ Os resultados encontrados por Müller não foram confirmados. Em vez disso, Buff e Zamminer acreditam terem provado com suas experiências que a razão da intensidade do magnetismo do ferro comparada ao valor da força atuando sobre o ferro é de fato *constante*, tanto quanto é possível checar com os meios atualmente disponíveis (além da influência da força coercitiva, se o ferro não for completamente doce). Esse resultado só seria possível com a suposição de fluidos magnéticos *separáveis* nas moléculas que não podem girar. A suposição de *ímãs moleculares rotatórios* e, portanto, também de *correntes moleculares rotatórias*, foi refutada dessa maneira e a *existência real de fluidos magnéticos* pareceria ter uma base sólida.

Portanto, parecia ser principalmente necessário repetir as mesmas experiências mais uma vez para decidir essa contradição. Na próxima Seção descrevo as experiências realizadas por mim e os instrumentos especiais que utilizei para obter um resultado seguro. Os resultados de Müller foram confirmados dessa maneira, o que está de acordo com algumas experiências feitas por Joule, ainda antes de Müller, apresentadas nos *The Annals of Electricity etc.*, de W. Sturgeon, Vol. V, pág. 472.¹¹⁹

3.25 Experiências para Provar a Existência de um Valor Máximo para o Momento Magnético

Segue das experiências realizadas por Müller que no caso de forças iguais atuando sobre o ferro, a diminuição da razão entre a intensidade do magnetismo do ferro e o valor da força atuando sobre o ferro é menor para barras de ferro *finas* do que para barras grossas. Portanto, para a comparação entre as experiências realizadas por Müller e aquelas conduzidas por Buff e Zamminer, é importante notar que a barra mais fina usada por Müller tinha uma espessura de apenas 6 milímetros, enquanto que a mais fina usada por Buff e Zamminer tinha uma espessura de 9 milímetros. Essa diferença na espessura torna-se ainda mais influente já que a barra de Müller tinha 330 milímetros de comprimento, enquanto que a barra de Buff e Zamminer tinha apenas 200 milímetros [de comprimento]. Utilizei nas próximas experiências uma barra ainda mais fina do que a de Müller, a saber, uma que tinha uma espessura de 3,6 milímetros, um comprimento de 100,2 milímetros e um peso de 8190 miligramas. Descobriu-se que o magnetismo de tal barra fina ainda podia ser medido com alta precisão pela deflexão

¹¹⁸[BZ50].

¹¹⁹James Prescott Joule (1818 - 1889), ver [Jou40b], [Jou40a] e [Jou52].

à distância de um pequeno magnetômetro de espelho. A única dificuldade que a utilização de tal barra fina apresentava, era a separação precisa entre as influências sobre o magnetômetro devidas ao magnetismo do ferro e as influências devidas à corrente galvânica. É claro que se usamos a mesma bobina galvânica para magnetizar barras espessas e finas como foi feito por Müller, Buff, e Zamminer, essa separação é menos precisa para barras finas, pois a ação da bobina permanece a mesma e, portanto, é comparativamente maior para barras finas do que para barras espessas. Portanto, para as próximas experiências foi utilizada uma bobina que não era mais larga do que o necessário para inserir nela uma barra fina. Também não fiquei satisfeito com isso, mas enrolei a ponta do fio espiral mais duas vezes na *direção oposta* ao redor do centro da bobina em um círculo muito mais amplo, de modo que a área delimitada por essas duas voltas era igual à área delimitada por todas as voltas da bobina estreita. De acordo com as leis conhecidas do *eletromagnetismo*, segue disso que a corrente não exerce ação sobre o magnetômetro afastado, o que pode ser facilmente testado e confirmado pela experiência. Toda a ação observada no magnetômetro é então apenas devida ao *magnetismo do ferro*, que pode ser determinada com a mesma exatidão e precisão que o magnetismo de ímãs de aço duro, de acordo com as instruções dadas por Gauss no *Intensitas etc.*, por meio de experimentos de deflexão a partir da intensidade conhecida do magnetismo da Terra, de acordo com *unidades absolutas*.¹²⁰

Além disso, deve ser enfatizado que as bobinas usadas por Müller, Buff, e Zamminer, eram mais curtas do que as barras magnetizadas de ferro. No caso de Müller essa diferença era pequena pois as barras de ferro se projetavam apenas 15 milímetros da bobina nas duas extremidades. No caso de Buff e Zamminer essa diferença era muito maior pois as extremidades das barras mais longas e finas se projetavam 45 milímetros para fora da bobina. Além disso, essa influência foi ampliada proporcionalmente ainda mais nas experiências de Buff e Zamminer, pois o comprimento da parte englobada na bobina era de apenas 110 milímetros, que pode ser comparada aos 300 milímetros no caso de Müller. Provavelmente essa circunstância é o motivo principal para a diferença aparente dos resultados obtidos por esses observadores. Obviamente a ação da bobina sobre o ferro é mais forte no centro da bobina, diminuindo nas suas extremidades, e essa diminuição é excepcionalmente grande fora da bobina. Segue disso que mesmo se ao aumentar a intensidade de corrente a ação na parte central da barra se aproxime de um limite, tal aproximação não seria sentida de todo para as partes fora da bobina. Para as próximas experiências foi utilizada uma bobina que era consideravelmente mais longa do que a barra de ferro de tal forma que, de acordo com as leis desenvolvidas na Seção 3.18, a força atuando sobre as extremidades da barra não difere perceptivelmente da força atuando sobre o centro. Só é possível obter um resultado confiável utilizando esse arranjo.

Me contento aqui em compilar brevemente os resultados obtidos dessa maneira na próxima Tabela. Não descrevo detalhadamente as experiências, o que não parece necessário já que, exceto pelas diferenças já mencionadas, elas quase coincidem com as descrições fornecidas por Müller, Buff, e Zamminer. Ressalto apenas que cada determinação individual se baseia em mudar quatro vezes o sentido da corrente, obtendo-se sempre a maior concordância, para provar que a força coercitiva do ferro não afetou a precisão dos resultados. Além disso, teria sido fácil considerar a influência da temperatura da barra de ferro, mantendo essa temperatura constante por uma corrente de água. No entanto, descobriu-se que a influência de mudanças moderadas na temperatura era tão pequena que, para determiná-la com mais precisão, as medições teriam que ser realizadas com muito mais precisão, para o que novos

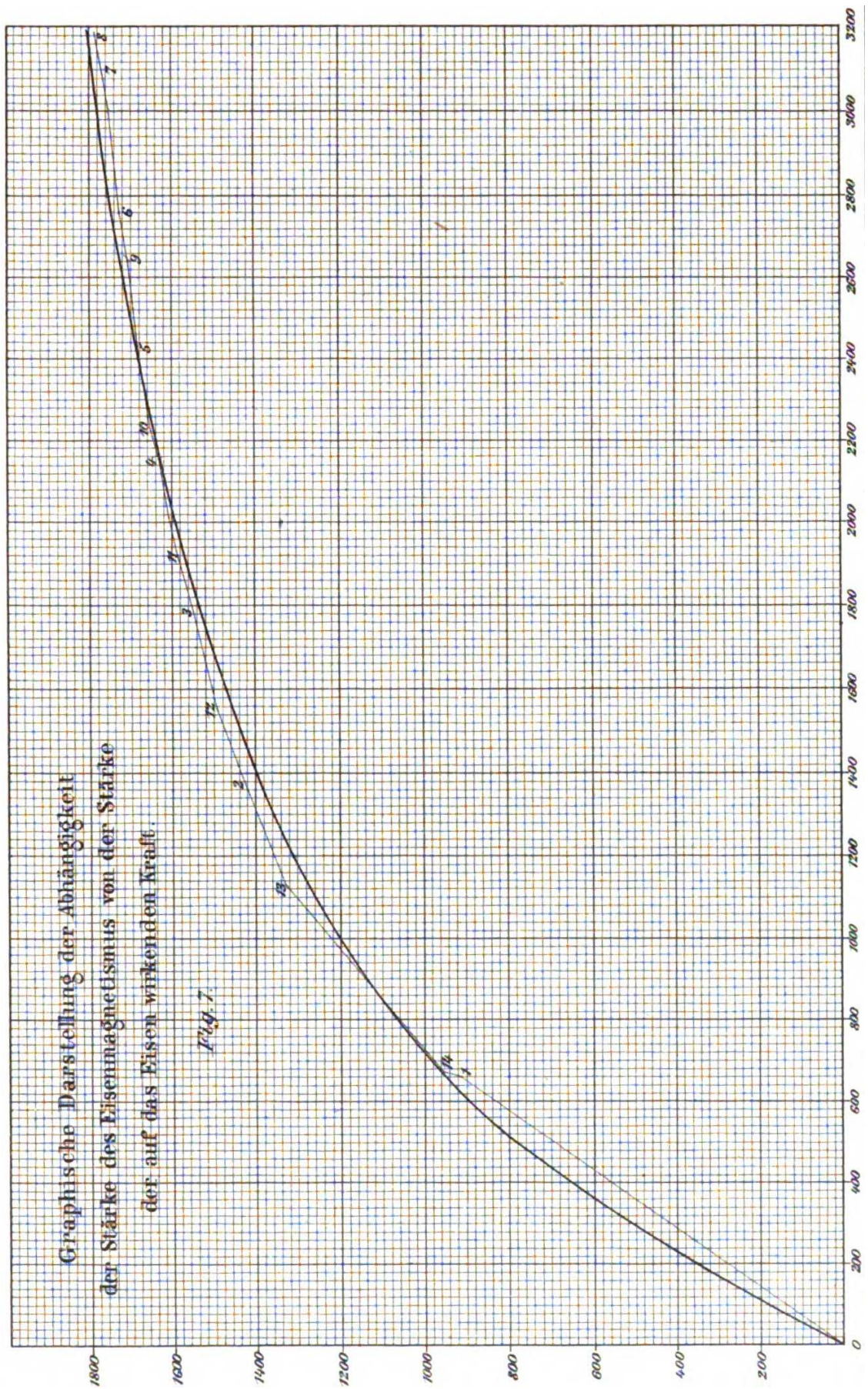
¹²⁰Ver a Nota de rodapé 94 na página 69.

equipamentos especiais teriam que ser usados, o que não foi possível obter imediatamente. Não é necessário explicar aqui como expressar o magnetismo do ferro usando unidades *absolutas*, o que foi feito na Tabela de acordo com regras conhecidas. A intensidade da corrente foi determinada com o auxílio de um galvanômetro tangencial de acordo com unidades *absolutas*. A correção já mencionada por Müller para obter uma precisão maior, que depende da razão entre o comprimento da agulha e o diâmetro do anel galvânico, foi identificada precisamente e levada em consideração, já que isso era fácil de fazer. Além disso, o conhecimento da intensidade da corrente de acordo com unidade *absoluta* foi utilizado para determinar a intensidade da força atuando sobre o ferro de acordo com a unidade *absoluta* através da qual expressamos o *magnetismo terrestre*. Isso foi feito usando o *número* de enrolamentos da espiral através da qual fluía a corrente, e através das *dimensões* [da bobina]. Graças a esse procedimento, podíamos comparar essa força com a conhecida *intensidade da força devida ao magnetismo terrestre*. Essa força é denominada X na próxima Tabela. O magnetismo M do ferro que encontramos foi dividido pela massa do ferro $p = 8190$ expressa em miligramas, e o magnetismo reduzido à unidade de massa é denominado por m .

Número	X	m
1.	658,9	911,1
2.	1 381,5	1 424,0
3.	1 792,0	1 547,9
4.	2 151,0	1 627,3
5.	2 432,8	1 680,7
6.	2 757,0	1 722,7
7.	3 090,6	1 767,3
8.	3 186,0	1 787,7
9.	2 645,6	1 707,9
10.	2 232,1	1 654,0
11.	1 918,7	1 584,1
12.	1 551,2	1 488,9
13.	1 133,1	1 327,9
14.	670,3	952,0

Como vemos, a Tabela é dividida em duas partes, a saber, uma parte na qual o valor da força atuando sobre o ferro está aumentando, e uma parte onde essa força está diminuindo. Na representação gráfica na Figura 7 vemos que as experiências da segunda parte que foram denominadas pelo número 8 até o número 14 se ajustam muito bem com as experiências da primeira parte denominadas pelo número 1 até o número 7.¹²¹

¹²¹Texto no interior da Figura 7: Representação gráfica da dependência da intensidade do magnetismo do ferro em relação à intensidade da força atuando sobre o ferro.



Para a última experiência da primeira parte a barra de ferro atingiu uma temperatura maior e esperávamos até que ela esfriasse novamente antes de começar as próximas experiências. No entanto, pode-se ver que ambos os experimentos se alinham igualmente bem com os outros, sendo isso uma prova de que a influência dessa diferença de temperatura deve ter sido muito pequena.

A partir dessas experiências parece seguir o resultado de que é *variável* a razão entre a intensidade do magnetismo do ferro e o valor da força atuando sobre o ferro. Portanto, é para ser esperado que o magnetismo do ferro se aproxime de um *limite* que ele nunca pode ultrapassar. Obviamente é impossível continuar com as experiências até que esse limite seja alcançado e determinado diretamente pelas observações. Contudo, não é necessária uma determinação direta do limite, já que é suficiente que esteja provada a *variação contínua* dessa razão. As mesmas experiências foram repetidas por outros observadores com o mesmo sucesso e acredito que não haja dúvida sobre os resultados obtidos. O resultado encontrado por Müller é assim essencialmente confirmado.

3.26 A Lei da Dependência do Momento Magnético em Relação ao Valor da Força de Separação de Acordo com a Suposição de Moléculas Rotatórias e Sua Comparação com as Experiências

Falta discutir mais detalhadamente se a variação da intensidade do magnetismo do ferro com o valor das forças atuando sobre o ferro encontrada nas experiências anteriores coincide com a lei deduzida a partir da hipótese de uma certa *capacidade de rotação* das moléculas. Se esse for o caso, é então claro que também podemos assumir de acordo com Ampère que essas moléculas são as portadoras de *correntes moleculares*. Isso significa que o *surgimento* e as *mudanças* do magnetismo do ferro, assim como suas *ações*, podem ser explicadas sem a hipótese de *fluidos magnéticos* e podem ser deduzidas apenas da hipótese de *fluidos elétricos*.

Na Figura 8, NS é um ímã molecular que pode girar ao redor de seu ponto central C . Já ND é a direção na qual seu eixo magnético é paralelo no caso de equilíbrio quando a força externa $X = 0$.

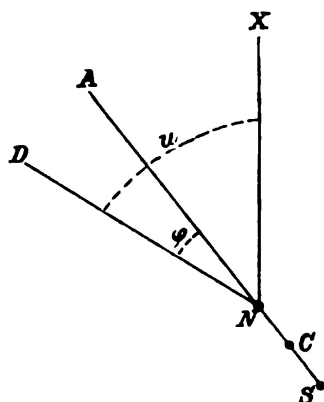


Fig. 8.

O fato de que para o ferro doce o magnetismo devido a uma força externa desaparece novamente tão logo a força externa desapareça, prova que o ímã molecular cuja rotação é

responsável pelo magnetismo gerado é automaticamente forçado de volta para sua posição original paralela a ND . Contudo, essa força motriz devida à interação entre as moléculas, tem de aumentar de acordo com a deflexão $AND = \varphi$ e pode ser expressa por:

$$D \text{ sen } \varphi ,$$

onde D é uma grandeza constante denominada de *força diretriz molecular*.¹²² Se, além dessa força diretriz molecular, a força externa X atuar no ímã molecular na direção NX , que forma o ângulo $XND = u$ com a direção da força diretriz, o ímã molecular é girado ou desviado pelo ângulo $AND = \varphi$, e tem-se então a seguinte equação para determinar a nova orientação de equilíbrio:

$$X \text{ sen } u \cos \varphi = (D + X \cos u) \text{ sen } \varphi ,$$

ou

$$\tan \varphi = \frac{X \text{ sen } u}{D + X \cos u} .$$

A partir dessa deflexão φ pode ser determinado o *aumento do momento magnético* da molécula decomposto na direção da força X . A saber, se denominarmos por μ todo o momento magnético da molécula, então antes da deflexão sua componente na direção da força X era

$$= \mu \cos u ,$$

após a deflexão tornou-se

$$= \mu \cos(u - \varphi) ,$$

portanto, o aumento x procurado é:

$$x = \mu(\cos(u - \varphi) - \cos u) .$$

Substituindo nessa fórmula para φ o valor obtido da equação anterior $\tan \varphi = X \text{ sen } u / (D + X \cos u)$, obtemos então:

$$x = \mu \left\{ \frac{X + D \cos u}{\sqrt{X^2 + D^2 + 2XD \cos u}} - \cos u \right\} .$$

Para um sistema de moléculas cujos eixos magnéticos são direcionados em todas as direções do espaço sem distinção no equilíbrio original, o número de moléculas cujos eixos magnéticos formam o ângulo u em relação à direção NX da força X deve ser proporcional a $\text{sen } u$. Nossa tarefa é determinar o momento magnético y que resulta da rotação de *todas* as moléculas do sistema devida à força X .

Com esse propósito, multiplicamos o valor encontrado anteriormente para x por $\text{sen } u \, du$ e integramos desde $u = 0$ até $u = \pi$. Esse valor integral, multiplicado pelo número n de moléculas e dividido por $\int_0^\pi \text{sen } u \, du = 2$, fornece o *momento [magnético] y*, a saber:

¹²²Em alemão: *Molekulare Direktionskraft*. Essa expressão pode ser traduzida como força diretriz molecular, força direcional molecular, força diretora molecular, força direcionadora molecular ou força de direção molecular. O conceito de “Direktionskraft” (força diretriz) foi introduzido por Gauss em 1838, [Gau38b, pág. 4] com traduções para o inglês em [Gau41c, pág. 254] e [Gau21b].

$$y = \frac{n}{2} \int_0^\pi x \sin u du .$$

Ao realizar a integração obtemos para y a seguinte expressão:^{123,124}

$$y = n\mu \frac{X}{\sqrt{X^2 + D^2}} \cdot \frac{X^4 + \frac{7}{6}X^2D^2 + \frac{2}{3}D^4}{X^4 + X^2D^2 + D^4} .$$

A força atuando sobre o ferro que causou esse momento [magnético] era $= X$. Se denotarmos por n o número de moléculas *na unidade de volume*, então a razão entre o momento y e a força X pela qual ele é produzido, vai possuir o mesmo significado na *teoria da rotação*, que a grandeza que Neumann denomina com k na *teoria da separação*, quando ele determinou o estado magnético de um elipsoide de revolução excitado por forças distributivas no *Journal für die reine und angewandte Mathematik* de Crelle, Vol.37.¹²⁵ Se, portanto, no cálculo de Neumann substituirmos o valor variável y/X recém-encontrado pelo valor de k , que ele considerava constante, então, se n indica o número de moléculas na unidade de volume ou na unidade de massa, o resultado será o *magnetismo m do ferro reduzido à unidade de volume ou de massa*, dado pela seguinte equação:

$$m = \frac{y}{1 + 4\pi S \frac{y}{X}} \text{ para a unidade de volume,}$$

$$m = \frac{y}{1 + 4\pi S \rho \frac{y}{X}} \text{ para a unidade de massa.}$$

Aqui ρ denota a densidade do ferro e S um fator que depende do formato [do corpo], ver a Seção 3.21.

Disso pode ser calculada a intensidade m do magnetismo do ferro a partir da força X atuando sobre o ferro se soubermos os valores das duas constantes $n\mu$ e D para o ferro e, para redução à *unidade de massa*, se for dada sua densidade ρ . Colocando:

$$n\mu = 2\,324,68 ,$$

e

$$D = 276,39 ,$$

¹²³[Nota de Heinrich Weber:] [Esse valor para y é um valor aproximado. A expressão real para $X < D$ é dada por $y = \frac{2}{3}n\mu \frac{X}{D}$, enquanto que para $X > D$ ela é dada por $y = n\mu \left(1 - \frac{1}{3} \frac{D^2}{X^2}\right)$.

Wilhelm Weber indicou a mudança em sua Nota *Verbesserung einer Formel in den elektrodynamische Maassbestimmungen* (Aperfeiçoamento de uma fórmula nas medidas eletrodinâmicas) que apareceu nos *Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Klasse 1852*, onde escreveu:]

Na pág. 572, linha 22 do artigo anterior sobre *Medições Eletrodinâmicas* no primeiro volume dos *Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften*, foi usada uma aproximação para y , em vez de uma expressão precisa. Corrijo esse descuido observando que ele não tem influência apreciável sobre os dados numéricos deduzidos a partir dele. De fato, o valor preciso para y para todos os valores de X que são menores do que D é $y = \frac{2}{3}n\mu \frac{X}{D}$, e para todos os valores de X que são maiores do que D obtemos $y = n\mu \left(1 - \frac{1}{3} \frac{D^2}{X^2}\right)$.

¹²⁴[Web53d]. Ver também [Web57].

¹²⁵Ver a Nota de rodapé 109 na página 74.

obteremos, já que a densidade do ferro é $\rho = 7,78$, a seguinte comparação entre o cálculo e a experiência onde, contudo, deve ser notado que para determinar o fator numérico S , em vez da forma cilíndrica do ferro, teve de ser substituído um formato elipsoidal que mais se aproxima dele, após o que foi obtido $S = 1/249$.

Número	X	m observado	m calculado	Diferença
1.	658,9	911,1	948,4	-37,3
2.	1 381,5	1 424,0	1 387,0	+37,0
3.	1 792,0	1 547,9	1 533,0	+14,9
4.	2 151,0	1 627,3	1 623,5	+3,8
5.	2 432,8	1 680,7	1 685,0	-4,3
6.	2 757,0	1 722,7	1 742,2	-19,5
7.	3 090,6	1 767,3	1 791,2	-23,9
8.	3 186,0	1 787,7	1 803,4	-15,7
9.	2 645,6	1 707,9	1 723,6	-15,7
10.	2 232,1	1 654,0	1 644,8	+9,2
11.	1 918,7	1 584,1	1 568,9	+15,2
12.	1 551,2	1 488,9	1 452,9	+36,0
13.	1 133,1	1 327,9	1 276,8	+51,1
14.	670,3	952,0	957,5	-5,5

Observando que nessas experiências usamos para a medição das intensidades das correntes com galvanômetro tangencial uma bússola comum de apenas 60 milímetros de comprimento, no qual as frações de um grau não podiam ser observadas com precisão, facilmente a intensidade podia ser encontrada 1 por cento muito baixa ou muito grande. Portanto, não poderíamos esperar uma concordância melhor entre o cálculo e a observação do que aquela encontrada na Tabela. Na representação gráfica na Figura 7, os valores calculados estão ligados por uma linha *grossa*, os valores observados por uma linha *fin*a. Parece que a partir disso não há dúvida sobre a *capacidade de rotação* das moléculas de ferro. E como, de acordo com Ampère, podemos considerar essas moléculas de ferro como portadoras de *correntes moleculares*, está provada uma concordância completa de todos os fenômenos magnéticos, até mesmo aqueles observados em ímãs *variáveis*, com a teoria das *correntes moleculares*. Uma importante confirmação dessa teoria foi assim obtida pelos fenômenos *magnéticos*, como garantia da justificativa anteriormente dada da mesma [teoria] pelos fenômenos *diamagnéticos*.

3.27 Aplicação [dessa Lei] à Comparação Feita na Seção 3.10

Deduzimos na Seção anterior a lei para determinar a intensidade do magnetismo do ferro em termos de sua dependência com relação à força de separação magnética e eletromagnética usando a teoria de moléculas giratórias. Sua aplicação mais importante está relacionada à construção de eletroímãs mais fortes, como ocorre atualmente em todos os instrumentos eletromagnéticos, cuja ação depende da intensidade do magnetismo do ferro. Como essa aplicação que foi enfatizada por Joule e Müller não está relacionada diretamente com o assunto que está sendo discutido aqui (diamagnetismo), me restrinjo a acrescentar apenas a aplicação dessa lei no que diz respeito à comparação da intensidade de um eletrodiaímã

a partir de suas ações *magnéticas* e *magnetoelétricas*, já que me referi a isso na Seção 3.10, página 58.¹²⁶

De fato, na Seção 3.10 foi comparado de duas maneiras o *magnetismo do bismuto* com o *magnetismo do ferro*. Em primeiro lugar, ao examinar a *deflexão da agulha de um ímã* e, em segundo lugar, pelas *correntes elétricas* induzidas em um condutor fechado pelo mesmo movimento dos dois materiais. A partir das duas comparações pode ser determinada a intensidade do *diamagnetismo do bismuto* de acordo com a unidade absoluta tão logo seja conhecida a intensidade do *magnetismo do ferro* de acordo com a unidade absoluta. Portanto, temos apenas de aplicar a lei anterior para a determinação do magnetismo do ferro com o objetivo de obter *duas* determinações independentes para o diamagnetismo do bismuto o que, tendo em vista a concordância entre elas, confirma a *lei da polaridade diamagnética*. Embora a Seção 3.10 já tenha aplicado a lei derivada dos experimentos de Müller para esta determinação do magnetismo do ferro sob as condições lá especificadas, observou-se, no entanto, que o resultado encontrado não pode, de forma alguma, ser considerado completamente seguro e preciso, e é, portanto, mais certo e necessário aplicar-lhe a lei mais rigorosamente estabelecida na Seção anterior.

De acordo com a primeira Nota de rodapé na Seção 3.10,¹²⁷ o *diamagnetismo* induzido no bismuto por uma força eletromagnética $X = 629,9$ foi comparado com o *magnetismo* induzido no ferro pela mesma força ao examinar os *torques exercidos sobre uma agulha magnética*. A razão entre eles foi encontrada como sendo

$$1 : 1\,470\,000 .$$

Usando essa razão, o *diamagnetismo* pode ser determinado *de acordo com a unidade absoluta* se conhecermos o *magnetismo do ferro de acordo com a unidade absoluta*. De acordo com a Seção anterior, temos para $X = 629,9$

$$\frac{y}{X} = 3,3959 .$$

Se substituirmos como foi feito na Seção anterior para o formato cilíndrico da pequena barra de ferro, que tinha 92 milímetros de comprimento e 0,1016 milímetros de espessura, o formato muito próximo de um elipsoide, obteremos de acordo com Neumann:

$$S = \frac{1}{138\,780} .$$

Usando esse valor encontramos ao colocar $\rho = 7,78$:

$$\log m = \log \frac{yT}{X} - \log \left(1 + 4\pi S\rho \frac{y}{X} \right) = 3,32919 ,$$

portanto, para o *magnetismo do ferro de acordo com a unidade absoluta*:

$$m = 2134 .$$

Contudo, para esse valor do *magnetismo do ferro* obtemos de acordo com a razão mencionada anteriormente para o *diamagnetismo do bismuto de acordo com a unidade absoluta* correspondendo à mesma força $X = 629,9$ [o seguinte valor:]

¹²⁶Pág. 512 do Vol. 3 das *Obras* de Weber.

¹²⁷Ver a Nota de rodapé 59 na página 55.

$$= \frac{1}{1\,470\,000} \cdot 2134 = \frac{1}{689} .$$

Além disso, na Nota de rodapé 59 na página 55 da Seção 3.10,¹²⁸ o *diamagnetismo* produzido no bismuto por uma força eletromagnética $X = 3012$ foi comparado ao *magnetismo* produzido no ferro pela mesma força *através da intensidade das correntes elétricas induzidas em um condutor fechado através de seus movimentos*. A razão entre eles foi encontrada como sendo 1 : 456 700 ou, após a redução para o bismuto apresentada na Seção 3.10:

$$1 : 360\,740 .$$

Com o auxílio dessa razão pode ser determinado o *diamagnetismo de acordo com a unidade absoluta* quando conhecemos o *magnetismo do ferro de acordo com a unidade absoluta*. Para $X = 3012$ encontramos de acordo com a Seção anterior:

$$\frac{y}{X} = 0,771\,33 .$$

Se também substituirmos aqui, em vez do formato cilíndrico da pequena barra de ferro, que tinha 186 milímetros de comprimento e 0,8342 milímetros de espessura, o formato bem próximo de um elipsoide, encontraremos então de acordo com Neumann:

$$S = \frac{1}{9\,747} ,$$

e, portanto, para $\rho = 7,78$:

$$\log m = \log \frac{yT}{X} - \log \left(1 + 4\pi S \rho \frac{y}{X} \right) = 3,362\,74 ,$$

portanto, para o *magnetismo do ferro de acordo com a unidade absoluta*:

$$m = 2305,4 .$$

Porém, para esse valor do *magnetismo do ferro* obtemos a partir da razão anterior o [seguinte valor do] *diamagnetismo do bismuto de acordo com a unidade absoluta* correspondendo à mesma força $X = 3012$:

$$= \frac{1}{360\,740} \cdot 2\,305,4 = \frac{1}{156,5} .$$

Finalmente, se reduzirmos essa intensidade do diamagnetismo determinada para diferentes valores da força X dividindo-a por X ao valor que corresponde à unidade de força X , obteremos então, de acordo com a *primeira* comparação (obtida por ações *magnéticas*), para a *intensidade do diamagnetismo produzida pela unidade de força na unidade de massa do bismuto, de acordo com a unidade absoluta*, o valor

$$\frac{1}{629,9} \cdot \frac{1}{689} = \frac{1}{434\,000} .$$

Por outro lado, a partir da *última* comparação (obtida por ações *elétricas*) obtemos:

¹²⁸Página 508 das *Obras* de Weber.

$$\frac{1}{2\,301} \cdot \frac{1}{156,5} = \frac{1}{471\,300} \cdot ^{129}$$

Em média, portanto, de ambas as comparações, que estão bem de acordo com as circunstâncias já discutidas mais detalhadamente na Seção 3.10, a *intensidade do diamagnetismo produzido pela unidade de força na unidade de massa do bismuto resulta em unidade absoluta*

$$= \frac{1}{452\,000} \cdot$$

Contudo, de acordo com as fórmulas apresentadas na Seção anterior, encontramos um *valor limite do magnetismo produzido pela unidade de força na unidade de massa de ferro, de acordo com a mesma unidade absoluta*, dado como

$$= 5,6074 \ ,$$

que é 2 540 000 vezes maior do que o valor do diamagnetismo.

Para *pequenas forças de separação e finas barras de ferro*, para as quais o magnetismo do ferro está quase que em uma razão *constante* para o diamagnetismo do bismuto, segue que o *diamagnetismo do bismuto* é aproximadamente $2\frac{1}{2}$ milhões de vezes menor do que o *magnetismo do ferro*. Quanto maiores se tornarem as forças de separação e as espessuras das barras de ferro, mais vai aumentar o diamagnetismo do bismuto em relação ao magnetismo do ferro, de tal forma que de acordo com o caso apresentado na Seção 3.10, ele aumenta até a 360 740^a parte do magnetismo do ferro, que é o maior valor que ocorreu nas experiências anteriores.

¹²⁹[Nota de Wilhelm Weber:] De acordo com essa razão, segue facilmente que ao assumir o resultado obtido para a ação *magnética* do bismuto = $\frac{1}{1470\,000}$ encontrado no início da Seção 3.10 na página 52, que o resultado = $\frac{4340}{4713} \cdot \frac{1}{1470\,000} = \frac{1}{1596\,000}$ deduzido a partir da ação *magnetoelétrica*, tem de ser colocado no lugar de = $\frac{1}{1731\,560}$, que foi encontrado na Seção 3.10 na página 58 baseado nas experiências de Müller. Incidentalmente, o resultado mais preciso encontrado aqui já havia sido mencionado no local citado com referência a essa Nota de rodapé.

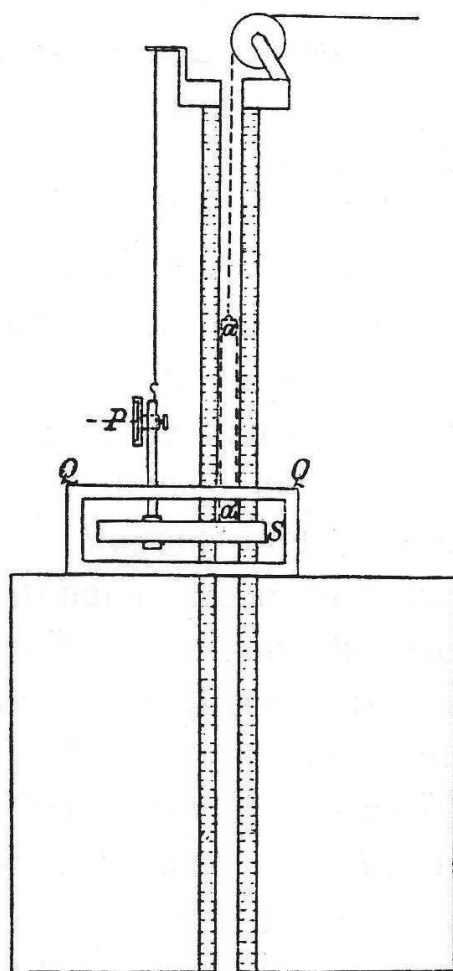


Fig. 4

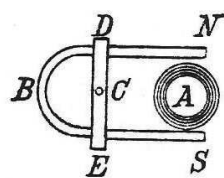


Fig. 3.

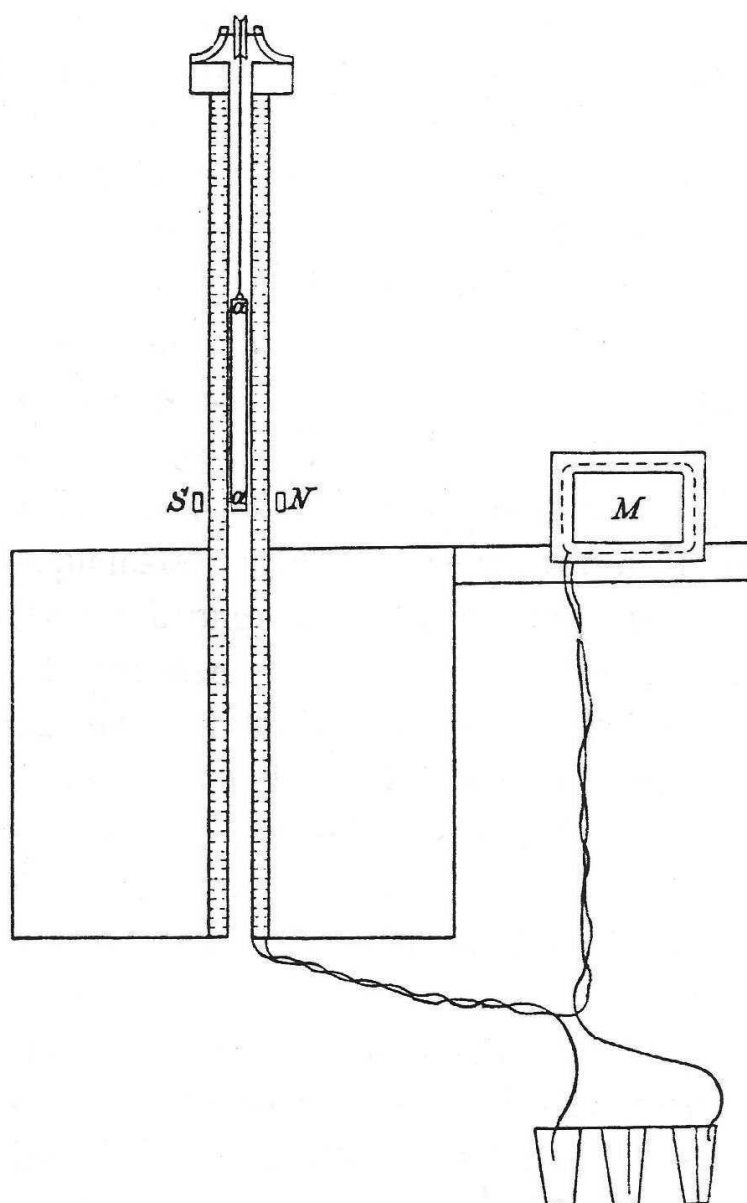
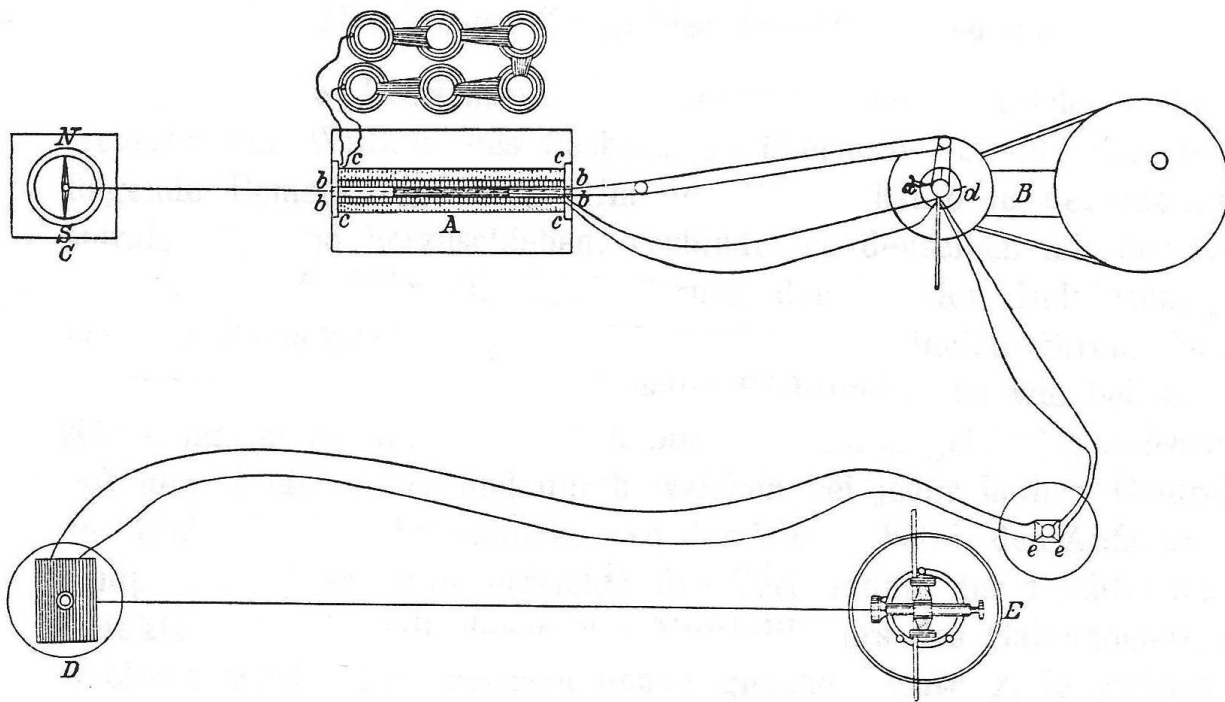


Fig. 5.



Capítulo 4

[Weber, 1852c] Sobre a Conexão do Diamagnetismo com o Magnetismo e a Eletricidade

Wilhelm Weber^{130,131,132}

Texto resumido dos Tratados da *Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften*, Vol. I, págs. 483-578; texto que também apareceu na obra especialmente publicada: “Abhandlungen über elektrodynamische Maassbestimmungen — Tratados sobre Medições Eletrodinâmicas”, de Wilhelm Weber, Leipzig, Weidmann’sche Buchhandlung, 1852.¹³³

4.1 Teoria

Ao tratar do magnetismo, é feita uma distinção entre ímãs *permanentes* e *variáveis*. Consideramos, por exemplo, um ímã de aço duro como um ímã permanente, e um ímã de ferro doce como um ímã variável. Se a antítese entre essas duas classes fosse perfeita (o que, no entanto, é tão pouco o caso quanto [a diferença] entre condutores e isolantes em eletricidade), então o magnetismo dos ímãs permanentes só poderia ser investigado através de suas *ações*, enquanto que o magnetismo dos ímãs variáveis poderia ser investigado tanto por suas *causas* quanto por suas *ações*. De qualquer forma, mesmo que essa antítese não seja perfeita, os ímãs *variáveis* são mais favoráveis *a um exame completo do magnetismo* (a partir de suas causas e ações), do que os ímãs *permanentes*.

Da mesma forma, na teoria do *diamagnetismo*, pode-se tentar distinguir entre *diaímãs permanentes* e *variáveis*; mas então *não haveria nenhuma marca para distinguir os diaímãs*

¹³⁰[Web52f] com traduções para o inglês em [Web53b], [Web66b] e [Web21i].

¹³¹As Notas de Wilhelm Weber são representadas por [Nota de Wilhelm Weber:]; as Notas de Heinrich Weber, o editor do Volume 3 das *Obras* de Wilhelm Weber, são representadas por [Nota de Heinrich Weber:]; as Notas de John Tyndall, o editor das Scientific Memoirs onde foi publicada a tradução em inglês desse artigo, são representadas por [Nota de Tyndall:]; todas as outras Notas são de minha autoria.

¹³²Esse trabalho é uma versão resumida da Terceira Memória principal de Weber sobre Medições Eletrodinâmicas, [Web52b], que está traduzida no Capítulo 3.

¹³³Esse texto apareceu na página 555 do terceiro volume das *Obras* de Weber. Ele refere-se a [Web52f] e [Web52a].

permanentes dos ímãs permanentes, pelo que essa distinção perde todo o significado prático. Portanto, na investigação do diamagnetismo, só devem ser considerados *diaímãs variáveis*, que podem ser examinados parcialmente por suas *causas* e parcialmente por suas *ações*.

Ora sabe-se que a investigação do magnetismo de um ímã através de suas *ações* (produzidas em outros corpos) nos leva a um conhecimento da *distribuição ideal* do fluido magnético sobre a superfície do ímã, sendo que em relação a isso Gauss provou,¹³⁴ no que diz respeito a todas as ações, que essa [distribuição ideal] substitui plenamente o conhecimento do *verdadeiro estado interior* do ímã. É um grande ganho para muitas pesquisas, que ao contemplar a *distribuição ideal* há uma maneira de resumir todas as ações de forma simples e completa, *sem o auxílio de uma hipótese sobre o interior do corpo*, especialmente quando as causas dessas ações ainda são desconhecidas e ainda precisam ser exploradas. Contudo, a partir do próprio fato de que o conhecimento da *distribuição ideal*, deduzido das observações, oferece uma visão completa e satisfatória de *todas as ações*, segue evidentemente que *apenas a partir das ações observadas*, não podemos ir além de um conhecimento dessa *distribuição ideal* que, contudo, precisa ser distinguida do conhecimento do *verdadeiro estado interno do ímã*; ou, em outras palavras, que com base apenas nas *ações observadas*, não estamos em condições de fazer afirmações sobre a distribuição real do fluido magnético dentro de um ímã, ou sobre o número, intensidade e arranjo real das correntes elétricas contidas nele.

O mesmo acontece para as *ações de um diaímã*. A partir da *observação de todos as suas ações*, poderíamos chegar a um conhecimento da *distribuição ideal* do fluido magnético sobre a superfície do diaímã, encontrando assim um substituto para o conhecimento de seu *verdadeiro estado interno*. Porém, dessa maneira, não poderíamos obter informação sobre a própria *verdadeira condição interna*, nem sobre a *verdadeira essência do diamagnetismo*, sua *origem* e suas *modificações*. Para obter um conhecimento desses aspectos, não podemos nos limitar à consideração das ações e à distribuição *ideal* que depende delas; mas é necessário solicitar o auxílio de alguma outra consideração que é baseada em um *fundamento independente dessas ações*.

Todas as possíveis causas do diamagnetismo (assim como aquelas do magnetismo) podem ser divididas de maneira geral em [origens] *internas* e *externas*. A causa *externa* é dada (assim como as ações) pela *observação*. Ela é a mesma para o magnetismo e para o diamagnetismo, a saber, *uma força de separação magnética ou eletromagnética, determinada em termos de intensidade e direção*.¹³⁵ Se, além dessa causa *externa*, também fosse conhecida aquela causa localizada *dentro* do próprio ímã, pela união dessas duas causas o próprio diamagnetismo seria completamente explicado. Inversamente, abre-se um caminho para determinar a *causa interna desconhecida* se, além da *causa externa* conhecida, for conhecido o *diamagnetismo* resultante (através de suas ações). Seguindo o caminho aqui indicado, e combinando a *força de separação magnética conhecida* com a *distribuição ideal* deduzida das ações observadas, tanto para o *ferro* quanto para o *bismuto*, obtém-se que a mesma força de separação gera distribuições ideais opostas nos casos do ferro e do bismuto. Ou, inversamente, *a mesma distribuição ideal no ferro e no bismuto corresponde a forças de separação direcionadas para lados opostos*. O motivo pelo qual causas externas opostas produzem as mesmas ações no

¹³⁴Ver a Nota de rodapé 16 na página 15.

¹³⁵Em alemão: *eine ihrer Grösse und Richtung nach bestimmte magnetische oder elektromagnetische Scheidungskraft*. Na Nota de rodapé 58 na página 54 apresento uma discussão desse conceito de força de separação. Um exemplo da ação dessa força é a magnetização de um pedaço de ferro doce causada por um ímã em suas proximidades, ou causada por um circuito conduzindo corrente constante localizado nas proximidades do pedaço de ferro.

ferro e no bismuto tem de estar relacionado *na diferença entre as causas internas, no próprio ferro e no bismuto*. Para determinar com mais precisão a *diferença dada aqui nas causas internas no ferro e no bismuto*, é necessário *classificar todas as possíveis causas internas* que podem ter ações que podem ser explicadas por uma *distribuição ideal* e, em seguida, examinar se, entre todas as que podemos enumerar, há aquelas que *existem de fato e que explicam os contrastes que acabamos de mencionar em corpos magnéticos e diamagnéticos sujeitos às mesmas influências externas*.

4.1.1 Classificação das Causas Internas que Podem Ser Assumidas como as Fontes das Ações que São Explicadas por uma Distribuição Ideal

Podemos fornecer *quatro* tipos essencialmente diferentes de causas *internas* que são capazes de produzir ações explicadas por uma distribuição ideal:

1. A causa interna de tais ações pode ser atribuída à existência de dois fluidos *magnéticos*, que são mais ou menos móveis, *independentemente de seus portadores ponderáveis*.¹³⁶
2. Ela pode ser devida à existência de dois fluidos *magnéticos*, que só podem se deslocar *em conexão com seus portadores ponderáveis* (ímãs moleculares rotatórios).
3. Ela pode estar contida na existência de *correntes moleculares permanentes formadas pelos fluidos elétricos*, e que podem girar *em conjunto com as moléculas*.
4. Ela pode ser devida à existência de *fluidos elétricos* que podem ser colocados em *correntes moleculares*.

Essas *quatro* possíveis causas internas das ações explicáveis por uma *distribuição ideal* sobre a superfície [dos corpos] são as únicas conhecidas e que podem ser testadas. O *primeiro* caso forma a base da teoria magnética de Coulomb e Poisson.¹³⁷ O *terceiro* caso forma a base da teoria de Ampère sobre a conexão do magnetismo com a eletrodinâmica.¹³⁸ O *segundo* caso pode ser reduzido ao terceiro, já que Ampère provou que os ímãs moleculares e as correntes moleculares são semelhantes em todas as suas ações e, portanto, as correntes moleculares podem ser substituídas no lugar dos ímãs moleculares. Portanto, resta apenas o *quarto* caso, que até agora passou despercebido e não foi discutido.

Para cada um desses quatro casos, há uma conexão definida entre o caráter da *distribuição ideal* e a *direção da força de separação magnética* que corresponde a ela. No *primeiro* caso, de acordo com a teoria de Poisson, segue-se que se, na direção da força de separação magnética, designa-se como *positiva* aquela direção para a qual é conduzido o polo Norte de uma agulha magnética, e se determinarmos os centros de gravidade dos fluidos Norte e Sul para a *distribuição ideal* correspondendo a essa força de separação, o primeiro desses dois centros de gravidade será deslocado em uma direção *positiva*, quando comparado com o último.¹³⁹ Para o *terceiro* caso essa conexão foi desenvolvida por Ampère e encontrou-se

¹³⁶Ou seja, assume-se que esses fluidos magnéticos podem se deslocar independentemente da matéria ponderável que os contém. Ver ainda a Nota de rodapé 77 na página 61.

¹³⁷Ver a Nota de rodapé 89 na página 66.

¹³⁸Ver a Nota de rodapé 90 na página 66.

¹³⁹Ou seja, o centro de gravidade do fluido Norte será deslocado em uma direção positiva, na direção da força de separação magnética. Já o centro de gravidade do fluido Sul será deslocado na direção oposta.

que a mesma dependência da *distribuição ideal em relação à força de separação magnética* também existe aqui. Pela redução já mencionada do *segundo* caso ao *terceiro*, é evidente que a mesma dependência também se aplica ao *segundo* caso. Portanto, em relação a essa dependência, resta discutir apenas o *quarto* caso.

Esse *quarto* caso assume a existência de *fluidos elétricos* que podem ser colocados em correntes moleculares. Porém, a *possibilidade* de serem colocados em correntes moleculares, baseia-se no fato de que nas moléculas individuais, ou em torno delas, existem *trajetórias fechadas* nas quais esses fluidos podem se deslocar *sem resistência*, de onde segue que é necessária apenas uma *força produtora de corrente* (isto é, uma força agindo sobre os fluidos positivos e negativos em direções opostas) na direção dessa órbita para *realmente mover* os fluidos nessa órbita. Ora, a teoria da magnetoeletricidade prova que, pelo *aumento ou diminuição da intensidade de uma força de separação magnética*, é obtida uma *força produtora de corrente* (eletromotriz), que atua sobre os fluidos elétricos em direções opostas e, portanto, *tem de colocá-los em movimento de corrente*. A *direção dessa corrente molecular* é dada pela lei fundamental da indução magnética *em relação à sua dependência no que diz respeito ao aumento ou diminuição da força de separação magnética*, e a *distribuição ideal*, por sua vez, é dada pela dependência dessa distribuição ideal em relação às *correntes moleculares* através da conexão da eletrodinâmica com a teoria do magnetismo desenvolvida por Ampère para o *terceiro* caso. Daqui também resulta indiretamente a ligação entre a *distribuição ideal* e o *aumento ou diminuição da força de separação magnética* correspondente.

Contudo, disso é evidente que *em cada instante* no qual ocorre um aumento ou diminuição da força de separação magnética, tem de ser gerada *uma tal corrente molecular*, e que essas correntes assim geradas sucessivamente, caso elas não desapareçam por si próprias, têm de se *somar*. Porém essas correntes *não desaparecem por si próprias*, pois Ampère provou que tem de ser atribuída uma *permanência às correntes moleculares*. Isto é, os fluidos elétricos, em seus movimentos circulares ao redor das moléculas ponderáveis, não sofrem *resistência* como os fluidos elétricos que fluem através de um condutor ponderável, o que explica o rápido desaparecimento das correntes elétricas nesses condutores.¹⁴⁰ (A partir dessa *persistência*, que pertence necessariamente às *correntes moleculares*, fica evidente que a *possibilidade* de colocar os fluidos elétricos *em correntes moleculares*, como já foi apontado, baseia-se no fato de que nas moléculas ou ao redor delas existem *trajetórias fechadas* nas quais esses fluidos *podem se mover sem resistência*.) A partir disso vem que um *aumento contínuo da força de separação magnética* é acompanhado por um *acúmulo contínuo dos fluidos magnéticos*, de acordo com a *distribuição ideal*; e, portanto, inferimos que a *cada intensidade dada da força de separação magnética* corresponde um *momento [magnético] definido da distribuição ideal*. Contudo, essa *somatória* só ocorre no caso de *correntes moleculares*, pois apenas nesse caso *os fluidos elétricos se deslocam sem resistência*. As *outras* correntes, que são produzidas pela mesma força em trajetórias maiores, mas que desaparecem rapidamente devido à resistência que encontram nesses caminhos, produzem ações magnéticas sobre outros corpos apenas *no instante de sua excitação* (quando a força de separação aumenta ou diminui), que desaparecem imediatamente assim que a força de separação se torna *constante* e que, portanto, não têm relação alguma com a intensidade da *força de separação existente*, o que deve ocorrer se for levado em consideração *as ações de ímãs ou diaímãs variáveis*, para as quais apenas *correntes moleculares* são úteis. Ao desenvolver *com relação a essas correntes moleculares*, de acordo com as leis da *indução magnética*, a dependência do momento [magnético] da

¹⁴⁰Isto é, nos condutores resistivos macroscópicos a corrente elétrica rapidamente desaparece quando a força eletromotriz atuando sobre eles vai a zero.

distribuição ideal em relação à intensidade da *força de separação existente*, encontramos que se for denominada de *positiva* a direção da força de separação magnética na qual é forçado o polo Norte de uma agulha magnética, e se forem determinados os centros de gravidade dos fluidos Norte e Sul de acordo com a *distribuição ideal* que depende dessa força de separação, o primeiro desses centros de gravidade será deslocado na direção *negativa* em comparação com o último [centro de gravidade], o que é *exatamente o inverso do que ocorre nos outros três casos*. Isso nos permite explicar a *causa interna do diamagnetismo*.

4.1.2 Causa Interna do Diamagnetismo

Este resultado notável permite, assim, uma aplicação ao estabelecimento de uma *teoria dos fenômenos diamagnéticos*, que explica as *forças que os produzem*, o que até agora tem faltado. Para obter tal *teoria* não é suficiente que o estado diamagnético de um corpo em relação a todas as suas *ações* possa ser convenientemente *representado* por uma *distribuição ideal* de fluidos magnéticos sobre sua superfície, mas é essencial que ela explique as *forças que produzem* o estado diamagnético, bem como por quais *leis e sobre o que* essas forças agem.

Da compilação e consideração anterior das várias maneiras *possíveis* pelas quais pode surgir *o estado de um corpo que pode ser representado por uma distribuição ideal de fluidos magnéticos*, apareceu *apenas um caso* em que a dependência da *distribuição ideal em relação à força de separação magnética* resulta em uma lei consistente com os *fenômenos fundamentais* relacionados ao *surgimento* do diamagnetismo. Segue disso que uma explicação do *aparecimento* do estado diamagnético só pode ser fornecida quando esse caso é considerado como *existindo de fato*. De acordo com esse caso, o *aumento do diamagnetismo* de um corpo é proporcional à *força indutora* atuando sobre os *fluidos elétricos*, fazendo com que eles *se desloquem sem resistência em trajetórias circulares definidas ao redor das moléculas*, e *acelerando* a velocidade de seus movimentos nessas trajetórias. O diamagnetismo do bismuto, por exemplo, é explicado pela suposição de que as moléculas do bismuto *possuem certas trajetórias fechadas* (ou canais), *onde os fluidos elétricos podem se mover sem resistência*, enquanto que esses fluidos só podem se mover em todas as outras trajetórias superando uma resistência proporcional à sua velocidade. A geração do *diamagnetismo puro* (que não esteja misturado com o magnetismo) necessitaria, além disso, da suposição de que as moléculas que contêm as trajetórias ou canais já mencionados *não podem ser giradas*; pois caso contrário, poderiam ser produzidas *correntes moleculares rotatórias*, que seriam tão fortes, que uma parte de sua intensidade durante a rotação poderia ser considerada como *constante* e, portanto, de acordo com Ampère, gerariam conseqüentemente um *estado magnético*. De acordo com essa suposição, o *diamagnetismo* ou *eletrodiamagnetismo* de um corpo pode ser determinado a partir da *força de separação magnética* ou *eletromagnética* atuando sobre ele.

4.1.3 Determinação do Diamagnetismo ou do Eletrodiamagnetismo de um Corpo a partir da Força de Separação Magnética ou Eletromagnética Exercida sobre Ele

A *força de separação magnética ou eletromagnética* expressa por X ¹⁴¹ exerce sobre um círculo de raio r , *forças eletromotrizes* cujo valor integral, para o intervalo de tempo durante o qual esse círculo é deslocado desde uma orientação perpendicular à direção da força de separação até uma orientação paralela a ela, de acordo com a Seção 11 das medidas de resistência de meu trabalho *Medições Eletrodinâmicas*,^{142,143} é [dado por:]

$$= \pi r^2 X .$$

Esse valor integral é a *soma dos produtos da intensidade da força eletromotriz*, reduzida a uma *unidade absoluta* na Seção 10 da obra citada,¹⁴⁴ com o *elemento de tempo* durante o qual a força atua com essa intensidade. A expressão desse valor integral permanece inalterada se, ao invés de mover o círculo através de um arco de 90°, a *força de separação* X *desaparecer*. Se, ao contrário, essa força de separação crescer de $X = 0$ até $X = X$ (ao fechar o circuito), a expressão desse valor integral torna-se igual a:

$$-\pi r^2 X ,$$

na qual o valor *negativo* significa que a corrente circular induzida possui uma direção tal que os polos de um *ímã molecular equivalente* são direcionados de maneira oposta em relação aos polos de uma agulha de bússola sob a influência da força X .

Essa determinação do valor integral da *força eletromotriz* refere-se à unidade deduzida a partir da medição absoluta do magnetismo, como estabelecida na obra citada anteriormente, páginas 338 e 339,^{145,146} e tem de ser multiplicada por $\sqrt{1/2}$ para que seja válida para

¹⁴¹[Nota de Wilhelm Weber:] Toda *força de separação magnética* pode ser *comparada com o magnetismo terrestre* e reduzida à *mesma unidade de medida*. A força de separação eletromagnética de uma espiral cilíndrica, [Nota de AKTA: isto é, uma bobina ou solenoide finito] através da qual flui uma corrente de intensidade i , é expressa de acordo com as leis fundamentais do eletromagnetismo por:

$$\frac{2\pi ni}{\sqrt{a^2 + r^2}} ,$$

onde n significa o número de enrolamentos, r o raio e a o comprimento do eixo da bobina. Essa expressão é válida inicialmente para a força de separação magnética no centro do cilindro, mas se aproxima dela para todos os outros pontos do espaço interno, exceto para aqueles próximos ao final, tanto mais quanto mais longa a espiral e menor seu raio. Portanto, quando uma barra de bismuto está colocada no centro de tal espiral, são exercidas *forças de separação eletromagnéticas aproximadamente iguais* sobre todas as suas partículas. Portanto, ela pode ser *deslocada* para frente e para trás dentro de certos limites dentro da espiral sem que ocorra qualquer mudança perceptível dessas forças. Logo tal espiral está particularmente adaptada para as experiências nas quais seja necessário que o *diamagnetismo permaneça inalterado*. — A expressão anterior fornece a *força de separação eletromagnética* em termos da mesma unidade que as *forças de separação magnéticas* (a saber, a unidade absoluta utilizada na determinação do magnetismo terrestre), quando i denota a intensidade do *magnetismo em barra*, cuja ação é igual à ação da corrente circulando ao redor de uma unidade de superfície.

¹⁴²[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. III, pág. 323.

¹⁴³[Web52c, págs. 322-325 das *Obras de Weber*] com tradução para o inglês em [Web21c].

¹⁴⁴[Web52c, págs. 321-322 das *Obras de Weber*] com tradução para o inglês em [Web21c].

¹⁴⁵[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. III, pág. 321.

¹⁴⁶[Web52c, págs. 321-322 das *Obras de Weber*] com tradução para o inglês em [Web21c].

a *unidade puramente eletrodinâmica das forças eletrodinâmicas* dada na Seção 26 da obra citada;¹⁴⁷ portanto:

$$-\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot r^2 X .$$

Essa expressão, multiplicada por $4/c$ (onde c denota aquele valor constante da velocidade relativa na qual *duas massas elétricas não exercem qualquer influência entre si*), fornece a força eletromotriz em termos da *unidade absoluta estabelecida na mecânica para todas as forças em geral* (ver a Seção 27 da obra citada);¹⁴⁸ portanto:

$$-\frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \pi r^2 X .$$

Esse é o valor da força *eletromotriz* para o comprimento de toda a trajetória circular, com a suposição de que *em cada unidade de comprimento dessa trajetória exista uma unidade de fluido elétrico*. Ao dividir pela circunferência do círculo, $2\pi r$, encontramos a força eletromotriz atuando sobre cada unidade de fluido elétrico como sendo dada por:

$$= -\frac{\sqrt{2}}{c} \cdot r X .$$

De acordo com os princípios da mecânica, isso significa *o aumento da velocidade que cada unidade de massa ponderável, se ela estivesse conectada com a unidade de fluido elétrico, atingiria no intervalo de tempo em que a força de separação aumenta de $X = 0$ até $X = X$* . Se ε denotar a pequena fração desconhecida, que a massa da unidade de medida elétrica forma em relação à unidade de medida de massa ponderável, então o valor anterior, dividido por ε fornece a *velocidade de deriva u* ¹⁴⁹ que foi provocada pelo aumento indicado na *força de separação*. Se essa velocidade de deriva u for multiplicada por $4e/c$, onde e denota a quantidade de fluido elétrico que existe em cada unidade de comprimento da trajetória circular, expressa em termos da unidade de massa elétrica, obteremos a intensidade da corrente circular induzida de acordo com a unidade de medida puramente eletrodinâmica; e quando multiplicada por $\sqrt{2}$, obteremos [essa intensidade] em termos daquela unidade de acordo com a qual *uma corrente de intensidade = 1, enquanto flui ao redor da unidade de área, é equivalente à unidade de magnetismo*,¹⁵⁰ a saber,

$$-\frac{8e}{c^2\varepsilon} \cdot r X .$$

O momento eletromagnético dessa corrente circular induzida (corrente molecular) é encontrado ao multiplicar a *intensidade da corrente* pela *área* englobada pela trajetória circular, sendo dado por:

$$= -\frac{8e}{c^2\varepsilon} \cdot \pi r^3 X .$$

Assumimos aqui que a normal ao plano da trajetória circular é paralela à direção da força de separação, o que só pode ocorrer para *todas* as trajetórias circulares em *um* arranjo específico das moléculas. No caso do *bismuto*, não assumimos tal arranjo, em vez disso, de acordo com o

¹⁴⁷[Web52c, págs. 358-365 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21c].

¹⁴⁸[Web52c, págs. 365-368 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21c].

¹⁴⁹Ver a Nota de rodapé 102 na página 71.

¹⁵⁰Ver a Nota de rodapé 105 na página 72.

princípio da *homogeneidade*, supomos que as normais aos planos das trajetórias circulares não possuem direção privilegiada. De acordo com isso, o número de trajetórias circulares cujas normais fazem um ângulo φ com a direção da força de separação, tem de ser proporcional a $\sin \varphi$. A *intensidade da corrente* será então proporcional a $\cos \varphi$, e a *componente do momento [magnético] paralela à força de separação*, será proporcional a $\cos^2 \varphi$. Portanto, se multiplicarmos o valor anterior por $\sin \varphi \cos^2 \varphi$, obteremos uma expressão proporcional à contribuição de todas as correntes circulares (correntes moleculares), cujas normais formam um ângulo φ com a direção da força de separação, em relação ao *momento eletrodiamagnético* do bismuto, a saber:

$$-\frac{8e}{c^2\varepsilon} \cdot \pi r^3 X \cdot \sin \varphi \cos^2 \varphi .$$

Ao multiplicar essa expressão por $d\varphi$, e então, além disso, ao multiplicar o *valor integral* obtido entre os limites $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi/2$ pelo número de correntes moleculares, obteremos o *momento eletrodiamagnético* total da massa m de bismuto, quando μm denota o número de correntes moleculares nessa massa, [a saber:]

$$= -\frac{8\pi}{3c^2\varepsilon} \cdot \mu r^3 e \cdot m X .$$

O *momento eletrodiamagnético* de uma massa de bismuto é, portanto, proporcional à força de separação X e à massa m do bismuto, sendo encontrado pela multiplicação com um fator constante $8\pi/3c^2\varepsilon$, obtido da *teoria geral da eletricidade*, e com um fator constante $\mu r^3 e$, que depende da *natureza do próprio bismuto*. Esse último fator pode ser denominado de *constante diamagnética* do bismuto.

Nessa determinação do *momento eletrodiamagnético*, as correntes moleculares induzidas nas trajetórias circulares foram consideradas *isoladamente*, como se em cada molécula apenas a força eletromotriz calculada a partir da força de separação X tivesse atuado. Este não é, estritamente falando, o caso; em toda órbita circular, há também aquelas forças eletromotrizes que vêm da *interação* entre as moléculas diamagnéticas, assim como uma partícula de uma barra de ferro não é afetada apenas pela força de separação externa, por exemplo, exercida pelo magnetismo da Terra, mas também por aquelas forças de separação que vêm da *interação* das partículas magnéticas de ferro na barra de ferro umas com as outras. Embora essa *interação* entre as moléculas diamagnéticas seja tão pequena que dificilmente exerce uma influência perceptível, ainda assim merece ser considerada aqui uma antítese notável entre a interação de moléculas *magnéticas* e *diamagnéticas*.

4.1.4 A Interação entre Moléculas Diamagnéticas Comparada com a Interação entre Moléculas Magnéticas

Quando duas *partículas de ferro* estão situadas ao longo de uma linha reta *paralela* à direção de uma força de separação X atuando sobre elas, se o *momento magnético* produzido pela força de separação em cada molécula considerada isoladamente for designado por m , vai resultar para cada partícula uma força de separação adicional, devida à ação da outra [partícula], pela qual o momento magnético m é *umentado*. Essa nova força de separação, que resulta da interação entre as partículas, é expressa de acordo com leis conhecidas por $2m/r^3$, onde r denota a distância entre as partículas. Portanto, a força de separação total ($X + 2m/r^3$) produz na partícula que está sendo considerada um momento [magnético] maior [dado por:]

$$\left(1 + \frac{2m}{Xr^3}\right) m .$$

Quando, ao contrário, duas *partículas de bismuto* estão situadas em uma linha reta *paralela* à direção da força de separação X , se o *momento diamagnético* correspondendo a essa força de separação for designado por $-\mu$ (o sinal negativo significa que para forças de separação direcionadas similarmente o momento diamagnético é oposto ao momento magnético), então para cada partícula resulta, a partir da atuação da outra [partícula], uma nova força de separação $-2\mu/r^3$, onde r denota a distância entre as partículas. Portanto, a força de separação *total* ($X - 2\mu/r^3$) corresponde a um momento diamagnético *diminuído* [dado por:]

$$- \left(1 - \frac{2\mu}{Xr^3}\right) \mu .$$

Há, portanto, *o contraste de que o magnetismo das partículas de ferro situadas na direção da força de separação é fortalecido pela interação, enquanto o diamagnetismo das partículas de bismuto situadas nesta direção é enfraquecido pela interação.*

O resultado é invertido quando as partículas de ferro e bismuto estão situadas em uma linha reta *perpendicular* à direção da força de separação. Nesse caso o *magnetismo* das partículas de ferro é *enfraquecido* pela interação entre elas, enquanto que, ao contrário, o *diamagnetismo* das partículas de bismuto é *fortalecido* através da interação. Encontramos, de fato, o *magnetismo enfraquecido* da partícula de ferro

$$= + \left(1 - \frac{m}{Xr^3}\right) m ,$$

e o *diamagnetismo fortalecido* da partícula de bismuto

$$= - \left(1 + \frac{\mu}{Xr^3}\right) \mu .$$

Disso segue o seguinte. Para fornecer o *magnetismo* mais intenso a uma dada massa de ferro através de uma força de separação dada, temos de colocá-la no formato de uma longa barra fina, e colocar seu comprimento paralelo à direção da força de separação. Ao contrário, para fornecer o *diamagnetismo* mais intenso a uma dada massa de bismuto, temos de colocá-lo no formato da placa mais fina possível, e colocar sua espessura paralela à direção da força de separação. O desenvolvimento adicional dessas leis da interação entre moléculas diamagnéticas, comparada com a interação entre moléculas magnéticas, leva finalmente a uma distinção simples entre substâncias magnéticas e diamagnéticas, que merece ser examinada mais cuidadosamente.

4.1.5 Distinção entre Corpos Magnéticos e Diamagnéticos, Através dos Valores Positivos e Negativos de uma Constante

Se nos restringirmos, por uma questão de unidade de tratamento, à consideração de um *elipsoide de revolução* de ferro ou bismuto, cujo eixo principal é paralelo à força de separação X , então Neumann¹⁵¹ provou para o *ferro* que o *momento magnético do elipsoide* é

¹⁵¹Ver a Nota de rodapé 109 na página 74.

$$= \frac{kvX}{1 + 4\pi kS} ,$$

onde v denota o volume e S uma grandeza deduzida a partir da razão entre os eixos do elipsoide, a saber,¹⁵²

$$S = \sigma (\sigma^2 - 1) \left\{ \frac{1}{2} \log \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} - \frac{1}{\sigma} \right\} ,$$

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{r^2}{\lambda^2}} ,$$

sendo r e $\sqrt{r^2 - \lambda^2}$ os eixos do elipsoide. k é suposto ter um valor constante para o ferro, que Neumann chama de *constante magnética do ferro*, e este valor constante é necessariamente positivo para o ferro, bem como para todos os outros materiais magnéticos.

Portanto, a grandeza k serve como uma marca distintiva das várias *substâncias magnéticas* pelos valores *positivos* diferentes que ela assume. Contudo, a utilização da grandeza k como um método de distinção pode ser tornado ainda mais geral ao aplicá-la a todos os corpos, e ao permitir que ela assumia valores negativos, sendo ligado a isso uma explicação física, a saber, que *um corpo que possui um valor negativo para k é um corpo diamagnético*. (Portanto, seria conveniente para esses corpos o nome *anti-magnético* ou *negativo-magnético*.) O valor negativo de k encontrado para um corpo *diamagnético* pode ser denominado de *constante magnética do corpo diamagnético*, ou podemos denominar o valor positivo obtido ao mudar o sinal como sendo a *constante diamagnética* do corpo. Ao denotar por h essa *constante diamagnética* que é *sempre positiva*, para distingui-la da *constante magnética* k que também é *sempre positiva*, obtemos, da mesma maneira como Neumann determinou o momento magnético de um elipsoide magnético, o *momento diamagnético de um elipsoide diamagnético*,

$$= -\frac{hvX}{1 - 4\pi hS} .$$

Agora para um *elipsoide infinitamente alongado*, para uma *esfera*, e para um *elipsoide infinitamente achatado*, obtemos sucessivamente:

$$S = 0 , \quad S = \frac{1}{3} , \quad S = 1 ;$$

portanto, os *momentos magnéticos* correspondentes são, sucessivamente,

$$+kvX , \quad +\frac{kvX}{1 + \frac{4}{3}\pi k} , \quad +\frac{kvX}{1 + 4\pi k} ;$$

os *momentos diamagnéticos* correspondentes são, ao contrário,

$$-hvX , \quad -\frac{hvX}{1 - \frac{4}{3}\pi h} , \quad -\frac{hvX}{1 - 4\pi h} .$$

Portanto, a forma *mais alongada* corresponde ao *diamagnetismo mais fraco*, a forma *mais achatada* ao *diamagnetismo mais forte*; exatamente o inverso em relação ao que vale para

¹⁵²O que Weber representa pelo símbolo “log” na próxima equação deve ser entendido como o logaritmo natural representado hoje em dia por “ln”.

o *magnetismo*, como provado anteriormente. Como, contudo, a *constante diamagnética* h possui em todos os corpos diamagnéticos um valor que quase desaparece em comparação com a unidade, o momento *diamagnético* de todos esses corpos pode, sem erro perceptível, ser considerado como independente de seus formatos; e pode ser colocado

$$= -h\nu X ;$$

e essa expressão pode ser comparada com aquela expressão já obtida para o *momento diamagnético* na qual as interações foram desprezadas. Colocando

$$v = \frac{m}{\rho} ,$$

onde m denota a massa e ρ a densidade do corpo, obtemos para o *momento diamagnético* a expressão

$$-\frac{h}{\rho} \cdot mX ,$$

em vez da expressão encontrada anteriormente,

$$-\frac{8\pi}{3c^2\varepsilon} \cdot \mu r^3 e \cdot mX .$$

Nos dois métodos o *momento diamagnético* é representado como o produto da massa m com a força de separação X , multiplicado com um *coeficiente constante*, o qual na última expressão consiste em dois fatores, a saber, o fator $8\pi/3c^2\varepsilon$, que pode ser obtido da *teoria geral da eletricidade*, e o fator $\mu r^3 e$, que depende da *natureza do corpo diamagnético*, o qual já foi denominado anteriormente de *constante diamagnética* do corpo. Esses dois fatores não estão separados [na grandeza] h/ρ ; de fato, [a grandeza] h/ρ não é nada mais do que o produto dos dois fatores anteriores.

A grandeza k é assumida aqui como *constante* (isto é, independente da intensidade da força de separação X), já que Neumann provou a partir da teoria dos fluidos magnéticos separáveis que ela tem de ser constante (isto é, independente da intensidade da força de separação X). Contudo, os resultados apresentados anteriormente são independentes dessa suposição e mantêm sua validade mesmo se um exame mais detalhado provar que k é uma função da força de separação X . Contudo, a partir desse exame vai seguir por si próprio que mesmo que k varie com X , ainda assim h possuirá *um valor constante* para cada corpo diamagnético.

Pela *teoria do diamagnetismo* aqui desenvolvida, a conhecida questão de saber *se os fluidos magnéticos realmente existem* pode agora ser decidida, como pode ser facilmente demonstrado.

4.1.6 Sobre a Existência dos Fluidos Magnéticos

Quando uma certa classe de ações de um corpo sobre outros corpos é caracterizada de tal forma que essas ações podem ser explicadas em termos de uma *distribuição ideal* de fluidos magnéticos sobre a superfície, então, para a *verdadeira condição interna do corpo*, podemos pensar em quatro possibilidades e assim quatro casos podem ser distinguidos, os quais foram apresentados e discutidos anteriormente. Dois desses casos estavam baseados na suposição da existência de *dois fluidos magnéticos*, seja localizados fixamente (com uma

separação *constante*) em moléculas que podem girar, ou podendo se deslocar (com uma separação *variável*) em moléculas que não podem girar. Os outros dois casos, por outro lado, baseavam-se na suposição de que *os dois fluidos elétricos que existem de acordo com a teoria da eletricidade*, estavam em uma trajetória circular definida em movimento de corrente *constante* em torno de cada molécula rotatória do corpo, ou em movimento de corrente *variável* em torno de cada molécula não rotatória. Esses quatro casos não se excluem mutuamente; pois é fácil perceber que uma porção dos fluidos magnéticos pode permanecer com uma separação constante em moléculas rotatórias, enquanto que é variável a separação da outra porção, e da mesma maneira uma parte da corrente elétrica em dadas trajetórias circulares ao redor de moléculas rotatórias pode ser constante, enquanto que em outra parte ao redor de moléculas não rotatórias pode variar de intensidade. De fato, em relação a essa última consideração, quando consideramos as diversas forças eletromotrizes que estão presentes, fica inconcebível a existência de uma corrente constante sem uma parte variável [da corrente], pois os fluidos elétricos, caso sejam *livres para se mover* em certas trajetórias, como é provado pela existência de correntes constantes, têm necessariamente de seguir a atuação das forças eletromotrizes decompostas na direção dessas trajetórias. Contudo, os quatro casos anteriores podem ser combinados aos pares em termos de *dois casos principais*, cada um dos quais, se realmente provado, faria o outro parecer uma hipótese bastante supérflua. Esses dois *casos principais* são os seguintes: (1) que *existem fluidos magnéticos* que podem se mover com as moléculas ou dentro delas; (2) que *os fluidos elétricos presentes em toda parte de acordo com a teoria da eletricidade, podem se deslocar sem resistência em certas órbitas circulares em torno das moléculas*.¹⁵³

Pode ser desenvolvida uma teoria para cada um desses dois casos principais, e cada uma dessas teorias pode ser dividida em duas partes, sendo que em uma parte coincidem os resultados das duas teorias, e em outra parte os resultados se contradizem. Essas teorias comportam-se como a *teoria de emissão* e a *teoria ondulatória* na óptica, que também coincidiam em muitos aspectos, até que a descoberta dos *fenômenos da interferência* levou a uma investigação mais detalhada daqueles pontos onde as teorias se contradiziam. Agora, embora as duas teorias que resultam da suposição de fluidos magnéticos e da suposição de correntes moleculares tenham até o momento exibido uma coincidência surpreendente em seus resultados, contudo poderia ser esperado que aqui, como na óptica, *a descoberta de uma nova classe de fenômenos* levaria a uma discussão mais detalhada dos pontos em que as duas teorias diferem entre si. De fato, as duas teorias coincidem, em primeiro lugar, em todos os fenômenos relacionados a *ímãs permanentes*; em segundo lugar, no aspecto de que cada teoria permite uma divisão dos ímãs variáveis em duas classes, a saber, na classe que deve seu magnetismo ao simples arranjo de moléculas rotatórias já existentes (ímãs moleculares ou correntes moleculares), e na classe que deve seu magnetismo à geração do movimento dos fluidos imponderáveis em moléculas imóveis (a separação dos fluidos magnéticos nas moléculas, ou a produção de correntes elétricas em trajetórias circulares definidas ao redor das moléculas); em terceiro lugar, as duas teorias concordam em seus resultados no que diz respeito à primeira classe de ímãs variáveis. Contudo, as duas teorias se contradizem nos resultados relacionados à segunda classe de ímãs variáveis, pois suas conclusões *sobre as posições dos polos* são opostas entre si. De acordo com uma teoria, as posições dos polos, na segunda classe de ímãs variáveis, têm de ser as mesmas que na primeira classe. De acordo com a outra teoria, as posições dos polos na segunda classe têm de ser invertidas em relação à primeira classe. Portanto, enquanto só fossem conhecidos ímãs variáveis nos quais as posições

¹⁵³Ver também a Nota de rodapé 111 na página 77.

dos polos (no caso de forças de separação igualmente direcionadas) fossem idênticas, as duas teorias poderiam ser aplicadas. Porém, tão logo os ímãs variáveis (diaímãs) foram descobertos, nos quais as posições dos polos (para forças de separação igualmente direcionadas) eram opostas entre si, não havia mais escolha a ser feita entre as duas teorias, pois apenas a segunda teoria consegue explicar a geração de duas classes de ímãs com polos inversamente situados, no caso em que atuam forças de separação igualmente direcionadas.

Portanto, os fenômenos diamagnéticos descobertos por Faraday¹⁵⁴ servem para decidir entre as duas teorias, assim como o fenômeno da interferência serviu para decidir entre a teoria de emissão e a teoria ondulatória. E esse é o aspecto mais importante e essencial que pode ser atribuído à descoberta de Faraday. *Através da descoberta do diamagnetismo fica corroborada a hipótese de correntes elétricas moleculares no interior dos corpos, sendo refutada a hipótese dos fluidos magnéticos no interior dos corpos.* — Esse resultado também é corroborado no exame mais direto e detalhado do magnetismo variável, a saber, na lei de acordo com a qual a intensidade do magnetismo variável é determinada a partir do valor da força de separação magnética ou eletromagnética; sendo que isso ainda merece uma melhor discussão aqui.

4.1.7 Dependência do Magnetismo Variável em Relação à Intensidade da Força de Separação Magnética ou Eletromagnética

De acordo com a teoria anterior do diamagnetismo, o momento diamagnético de um diaímã deve ser proporcional à intensidade da força de separação magnética ou eletromagnética. De acordo com a visão anteriormente assumida dos fluidos magnéticos móveis nas moléculas de ferro, a mesma proporcionalidade deveria ser aplicada ao momento magnético de um ímã variável. Contudo, se for rejeitada essa noção juntamente com a hipótese dos fluidos magnéticos no interior dos corpos e se, vem vez disso, for assumida a noção de Ampère de que as moléculas de ferro são portadoras giratórias de correntes moleculares permanentes, então vai seguir disso uma lei diferente para a dependência do magnetismo variável em relação à intensidade da força de separação magnética ou eletromagnética.

Seja NS na Figura 1 o eixo de uma *corrente molecular imutável*, que pode girar ao redor de seu centro C .

¹⁵⁴Ver a Nota de rodapé 15 na página 15.

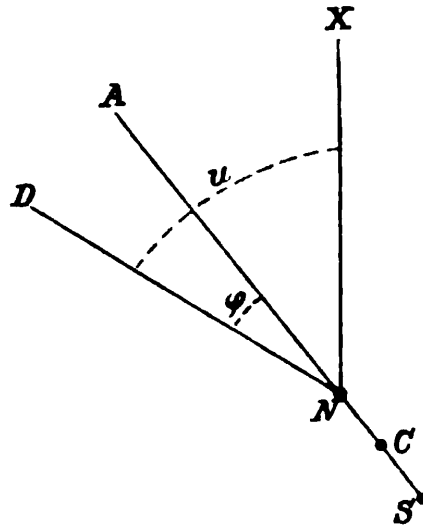


Fig. 1.

Seja a posição de equilíbrio desse eixo paralela a ND , quando a força de separação X é nula. O fato de que, no caso do ferro doce, o magnetismo produzido por uma força de separação que atua sobre o ferro desaparece por si só assim que a força de separação deixa de atuar, prova que a corrente molecular, em cuja rotação o magnetismo produzido se baseia, é automaticamente conduzida de volta à sua orientação original, paralela a ND . No entanto, essa força motriz, que se baseia na interação das moléculas de ferro, deve crescer com a deflexão AND e pode ser representada por

$$D \sin \varphi ,$$

onde D denota uma grandeza constante, que pode ser chamada de *força diretriz molecular*.¹⁵⁵ Se agora, além dessa força diretriz molecular, atuar na corrente molecular a força de separação X na direção NX , que forma o ângulo $XND = u$ com a direção da força diretriz, a corrente molecular vai ser girada ou defletida pelo ângulo $AND = \varphi$, e para a determinação da nova orientação de equilíbrio temos a seguinte equação:

$$X \sin u \cos \varphi = (D + X \cos u) \sin \varphi ,$$

ou

$$\tan \varphi = \frac{X \sin u}{D + X \cos u} .$$

A partir da deflexão φ pode ser determinado o aumento do momento magnético da corrente molecular decomposto na direção da força X . Se o momento magnético total imutável da corrente molecular for representado por μ , então ele estava decomposto na direção da força X antes da deflexão como

$$= \mu \cos u ,$$

depois da deflexão [ficou como:]

¹⁵⁵Ver a Nota de rodapé 122 na página 87.

$$= \mu \cos(u - \varphi) ,$$

portanto, o aumento x procurado é dado por:

$$x = \mu (\cos(u - \varphi) - \cos u) .$$

Substituindo aqui para φ seu valor dado pela equação anterior,

$$\tan \varphi = \frac{X \sin u}{D + X \cos u} ,$$

obtemos:

$$x = \mu \left\{ \frac{X + D \cos u}{\sqrt{X^2 + D^2 + 2XD \cos u}} - \cos u \right\} .$$

Para um sistema de correntes moleculares cujos eixos, em suas orientações originais de equilíbrio, apontam em todas as direções sem preferência alguma, o número de correntes moleculares cujos eixos formam um ângulo u com a direção NX da força X tem de ser colocado proporcional a $\sin u$. Agora deve ser determinado o momento magnético y , que resulta da rotação de todas as correntes moleculares do sistema pela força X .

Com essa finalidade, seja o valor de x encontrado anteriormente multiplicado por $\sin u du$, e seja a integral obtida entre os limites $u = 0$ e $u = \pi$. Esse valor integral, multiplicado pelo número n de correntes moleculares e dividido por

$$\int_0^\pi \sin u du = 2 ,$$

fornece o *momento [magnético]* y :

$$y = \frac{n}{2} \int_0^\pi x \sin u du .$$

Ao fazer a integração obtemos para y a seguinte expressão:¹⁵⁶

$$y = n\mu \frac{X}{\sqrt{X^2 + D^2}} \cdot \frac{X^4 + \frac{7}{6}X^2D^2 + \frac{2}{3}D^4}{X^4 + X^2D^2 + D^4} .$$

A força que atuou sobre o ferro, e pela qual foi gerado o momento [magnético] y , era $= X$. Se n denotar o número de correntes moleculares na *unidade de volume*, então a razão do momento y para a força X , na teoria das correntes moleculares giratórias, tem o mesmo significado que a constante magnética que Neumann denominou de k na teoria dos fluidos

¹⁵⁶[Nota de Heinrich Weber:] W. Weber melhorou posteriormente a próxima expressão para y com as seguintes palavras (Berichte über die Verhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Klasse, ano de 1852, pág. 164):

Na pág. 572, linha 22 do artigo anterior sobre *Medições Eletrodinâmicas* no primeiro volume dos *Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften*, foi usada uma aproximação para y , em vez de uma expressão precisa. Corrijo esse descuido observando que ele não tem influência apreciável sobre os dados numéricos deduzidos a partir dele. De fato, o valor preciso para y para todos os valores de X que são menores do que D é $y = \frac{2}{3}n\mu \frac{X}{D}$, e para todos os valores de X que são maiores do que D obtemos $y = n\mu \left(1 - \frac{1}{3} \frac{D^2}{X^2}\right)$.

magnéticos separáveis. Portanto, ao substituir no lugar de k na fórmula de Neumann dada anteriormente, $kvX/(1 + 4\pi kS)$, o valor variável y/X que acabou de ser encontrado, encontraremos o momento magnético procurado de um ímã variável no formato de um elipsoide de revolução ao qual se refere a fórmula de Neumann,

$$= \frac{vy}{1 + 4\pi S \frac{y}{X}},$$

onde S denota o fator já determinado que depende da razão entre os eixos.

Esse resultado obtido *da dependência do magnetismo variável em relação à intensidade da força de separação magnética ou eletromagnética*, deduzido a partir do ponto de vista de Ampère, que está em contradição com aquele resultado usualmente assumido, é corroborado de fato pelas experiências descritas por Müller nos *Annalen* de Poggendorff, 1851, Vol. lxxxii, pág. 181.^{157,158}

4.2 Experiências

Após terem sido apresentados na Seção anterior sob o título de uma teoria, para uma visão mais fácil, os resultados obtidos sobre a ligação entre a teoria do diamagnetismo e a teoria do magnetismo e da eletricidade, esta Seção conterá agora um breve relato das experiências realizadas em apoio a esses resultados.

4.2.1 Eletrodiamagnetismo e Medição do Momento [Magnético] de um Eletrodiaímã

O arranjo mais conveniente de um *aparelho de medição eletrodiamagnético* para a observação da *polaridade diamagnética* consiste em uma espiral galvânica¹⁵⁹ que é colocada na vertical e simetricamente entre os dois polos de uma agulha magnética curvada no *formato de uma ferradura*. Na Figura 2, [a letra] A representa a seção transversal da bobina, que está simetricamente colocada entre os polos N e S da agulha magnética em *forma de ferradura* NBS .

¹⁵⁷[Nota de Heinrich Weber:] *Annalen der Physik und Chemie*, editado por C. J. Poggendorff.

¹⁵⁸[Mül50] e [Mül51b].

¹⁵⁹Isto é, uma bobina ou solenoide finito.

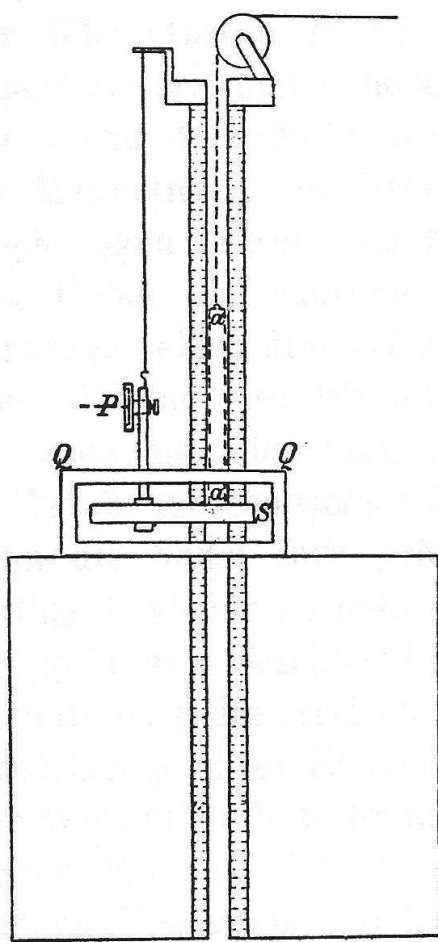


Fig. 3.

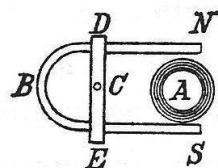


Fig. 2.

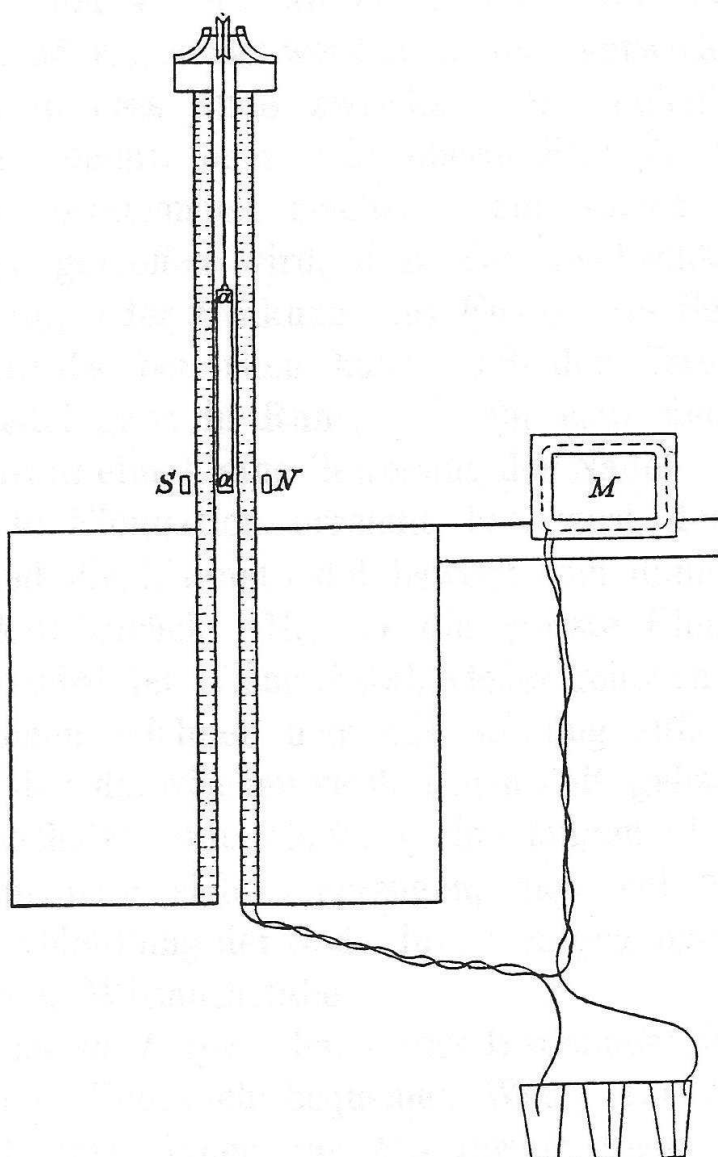


Fig. 4.

Essa agulha magnética é presa pela braçadeira DE , sendo que o fio de suspensão é preso em seu centro C . As Figuras 3 e 4 apresentam duas visões laterais do instrumento.

É vantajoso fornecer à bobina um comprimento considerável, digamos de 400 a 500 milímetros. Isso torna mais fácil regular a suspensão da agulha de tal forma que ela oscile no plano horizontal que divide ao meio o comprimento da bobina,¹⁶⁰ sendo que nessa situação nenhum torque é exercido sobre a agulha quando a corrente flui pela bobina. Contudo, caso exista um pequeno torque, isso pode ser facilmente compensado por um multiplicador M (Figura 4) consistindo em algumas espiras,¹⁶¹ através do qual é conduzida a mesma corrente e que é colocado a uma distância conveniente da agulha magnética. Para observar a agulha magnética, é necessário fornecer-lhe um espelho P , Figura 3, e observar nele com

¹⁶⁰Em alemão: *Nadel*. Esse foi um lapso de Weber. Certamente ele está se referindo aqui à espiral galvânica (bobina ou solenoide), e não à agulha magnética. Por esse motivo coloquei na tradução “bobina” em vez de “agulha”.

¹⁶¹Ver a Nota de rodapé 44 na página 33.

um telescópio a reflexão de uma escala distante. Além disso, a agulha magnética é cercada por um amortecedor *QQ* (Figura 3). A barra de bismuto *aa* (Figuras 3 e 4) é suspensa verticalmente por um filamento dentro da bobina. Ela pode ser levantada ou abaixada, de tal forma que sua extremidade inferior ou superior fique entre os polos da agulha magnética, como representado nas Figuras 3 e 4. As observações são feitas mais convenientemente por meio de um arranjo de polias e alavancas que permitem que o próprio observador, enquanto está colocado ao lado do telescópio, possa levantar ou abaixar a barra de bismuto. Quando o circuito está fechado e a agulha magnética está completamente em repouso, a barra de bismuto é levantada, sendo então observado o pequeno movimento da agulha. Tão logo a agulha tenha alcançado sua máxima elongação, a barra de bismuto é novamente abaixada, a agulha magnética desloca-se então de volta com velocidade aumentada. Quando é alcançada a máxima elongação desse lado, a barra de bismuto é novamente levantada, e assim por diante. Entre cada duas elongações é observada a posição da barra de bismuto. Se a barra de bismuto for trocada por uma barra de ferro de mesmo comprimento, mas muito fina, o observador pode se convencer que quando as posições das barras são as mesmas, as deflexões da agulha produzidas pelo ferro e pelo bismuto possuem direções opostas.

O Sr. Leyser,¹⁶² mecânico *em Leipzig*, construiu esse instrumento da maneira mais simples e conveniente (por 25 táleres¹⁶³ sem o telescópio). Ele merece ser particularmente recomendado por sua aplicabilidade a essa experiência fundamental sobre polaridade diamagnética. O Sr. Leyser comunicou-me o seguinte em relação aos resultados de certas experiências feitas por ele e pelo Prof. Hankel¹⁶⁴ no Instituto de Física de Leipzig:

Foi utilizada uma corrente produzida por quatro elementos de Grove¹⁶⁵ e o ímã foi mantido em sua posição original por meio de um multiplicador colocado na lateral, o que foi conseguido dentro de 1 a 1,5 partes da escala. O bismuto era puro quimicamente e foi suspenso de tal forma que ele podia ser levantado ou abaixado por meio de um filamento, sem agitar nem um pouco o ímã.

Observações do Leyser:

Posição do ímã sem corrente	492,0.
<i>Com corrente</i> , bismuto no centro	493,5,
<i>com corrente</i> , bismuto acima	490,8,
<i>com corrente</i> , bismuto abaixo	499,8,
<i>com corrente</i> , bismuto acima	491,1,
<i>com corrente</i> , bismuto no centro	493,8.

Disto se segue, de acordo com todos os outros experimentos feitos de maneira semelhante, que quando o bismuto foi *puxado para cima* (do meio para *o topo*) a posição de repouso do ímã foi deslocada para números *menores*, e quando foi *abaixado* (do meio para *a base*) a posição de repouso foi deslocada para números *maiores*. A diferença entre [as posições] *inferior* e *superior* foi de

+8,9 divisões da escala.

¹⁶²Georg Moritz Ludwig Leyser (1816-1881).

¹⁶³O táler foi uma moeda de prata usada na Europa por quase quatrocentos anos. Seu nome sobreviveu em várias moedas contemporâneas, tais como o dólar.

¹⁶⁴Wilhelm Gottlieb Hankel (1814-1899).

¹⁶⁵Ver a Nota de rodapé 29 na página 20.

<i>Sem corrente</i> , bismuto no centro	492,0,
<i>sem corrente</i> , bismuto acima	497,2,
<i>sem corrente</i> , bismuto abaixo	490,2,
<i>sem corrente</i> , bismuto acima	498,2,
<i>sem corrente</i> , bismuto no centro	490,0.

Observamos aqui que *sem corrente* a ação é oposta em relação àquela exibida quando está presente uma corrente; a diferença entre [as posições] *superior* e *inferior* sendo de

−7,5 divisões da escala.

Observações do Prof. Hankel:

Posição do ímã <i>sem corrente</i>	496,5.
<i>Com corrente</i> , bismuto acima	492,1,
<i>com corrente</i> , bismuto abaixo	500,7,
<i>com corrente</i> , bismuto acima	491,6,
<i>com corrente</i> , bismuto no centro	497,7.

Portanto, a diferença entre [as posições] *superior* e *inferior* foi de

+8,9 divisões da escala.

<i>Sem corrente</i> , bismuto no centro	497,5,
<i>sem corrente</i> , bismuto acima	503,5,
<i>sem corrente</i> , bismuto abaixo	498,0,
<i>sem corrente</i> , bismuto acima	502,6,
<i>sem corrente</i> , bismuto no centro	494,8.

A diferença entre [as posições] *superior* e *inferior* nesse caso foi de

−5,0 [partes da escala].

A barra de bismuto foi então invertida e a mesma ação exibida, a saber,

Posição do ímã <i>sem corrente</i>	500,0.
<i>Com corrente</i> , bismuto acima	497,3,
<i>com corrente</i> , bismuto abaixo	507,1,
<i>com corrente</i> , bismuto acima	498,0.

Sendo portanto a diferença entre [as posições] *superior* e *inferior* de

+9,4 [divisões da escala].

Quando, em vez de determinar a posição de repouso, foram observadas as elongações, enquanto que o arco de oscilação foi *multiplicado* através da elevação e descida alternadas da barra de bismuto no meio de cada oscilação, obtiveram-se então os seguintes resultados:

	Elongação	Arco de oscilação
<i>Com corrente, bismuto no centro</i>	500,0	
<i>Com corrente, bismuto acima</i>	497,0	3,0
<i>Com corrente, bismuto abaixo</i>	513,0	16,0
<i>Com corrente, bismuto acima</i>	481,5	31,5
<i>Com corrente, bismuto abaixo</i>	515,5	34,0
<i>Com corrente, bismuto acima</i>	476,5	39,0
<i>Com corrente, bismuto abaixo</i>	520,3	43,8
<i>Com corrente, bismuto acima</i>	473,0	47,3
<i>Com corrente, bismuto abaixo</i>	522,0	49,0
<i>Com corrente, bismuto acima</i>	471,0	51,0
<i>Com corrente, bismuto abaixo</i>	526,0	55,0
<i>Com corrente, bismuto acima</i>	468,5	57,5

Uma pequena barra de ferro, suspensa no lugar do bismuto, quando situada acima, fez com que o ímã se deslocasse para números *maiores*, e quando situada abaixo fez com que ele se deslocasse para números *menores*; o mesmo foi observado quando a barra de ferro foi invertida. O suporte do instrumento deve ser muito pesado e uma pedra serpentina é muito adequada; o bismuto deve ser muito fácil de mover e o fio de cobre deve ser puro. Em todas as observações foi encontrado que aplicando quatro elementos de Grove, quando o bismuto foi *levantado*, a impulsão chegou de 8,9 a 9,4 divisões da escala, a direção sendo para os números menores, enquanto que um fino fio de ferro sob as mesmas condições fez com que o ímã se deslocasse em direção a números *maiores*; além disso, que o bismuto *sem uma corrente* atuou como um fio de ferro, e ocasionou um movimento de 5 a 7,5 divisões da escala. Se levamos em consideração essa última influência, então *a deflexão diamagnética do bismuto* pela aplicação de quatro elementos de Grove é encontrada como sendo = 15,4 divisões da escala. Pela multiplicação, porém, o arco de oscilação poderia ser aumentado para 57,5 divisões da escala e mantido neste tamanho, uma vez que o efeito do amortecedor de cobre que envolvia o ímã mantinha a ação diamagnética em equilíbrio.

A seguinte série de experiências foi feita com um instrumento um pouco diferente daquele que acabou de ser descrito; contudo, uma descrição específica é desnecessária, já que a diferença não exerce influência particular.

<i>Experiências com Bismuto</i>					
Número da oscilação	Posição do bismuto durante a oscilação	Posição da agulha no início ou no fim de cada oscilação	Arco de oscilação da agulha	Arco de oscilação reduzido	Valor médio
1.	acima	500,0	−40,0	−63,4	−61,8
2.	abaixo	467,0	−50,4	−66,6	
3.	acima	513,9	−56,3	−67,1	
4.	abaixo	459,9	−58,5	−65,5	
5.	acima	518,5	−55,2	−59,4	
6.	abaixo	460,0	−46,5	−48,8	
7.	acima	512,0	±29,7		
8.		471,1	±7,0		
9.	abaixo	489,7	−8,9		
10.	acima	494,2	−15,6		
11.	abaixo	480,9	−30,0	−47,5	−59,8
12.	acima	498,9	−50,4	−66,6	
13.	abaixo	457,0	−57,8	−68,5	
14.	acima	516,0	−50,9	−56,8	
15.	abaixo	459,3	±35,6		
16.		504,4	±12,4		
17.	acima	478,3	−14,7		
18.	abaixo	476,9	−36,6		
19.	acima	504,9	−42,6	−67,5	
20.	abaixo	459,6	−39,6	−52,3	
21.	acima	499,4	−46,6	−55,5	−56,1
22.	abaixo	460,1	−51,7	−57,9	
23.	acima	513,9	−45,9	−49,4	
24.	abaixo	464,2	−50,6	−53,1	
25.	acima	506,2	−55,2	−57,0	

Experiências com Bismuto					
Número da oscilação	Posição do bismuto durante a oscilação	Posição da agulha no início ou no fim de cada oscilação	Arco de oscilação da agulha	Arco de oscilação reduzido	Valor médio
26.	abaixo	446,9	$\mp 44,5$		$-55,8$
27.		498,0	$\pm 15,5$		
28.	acima	460,0	$-16,8$	$-63,9$	
29.		453,1	$-29,8$		
30.	abaixo	479,8	$-40,3$	$-60,2$	
31.		446,9	$-46,0$		
32.	acima	494,6	$-42,2$	$-50,0$	
33.		450,4	$-44,0$		
34.	abaixo	490,5	$-49,3$		
		442,6			

Estão anotadas na *terceira* coluna dessa Tabela as posições da agulha observadas no início e no final de cada oscilação; na *quarta* coluna os arcos de oscilação correspondentes (a média entre cada dois arcos sucessivos). Um sinal *positivo* antes do arco de oscilação denota que quando a posição do bismuto estava *acima*, a agulha ia de números menores para maiores, ou quando o bismuto estava *abaixo*, de números maiores para menores; vale o inverso para o sinal *negativo*. Após a posição do bismuto ter sido regularmente modificada várias vezes ao final de cada oscilação, e ter quase sido alcançado o limite do arco de oscilação, foi ocasionada uma interrupção ao permitir que o bismuto permanecesse imóvel durante duas oscilações, sendo então modificado regularmente como antes. O arco de oscilação *negativo* foi dessa forma convertido repentinamente em um arco *positivo* que, contudo, logo diminuiu para zero, e logo em seguida passou para um arco *negativo*; a deflexão causada pelo bismuto (em suas posições superior e inferior) era exibida aqui mais claramente. Quando os arcos de oscilação são contados a partir daquele que está mais próximo de zero, o arco mais próximo do limite pode, por meio do conhecido *decremento logarítmico*, ser facilmente reduzido ao *valor limite*, e assim pode ser encontrado um valor médio mais preciso para esse último [valor limite]. Para essa finalidade, temos apenas de dividir por $(1 - (2/3)^n)$ o valor observado do n -ésimo arco de oscilação nas experiências anteriores, nas quais o *decremento logarítmico* era aproximadamente $= \log \frac{3}{2}$. Obtemos assim os valores reduzidos exibidos na *quinta* coluna, e os valores médios deduzidos desse último valor na *sexta* coluna. A partir de todas as observações consideradas em conjunto, encontramos o valor limite como sendo

$$x = -58,4 .$$

A partir desse valor limite do arco de oscilação, pode ser deduzida a deflexão E correspondendo à posição de equilíbrio da agulha, a saber, $E = -5,93$; ou, considerando a média das várias séries de experiências feitas por diferentes observadores,

$$E = -5,17 ,$$

enquanto que para uma barra de ferro com peso 59200 vezes menor o mesmo valor, determinado por experimentos semelhantes, foi

$$E' = +128,4 .$$

Aprendemos disso, por redução ao mesmo peso, que o diamagnetismo do bismuto é 1 470 000 vezes menor do que o magnetismo do ferro. Contudo, esse resultado só é válido para um formato particular da barra de ferro e para uma determinada intensidade da força de separação atuando sobre o ferro, a saber, $X = 629,9$, que foi obtida a partir da medida da intensidade de corrente e dos enrolamentos da espiral eletromagnética.

4.2.2 Diamagnetoelétricidade e Medição das Correntes Elétricas Induzidas Diamagneticamente

O aparelho de indução diamagnética a ser descrito primeiro é configurado de tal forma que a indução é produzida apenas *pelo movimento do corpo diamagnético*, enquanto que a bobina *permanece parada*, e o diamagnetismo do corpo *permanece inalterado*; dessa maneira é evitada a formação das correntes galvânicas no bismuto [comportando-se] *como um condutor* que, de outra forma, produziriam ações por indução secundária que poderiam facilmente ser confundidas com as ações da indução diamagnética. A construção prática de tal *instrumento de indução diamagnética* baseia-se na utilização de uma espiral galvânica, por meio de cuja *força de separação eletromagnética*, como já observado, uma haste de bismuto em seu centro pode ser *diamagnetizada uniformemente e deslocada dentro de certos limites sem sofrer qualquer alteração na intensidade de seu diamagnetismo*.

4.2.3 O Eletrodiaímã Utilizado para a Indução Diamagnética

O eletrodiaímã utilizado para a indução diamagnética consistia em uma barra de bismuto colocada em um longo fio espiral, *Acccc*, Figura 5, através do qual fluía uma corrente de oito células voltaicas de Bunsen de carvão-zinco.¹⁶⁶ A barra de bismuto tinha 186 milímetros de comprimento e pesava 339 300 miligramas. A bobina consistia em um fio de cobre coberto com lã e guta-percha; o fio de cobre puro tinha 2,3 milímetros de espessura e formava oito camadas, uma sobre a outra, cada uma delas sendo composta de 120 espiras. A bobina inteira tinha 383 milímetros de comprimento, um diâmetro interno de 23,9 milímetros, e um diâmetro externo de 70 milímetros.

¹⁶⁶Em alemão: *Bunsen'schen Kohlenzinkbechern*. Ver a Nota de rodapé 41 na página 31.

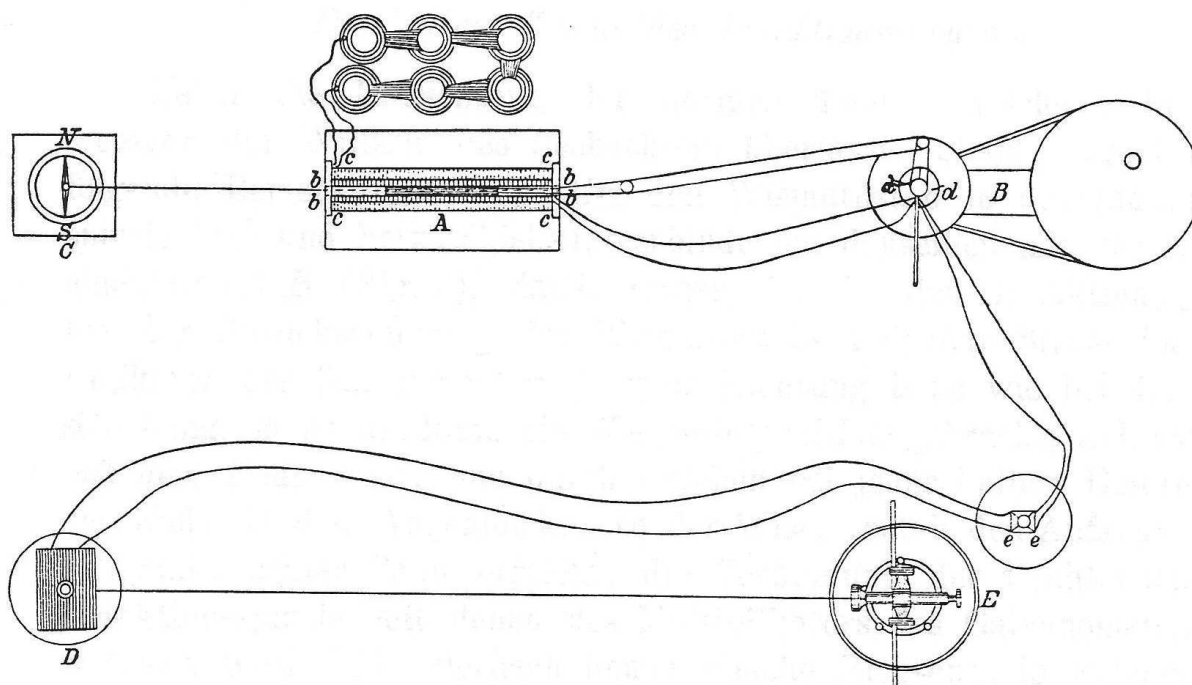


Fig. 5.

4.2.4 A Bobina de Indução

A bobina de indução,¹⁶⁷ *Abbbb*, Figura 5, é aquela [bobina] na qual é para ser induzida uma corrente [ocasionada] *pelo movimento do eletrodiâimã*. A espiral precisa ser cuidadosamente isolada em relação à espiral que pertence ao eletrodiâimã, através da qual flui a corrente [vindo] da bateria galvânica, e tem de ser conectada com um multiplicador, por meio do qual a corrente induzida pode ser observada. Essa espiral consistia em um fio de cobre com 1 milímetro de espessura coberto com seda, formando três camadas, cada uma contendo 294 espiras; o comprimento da espiral era de 383 milímetros, o diâmetro interno tinha 19 [mm], e o externo 23 milímetros. Coberta com guta-percha para obter um melhor isolamento, ela era colocada dentro do tubo mais largo da espiral do eletrodiâimã, ou melhor, essa última espiral foi enrolada ao redor dela.

O ponto mais essencial a ser considerado com esta espiral é que ela deve ser dividida ao longo de seu comprimento em duas metades enroladas de forma bastante simétrica, ou seja, o fio não é enrolado continuamente na mesma direção ao longo de todo o seu comprimento, mas a espiral é dividida em duas metades enroladas opostamente. Isso é necessário para que uma corrente seja induzida pelo movimento de uma barra diamagnética de bismuto nessa espiral, ou pelo movimento de uma barra magnética de ferro. Pois se as duas metades da espiral fossem enroladas na mesma direção e se essa barra indutora fosse colocada no centro e se deslocasse, então a força de indução exercida por sua extremidade Norte em uma metade da espiral seria exatamente oposta à força indutora exercida por sua extremidade Sul na outra metade, e o efeito de ambas se anularia. O seu enrolamento oposto faz com que as duas forças de indução não se anulem, mas sejam *duplicadas*.

Esse arranjo que é necessário para as finalidades de indução apresenta uma vantagem importante no que diz respeito à realização prática das experiências. É claro que a corrente

¹⁶⁷Ver a Nota de rodapé 53 na página 38.

da bateria galvânica, desde que seja *constante* na espiral do eletrodiaímã, não pode exercer ação indutiva sobre a espiral de indução; contudo, a menor alteração de sua intensidade seria suficiente para induzir na espiral de indução uma corrente muito mais forte do que a corrente induzida diamagneticamente e que, portanto, impediria a observação dessa última corrente. Contudo, é claro que o mesmo arranjo da espiral de indução por meio do qual garantimos que a indução diamagnética nas duas metades terão um poder dobrado, também ocasiona a destruição mútua das correntes excitadas nas duas metades da espiral de indução pela corrente galvânica; de tal forma que se for perfeita a simetria das duas metades, a maior mudança de intensidade da corrente não produz qualquer efeito. Em relação a isso podemos acrescentar, em primeiro lugar, que é muito fácil provar se essa compensação existe de fato ao ocasionar, em vez de pequenas mudanças de intensidade, uma interrupção ou inversão de toda a corrente; em segundo lugar, que mesmo que essa compensação não seja completa, é muito fácil torná-la perfeita ao enrolar uma extremidade da espiral de indução uma vez ou algumas vezes ao redor da extremidade da espiral do eletrodiaímã. Dessa maneira fica fácil livrar a indução diamagnética de toda influência externa.

4.2.5 As Outras Partes do Aparelho de Indução

Com relação ao arranjo das partes restantes, que são deixadas mais ou menos a critério do observador, gostaria de fazer as seguintes observações. Para mover a barra de bismuto para frente e para trás na espiral de indução, conecto-a com uma manivela ligada à roda *B*, Figura 5. Para fazer com que a corrente excitada na espiral de indução pelo movimento para frente do bismuto tenha a mesma direção através do multiplicador que a corrente excitada por seu movimento para trás, um comutador *dd* é ligado à roda, movendo-se juntamente com ela, e por meio do qual a conexão das extremidades da espiral com o fio do multiplicador é invertida ao final de cada semi-revolução (no instante em que o bismuto alcança o início ou o fim de sua trajetória). A direção uniforme de todas as correntes induzidas através do multiplicador seria seguida por uma deflexão uniforme da agulha para o mesmo lado. Para permitir que o observador produza uma deflexão para o outro lado, é colocado um segundo comutador, *ee*, Figura 5, junto ao telescópio *E*, que pode ser mudado pelo próprio observador, e que pode ser denominado de *comutador auxiliar*. Os seguintes aspectos precisam ser particularmente observados, em primeiro lugar, que a indução tem de ser ampliada ao aumentar a velocidade da roda, em vez de aumentar a trajetória percorrida pelo bismuto; em segundo lugar, para que não sejam geradas correntes termomagnéticas ao girar o comutador, ele tem de ser arranjado de tal forma que apenas metais do mesmo tipo se atritem entre si. A influência de tais correntes, quando muito fracas, pode ser prontamente eliminada ao combinar convenientemente as observações. Finalmente, para obter uma ideia aproximada da intensidade da corrente galvânica, uma bússola comum é colocada a uma distância apropriada da espiral do eletrodiaímã, de tal forma que possa ser medida convenientemente a deflexão [da agulha da bússola ocasionada] pela corrente fluindo pela espiral.

Os experimentos começaram, em primeiro lugar, com a corrente na direção *normal*, girando o comutador rotativo e simultaneamente empurrando a haste de bismuto para frente e para trás na bobina de indução. Para cada elongação da agulha galvanométrica, o observador alterava o comutador auxiliar, até que o arco de oscilação assim multiplicado se aproximasse de seu valor limite. Em segundo lugar, a mesma série de experiências era então feita com a direção *invertida* da corrente. Em terceiro lugar, com a corrente novamente na direção *normal*. Em quarto lugar, com a corrente *invertida*. E, finalmente, em quinto lugar, mais

uma vez com a corrente *normal*. Em sexto lugar, a barra de bismuto era trocada por uma *barra de ferro fina*, e sua indução medida da mesma maneira, com a corrente direcionada *normalmente*.

1. Indução da <i>Barra de Bismuto com uma Corrente Normal</i>						
Número da oscilação	Posição do comutador auxiliar	Posição da agulha no início e no fim de cada oscilação	Arco de oscilação da agulha	Arco de oscilação reduzido	Valor médio	Deflexão da bússola
1.	—	475,3				
2.	+	472,8	+ 3,70			
3.	—	477,7	+ 5,40			
4.	+	471,8	+ 6,80			
5.	—	479,5	+ 8,35			
6.	+	470,5	+ 9,65			
7.	—	480,8	+ 10,55			
8.	+	470,0	+ 11,40	+ 13,20		
9.	—	482,0	+ 12,25	+ 13,65		
10.	+	469,5	+ 12,70	+ 13,75	+ 13,60	32° 10' para Oeste
11.	—	482,4	+ 13,00	+ 13,80		
		469,3				

2. Com uma Corrente <i>Invertida</i>						
Número da oscilação	Posição do comutador auxiliar	Posição da agulha no início e no fim de cada oscilação	Arco de oscilação da agulha	Arco de oscilação reduzido	Valor médio	Deflexão da agulha
1.	+	503,5				
		515,9	+ 9,50			
2.	—	509,3	+ 3,65			
3.	+	510,0	—1,25			
4.	—	513,2	—4,75			
5.	+	506,9	—7,35			
6.	—	515,3	—8,90			
7.	+	505,9	—9,60	—14,12		
8.	—	515,7	—9,95	—13,10	—13,08	31° 50'
9.	+	505,6	—9,85	—12,02		para Leste
10.	—	515,2				

3. Com uma Corrente <i>Normal</i>						
Número da oscilação	Posição do comutador auxiliar	Posição da agulha no início e no fim de cada oscilação	Arco de oscilação da agulha	Arco de oscilação reduzido	Valor médio	Deflexão da bússola
1.	+	480,5				
2.	–	471,0	–7,15			
3.	+	475,8	–2,80			
4.	–	475,0	+ 0,85			
5.	+	472,5	+ 3,80			
6.	–	477,6	+ 6,25			
7.	+	470,2	+ 8,05			
8.	–	478,9	+ 9,25			
9.	+	469,1	+ 10,00	+ 13,17		
10.	–	479,3	+ 10,75	+ 13,12	+ 13,06	31° 48' para Oeste
11.	+	468,0	+ 11,30	+ 13,08		
12.	–	479,3	+ 11,30	+ 12,88		
		468,0				

4. Com uma Corrente <i>Invertida</i>						
Número da oscilação	Posição do comutador auxiliar	Posição da agulha no início e no fim de cada oscilação	Arco de oscilação da agulha	Arco de oscilação reduzido	Valor médio	Deflexão da bússola
1.	+	501,5				
		515,0	+ 10,15			
2.	–	508,2	+ 4,30			
3.	+	510,0	–0,05			
4.	–	511,9	–3,40			
5.	+	507,0	–5,60			
6.	–	513,3	–7,25			
7.	+	505,1	–8,65			
8.	–	514,2	–9,65			
9.	+	504,0	–10,10	–12,33		
10.	–	514,0	–10,55	–12,21		
11.	+	502,9	–11,00	–12,25		
12.	–	513,8	–11,30	–12,24	–12,16	32° 13' para Leste
13.	+	502,1	–11,45	–12,15		
14.	–	513,3	–11,25	–11,76		
15.	+	502,0				

5. Com uma Corrente <i>Normal</i>						
Número da oscilação	Posição do comutador auxiliar	Posição da agulha no início e no fim de cada oscilação	Arco de oscilação da agulha	Arco de oscilação reduzido	Valor médio	Deflexão da bússola
1.	+	486,0				
2.	–	461,0	–20, 40			
3.	+	476,8	–12, 40			
4.	–	467,8	–6, 15			
5.	+	471,1	–1, 25			
6.	–	471,9	+ 2,75			
7.	+	467,2	+ 5,75			
8.	–	474,0	+ 7,10			
9.	+	466,6	+ 7,30			
10.	–	473,8	+ 7,75			
11.	+	465,5	+ 8,90	+ 10,86		
12.	–	475,0	+ 9,70	+ 11,23		
13.	+	465,1	+ 10,05	+ 11,20		
14.	–	475,3	+ 10,25	+ 11,10	+ 10,95	31° 39' para Oeste
15.	+	465,0	+ 10,15	+ 10,77		
16.	–	475,0	+ 10,10	+ 10,56		
		464,8				

6. Indução da <i>Barra de Ferro</i> com uma Corrente <i>Normal</i>						
Número da oscilação	Posição do comutador auxiliar	Posição da agulha no início e no fim de cada oscilação	Arco de oscilação da agulha	Arco de oscilação reduzido	Valor médio	Deflexão da bússola
1.	+	461,0				
2.	—	457,2	—15,30			
3.	+	484,0	—33,65			
4.	—	443,5	—45,60			
5.	+	494,2	—54,95			
6.	—	435,0	—62,20			
7.	+	500,2	—67,45			
8.	—	430,5	—71,50	—84,98		
9.	+	503,8	—74,50	—84,60		
10.	—	428,1	—76,90	—84,47		
11.	+	506,2	—78,60	—84,28		
12.	—	427,1	—79,90	—84,16		
13.	+	507,8	—80,85	—84,04	—83,876	31° 48' para Oeste
14.	—	426,8	—81,10	—83,50		
15.	+	508,0	—81,30	—83,10		
16.	—	426,6	—81,50	—82,85		
17.	+	508,2	—81,75	—82,78		
		426,3				

Se denotarmos a influência muito pequena exercida pela corrente termomagnética sobre o resultado por $x, x^I, x^{II}, x^{III}, x^{IV}$, e se desprezarmos as diferenças menores $x - x^I, x^I - x^{II}, x^{II} - x^{III}, x^{III} - x^{IV}$, obteremos os seguintes resultados para o valor limite correspondendo apenas à *indução diamagnética*, reduzida à direção *normal*:

de	1	$+13,60 + x$	$+ 13,34$	na média $+ 12,644$.
	2	$+13,08 - x^I$	$+ 13,07$	
	3	$+13,06 + x^{II}$	$+ 12,61$	
	4	$+12,16 - x^{III}$	$+ 11,555$	
	5	$+10,95 + x^{IV}$		

A partir desse valor limite do arco de oscilação produzido pela distribuição uniforme dos impulsos indutivos¹⁶⁸ (produzidos pelo movimento do bismuto para frente e para trás) ao longo de todo o período de oscilação encontrado da agulha, é fácil deduzir o valor limite que teria correspondido a uma concentração de todos os impulsos indutivos durante um período de oscilação no centro do período de oscilação. Com essa finalidade o valor do arco de oscilação encontrado anteriormente, $= +12,644$, tem de ser multiplicado por $\pi/2$,¹⁶⁹ ou mais precisamente, levando em consideração a influência do amortecimento, por 1,574235, sendo que dessa forma obtemos o valor limite desejado, [a saber:]

$$= +19,905 .$$

Para a barra de ferro (onde todos os impulsos indutivos ocorreram sempre no centro de cada período de oscilação), encontra-se o valor limite correspondente

$$= -83,876 .$$

A partir de um grande número de experiências similares, realizadas por vários observadores, encontramos a razão do valor limite para o bismuto em relação ao valor limite para o ferro como sendo

$$+16,956 : -83,49 .$$

Agora, a intensidade da corrente induzida pelo *bismuto e pelo ferro é diretamente proporcional a esses valores limites, e inversamente proporcional ao número de impulsos indutivos durante um período de oscilação* (isto é, como

$$1 : 216,2 ,$$

pois nos experimentos com a barra de bismuto ocorreram 216,2 impulsos indutivos durante cada período de oscilação, enquanto que nos experimentos com a barra de ferro houve apenas um impulso de indução durante cada período de oscilação). Portanto, *as correntes induzidas pela barra diamagnética de bismuto tinham uma direção oposta em relação às correntes induzidas pela barra magnética de ferro, e suas intensidades estavam na razão de*¹⁷⁰

¹⁶⁸Em alemão: *Induktionsstösse*. Essa expressão pode ser traduzida como impulsos indutivos, impulsos de indução, choques indutivos, choques de indução, pulsos indutivos ou pulsos de indução.

¹⁶⁹Ver a Nota de rodapé 24 na página 19.

¹⁷⁰A próxima equação deve ser entendida como:

$$16,956 : (83,49 \times 216,2) = 1 : 1064,5 = 9,394 \times 10^{-4} .$$

$$16,956 : 83,49 \cdot 216,2 = 1 : 1064,5 ,$$

embora a barra de bismuto pesasse 339 300 miligramas, e a barra de ferro apenas 790,86 miligramas. A partir disso encontramos por cálculo que uma barra de bismuto com o mesmo peso que uma barra de ferro induziria uma corrente 456 700 vezes mais fraca do que aquela induzida pela barra de ferro. Contudo, esse resultado só vale para uma forma específica da barra de ferro, e para um valor específico da força de separação atuante, a saber, $X = 3012$, que é determinada pela intensidade medida da corrente e pelo número de espiras da bobina eletromagnética.

4.2.6 Sobre a Dependência da Intensidade do Magnetismo dos Ímãs Variáveis em Relação ao Valor da Força de Separação Magnética ou Eletromagnética

A partir da teoria do diamagnetismo apresentada anteriormente, em conexão com aquela do magnetismo, segue-se que a suposição de dois fluidos magnéticos capazes de movimento livre nas moléculas de ferro, feita até o momento no caso do magnetismo (da qual segue como consequência a *proporcionalidade* do magnetismo em relação à força de separação magnética), não é admissível, e que portanto a hipótese de Ampère, de acordo com a qual as moléculas são portadoras rotatórias de correntes moleculares permanentes, e na qual não existe proporcionalidade entre o magnetismo e a força de separação magnética, tem de ser colocada em seu lugar. Essa consequência da teoria pode ser testada experimentalmente, e com relação a isso já foram mencionadas as experiências de Müller. Contudo, outros experimentos foram feitos, particularmente por Buff e Zamminer, que levaram a resultados diferentes.¹⁷¹ Portanto, antes de repetir estas experiências, devem ser examinadas mais de perto as condições das quais depende uma decisão segura.

Os experimentos feitos por Müller mostraram que o desvio do magnetismo das barras *finas* de ferro da proporcionalidade com a força de separação é percebido com forças de separação muito menores do que o [desvio] do magnetismo das barras *grossas*. Na comparação das experiências de Müller com as de Buff e Zamminer, temos de lembrar que as barras mais finas utilizadas por Müller tinham apenas 6 milímetros de espessura, enquanto que as mais finas usadas por Buff e Zamminer tinham 9 milímetros de espessura; e essa diferença ficou ainda mais influente pela razão do comprimento para a espessura; a barra fina de Müller tinha 330 milímetros de comprimento, enquanto que a de Buff e Zamminer tinha apenas 200 milímetros [de comprimento]. Nas próximas experiências foi utilizada uma barra ainda mais fina, a saber, uma [haste] com 3,66 milímetros de espessura, 100,2 [mm] de comprimento, e 8190 miligramas de peso. O magnetismo de uma barra tão fina pode ser medido com grande precisão pela deflexão que ela é capaz de produzir sobre um pequeno magnetômetro, colocado à distância, e observado por meio de um telescópio e espelho. A única dificuldade aqui é a separação apropriada da ação do ferro magnetizado em relação à ação da corrente galvânica. É evidente que quando é aplicada a mesma espiral galvânica para a magnetização de barras grossas e finas, como foi o caso com Müller, Buff e Zamminer, além do fato de que isso dispensa a maior força de separação que atuaria sobre uma haste mais fina se a mesma corrente fosse passada ao seu redor em várias voltas mais estreitas, qualquer separação é menos precisa com hastes mais finas, porque a ação imediata da espiral

¹⁷¹ [BZ50].

permanece a mesma, sendo, portanto, proporcionalmente maior para as hastes mais finas do que para as mais grossas. Portanto, nas próximas experiências foi utilizada uma espiral que envolvia apertadamente a barra fina; e, além disso, foi arranjado que junto com esses enrolamentos estreitos, cada espiral formava dois enrolamentos maiores, que eram atravessados pela corrente em uma direção oposta, e que englobavam uma área igual àquela englobada por todos os pequenos enrolamentos tomados em conjunto. De acordo com as leis conhecidas do *eletromagnetismo*, não podíamos ter aqui qualquer ação imediata exercida pela corrente sobre o magnetômetro afastado, uma conclusão que pode ser facilmente provada. Toda a ação exibida pelo magnetômetro era, portanto, devida apenas ao *magnetismo do ferro*, e pode ser determinada com mesma precisão e exatidão como aquela dos ímãs permanentes, de acordo com as instruções fornecidas por Gauss no *Intensitas, etc.*¹⁷² Deve ser especialmente mencionado que as espirais¹⁷³ utilizadas por Müller, Buff e Zamminer eram mais curtas do que as barras de ferro que magnetizavam. No caso de Müller essa diferença era muito pequena, pois a barra de ferro projetava-se apenas 15 milímetros além das extremidades da espiral. Contudo, com Buff e Zamminer essa diferença era muito maior, pois aqui as extremidades da barra maior e mais fina projetavam-se 45 milímetros além das duas extremidades da espiral. A influência deletéria disso era aumentada pela circunstância que o comprimento englobado pela espiral chegava apenas a 110 milímetros, enquanto que no caso de Müller o comprimento englobado era de 300 milímetros. Provavelmente essa circunstância é a causa principal da divergência nos resultados obtidos por esses observadores; pois é evidente que a ação da espiral sobre o ferro é maior no centro, diminuindo em direção às extremidades, e que essa diminuição tem de ser excepcionalmente grande além dos limites da espiral. Portanto, embora a ação produzida pela corrente galvânica sobre as partes centrais da barra possa ter alcançado aproximadamente seu valor limite, não segue de forma alguma que esse seja o caso com as partes fora da espiral. Para, portanto, realizar esta aproximação em todas as partes da barra de ferro simultaneamente, foi utilizada nas experiências seguintes uma espiral que era consideravelmente mais longa do que a barra de ferro, de modo que a força exercida por esta espiral (cujo diâmetro era muito pequeno em comparação com o seu comprimento) sobre as extremidades da barra de ferro não era sensivelmente diferente daquela exercida no centro, sendo que só assim resultados confiáveis podiam ser obtidos.

Sem entrar nos detalhes das experiências, vou me limitar aqui a uma apresentação tabelar dos resultados obtidos dessa maneira, observando apenas que cada determinação é o resultado de quatro mudanças de corrente na espiral, sendo exibida uma coincidência bem precisa em todos os casos, uma prova de que a força coerciva do ferro não atuou para prejudicar as medições. A redução, de acordo com regras conhecidas, do magnetismo do ferro para uma unidade absoluta, não necessita de explicação adicional. A intensidade da corrente, medida através de um galvanômetro tangencial,¹⁷⁴ também foi reduzida a uma unidade absoluta, e foi levada em consideração a correção que depende da razão do comprimento da agulha para o diâmetro do anel. A partir da intensidade da corrente assim determinada, do número de enrolamentos e das dimensões da espiral, foi finalmente calculada a força de separação atuando sobre o ferro, em termos da mesma unidade na qual é expressa a intensidade da força magnética terrestre; ela aparece na *segunda* coluna sob *X* na próxima Tabela. O magnetismo *M* do ferro,¹⁷⁵ dividido pela massa do ferro expressa em miligramas, $p = 8190$,

¹⁷²Ver a Nota de rodapé 94 na página 69.

¹⁷³Ou seja, bobinas contendo várias espiras nas quais flui uma corrente elétrica.

¹⁷⁴Ver a Nota de rodapé 36 na página 27.

¹⁷⁵Ou seja, o momento magnético *M* do ferro.

e assim reduzido à unidade de massa, é exibido na *terceira* coluna sob m .

Número	X	m
1.	658,9	911,1
2.	1 381,5	1 424,0
3.	1 792,0	1 547,9
4.	2 151,0	1 627,3
5.	2 432,8	1 680,7
6.	2 757,0	1 722,7
7.	3 090,6	1 767,3
8.	3 186,0	1 787,7
9.	2 645,6	1 707,9
10.	2 232,1	1 654,0
11.	1 918,7	1 584,1
12.	1 551,2	1 488,9
13.	1 133,1	1 327,9
14.	670,3	952,0

O resultado obtido por Müller é confirmado por essas experiências, e só falta determinar se a variabilidade encontrada aqui da intensidade do magnetismo com diferentes magnitudes da força de separação atuando sobre o ferro concorda com a lei deduzida no final da primeira Seção, a partir da suposição de *uma capacidade definida de rotação por parte das moléculas*. Se esse for o caso, seguirá evidentemente que poderemos assumir, com Ampère, que essas moléculas são as portadoras de correntes moleculares, sendo que por essa suposição *a geração e as mudanças no magnetismo do ferro são tornadas bem independentes da ideia dos fluidos magnéticos, e são reduzidas apenas à suposição de fluidos elétricos móveis*.

Após a suposição (feita no final da primeira Seção) de *uma certa capacidade de rotação das moléculas*, a natureza de todo corpo, em aspectos magnéticos, é determinada por *duas características*, a saber, em primeiro lugar, *pelo produto do momento magnético de uma molécula* (na direção do seu eixo magnético) *com o número de moléculas no corpo*; em segundo lugar, *pela constante denotada pelo nome da força diretriz molecular*.¹⁷⁶ Esse produto foi denotado anteriormente por $n\mu$, a constante foi denominada por D .

Colocando no caso do *ferro*:

$$n\mu = 2324,68 ,$$

e

$$D = 276,39 ,$$

onde o número n de moléculas está relacionado à *unidade de massa*, obteremos então das fórmulas dadas ao final da primeira Seção, sendo feita referência à *unidade de massa* (em vez da unidade de volume), a densidade do ferro sendo considerada como 7,78, e o fator S relacionado a uma barra com 100,2 milímetros de comprimento e 3,66 milímetros de espessura, isto é, $S = 1/249$, os valores de X e m relacionados entre si na seguinte Tabela:

¹⁷⁶Ver a Nota de rodapé 122 na página 87.

X	m
658,9	948,4
1 381,5	1 387,0
1 792,0	1 533,0
2 151,0	1 623,5
2 432,8	1 685,0
2 757,0	1 742,2
3 090,6	1 791,2
3 186,0	1 803,4
2 645,6	1 723,6
2 232,1	1 644,8
1 918,7	1 568,9
1 551,2	1 452,9
1 133,1	1 276,8
670,3	957,5

Vemos que esses valores calculados diferem pouco daqueles contidos na Tabela anterior e que foram deduzidos da observação.

De acordo com as mesmas fórmulas, obtemos para a barrinha de *ferro* para a qual, por uma comparação das *ações magnéticas*, foi encontrado na Subseção 4.2.1 que m era 1 470 000 vezes maior do que seu valor para bismuto, X sendo = 629,9,

$$m = 2\,134 ;$$

portando, para o *bismuto*, para $X = 629,9$,

$$m = \frac{2\,134}{1\,470\,000} = \frac{1}{689} .$$

Para a *pequena barra de ferro*, ao contrário, com a qual, por uma comparação das *ações indutivas*, encontrou-se na Subseção 4.2.2, [o valor de] m como sendo 360 740 vezes maior do que para o bismuto, com X sendo = 3 012, temos

$$m = 2\,305,4 ;$$

portanto, para o *bismuto*, com $X = 3\,012$,

$$m = \frac{2\,305,4}{360\,740} = \frac{1}{156,5} .$$

De acordo com isso, parece que quando a força de separação é aumentada 4,8 vezes, o diamagnetismo do bismuto aumenta 4,4 vezes; isto é, *aproximadamente proporcional*, embora uma determinação seja baseada em uma comparação das *ações magnéticas*, e a outra determinação seja baseada em *ações indutivas*. Isto confirma o teorema, de que

a razão das ações indutivas para as ações magnéticas para o bismuto diamagnético é a mesma que para o ferro magnético.

Ao determinar o diamagnetismo na mesma *unidade absoluta* que o magnetismo, obtemos finalmente *a intensidade do diamagnetismo de 1 miligrama de bismuto sob a influência da força de separação $X = 1$, [a saber:]*

$$= \frac{1}{452\,000} .$$

A intensidade do magnetismo de 1 miligrama de ferro, sob a influência de uma força de separação $X = 1$,

$$= 5,6074 ,$$

isto é, o magnetismo de uma fina barra de ferro excede o diamagnetismo de uma massa igual de bismuto, quando forças de separação iguais e pequenas atuam sobre elas, aproximadamente $2\frac{1}{2}$ milhões de vezes. Para barras mais grossas e maiores forças de separação, esse número é menor.

Capítulo 5

[Weber, 1855a] Sobre a Teoria do Diamagnetismo. Carta do Prof. Weber para o Prof. Tyndall

5.1 Nota Introdutória de Tyndall

J. Tyndall¹⁷⁷

O honrado nome do Prof. Wilhelm Weber foi mencionado mais de uma vez nos Tratados anteriores. A ele encaminhei uma cópia da Palestra Bakeriana de 1855,¹⁷⁸ fornecendo, ao mesmo tempo, um esboço de alguns experimentos que eu havia então executado com o instrumento já mencionado como projetado para mim por ele mesmo. Ele me favoreceu, em resposta, com a seguinte comunicação interessante:

5.2 Carta do Prof. Weber para o Prof. Tyndall

W. Weber^{179,180}

Göttingen, 25 de setembro de 1855.

Prezado Senhor,

Aceite meus agradecimentos por sua gentil comunicação de 3 de setembro; fico agradecido de saber que o instrumento feito pelo Sr. Leyser¹⁸¹ em Leipzig para a demonstração da polaridade diamagnética tenha satisfeito completamente suas expectativas. Essa informação

¹⁷⁷Essa Nota Introdutória escrita por John Tyndall (1820-1893) apareceu em [Tyn88, pág. 243]. Para uma discussão dos trabalhos de Tyndall sobre diamagnetismo, ver [Jac15].

¹⁷⁸[Tyn55b].

¹⁷⁹[Web55a].

¹⁸⁰As Notas de John Tyndall são representadas por [Nota de Tyndall]; todas as outras Notas são de minha autoria.

¹⁸¹Ver a Nota de rodapé 162 na página 112.

é tanto mais agradável para mim, na medida em que, antes de o aparelho ser enviado, não estava em meu alcance ir a Leipzig e testar o instrumento.

Fiquei satisfeito ao saber que o Sr. Faraday¹⁸² e o Sr. De la Rive¹⁸³ tiveram a oportunidade de testemunhar as experiências e de se convencerem quanto aos fatos do caso.

Também foi de interesse particular para mim saber que você foi bem sucedido em estabelecer a polaridade do mesmo vidro pesado com o qual Faraday descobriu o diamagnetismo.¹⁸⁴ Essa é a melhor prova que essas experiências não dependem do poder condutor do bismuto para a eletricidade.

Li com grande interesse seu trabalho “On the Diamagnetic Force — Sobre a força diamagnética,” etc. publicado nas *Philosophical Transactions*, Vol. cxlv.¹⁸⁵ Você teve o cuidado de separar o *fato* da polaridade diamagnética da *teoria*, e de colocar o fato além da região de dúvida. Permita-me, com relação a esse assunto, direcionar sua atenção para uma passagem na página 39 de seu trabalho, que você apresenta como conclusão de minha teoria; a passagem é a seguinte:¹⁸⁶

Há, portanto, o contraste de que o magnetismo das partículas de ferro situadas na direção da força de separação é fortalecido pela interação, enquanto o diamagnetismo das partículas de bismuto situadas nesta direção é enfraquecido pela interação.

Essa proposição não é de forma alguma uma suposição necessária da minha teoria mas, em vez disso, é uma consequência direta da polaridade diamagnética, se os fatos forem tais como você e eu afirmamos que são. Portanto, o que você apresentou contra essa conclusão tem de ser considerado como um argumento contra a própria polaridade diamagnética. A *ação recíproca diamagnética* entre as partículas de bismuto que estão na linha de magnetização é necessariamente oposta à *ação da força magnética excitadora*. Essa última força tem de ser enfraquecida, já que a ação recíproca diamagnética é oposta à *ação recíproca magnética* das partículas de ferro que estão ao longo da linha de magnetização, sendo que através dessa última interação sabe-se que é aumentada a ação da força magnética excitadora. Portanto, também a *modificação* produzida no bismuto pela excitação magnética, o que quer que ela seja, tem de ser enfraquecida, já que a força de excitação é enfraquecida.

(Acredito, contudo, que esse argumento contra a polaridade diamagnética também pode ser superado. O fenômeno que você observou deve ser referido a outras circunstâncias, também relacionadas com a compressão do bismuto. Pois a ação recíproca diamagnética é, como mostrei, muito fraca para produzir um efeito que pode ser comparado em termos de intensidade com a ação recíproca produzida no caso do ferro.)

Aproveito essa oportunidade para adicionar algumas observações com o objetivo de colocar minha teoria da polaridade diamagnética sob uma luz mais correta.

¹⁸²Michael Faraday (1791-1867).

¹⁸³Auguste Arthur de la Rive (1801-1873).

¹⁸⁴Ver a Nota de rodapé 15 na página 15. O chamado vidro pesado é feito de borossilicato de chumbo, [Tho01, pág. 100] e [ML22].

¹⁸⁵Ver [Tyn55b], [Tyn55a], [Tyn55c] e [Tyn88, págs. 111-192].

¹⁸⁶[Tyn55b, pág. 39]. Tyndall estava citando o trabalho de 1852 de Weber, [Web52f, pág. 158 dos *Annalen der Physik und Chemie* e pág. 565 das *Obras* de Weber] com traduções para o inglês em [Web53b, pág. 173], [Web66b, pág. 173] e [Web21i]. Esse trabalho é um versão resumida da Terceira Memória principal de Weber sobre Medições Eletrodinâmicas, [Web52b, pág. 531 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21e, pág. 64] e tradução para o português no Capítulo 3. Ver, em particular, a página 73 da Seção 3.20 e a página 103 da Subseção 4.1.4.

Minha teoria assume, em primeiro lugar, que o fato da polaridade diamagnética é verdadeiro; em segundo lugar, que no se refere aos fenômenos magnéticos, a teoria dos dois fluidos de Poisson,¹⁸⁷ e a teoria das correntes moleculares de Ampère,¹⁸⁸ são igualmente admissíveis. Qualquer pessoa que negue o primeiro fato, ou que rejeite a teoria de Ampère, não pode, estou pronto a confessar, aceitar minha teoria.

Supondo que você não rejeite a teoria das correntes moleculares permanentes de Ampère, mas que esteja disposto a penetrar na conexão interna e no verdadeiro significado da teoria, você vai facilmente reconhecer que não é de forma alguma *uma suposição arbitrária minha*, que as correntes moleculares são excitadas no bismuto, quando a força magnética excitadora é aumentada ou diminuída; mas que a excitação de tais correntes moleculares é *uma conclusão necessária a partir da teoria de Ampère*, sendo que essa conclusão o próprio Ampère não podia fazer, já que as leis da indução voltaica, descobertas por Faraday,¹⁸⁹ eram desconhecidas por ele. Em todos os casos nos quais *existem* correntes moleculares, *correntes moleculares têm de ser produzidas* pelo aumento ou diminuição da força magnética de excitação, o que adiciona ou subtrai sua ação à ação daquelas [correntes moleculares] já presentes.

Finalmente, permita-me fazer alguns comentários sobre as seguintes palavras de seu trabalho:¹⁹⁰

Para desenvolver a suposição feita aqui, o Sr. Weber é obrigado a supor que as moléculas dos corpos diamagnéticos são cercadas por canais, nos quais as correntes induzidas, uma vez excitadas, continuam a fluir sem resistência.

A suposição de canais que cercam as moléculas, e nas quais os fluidos elétricos se deslocam sem resistência, é uma suposição contida na teoria de Ampère, e não é de forma alguma adicionada por mim com o objetivo de explicar a polaridade diamagnética. De acordo com a lei de Ohm,¹⁹¹ *uma corrente molecular permanente sem que exista tal canal envolve uma contradição manifesta*.

Observe ainda, que não me impressiono que você considere uma teoria que é baseada na suposição de tais canais, como sendo “tão extremamente artificial que você imagina que a convicção geral sobre sua verdade não pode ser muito grande.” Em certo sentido eu bem que concordo com você, mas desejo apenas te convencer que essa objeção se aplica realmente à teoria de Ampère, e apenas se aplica à minha teoria enquanto ela é baseada na teoria de Ampère. (Talvez você encontre menos motivos para objetar à especialidade de tal suposição, se separar a simples concepção fundamental, que se recomenda particularmente por uma certa analogia das moléculas com os corpos celestes no espaço, daquelas adições que Ampère foi forçado a fazer, a fim de aplicar os métodos matemáticos sob seu comando, e tornar o assunto um cálculo rigoroso. Ele foi obrigado a reduzir o caso à situação das correntes *lineares*, que necessariamente exigem limites em forma de canal, se quisermos evitar qualquer possibilidade de propagação lateral.)

Para colocar minha teoria da polaridade diamagnética sob uma luz mais verdadeira, estou ansioso em te convencer que essa teoria não é de forma alguma baseada em novas suposições (hipóteses); mas que ela apenas se baseia nas conclusões que podem ser obtidas

¹⁸⁷Ver a Nota de rodapé 89 na página 66.

¹⁸⁸Ver a Nota de rodapé 90 na página 66.

¹⁸⁹[Far32a] com tradução para o alemão em [Far32b] e [Far89], e com tradução para o português em [Far11].

¹⁹⁰[Tyn55b, pág. 39].

¹⁹¹Georg Simon Ohm (1789-1854). A lei de Ohm é de 1826: [Ohm26a], [Ohm26c], [Ohm26d], [Ohm26b] e [Ohm27] com tradução para o francês em [Ohm60] e tradução para o inglês em [Ohm66].

da teoria de Ampère, quando as leis da indução voltaica descobertas por Faraday, e as leis das correntes elétricas [descobertas] por Ohm, são conectadas convenientemente com ela. Afirmo que mesmo que Faraday não tivesse descoberto o diamagnetismo, a combinação da teoria de Ampère com as leis da indução voltaica de Faraday, juntamente com as leis da corrente elétrica de Ohm, como mostrado em meu trabalho, possivelmente poderia ter sido feita tal descoberta [do diamagnetismo].

Contudo, no que diz respeito à artificialidade da teoria de Ampère, espero que possam ser encontrados métodos matemáticos pelos quais a limitação mencionada anteriormente relativa ao caso das correntes lineares possa ser colocada de lado, e com ela a objeção contra leitões em forma de canal. Todas as nossas teorias moleculares ainda são muito artificiais. De minha parte, encontro menos objeções a esse respeito na teoria de Ampère do que em outras artificialidades de nossas teorias moleculares; e por esta razão, como no caso de Ampère a natureza da artificialidade é colocada claramente à vista, portanto, também se abre um caminho para a sua remoção.^{192,193}

Ao Sr. Faraday, imploro que apresente meu mais sincero respeito.

Acredite em mim, caro Senhor,
Atenciosamente,

Wilhelm Weber.

5.3 Comentários de Tyndall

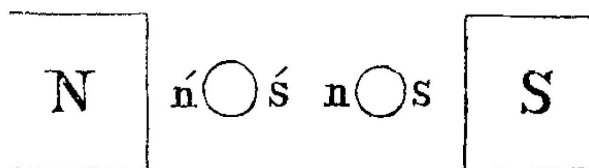
J. Tyndall¹⁹⁴

A carta anterior possui mais do que um interesse particular, e, portanto, a apresento aos leitores da *Philosophical Magazine*. Peço permissão para fazer uma observação em relação a um único ponto, e que é a proposição, de que a diminuição da excitação de uma fileira de partículas de bismuto [situadas] na linha de magnetização devido às suas ações recíprocas é “*uma consequência direta da polaridade diamagnética*.” O Sr. Weber (acredito) encontra essa proposição a partir das seguintes considerações: — Deixe uma série de partículas de bismuto situar-se na linha axial entre os polos magnéticos *N* e *S*: a polaridade excitada nestas partículas pela ação direta dos polos será aquela mostrada na Figura, sendo o inverso da polaridade das partículas de ferro sob as mesmas circunstâncias.

¹⁹²[Nota de Tyndall:] Em *Heat as a Mode of Motion*, 4ª edição, e em outros lugares, escrevo assim: ‘Quer vejamos corretamente ou incorretamente, quer nossa percepção seja real ou imaginária, é da maior importância na ciência almejar a clareza perfeita na descrição de tudo o que vem, ou parece vir, dentro do alcance do intelecto. Pois se estivermos certos, a clareza do enunciado encaminha a causa do certo; enquanto se estivermos errados, ela assegura a rápida correção do erro.’ É desnecessário dizer mais para mostrar o quão calorosamente subscrevo a visão do Professor Weber. — John Tyndall.

¹⁹³Essa Nota de rodapé apareceu em [Tyn88, pág. 247]. Ver ainda [Tyn69].

¹⁹⁴Os comentários a seguir de Tyndall apareceram em [Tyn88, págs. 247-249] e [Web55a, págs. 409-410].



Porém, como a extremidade n da partícula da direita tende a excitar um magnetismo desse tipo na extremidade s' da partícula da esquerda, e *vice-versa*, essa ação é oposta à ação do ímã e, portanto, a magnetização de tal linha de partículas é enfraquecida pela ação recíproca entre elas.

Agora, parece-me que há mais pressupostos neste argumento engenhoso do que a experiência atual pode confirmar. Não existem bases experimentais para a suposição de que aquilo que denominamos o polo Norte de uma partícula de bismuto exerce sobre uma segunda partícula de bismuto precisamente a mesma ação que o polo Norte de uma partícula de ferro exerceria. O ferro magnetizado repele o bismuto; porém, qualquer que seja o *fato*, dificilmente se justifica a *conclusão* de que, *portanto*, o bismuto magnetizado repelirá o bismuto. Supondo que fosse afirmado que o ferro magnetizado atrai o ferro e repele o bismuto, enquanto que o bismuto magnetizado atrai o bismuto e repele o ferro, haveria qualquer coisa essencialmente impossível, auto-contraditória, ou absurda envolvida na afirmação? Creio que não. E ainda assim, se mesmo a possível correção de tal afirmação for concedida, a proposição referida anteriormente torna-se insustentável. Será observado que é contra uma conclusão, e não contra um fato, que eu discuto. Quanto a este fato, eu lamentaria expressar uma opinião positiva; pois este é um assunto sobre o qual estou atualmente buscando instrução, o que pode me levar ao ponto de vista do Sr. Weber ou ao ponto de vista oposto. Seja como for, o resultado não pode afetar materialmente o respeito que tenho por cada opinião emanada do meu ilustre correspondente sobre este e todos os outros assuntos científicos.

J. T.

Capítulo 6

[Weber, 1855b] *Prefácio à Submissão do Tratado: Medições Eletrodinâmicas, Especialmente Atribuindo Unidades Mecânicas às Medidas de Intensidade de Corrente*

Wilhelm Weber^{195,196}

Reunião em 20 de outubro de 1855.

Estou submetendo o Tratado mencionado, que foi escrito por mim e pelo Professor Kohlrausch¹⁹⁷ em Marburg, à Real Sociedade Científica [de Leipzig]. Ele é uma continuação de três Tratados que foram submetidos anteriormente e que apareceram sob o mesmo título geral.¹⁹⁸

Como já desenvolvido no Primeiro Tratado, a lei geral da ação elétrica e as leis fundamentais que podem ser deduzidas dela para os vários ramos da teoria da eletricidade (com exceção da lei fundamental da eletrostática) inclui uma *constante* cujo valor numérico, quando expresso em unidades conhecidas, possui grande importância para toda a teoria da eletricidade, tanto teoricamente quanto na prática. Embora possamos, sem o conhecimento dessa constante, fazer numerosas aplicações daquelas leis para a determinação de razões ou quocientes nos quais aquela constante é cancelada no denominador e no numerador, contudo, haverá muitas outras aplicações dessas leis que não são possíveis sem determinar os valores das constantes que estão incluídas nelas. Até o momento faltou a determinação desse valor, e o próximo objetivo do presente Tratado é fechar essa lacuna na determinação das medições

¹⁹⁵[Web55b] com tradução para o inglês em [Web21f]. Esse artigo está relacionado ao trabalho [KW57], com tradução para o inglês em [KW21], e com tradução para o português no Capítulo 8.

¹⁹⁶Todas as Notas são de minha autoria.

¹⁹⁷Rudolf Hermann Arndt Kohlrausch (1809-1858).

¹⁹⁸[Web46] com tradução parcial para o francês em [Web87] e traduções para o inglês em [Web07] e [Web21b]; [Web52c] com tradução para o inglês em [Web21c]; e [Web52b] com tradução para o inglês em [Web21e] e tradução para o português no Capítulo 3.

eletrodinâmicas.

A maneira mais simples de alcançar esse objetivo é apelar a medições da intensidade de corrente em unidades absolutas, o que foi discutido detalhadamente no Segundo Tratado,¹⁹⁹ a saber, aquelas medidas que são baseadas nas ações magnéticas ou eletromagnéticas da corrente, em relação às quais as ações eletrolíticas da corrente podem ser facilmente reduzidas com o auxílio das observações correspondentes. Pois a intensidade da corrente expressa em qualquer uma dessas duas unidades, nada mais é do que a quantidade de eletricidade positiva fluindo na direção da corrente através de cada seção transversal do condutor em 1 segundo, multiplicada por $\sqrt{8}$ ou por 4, e dividida por essa *constante*, a partir da qual é evidente que se apenas essa quantidade de eletricidade pudesse ser medida, a medição da intensidade da corrente em qualquer uma dessas duas unidades absolutas levaria à determinação do valor desta *constante*. Contudo, essa eletricidade positiva total que flui através da seção reta do condutor em um segundo na direção da corrente foi denominada como a *unidade mecânica*²⁰⁰ da intensidade de corrente no Segundo Tratado, de onde vem que o objetivo desse Tratado, a saber, determinar o valor dessa *constante*, será alcançado se for possível *reduzir as medições de intensidade de corrente realizadas de acordo com essas duas unidades em termos de unidades mecânicas*.

Contudo, a quantidade total de eletricidade que flui através da seção reta de um condutor em um certo intervalo de tempo não pode ser medida enquanto ela está fluindo. Portanto, ela precisa ser medida previamente enquanto se encontra em um estado de repouso. Precisamos então coletar previamente uma certa quantidade de eletricidade que gostaríamos que fluísse através de um fio condutor — por exemplo, [coletar] em uma garrafa de Leiden²⁰¹ — e temos então de tentar medi-la enquanto se encontra em um estado de repouso de acordo com os princípios *eletrostáticos*. Em seguida, precisamos determinar *em unidades absolutas* a *intensidade* e *duração* da corrente que é produzida quando a mesma quantidade de eletricidade flui (da garrafa de Leiden para a Terra, por exemplo) através de um fio condutor.

Agora, no que diz respeito à medição inicial da eletricidade total que é coletada na garrafa de Leiden, os princípios *eletrostáticos* que precisam ser aplicados a essa medição são de fato conhecidos em geral, porém, muitas dificuldades têm sido encontradas ao aplicar esses princípios à eletricidade que foi coletada em uma garrafa de Leiden. Coulomb, a quem devemos agradecer por esses princípios, fez aplicações apenas com quantidades muito pequenas de eletricidade com as quais as pequenas esferas de sua balança [de torção] foram carregadas.²⁰² A solução dessas dificuldades foi, portanto, o problema com o qual nos ocupamos principalmente para os fins desse Tratado. Muitas dessas dificuldades foram eliminadas pelo Professor Kohlrausch em investigações anteriores, e esse fato foi que levou-nos a combinar os trabalhos que havíamos feito, e foi apenas por esses esforços combinados que podíamos esperar alcançar resultados satisfatórios.

No que diz respeito à medição da *intensidade* e *duração* da corrente produzida pela eletricidade acumulada na garrafa de Leiden quando é descarregada para a Terra, ficou claro que nem a medição da *intensidade* nem aquela da *duração* podem ser realizadas diretamente, já que a intensidade não é constante e a duração da corrente que é criada dessa forma

¹⁹⁹[Web52c] com tradução para o inglês em [Web21c].

²⁰⁰Em alemão: *mechanisches Maass*. A palavra “Maass”, hoje em dia escrita como “Maß”, pode ser traduzida como medição, medida, dimensão, unidade, unidade de medida, padrão, dose, escala etc. Logo essa expressão pode ser traduzida como unidade, medição ou medida mecânica.

²⁰¹Ver o Capítulo 12, A Garrafa de Leiden e os Capacitores, de [Ass18b], [Ass18a] e [Ass19b].

²⁰²Ver a Nota de rodapé 89 na página 66.

é imensuravelmente pequena. A única coisa que pode ser medida precisamente é o assim chamado *valor integral* da corrente que é criada, isto é, a soma dos produtos de cada elemento de tempo dt com a intensidade i da corrente (expressa em unidades absolutas) que está presente nesse elemento de tempo, $= \int i dt$, como calculado do início ao fim da corrente. Contudo, esse valor integral nada mais é do que a quantidade de eletricidade descarregada da garrafa de Leiden para a Terra, multiplicada por $\sqrt{8}$ ou por 4 e dividida pela *constante* procurada. No entanto, deve-se notar aqui que nem toda a eletricidade que está acumulada na garrafa de Leiden flui da garrafa para a Terra, mas apenas metade dela, enquanto que uma quantidade igual de eletricidade negativa vai fluir simultaneamente da Terra para a garrafa, e isso vai neutralizar a outra metade da eletricidade que está acumulada nela.

Neste breve relato devemos abster-nos de entrar em mais detalhes sobre a execução dessas medições e, portanto, nos referimos ao próprio Tratado²⁰³ para a medição eletrostática da quantidade de eletricidade armazenada em uma garrafa de Leiden, assim como todas as coisas relacionadas com a medição eletrodinâmica da valor integral da corrente que é criada quando essa eletricidade é descarregada para a Terra. Pode ser suficiente aqui citar brevemente os resultados dessas medições.

A medição da quantidade total de eletricidade E armazenada em uma garrafa de Leiden com cinco cargas diferentes forneceu os seguintes resultados:

Número	E
1.	35 786 000
2.	41 618 000
3.	49 313 000
4.	44 007 000
5.	49 276 000

O significado dos números citados abaixo de E são como segue: Para a *primeira* carga, foi armazenada na garrafa uma quantidade de eletricidade positiva que, caso ela estivesse concentrada em um ponto, então uma quantidade igual de eletricidade que tivesse sido concentrada em um ponto à distância de 1 milímetro dela, a repeliria com uma força que é igual ao peso de $(35\,786\,000)^2 \cdot 1/g$ miligramas, onde g denota a aceleração dos corpos ponderáveis devida à gravidade, isto é, $g = 9811 \frac{\text{milímetros}}{(\text{segundo})^2}$. A medição do valor integral $\int i dt$ da corrente criada ao descarregar a eletricidade E que estava armazenada na garrafa de Leiden em termos da unidade absoluta que é baseada nas ações magnéticas da corrente forneceu os seguintes resultados nesses cinco casos:

Número	$\int i dt$
1.	0,000 119 4
2.	0,000 130 0
3.	0,000 156 8
4.	0,000 148 0
5.	0,000 158 9

Contudo, a partir disso, quando observamos que apenas metade da quantidade *positiva* de eletricidade E flui da garrafa de Leiden para a Terra, porque a outra metade é neutralizada pela eletricidade negativa que flui na direção oposta da Terra para a própria garrafa,

²⁰³[KW57] com tradução para o inglês em [KW21]. Ele está traduzido para o português no Capítulo 8.

[obtemos] o quociente $E/\int idt = c/\sqrt{2}$,²⁰⁴ onde c denota a constante desejada. Consequentemente obtemos, a partir dos cinco valores anteriores de E e dos valores associados de $\int idt$, as próximas cinco determinações mutuamente independentes do valor da *constante* desconhecida c :

Número	c
1.	$423\,870 \cdot 10^6$
2.	$452\,750 \cdot 10^6$
3.	$444\,760 \cdot 10^6$
4.	$420\,510 \cdot 10^6$
5.	$438\,560 \cdot 10^6$

A média dessas cinco medições fornece o valor da *constante* $c = 436\,090 \cdot 10^6$.

O significado da *constante* c é o de uma velocidade definida, ou seja, aquela velocidade com a qual duas massas elétricas devem aproximar-se ou afastar-se uma da outra para que não haja atração nem repulsão entre elas. Aqui, a velocidade c é expressa pelo número de milímetros que serão percorridos em um segundo com essa velocidade. Com 7408 metros por milha, essa velocidade é calculada como sendo de 58 868 milhas por segundo.²⁰⁵

Finalmente, com o valor dessa *constante*, todas as medições de intensidade de corrente que são expressas em unidades absolutas (quer elas sejam baseadas em ações magnéticas, eletrodinâmicas, ou eletrolíticas da corrente) podem ser facilmente reduzidas a *unidades mecânicas*, de onde emerge, por exemplo, que é necessária uma quantidade positiva de eletricidade de $16\frac{4}{9}$ trilhões de unidades de medida²⁰⁶ e uma igual quantidade negativa de eletricidade para decompor 1 miligrama de água. Se essa quantidade positiva de eletricidade estivesse em uma nuvem e essa eletricidade negativa estivesse concentrada em um local sobre a superfície da Terra ao longo de uma perpendicular abaixo da nuvem, então isso implicaria em uma atração da nuvem para a Terra que seria igual ao peso de 27 545 quilogramas, ou quase 551 quintais,²⁰⁷ quando as duas [quantidades de eletricidade] estivessem separadas por 1000 metros.

A *segunda* parte do Tratado lida com as aplicações que podem ser feitas, em parte complementando as leis que foram desenvolvidas nos outros Tratados com a determinação assim obtida [do valor da constante c], e em parte quando tentamos utilizar essa determinação obtida recentemente como a base de novas investigações.

Em todas as leis nas quais aparece a *constante* c , ela sempre aparece como o denominador da velocidade com que os corpos estão realmente se movendo uns em relação aos outros, ou como o denominador da velocidade com que os corpos iriam se mover uns em direção aos outros durante uma unidade de tempo (segundo), se a aceleração atual continuasse durante esse tempo. Portanto, é de interesse prático que todas as velocidades reais que conhecemos — até mesmo aquela dos corpos celestes — podem ser consideradas como extremamente pequenas quando comparadas com a velocidade c ; pois a única velocidade que conhecemos que se aproxima da velocidade c , a saber, a velocidade de propagação da luz, não é uma

²⁰⁴Devido a um erro de impressão, no original essa equação apareceu como: $E/\int idt = c\sqrt{2}$.

²⁰⁵Ver a discussão sobre a constante c de Weber no Capítulo 19.

²⁰⁶Em alemão: $16\frac{4}{9}$ *Billionen Maasseinheiten*.

²⁰⁷Em alemão: 551 *Centnern*. Na Alemanha o *Zentner* (quintal) é entendido como a definição da antiga União Aduaneira Alemã, a saber, 1 *Zentner* (= 1 quintal) corresponde nessa definição a 50 kg.

velocidade real com que os corpos se deslocam uns em relação aos outros.²⁰⁸ Aplicações interessantes surgem disso, por exemplo, que a adição à lei da eletrostática também poderia ser transferida para a lei da gravitação,²⁰⁹ porque a mudança na força gravitacional que resultaria dela desapareceria completamente para todos os fenômenos nos quais poderíamos observá-la. O fato de que na eletricidade a mudança na força eletrostática (que corresponde à força gravitacional entre corpos ponderáveis) não desaparece em todos os lugares pela adição do suplemento mencionado anteriormente é devido unicamente ao cancelamento completo das forças eletrostáticas que ocorrem com a neutralização da eletricidade positiva e negativa. Onde não ocorre tal neutralização, mas a eletricidade livre está presente, será sempre suficiente considerar a força eletrostática na ação desta eletricidade livre, porque a sua mudança de acordo com essa adição também pode ser considerada como desaparecendo completamente, o que é de grande importância prática para a consideração da eletricidade livre em circuitos fechados.

Finalmente, é um princípio importante para novas investigações que todas as forças que atuam sobre uma massa elétrica também atuem indiretamente sobre as massas ponderáveis às quais aderem e das quais só podem ser separadas superando a resistência devida aos corpos ponderáveis. Agora, se essas forças elétricas podem ser determinadas em *unidades mecânicas*, então aprenderemos dessa maneira sobre as forças moleculares que intermediam as ações *mecânicas* e *químicas* da eletricidade sobre os corpos ponderáveis. Isso vai mostrar como a pesquisa sobre a resistência galvânica da água pode ser utilizada para obter uma visão e conhecimento precisos da *afinidade química* do oxigênio e hidrogênio na água. Por exemplo, se pudéssemos ligar entre si rigidamente todas as partículas de oxigênio na água em uma mistura de água e ácido sulfúrico de peso específico 1,25 que ocupa uma coluna de seção reta arbitrária e um milímetro de altura e movê-las para um lado por meio de um filamento esticado, enquanto que todas as partículas de hidrogênio estivessem ligadas rigidamente entre si e fossem movidas para o lado oposto por meio de um filamento esticado, então a tensão dessas duas cordas chegaria a 1478 quintais²¹⁰ caso o sistema de partículas de oxigênio e o sistema de partículas de hidrogênio se afastassem tanto um do outro em 1 segundo a tal ponto que as partes constituintes de 1 miligrama de água fossem liberadas nas duas extremidades da coluna de água.

Aplicações semelhantes provavelmente podem ser feitas em relação às ações mecânicas da eletricidade ao saltar de um condutor para outro, pelo qual pequenas partículas ponderáveis de um condutor são levadas pela eletricidade.²¹¹ Se possuíssemos um conhecimento mais preciso de todas as condições essenciais nesse contexto, talvez fosse possível determinar desta forma a massa do fluido elétrico neutro que existe nos corpos ponderáveis, e já parece possível concluir disso, sob certas condições prováveis, que essa massa é excepcionalmente grande.²¹² Contudo, quanto maior for essa massa, menor vai ser a velocidade com que ela se

²⁰⁸Weber aceitava a teoria ondulatória da luz, de acordo com a qual a luz seria uma perturbação ondulatória ocorrendo em um meio material.

²⁰⁹Weber está sugerindo aqui que também a força gravitacional de Newton poderia ser modificada ao incluir um termo que depende da velocidade relativa entre as massas e um termo que depende da aceleração relativa entre elas, em analogia com sua força entre partículas eletrizadas.

²¹⁰Ver a Nota de rodapé 207.

²¹¹Weber está referindo-se aqui às descargas ou faíscas elétricas que ocorrem entre condutores quando há uma grande diferença de potencial entre eles.

²¹²Weber parece estar se referindo aqui à quantidade de carga elétrica positiva e negativa que existe em cada corpo.

desloca em correntes galvânicas,²¹³ e dessa forma, já parece que podemos assumir com grande probabilidade que a velocidade real com que as massas elétricas se deslocam em circuitos fechados é muito pequena,²¹⁴ e que não deve ser confundida de maneira alguma com a grande velocidade com que as correntes galvânicas se propagam em circuitos fechados, que é o que Wheatstone tentou medir.²¹⁵

²¹³Weber está se referindo aqui à velocidade de arraste ou de deriva, isto é, a velocidade das partículas eletrizadas deslocando-se em relação ao fio ou em relação à matéria do condutor nas correntes elétricas usuais.

²¹⁴Ver a Nota de rodapé 102 na página 71.

²¹⁵Charles Wheatstone (1802-1875), ver [Whe34]. Em 1857 Weber e Kirchhoff deduziram independentemente entre si, embora ambos tenham feito seus trabalhos baseados na força de Weber de 1846, que uma onda elétrica propaga-se com a velocidade da luz ao longo de um fio com resistência desprezível, ver os Capítulos 9, 10, 11, 18 e 19.

Capítulo 7

[Weber e Kohlrausch, 1856] Sobre a Quantidade de Eletricidade que Flui Através da Seção Reta de um Circuito com Corrente Galvânica

Wilhelm Weber e Rudolf Kohlrausch^{216,217}

Nota Introdutória de Rudolf Kohlrausch

O Editor desejava para os *Annalen*²¹⁸ um relato de um trabalho realizado em conjunto pelo Prof. Weber e por mim, cujos resultados foram apresentados de forma mais fundamental e conclusiva pelo Prof. Weber no volume 5 dos Tratados da Real Sociedade Científica Saxônica em Leipzig, sob o título: *Medições Eletrodinâmicas, Especialmente Atribuindo Unidades Mecânicas às Medidas de Intensidade de Corrente* (Leipzig, Hirzel, 1856).²¹⁹ A seguir apresento um breve resumo.²²⁰

7.1 Problema

A comparação das ações de um circuito galvânico fechado com as ações da corrente de descarga da eletricidade livre acumulada²²¹ levou à suposição de que estas ações procedem de um *movimento da eletricidade* no circuito. Imaginamos que nos corpos constituindo o circuito, sua eletricidade *neutra* está em movimento, de tal forma que toda sua componente

²¹⁶[WK56], com traduções para o inglês em [WK03] e [WK21], ver também [Joh97]; e com tradução para o português em [WK08].

²¹⁷As Notas de Wilhelm Weber e Rudolf Kohlrausch são representadas por [Nota de Weber e Kohlrausch]; as Notas de Heinrich Weber, o editor do Volume 3 das *Obras* de Wilhelm Weber, são representadas por [Nota de Heinrich Weber]; todas as outras Notas são de minha autoria.

²¹⁸Kohlrausch está se referindo a Johann Christian Poggendorff (1796-1877). Ele foi o editor dos *Annalen der Physik und Chemie* de 1824 até 1876. O periódico moderno *Annalen der Physik* é o sucessor dos *Annalen der Physik und Chemie* de Poggendorff.

²¹⁹[KW57] com tradução para o inglês em [KW21] e tradução para o português no Capítulo 8.

²²⁰Essa Nota Introdutória assinada por Kohlrausch aparece em [WK56, pág. 99].

²²¹Por exemplo, eletricidade acumulada em uma garrafa de Leiden.

positiva mova-se ao redor em uma direção em círculos contínuos fechados, a negativa na direção oposta. O fato de que um acúmulo da eletricidade nunca ocorre por meio deste movimento requer a suposição de que a mesma quantidade de eletricidade flui através de cada seção reta no mesmo intervalo de tempo.

Encontrou-se conveniente fazer a *magnitude do fluxo*, a assim chamada *intensidade de corrente*, proporcional à quantidade de eletricidade que flui através da seção reta do circuito no mesmo intervalo de tempo. Se, portanto, uma certa intensidade de corrente é para ser expressa por um *número*, tem de ser estabelecido qual intensidade de corrente é para servir como unidade,²²² isto é, qual grandeza de fluxo vai ser designada como tendo um valor *unitário*.

O mais simples seria, como em geral relativo a tais fluxos, designar como um valor unitário àquela grandeza de fluxo que surge quando na unidade de tempo a unidade de fluido [elétrico] atravessa a seção reta, definindo assim a medida da intensidade de corrente a partir de sua *causa*. A unidade de fluido elétrico é determinada na eletrostática através da *força* com a qual as eletricidades livres agem uma sobre a outra à distância. Se imaginarmos duas quantidades iguais de eletricidade do mesmo tipo concentradas em dois pontos, cuja distância mútua é a unidade de comprimento, e se a força com a qual elas agem uma sobre a outra de forma repulsiva é igual à *unidade de força*, então a quantidade de eletricidade encontrada em cada um dos dois pontos é a *unidade* ou o *valor unitário* de eletricidade livre.²²³

Ao fazer assim, assume-se como a unidade de força *aquela força através da qual a unidade de massa é acelerada através da unidade de comprimento durante a unidade de tempo*. Portanto, de acordo com os princípios da mecânica, ao estabelecer as unidades para comprimento, tempo e massa, também está dada a unidade para as forças, e ao juntar a esta última a unidade para a eletricidade livre, temos ao mesmo tempo uma unidade para a intensidade de corrente.

Esta medida, que será chamada de *unidade mecânica* da intensidade de corrente, estabelece assim como *valor unitário*, a *intensidade daquelas correntes que surgem quando, na unidade de tempo, a unidade de eletricidade livre positiva flui em uma direção e uma quantidade igual de eletricidade negativa flui na direção oposta através de cada seção reta do circuito*.

Porém, de acordo com esta unidade, não podemos medir qualquer intensidade de corrente existente, pois não sabemos a quantidade de fluido elétrico neutro que está presente em uma unidade cúbica do condutor,²²⁴ nem a velocidade com que as duas eletricidades se movem na corrente.²²⁵ Só podemos comparar a intensidade das correntes através das *ações* que elas produzem.

Um destas ações é, por exemplo, a *decomposição da água*. Há razões suficientes para considerar a intensidade da corrente proporcional à quantidade de água que é decomposta no mesmo intervalo de tempo. Consequentemente, vai-se designar como tendo *valor unitário* *aquela intensidade de corrente na qual a unidade de massa de água é decomposta na unidade de tempo*. Assim, por exemplo, se o segundo e o miligrama são tomados como as unidades do tempo e da massa, [vai-se designar como tendo valor unitário] aquela intensidade de corrente

²²²Em alemão: *Maasse*. Ver a Nota de rodapé 200 na página 140.

²²³Em alemão: *das Maass oder die Einheit der freien Elektrizität*. Ver [Ass21].

²²⁴Isto é, não sabemos a quantidade de carga positiva presente em 1 mm^3 do condutor, assim como não sabemos a quantidade de carga negativa nesse volume.

²²⁵Weber está se referindo aqui à velocidade de deriva ou de arraste das partículas eletrizadas em relação ao corpo material do condutor.

na qual em um segundo decompõe-se um miligrama de água. *Esta medida da intensidade de corrente é chamada de unidade eletrolítica.*

Surge agora a questão natural de saber como esta unidade eletrolítica da intensidade de corrente está relacionada com a unidade mecânica estabelecida anteriormente, assim [surge] a questão, quantas unidades positivas de eletricidade (medidas eletrostaticamente ou mecanicamente) fluem através da seção reta em um segundo, se um miligrama de água é decomposto neste intervalo de tempo.

Uma outra ação da corrente é o *torque*²²⁶ que ela exerce sobre uma agulha magnética, e que da mesma forma assumimos ser proporcional à intensidade da corrente, as outras condições permanecendo inalteradas. Se uma intensidade de corrente é para ser medida por meio deste tipo de ação, então têm de ser estabelecidas as *condições* sob as quais é para ser observado o torque. Pode-se designar como tendo valor unitário aquela intensidade de corrente que, sob condições espaciais estabelecidas *arbitrariamente*, exerce um torque estabelecido *arbitrariamente* sobre um ímã escolhido *arbitrariamente*. Quando então, sob as mesmas condições observa-se um torque m vezes maior, a intensidade de corrente que existe neste caso teria de ser designada como m . Contudo, a natureza impraticável de tais unidades arbitrárias levou à unidade *absoluta*, e assim neste caso a unidade eletromagnética da intensidade de corrente é para ser ligada à unidade absoluta do magnetismo. Isto acontece por meio da seguinte especificação das *condições normais* para a observação das ações magnéticas de uma corrente:

A corrente flui através de um condutor circular [anel], que circunscreve a unidade de área, e age sobre um ímã que possui a unidade de magnetismo,²²⁷ a uma distância = R arbitrária, mas grande; o centro do ímã situa-se no plano do condutor, e seu eixo magnético está direcionado em direção ao centro do condutor circular.

Nessas condições, o torque D exercido pela corrente sobre o ímã, expresso de acordo com a unidade mecânica, varia dependendo do valor da intensidade da corrente, e também dependendo do valor da distância R ; *contudo*, o produto $R^3 D$ *depende apenas da intensidade de corrente*, e é, portanto, nestas condições, a ação *mensurável* da corrente, a saber, a ação através da qual é para ser medida a intensidade da corrente, de acordo com a qual obtemos portanto como *unidade magnética da intensidade de corrente*, a intensidade daquela corrente para a qual $R^3 D = 1$. — As leis eletromagnéticas afirmam que esta unidade da intensidade de corrente é também a intensidade daquela corrente que, ao circunscrever um plano de área unitária, exerce em todos os lugares distantes as ações de um ímã localizado no centro deste plano, que possui a unidade do magnetismo e cujo eixo magnético é perpendicular ao plano;²²⁸ — ou também, que é a intensidade da corrente pela qual um *galvanômetro tangencial*²²⁹ com um anel simples de raio = R , é mantido em equilíbrio com uma deflexão a partir do meridiano magnético dada por

²²⁶Em alemão: *Drehungsmoment*. Ver a Nota de rodapé 30 na página 23.

²²⁷Ver a Nota de rodapé 105 na página 72.

²²⁸Ou seja, esse ímã que possui a unidade de magnetismo possui um momento magnético igual a 1 unidade absoluta. Considere que esse ímã com momento magnético unitário, localizado no centro do plano e com seu eixo perpendicular ao plano, está atuando sobre um segundo ímã distante. Se substituirmos o primeiro ímã por uma espira com corrente, espira essa de área unitária perpendicular ao eixo do primeiro ímã, então essa corrente vai exercer forças e torques no segundo ímã distante que são iguais às forças e torques que eram exercidos pelo primeiro ímã, caso a intensidade da corrente na espira seja igual a uma unidade magnética de corrente.

²²⁹Ver a Nota de rodapé 36 na página 27.

$$\varphi = \arctan \frac{2\pi}{RT} ,$$

onde T denota a intensidade horizontal do magnetismo terrestre.²³⁰

Aqui novamente surge a questão natural sobre a relação da unidade *mecânica* com esta unidade *magnética*. Ou seja, a questão de saber quantas vezes a unidade eletrostática de eletricidade tem de atravessar a seção reta do circuito durante um segundo, para produzir aquela intensidade de corrente que ocasiona a deflexão φ mencionada anteriormente da agulha de um galvanômetro tangencial.

A mesma questão se repete ao considerar uma *terceira* unidade da intensidade de corrente, que é deduzida a partir das ações eletrodinâmicas da corrente e é, portanto, chamada de *unidade eletrodinâmica* da intensidade de corrente.²³¹

As três unidades obtidas pelas *ações* das correntes já foram comparadas entre si. É conhecido que a unidade magnética é $\sqrt{2}$ vezes maior do que a unidade eletrodinâmica, mas $106\frac{2}{3}$ menor do que a unidade eletrolítica,²³² e, por este motivo, com o objetivo de resolver a questão de como estas três unidades relacionam-se com a unidade *mecânica*, só é necessário comparar esta última [unidade mecânica] com *uma* das outras [unidades].

Este foi o objetivo do trabalho realizado, que deveria ser alcançado através da solução do seguinte

Problema:

Seja dada uma corrente constante, pela qual um galvanômetro tangencial com um anel multiplicador²³³ simples de raio $= R^{mm}$ é mantido em equilíbrio com uma deflexão $\varphi = \arctan \frac{2\pi}{RT}$, quando T é a intensidade do magnetismo terrestre horizontal afetando a bússola. Deve ser determinado como a quantidade de eletricidade que flui em tal corrente em um segundo através da seção reta do condutor relaciona-se com a quantidade de eletricidade em cada uma de duas esferas igualmente carregadas (infinitesimalmente) pequenas,²³⁴ que se repelem a uma distância de 1 milímetro com a unidade de força. Uma unidade de força é aquela força que fornece a uma massa de 1 miligrama uma velocidade de 1 milímetro em 1 segundo.

7.2 Solução Desse Problema

Se uma quantidade E de eletricidade livre é reunida em um condutor isolado e permite-se (inserindo uma coluna de água) que ela flua para a Terra através de um multiplicador, a

²³⁰Ou seja, essa é a deflexão constante da agulha magnética desse galvanômetro tangencial quando a agulha está sob a ação conjunta do magnetismo terrestre e da corrente elétrica fluindo no galvanômetro.

²³¹Essa unidade eletrodinâmica é definida a partir da força exercida entre dois condutores conduzindo correntes constantes.

²³²Ver [Web41c, pág. 17 das *Obras* de Weber] e [Web42] com tradução para o inglês em [Web21j]; [WK56, pág. 600 das *Obras* de Weber] com traduções para o inglês em [WK03, pág. 290] e [WK21, pág. 134], e tradução para o português em [WK08, pág. 96]; [KW57, págs. 614, 649 e 650 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [KW21, pág. 8]; [Web62, pág. 88 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web24, pág. 117]; e [Web64, pág. 165 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21a].

²³³Ver a Nota de rodapé 44 na página 33.

²³⁴Ou seja, duas partículas pontuais eletrizadas.

agulha magnética vai ser defletida.²³⁵ O valor da primeira deflexão depende, dados o mesmo multiplicador e a mesma agulha, *apenas da quantidade de eletricidade descarregada*, pois o tempo de descarga é tão curto, comparado com o período de oscilação, que o ação tem de ser considerada como um impulso.

Se uma corrente constante atravessa um multiplicador por tempo similarmente curto, a agulha recebe um impulso similar, e também neste caso, o valor da primeira deflexão depende *somente da quantidade de eletricidade* que atravessa a seção reta do fio do multiplicador durante a duração da corrente.

Agora, se ocorresse *exatamente a mesma* deflexão no mesmo multiplicador, em uma primeira vez descarregando a quantidade *conhecida* E de eletricidade livre, e em uma outra vez permitindo que uma *corrente constante* atuasse por um curto período de tempo, então, como pode ser provado, a quantidade de eletricidade positiva que fluiu através da seção reta durante este curto intervalo de tempo na corrente constante, na direção desta corrente, é igual a $E/2$.²³⁶

Consequentemente, o problema colocado requer a solução das duas tarefas a seguir:

(a) *Medir uma quantidade acumulada E de eletricidade livre com a unidade eletrostática dada, e observar a deflexão da agulha magnética quando a eletricidade é descarregada.*

(b) *Determinar o pequeno intervalo de tempo τ durante o qual uma corrente constante de intensidade $= 1$ ([medida] de acordo com a unidade magnética) tem de fluir através do multiplicador do mesmo galvanômetro, para fornecer à agulha a mesma deflexão.*

Se em seguida multiplicarmos $E/2$ pelo número que mostra quantas vezes τ está contido no segundo, então o número $E/2\tau$ expressará a quantidade de eletricidade positiva que, em uma corrente cuja intensidade $= 1$ de acordo com a unidade magnética, atravessa a seção reta do condutor na direção da corrente positiva em um segundo.

A tarefa (a) foi tratada da seguinte forma.

Em primeiro lugar, com a ajuda de um eletrômetro senoidal,²³⁷ foi determinada com a maior precisão a razão na qual a carga de uma pequena garrafa de Leiden foi dividida entre a própria garrafa e uma esfera de aproximadamente 13 polegadas coberta com uma folha de estanho, que estava suspensa longe das paredes da sala por um bom isolante, de tal forma que a partir da quantidade de eletricidade transferida para a esfera, assim que foi medida, também se pôde calcular até uma fração de um por cento a quantidade remanescente na pequena garrafa.

As observações consistiram no seguinte:

A garrafa [de Leiden] foi carregada, a grande esfera colocada em contato com sua extremidade externa; três segundos depois, a carga remanescente na garrafa foi descarregada através de um multiplicador²³⁸ consistindo de 5635 enrolamentos, pela inserção de dois longos tubos cheios com água, e foi observada a primeira deflexão φ da agulha magnética, que

²³⁵Isto é, inserindo uma coluna *condutora* de água, ou ligando o condutor à Terra através de um barbante umedecido, sendo que a corrente passa também por um galvanômetro, onde vai defletir sua agulha.

²³⁶O fator $1/2$ ocorre devido à concepção de corrente utilizada por Weber na qual quantidades iguais de cargas positivas e negativas fluem em direções opostas em relação ao condutor, como apresentada na página 146.

²³⁷Em alemão: *Sinus-Elektrometers*. Esse instrumento foi criado por R. Kohlrausch, ver [Koh53].

²³⁸[Nota de Weber e Kohlrausch:] O diâmetro médio do enrolamento foi de 266 milímetros; o fio de quase $2/3$ de milha de comprimento, muito bem revestido de seda, foi previamente passado através do colódio em

estava equipada com um espelho assim como no magnetômetro. Ao mesmo tempo, a grande esfera foi agora colocada em contato com a esfera fixa de aproximadamente 1 polegada de uma balança de torção²³⁹ construída em uma escala bem grande. Esta esfera fixa, colocada na balança de torção, compartilhou metade de sua carga recebida com a esfera móvel, o que tornou possível medir a torção necessária, decrescente em um longo período de tempo, para manter as duas esferas a uma distância completamente determinada e pré-definida. — A partir do coeficiente de torção do fio, obtido da maneira bem conhecida através de experiências de oscilação, e das [suas] dimensões determinadas precisamente, a quantidade de eletricidade ocorrendo em cada instante na balança de torção podia ser obtida na unidade absoluta necessária, levando em conta a distribuição não-uniforme de eletricidade nas duas esferas (esta consideração era recomendável devido ao tamanho não insignificante das esferas comparado com a distância entre elas). A diminuição observada na torção também forneceu a perda da eletricidade, de tal forma que foi possível, por meio desta consideração, afirmar quão grandes seriam estas quantidades, se elas pudessem já ter estado na balança de torção no momento em que a grande esfera foi carregada pela garrafa de Leiden. — Essa quantidade foi então transferida da esfera grande para a esfera fixa. A partir da medida precisa do raio destas esferas, foi possível calcular (de acordo com os trabalhos de Plana),²⁴⁰ a proporção da divisão de eletricidade entre elas, de tal forma que, através da medida na balança de torção, sem trabalho adicional, se soube qual a quantidade de eletricidade permaneceu na garrafa de Leiden após carregar a esfera grande e que foi descarregada 3 segundos depois através do multiplicador. Só foi necessária uma pequena correção devido à perda da carga disponível, que ocorreu durante estes 3 segundos devido a fugas para o ar e através da formação de resíduos.²⁴¹

Na Tabela seguinte estão reunidos os resultados de cinco experiências sucessivas. A coluna encabeçada por E contém as quantidades de eletricidade descarregada, a coluna encabeçada por s as deflexões correspondentes da agulha magnética em partes da escala,²⁴² e a coluna encabeçada por φ as mesmas deflexões, mas em arcos [de círculo] de raio = 1.

Número	E	s	φ
1.	36 060 000	73,5	0,005 708 7
2.	41 940 000	80,0	0,006 213 6
3.	49 700 000	96,5	0,007 495 2
4.	44 350 000	91,1	0,007 075 7
5.	49 660 000	97,8	0,007 596 2

A tarefa (b) requer que se conheça os intervalos de tempo τ , durante os quais uma corrente daquela intensidade denotada por 1 em unidade magnética de corrente, tem de fluir através do mesmo multiplicador, para ocasionar as deflexões φ observadas nas cinco experiências.

toda a sua extensão, enquanto que as laterais da caixa foram fortemente revestidas com lacre. Um poderoso amortecedor de cobre amorteceu as oscilações.

²³⁹[Nota de Weber e Kohlrausch:] A estrutura da balança de torção, em cujo centro foram colocadas as esferas, era na forma de um paralelepípedo com um comprimento de 1,16 metro, largura de 0,81 metro, e altura de 1,44 metro. O longo bastão de goma-laca, ao qual foi fixada a esfera móvel através de um braço lateral de goma-laca, permitia a observação da posição da esfera através de um espelho, e então afundava em um recipiente de óleo, através do qual as oscilações eram rapidamente amortecidas.

²⁴⁰Giovanni Antonio Amedeo Plana (1781-1864), ver [Pla45] e [Pla54].

²⁴¹Em alemão: *Rückstandsbildung*.

²⁴²Em alemão: *in Skalentheilen*. Ver a Nota de rodapé 22 na página 18.

O torque que é exercido por estas correntes sobre uma agulha magnética que é paralela aos enrolamentos do multiplicador está desenvolvido na *Segunda Parte das Medições Eletrodinâmicas* de W. Weber.²⁴³ Este torque é proporcional ao momento magnético da agulha e ao número de enrolamentos, mas além disto é uma função das dimensões do multiplicador e da distribuição dos fluidos magnéticos na agulha, para a qual é suficiente determinar a distância entre os centros de gravidade dos dois fluidos magnéticos, os quais, em lugar da distribuição real do magnetismo, podem ser pensados como distribuídos sobre a superfície da agulha. Com a agulha permanecendo sempre pequena comparada com o diâmetro do multiplicador, pode ser obtido com precisão suficiente um valor para esta distância a partir do tamanho da agulha, de tal forma que o designado torque D contenha como [valor] desconhecido apenas o momento magnético da agulha. — Se este torque agir durante um intervalo de tempo τ , que é muito curto comparado com o período de oscilação t da agulha, então a velocidade angular fornecida à agulha será expressa por

$$\frac{D}{K}\tau,$$

onde K significa o momento de inércia. A relação entre esta velocidade angular e a primeira deflexão φ leva então a uma equação entre τ e φ ,

$$\tau = \varphi \cdot A,$$

onde A significa uma constante conhecida que é composta de grandezas que podem ser medidas rigorosamente, a saber, $A = 0,020\,915$ se for utilizado o segundo como unidade de tempo.

Assim, se for perguntado por qual intervalo de tempo τ tem de fluir uma corrente constante de intensidade magnética de corrente = 1 através do multiplicador, para com isto produzir as cinco deflexões observadas anteriormente, só precisamos inserir seus valores nesta equação para τ .²⁴⁴ Desta forma os valores [de τ] em segundos resultam como

Número	τ
1.	0,000 119 4
2.	0,000 130 0
3.	0,000 156 8
4.	0,000 148 0
5.	0,000 158 9

Se agora dividirmos $E/2$ nas cinco experiências pelo τ correspondente, obteremos

Número	$\frac{E}{2\tau}$
1.	$151\,000 \cdot 10^6$
2.	$161\,300 \cdot 10^6$
3.	$158\,500 \cdot 10^6$
4.	$149\,800 \cdot 10^6$
5.	$156\,250 \cdot 10^6$

²⁴³[Web52c, Notas de rodapé nas págs. 360-365 e na pág. 454 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21c].

²⁴⁴Isto é, precisamos apenas inserir os valores das deflexões φ nesta equação para obter os valores correspondentes de τ .

Logo, na média:

$$\frac{E}{2\tau} = 155\,370 \cdot 10^6 .$$

Portanto, a *unidade mecânica da intensidade de corrente* está relacionada

$$\begin{aligned} &\text{à } \textit{magnética} \text{ assim como } 1 : 155\,370 \cdot 10^6,^{245} \\ &\text{à } \textit{eletrodinâmica} \text{ assim como } 1 : 109\,860 \cdot 10^6 \left(= 1 : 155\,370 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \right), \\ &\text{à } \textit{eletrolítica} \text{ assim como } 1 : 16\,573 \cdot 10^9 \left(= 1 : 155\,370 \cdot 10^6 \cdot 106\frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

7.3 Aplicações

Entre as aplicações que podem ser feitas ao reduzir as unidades usuais para a intensidade de corrente para a unidade mecânica, a mais importante é a determinação da constante que aparece na lei elétrica fundamental, englobando a eletrostática, a eletrodinâmica e a indução. De acordo com esta lei fundamental, a ação da quantidade de eletricidade e sobre a quantidade e' à distância r com velocidade relativa dr/dt e aceleração relativa d^2r/dt^2 é igual a²⁴⁶

$$\frac{ee'}{r^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr^2}{dt^2} - 2r \frac{d^2r}{dt^2} \right) \right] ,$$

e a constante c representa aquela velocidade relativa que as massas elétricas e e e' possuem e devem manter, se elas não são para agir mais uma sobre a outra.

Na Seção precedente encontrou-se a razão entre a unidade magnética e a unidade mecânica como sendo dada por:

$$= 155\,370 \cdot 10^6 : 1 ;$$

No Segundo Tratado sobre *Medições Eletrodinâmicas*, a mesma razão foi encontrada como sendo dada por:²⁴⁷

$$= c\sqrt{2} : 4 ;$$

a equalização dessas proporções resulta em:

$$c = 439\,450 \cdot 10^6$$

unidades de comprimento [por segundo], a saber, milímetros [por segundo], logo uma velocidade de 59 320 milhas por segundo.²⁴⁸

²⁴⁵Isto é, 1 unidade mecânica da intensidade de corrente está para 1 unidade magnética da intensidade de corrente assim como $1 : 155\,370 \cdot 10^6$.

²⁴⁶A próxima equação deve ser entendida como:

$$\frac{ee'}{r^2} \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - 2r \frac{d^2r}{dt^2} \right] \right\} .$$

²⁴⁷[Web52c, pág. 367 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21c].

²⁴⁸Ver a discussão sobre a constante c de Weber no Capítulo 19.

A inserção do valor de c na lei elétrica fundamental anterior torna possível perceber por qual motivo a ação eletrodinâmica das massas elétricas, a saber:

$$\frac{ee'}{r^2} \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr^2}{dt^2} - 2r \frac{d^2r}{dt^2} \right) ,$$

comparada com a [ação] eletrostática [dada por:]

$$\frac{ee'}{r^2} ,$$

sempre parece infinitesimalmente pequena, de tal forma que em geral a primeira [ação] só é perceptível quando, como no caso nas correntes galvânicas, as forças eletrostáticas são completamente anuladas em virtude da neutralização da eletricidade positiva e negativa.

Das aplicações restantes, só será descrito aqui brevemente a aplicação para a eletrólise.

Foi afirmado acima que em uma corrente que decompõe 1 miligrama de água em 1 segundo,

$$106 \frac{2}{3} \cdot 155\,370 \cdot 10^6$$

unidades positivas de eletricidade atravessam a seção reta da corrente em cada segundo, na direção da corrente positiva, e a mesma quantidade de eletricidade negativa [flui] na direção oposta.

O fato de que na eletrólise são movidas massas ponderáveis, que este movimento é produzido por forças elétricas que só atuam sobre a eletricidade, não diretamente sobre a água, leva à concepção de que, no átomo de água, o *átomo de hidrogênio* possui eletricidade livre positiva, [enquanto que] o *átomo de oxigênio* [possui] eletricidade livre negativa. Há muitas razões pelas quais não se quer pensar em um movimento de eletricidade na água sem [que esteja ocorrendo a] eletrólise, e pelas quais se assume que a água não é capaz de permitir que a eletricidade flua através dela [comportando-se] como um condutor [metálico]. Portanto, se vemos em um eletrodo a mesma quantidade de eletricidade positiva vindo da água quanto é fornecida ao outro eletrodo durante o mesmo intervalo de tempo pela corrente, então esta eletricidade positiva que se manifesta é aquela que pertencia às partículas de hidrogênio que foram decompostas.

Se assumirmos este ponto de vista, de tal forma que ligamos assim todo o movimento elétrico na eletrólise ao movimento dos átomos ponderáveis, então surgirá adicionalmente dos números obtidos acima, que os átomos de hidrogênio em 1 miligrama de água possuem

$$106 \frac{2}{3} \cdot 155\,370 \cdot 10^6$$

unidades de eletricidade positiva, os átomos de oxigênio [possuem] uma quantidade igual de eletricidade negativa.

Segue-se, em segundo lugar, que estas quantidades de eletricidade em conjunto representam o *mínimo de eletricidade neutra* contida em um miligrama de água. Ou seja, se os átomos da água ainda possuísem eletricidade neutra além de sua eletricidade livre, [uma questão] que pode ser deixada em aberto aqui, então a massa da eletricidade neutra em um miligrama de água seria ainda maior.²⁴⁹

²⁴⁹Isto é, nesse caso a quantidade de eletricidade positiva e negativa contida em 1 miligrama de água seria ainda maior do que essa.

Com estas suposições estamos também em posição de indicar a *força* com a qual a totalidade das partículas de hidrogênio de uma massa de água é impelida em uma direção, [enquanto que] a totalidade das partículas de oxigênio [é impelida] na direção oposta.

Imagine, por exemplo, um tubo cilíndrico de seção reta 10/9 milímetros quadrados, que é para servir como uma célula de decomposição, cheio com uma mistura de água e ácido sulfúrico com gravidade específica de 1,25, que assim contém 1 miligrama de água em cada segmento com 1 milímetro de comprimento. Com Horsford,²⁵⁰ conhecemos a razão entre a resistência específica desta mistura e a da prata, e com Lenz,²⁵¹ a razão entre a resistência da prata e a do cobre. Nos tratados da Königl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen (Sociedade Real de Ciências de Göttingen), (Vol. 5, “Über die Anwendung der magnetischen Induction auf Messung der Inclination mit dem Magnetometer — Sobre a aplicação da indução magnética às medições de inclinação com o magnetômetro”),^{252,253} a resistência do cobre está determinada de acordo com a unidade absoluta do sistema magnético. Isso também permite especificar, em *unidade magnética absoluta*, a resistência que a água (sob a influência da adição do ácido sulfúrico) exerce em um segmento com 1 milímetro de comprimento da célula de decomposição cilíndrica. Esta resistência, multiplicada pela intensidade da corrente expressa em unidade magnética, fornece a força eletromotriz em relação a esta pequena célula,²⁵⁴ novamente no sistema de unidade *magnético*. Contudo, a unidade *magnética* da força eletromotriz é tantas vezes menor do que a [unidade] *mecânica*, quanto a unidade magnética da intensidade de corrente é maior do que a unidade mecânica, e como esta última proporção é agora conhecida, aquela força eletromotriz calculada na unidade magnética pode ser transformada em unidade mecânica simplesmente dividindo por $155\,370 \cdot 10^6$. O número que resulta significa então a *diferença entre as duas forças* que agem na direção da corrente, das quais uma atua para mover *cada unidade* da eletricidade livre positiva nas partículas de hidrogênio, a outra para mover *cada unidade* da eletricidade livre negativa nas partículas de oxigênio e, portanto, para obter a *força efetiva total*, este número tem ainda de ser multiplicado pelo número de unidades de eletricidade livre positiva ou negativa contidas em uma célula de água com 1 milímetro de comprimento, isto é, em 1 miligrama de água, a saber, [precisa ser multiplicado] por

$$106\frac{2}{3} \cdot 155\,370 \cdot 10^6 .$$

Se fizermos os cálculos e assumirmos a intensidade de corrente na qual 1 miligrama de água é decomposta em 1 segundo, obteremos então uma diferença de força

$$= 2 \cdot \left(106\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 127\,476 \cdot 10^6 ,$$

na qual a unidade de força é aquela força que fornece a uma unidade de massa de 1 miligrama uma velocidade de 1 milímetro em 1 segundo. Assim, se dividirmos pela intensidade da gravidade = 9811, obteremos esta diferença de força expressa em peso

²⁵⁰Eben Norton Horsford (1818-1893), ver [Hor47] e [Sto88].

²⁵¹Heinrich Friedrich Emil Lenz (1804-1865), ver [Len38, pág. 119].

²⁵²[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. 2, pág. 319.

²⁵³[Web53e, pág. 319 das *Obras* de Weber], [Web53a] e [Web53c].

²⁵⁴Em alemão: *kleine Säule*. A palavra *Säule*, que pode ser traduzida como célula, coluna, pilha ou bateria, refere-se aqui à célula de decomposição cilíndrica.

$$= 2 \cdot 147\,830 \cdot 10^6 \text{ miligramas} = 2 \cdot 147\,830 \text{ quilogramas} = 2 \cdot 2956 \text{ quintais, }^{255}$$

sob a influência da gravidade.

Este resultado pode ser expresso da seguinte forma:

Se todas as partículas de hidrogênio em 1 miligrama de água em uma célula com 1 milímetro de comprimento fossem ligadas em um fio, e todas as partículas de oxigênio em um outro fio, então ambos os fios seriam esticados em direções opostas com o peso de 2956 quintais, para produzir uma decomposição da água em uma razão tal que 1 miligrama de água seria decomposta em 1 segundo.

Facilmente nos convencemos de que esta tensão permanece a mesma para uma célula com 1 milímetro de comprimento, porém com uma seção reta diferente, mas que ela é proporcional ao comprimento da célula, e também proporcional à intensidade da corrente, isto é, à velocidade da separação eletrolítica.

Se observarmos agora na célula de água descrita uma pressão total de um peso de 2956 quintais sobre as partículas de hidrogênio, e se não ocorrer nenhuma aceleração do movimento, movimento este que deveria, contudo, ir a 1759 milhões de milhas por segundo, mas que ao invés disto o hidrogênio continua com a velocidade constante de 1/2 milímetro por segundo, então seremos forçados a assumir que uma força estaria agindo contrária à decomposição da água, de tal forma que em geral só sobraria aquela velocidade de decomposição na qual a *força de resistência* é igual à força eletromotriz, de tal forma que sua ação sobre a totalidade das partículas de hidrogênio em um miligrama de água no caso anterior seria também igual ao peso de 2956 quintais. Isto é, naquele caso as partículas ponderáveis fluiriam uniformemente com a velocidade adquirida.

É natural procurar a origem para esta força de resistência nas *forças químicas de afinidade*. Embora o conceito de “*afinidade química*” permaneça muito indeterminado para que possamos ser capazes de deduzir dele como as forças procedendo desta afinidade aumentam com a *velocidade de separação*, contudo, é interessante observar as forças colossais que entram em operação em uma decomposição química, como as produzidas facilmente por eletrólise.

²⁵⁵Ver a Nota de rodapé 207 na página 142.

Capítulo 8

[Kohlrausch e Weber, 1857, ME4] Medições Eletrodinâmicas, Quarta Memória, Especialmente Atribuindo Unidades Mecânicas às Medidas de Intensidade de Corrente

Rudolf Kohlrausch e Wilhelm Weber^{256,257}

8.1 Medição da Intensidade de Corrente com Base na Observação de Ações Magnéticas, Eletrodinâmicas e Eletrolíticas

A intensidade de uma corrente elétrica é geralmente determinada pela observação de sua ação *magnética*, *eletrodinâmica* ou, finalmente, *eletrolítica*. Contudo, essas ações podem ser observados sob condições muito diferentes, e cabe ao observador escolher essas situações de tal maneira a fornecer a maior perfeição às suas observações, enquanto que as *leis eletromagnéticas*, *eletrodinâmicas* e *eletrolíticas* servem para *reduzir* entre si as ações que são observadas nas várias situações; já que é apenas ao *reduzir as observações às mesmas condições* que podemos obter uma *comparação das intensidades de corrente*. Ora, estas *mesmas condições*, às quais devem ser reduzidas todas as observações feitas sob condições diferentes, são chamadas de *condições normais*, e fixando estas *condições normais*, a *unidade da intensidade da corrente* é determinada de acordo com a seguinte regra:

A unidade de intensidade de corrente é a intensidade da corrente que, em condições normais, produz uma unidade de ação mensurável.

²⁵⁶[KW57] com tradução para o inglês em [KW21]. Ver também [WK68].

²⁵⁷As Notas de Kohlrausch e Weber são representadas por [Nota de Kohlrausch e Weber]; as Notas de Heinrich Weber, o editor do Volume 3 das *Obras* de Wilhelm Weber, são representadas por [Nota de Heinrich Weber]; as Notas de D. H. Delphenich, o tradutor da versão em inglês desse artigo, são representadas por [Nota de Delphenich]; todas as outras Notas são de minha autoria.

As condições normais para a observação das *ações magnéticas* de uma corrente são as seguintes. *A corrente flui através de um condutor circular que engloba uma unidade de área e atua sobre um ímã que possui uma unidade de magnetismo*²⁵⁸ *a uma distância R arbitrária, mas grande. O centro do ímã está situado no plano do condutor, e seu eixo magnético aponta para o centro do condutor circular.* — Sob essas condições, o torque D ²⁵⁹ que é exercido sobre o ímã pela corrente vai variar com a intensidade de corrente, e também com a distância R . Contudo, o produto R^3D depende apenas da intensidade de corrente e é, portanto, a *ação mensurável* da corrente sob essas condições, de modo que a *unidade de intensidade de corrente* é a intensidade daquela corrente cuja ação mensurável, nas condições descritas, é dada por:

$$R^3D = 1 .$$

Essa unidade de intensidade de corrente, que é então obtida a partir das *leis eletromagnéticas*, é ao mesmo tempo a intensidade daquela corrente que, quando flui em torno de um plano de área unitária, exerce à distância em todos os lugares as ações de um ímã localizado no centro desse plano, que possui a unidade de magnetismo e cujo eixo magnético é perpendicular ao plano.²⁶⁰ Alternativamente, ela é também a intensidade daquela corrente que vai equilibrar um galvanômetro tangencial²⁶¹ com um círculo multiplicador simples de raio igual a R quando há uma deflexão em relação ao meridiano magnético dada por:²⁶²

$$\varphi = \arctan \frac{2\pi}{RT} ,$$

onde T denota a componente horizontal do magnetismo terrestre.²⁶³

As condições normais para a observação das *ações eletrodinâmicas* de uma corrente são as seguintes. *A mesma corrente flui através de dois condutores circulares, cada um dos quais englobando uma unidade de área e estando a uma distância R arbitrária, mas grande, entre si. A linha de interseção dos dois planos circulares mutuamente perpendiculares divide ao meio o primeiro condutor circular.* — Sob essas condições, o torque D que a corrente no primeiro condutor exerce sobre a corrente que flui no segundo condutor vai variar com a intensidade de corrente e também com a distância R . Contudo, o produto R^3D depende apenas da intensidade de corrente e é, portanto, a *ação mensurável* da corrente sob essas condições, de modo que a *unidade da intensidade de corrente* é a intensidade daquela corrente cuja ação mensurável, nas condições descritas, é dada por:

$$R^3D = 1 .$$

²⁵⁸Ver a Nota de rodapé 105 na página 72.

²⁵⁹Ver a Nota de rodapé 30 na página 23.

²⁶⁰Considere um ímã com momento magnético = 1 nas unidades absolutas de Gauss e Weber que está atuando sobre um segundo ímã distante. Substituímos agora o primeiro ímã por uma espira plana que engloba uma área unitária perpendicular ao eixo magnético do primeiro ímã. Caso a corrente elétrica nessa espira tenha uma intensidade magnética de corrente = 1, ela vai exercer no segundo ímã as mesmas forças e torques que eram exercidas pelo primeiro ímã.

²⁶¹Ver a Nota de rodapé 36 na página 27.

²⁶²Ver a Nota de rodapé 44 na página 33.

²⁶³Ou seja, φ é o ângulo de deflexão da bússola localizada no centro do galvanômetro tangencial em relação ao meridiano magnético, sendo essa deflexão ocasionada pela corrente fluindo na espira única desse galvanômetro tangente. A bússola fica em equilíbrio nesse ângulo devido aos torques simultâneos exercidos pelo galvanômetro tangencial e pela componente horizontal do magnetismo terrestre.

As condições normais para a observação das *ações eletrolíticas* são as seguintes. *A corrente passa através da água por qualquer período de tempo precisamente mensurável T , sem sofrer uma mudança de intensidade.* — Sob essas condições, a massa M de água que é decomposta pela corrente, quando expressa de acordo com a unidade assumida de massa (miligrama), é diferente sob essas condições tanto de acordo com a diferença na intensidade de corrente quanto de acordo com a diferença no intervalo de tempo T (expresso em segundos). Contudo, o quociente M/T depende apenas da intensidade de corrente e é, portanto, a *ação mensurável* da corrente sob essas condições, de modo que a *unidade de intensidade de corrente* é a intensidade daquela corrente cuja ação mensurável, nas condições descritas, é dada por:

$$\frac{M}{T} = 1 .$$

Tudo o que falta para sermos capazes de comparar as intensidades de todas as correntes cujas ações *magnéticas*, *eletrodinâmicas* ou *eletrolíticas* foram observadas é relacionar entre si as três unidades que foram dadas pelas condições normais mencionadas.

Para as *duas primeiras unidades*, esse relacionamento resulta da *lei fundamental da eletrodinâmica* que, como Ampère demonstrou,²⁶⁴ incluem também as leis do magnetismo e do eletromagnetismo. A saber, resulta disso, como ficou comprovado no Segundo Tratado sobre *Medições Eletrodinâmicas*, pág. 261,^{265,266} que a *primeira* unidade está para a *segunda*

²⁶⁴Ver a Nota de rodapé 90 na página 66.

²⁶⁵[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 360.

²⁶⁶[Web52c, pág. 360 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21c].

unidade assim como:²⁶⁷

$$\sqrt{2} : 1 .$$

A *terceira* unidade pode ser reduzida à *primeira* unidade e, portanto, indiretamente também à *segunda*, através de observações simultâneas das ações *magnéticas* e *eletrolíticas* produzidas por uma mesma corrente. A saber, encontramos ao comparar as observações

²⁶⁷[Nota de Kohlrausch e Weber:] É interessante observar que poderia ser estabelecida uma identidade completa entre essas duas unidades se, nas *condições normais* já mencionadas para as *ações eletrodinâmicas*, o torque exercido pela corrente no *segundo* círculo sobre a corrente no *primeiro* círculo fosse substituído no lugar do torque exercido pela corrente no *primeiro* círculo sobre a corrente no *segundo* círculo. O motivo pelo qual isso não é feito, está simplesmente relacionado ao fato que a expressão fornecida por Ampère para a força de repulsão entre dois elementos de corrente deve permanecer inalterada, de tal forma que se α e α' denotam os comprimentos dos dois elementos, i e i' as intensidades de corrente, r a distância entre eles, ε o ângulo entre α e α' , ϑ o ângulo entre α e r , enquanto ϑ' é o ângulo entre α' e a extensão de r , então a força será representada por:

$$-\frac{\alpha\alpha'}{r^2}ii' \left(\cos \varepsilon - \frac{3}{2} \cos \vartheta \cos \vartheta' \right) ,$$

ou

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha\alpha'}{r^2}ii' (3 \cos \vartheta \cos \vartheta' - 2 \cos \varepsilon) .$$

Contudo, tudo que segue geralmente da *lei fundamental da eletrodinâmica* de Ampère é que essa força é *proporcional* a essa expressão e, portanto, quando deixamos indeterminada a unidade da intensidade de corrente, a própria força será representada pelo produto dessa expressão com uma constante arbitrária, sendo assim dada por:

$$-C \cdot \frac{\alpha\alpha'}{r^2}ii' \left(\cos \varepsilon - \frac{3}{2} \cos \vartheta \cos \vartheta' \right) ,$$

ou por

$$D \cdot \frac{\alpha\alpha'}{r^2}ii' (3 \cos \vartheta \cos \vartheta' - 2 \cos \varepsilon) ,$$

nas quais C ou D referem-se à constante já mencionada. Para determinar uma unidade específica da intensidade de corrente, Ampère atribuiu o valor $C = 1$ à constante C , ou o valor $D = 1/2$ à constante D , e dessa forma obteve a expressão mencionada para a força de repulsão entre dois elementos de corrente:

$$-\frac{\alpha\alpha'}{r^2}ii' \left(\cos \varepsilon - \frac{3}{2} \cos \vartheta \cos \vartheta' \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha\alpha'}{r^2}ii' (3 \cos \vartheta \cos \vartheta' - 2 \cos \varepsilon) ,$$

que reduz-se a:

$$-\frac{\alpha\alpha'}{r^2}ii'$$

para dois elementos de corrente que são paralelos a r e para os quais $\varepsilon = 0$ e $\vartheta = \vartheta' = 90^\circ$. Entretanto, para fins de consistência com as medições eletromagnéticas, teria sido mais apropriado colocar $D = 1$ ou $C = 2$, o que tornaria então a expressão para a força de repulsão entre dois elementos de corrente igual a:

$$\frac{\alpha\alpha'}{r^2}ii' (3 \cos \vartheta \cos \vartheta' - 2 \cos \varepsilon) = -2 \frac{\alpha\alpha'}{r^2}ii' \left(\cos \varepsilon - \frac{3}{2} \cos \vartheta \cos \vartheta' \right) ,$$

e para dois elementos de corrente que coincidem com r , [isto é, para dois elementos de corrente paralelos entre si a apontando ao longo da direção r ,] para os quais $\vartheta = \vartheta' = \varepsilon = 0$, essa força teria sido reduzida a:

$$\frac{\alpha\alpha'}{r^2}ii' .$$

reduzidas, sob as condições normais já mencionadas, que a *terceira* unidade de intensidade de corrente, ou a intensidade de corrente que vai decompor 1 miligrama de água em 1 segundo, é $106\frac{2}{3}$ vezes maior do que a *primeira* unidade,²⁶⁸ ou do que aquela intensidade de corrente que, quando ela flui ao redor de um plano com uma unidade de área, produz a grande distância em todo lugar os mesmos efeitos que um ímã colocado no centro da região plana que possui uma unidade de magnetismo e cujo eixo magnético é perpendicular ao plano. Ver os “Resultate aus der Beobachtungen des magnetischen Vereins in Jahre 1840,” pág. 96,^{269,270} e Casselmann, “Über die galvanische Kohlenzinkkette. Marburg, 1844,” pág. 70.²⁷¹

8.2 Unidade Mecânica da Intensidade de Corrente com Base nas Seguintes Causas: Velocidade de Deriva e Conteúdo de Eletricidade do Condutor de Corrente

Contudo, a intensidade de uma corrente elétrica pode ser determinada não apenas por suas *ações*, mas também por suas *causas*. As causas imediatas de uma corrente elétrica, entretanto, residem na massa do fluido elétrico neutro contido em um condutor fechado e na velocidade com que seus dois componentes, a saber, a massa do fluido *positivo* e *negativo*,²⁷² fluem simultaneamente em direções opostas. Com base nessa *causa*, a *unidade da intensidade da corrente* é determinada da seguinte forma:

A unidade da intensidade de corrente é a intensidade daquela corrente que é *produzida* por uma tal velocidade dos dois fluidos elétricos, pela qual a massa de cada fluido que atravessa a seção reta do condutor dividida pelo tempo durante o qual ela a atravessa, é igual a 1.

Essa medida é a *unidade mecânica da intensidade de corrente*, e é tarefa desse Tratado reduzir as unidades descritas na Seção anterior a esta unidade [mecânica], que se baseia mais simplesmente na natureza da corrente e, portanto, merece preferência sobre as outras unidades em determinações fundamentais.

De acordo com isso, a *mudança nas condições normais representaria as ações eletrodinâmicas da corrente* e, dessa maneira, seria obtida uma identidade completa entre a unidade *eletrodinâmica* da intensidade de corrente e a unidade *magnética*.

²⁶⁸Ver a Nota de rodapé 232 na página 148.

²⁶⁹[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 17.

²⁷⁰[Web41c, pág. 96 dos *Resultate*] e [Web42, pág. 17 das *Obras* de Weber], com tradução para o inglês em [Web21j].

²⁷¹[Cas43, pág. 70].

²⁷²O que Weber denomina aqui de massa do fluido positivo deve ser entendido com a quantidade de carga positiva do fluido elétrico, enquanto que a massa negativa refere-se à quantidade de carga negativa do fluido elétrico.

I - Redução das Unidades Magnética, Eletrodinâmica e Eletrolítica da Intensidade de Corrente para a Unidade Mecânica

8.3 Inexistência de Medição Eletrostática de uma Quantidade Acumulada de Eletricidade que Deve Ser Colocada em Movimento

Até o momento ainda não foram feitas tentativas para determinar as intensidades de corrente a partir de uma *unidade mecânica*, e muito menos qualquer tentativa de *reduzir* as intensidades de corrente que foram determinadas a partir das outras unidades para essa última [unidade mecânica]. Só sabemos que a *quantidade de eletricidade* que flui através da seção reta do circuito fechado mesmo com correntes fracas produzidas pelos menores meios galvânicos, deve ser muito grande, mesmo por um período de tempo muito curto, uma vez que a máquina eletrostática²⁷³ mais potente, cujo condutor está conectado ao dispositivo de atrito por um fio condutor, produz uma corrente muito mais fraca do que uma única célula galvânica conectada por um fio condutor de resistência muito alta.

A falta de determinações da intensidade de correntes por meio de *unidades mecânicas* deve-se às dificuldades encontradas na sua execução, enquanto a determinação de intensidades de corrente pelas outras unidades mencionadas anteriormente é muito fácil e admite um grau de precisão muito maior. As últimas unidades sempre serão a primeira escolha a ser colocada *em prática*, e lidaremos essencialmente com o fato de que uma intensidade de corrente que é conhecida por meio de uma das últimas unidades precisa ser medida *uma única vez* tão precisamente quanto possível, com o objetivo de obter a razão do valor da *unidade mecânica* em relação ao valor de uma dessas unidades e, dessa maneira, nos encontrarmos na situação de *reduzir a unidades mecânicas* todas as determinações que foram feitas nessas [últimas] unidades.

Para tal medição nos falta, acima de tudo, qualquer conhecimento da *quantidade de eletricidade* em um condutor fechado que conduz uma corrente ou, em vez disso, como esse conhecimento não pode ser obtido enquanto a corrente está fluindo, [nos falta] um conhecimento da *quantidade de eletricidade que é transferida pela corrente, e que foi acumulada anteriormente, por exemplo, em uma garrafa de Leiden*.²⁷⁴ Para fazer isso, possuímos apenas os procedimentos e métodos excelentes para medir a eletricidade devidos a Coulomb,²⁷⁵ que, no entanto, nunca foram usados para medir a eletricidade acumulada em uma garrafa

²⁷³Em alemão: *Elektrisirmaschine*. Essa expressão pode ser traduzida como máquina eletrostática ou gerador eletrostático. É um gerador eletromecânico que produz eletricidade estática, ou eletricidade em alta tensão, por meio do atrito, ou seja, pelo efeito triboelétrico.

²⁷⁴Ver a Nota de rodapé 201 na pág. 140.

²⁷⁵Ver a Nota de rodapé 89 na página 66.

carregada de Leiden.^{276,277}

A questão da *quantidade de eletricidade* acumulada em uma garrafa de Leiden tem sido frequentemente levantada. Se for completamente resolvida, e a *quantidade de eletricidade* tiver sido determinada pelas forças que é capaz de exercer, isso não será uma mera questão de curiosidade, mas está vinculada a determinações importantes, que atualmente ainda faltam na teoria da eletricidade e que poderiam abrir caminho para investigações interessantes.²⁷⁸

De qualquer forma, essa questão relacionada à quantidade de eletricidade em uma garrafa de Leiden tem uma relação especial com as *medições eletrodinâmicas* que merece ser examinada em mais detalhe. Foi apresentada na Primeira Parte dessa série de artigos sobre [medições] eletrodinâmicas uma lei fundamental da ação elétrica que inclui simultaneamente a *eletrostática*, a *eletrodinâmica* e a *indução*.²⁷⁹ De acordo com essa lei fundamental, a força que a massa elétrica e exerce sobre a massa elétrica e' na distância r não é apenas função da *distância*, sendo ao mesmo tempo uma função do estado relativo de movimento das duas massas elétricas que é dado pela *velocidade relativa*, dr/dt , e *aceleração*, d^2r/dt^2 , com a qual elas passam pela distância r . Essa lei fundamental da ação elétrica é:²⁸⁰

$$\frac{ee'}{r^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr^2}{dt^2} - 2r \frac{d^2r}{dt^2} \right) \right] ,$$

na qual a *constante* c significa a *velocidade relativa na qual as massas elétricas não exerceriam ação entre si, enquanto essa velocidade relativa permanecesse inalterada*. No Segundo

²⁷⁶[Nota de Kohlrausch e Weber:] Nos *Annalen der Chemie und Physik*, Vol. 86, pág. 33, Buff encontrou, com o auxílio de seu galvanômetro tangencial e longos fios condutores, que a quantidade de eletricidade pela qual 1 miligrama de hidrogênio é eletricamente decomposto de 9 miligramas de água, se possuíssemos os meios para comprimi-lo, seria suficiente para carregar uma bateria de 45480 garrafas de Leiden, [cada uma] de 480 milímetros de altura e 160 milímetros de diâmetro, até um intervalo de faísca de 100 milímetros. A determinação de Buff é a melhor e mais precisa que existe, mas ela ainda não é suficiente para determinar a *quantidade de eletricidade* que está contida nessa garrafa, sendo que para isso, a partir dos *princípios mecânicos*, é necessário um conhecimento da *força de repulsão* que essa *quantidade de eletricidade*, quando concentrada em um ponto, exerceria sobre uma quantidade igual de eletricidade que também está concentrada em um ponto a uma grande distância dela. No entanto, ainda há uma falta de conhecimento dessa *força de repulsão*, e nenhuma tentativa ainda foi feita para obter um conhecimento sequer aproximado dela com os múltiplos meios e métodos indicados por Coulomb e outros para medir tais forças.

²⁷⁷Esse artigo de Buff foi publicado nos *Annalen der Chemie und Pharmacie* editados por J. F. v. Liebig (1803-1873), F. Wöhler (1800-1882) e H. F. M. Kopp (1817-1892), e não nos *Annalen der Chemie und Physik* editados por J. C. Poggendorff (1824-1876): [Buf53, pág. 33].

²⁷⁸[Nota de Kohlrausch e Weber:] Em primeiro lugar, se considerarmos que a maioria das aplicações das leis da natureza dependem da determinação do valor de certas constantes, aí pertence a determinação das *constantes desconhecidas da teoria da eletricidade*, que depende em grande parte da solução da questão anterior. — É também muito provável que a determinação da eletricidade necessária para a *decomposição da água*, pelas forças que ela é capaz de exercer, possa ser usada na investigação das forças que atuam na decomposição da água; e que, da mesma forma, uma determinação da quantidade de eletricidade pela qual um fio *é feito brilhar* em um determinado período de tempo, pelas *forças* que ele é capaz de exercer, levaria a uma compreensão mais detalhada das forças que operam na produção de calor, etc. Na Segunda Parte [desse Tratado] algumas destas aplicações serão discutidas com mais detalhes.

²⁷⁹[Web46] com tradução parcial para o francês em [Web87] e traduções completas para o inglês em [Web07] e [Web21b].

²⁸⁰A próxima equação deve ser entendida como:

$$\frac{ee'}{r^2} \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - 2r \frac{d^2r}{dt^2} \right] \right\} .$$

Tratado dessa série,²⁸¹ foi então mostrado como a determinação do valor dessa *constante c* poderia fornecer a possibilidade de reduzir não apenas as unidades das forças eletromotrizes, mas também as unidades das intensidades de corrente, para as *unidades da mecânica*, e isso por si próprio vai fornecer a relação pela qual a *constante c* vai nos permitir determinar a *quantidade de eletricidade* que atravessa a seção reta do condutor na unidade de tempo em termos da unidade de medida da intensidade de corrente que é baseada nas ações magnéticas e eletrodinâmicas da corrente. Inversamente, o conhecimento adquirido de outras maneiras dessa *quantidade de eletricidade* também levaria a uma determinação do valor da *constante c*, que é trazida à nossa atenção pela lei fundamental anterior. A determinação de uma tal *constante* da natureza é um tópico que é especialmente apropriado para uma medição mais precisa. No presente caso, essa determinação pode ser reduzida ao seguinte problema.

8.4 Problema: Determinar Eletrostaticamente a Quantidade de Eletricidade que Flui Através da Seção Reta de um Condutor em 1 Segundo de Acordo com a Unidade Magnética de Intensidade de Corrente

Problema.

Deve ser determinada a *quantidade de eletricidade* que, no caso de uma corrente cuja intensidade possui uma unidade de medida baseada na ação *magnética*, *eletrodinâmica* ou *eletrolítica*, passa pela seção transversal do condutor na unidade de tempo, e esta quantidade de eletricidade deve ser determinada *pela magnitude da força eletrostática fundamental exercida por ela*; ou mais especificamente:

Seja dada uma corrente constante,²⁸² a partir da qual um galvanômetro tangencial com um círculo multiplicador simples de raio = R fica em equilíbrio com uma deflexão $\varphi = \arctan 2\pi/RT$, onde T denota a intensidade horizontal do magnetismo terrestre direcionando a bússola. Deve-se determinar como a quantidade de eletricidade que, com tal corrente, flui através da seção transversal do condutor em 1 segundo, se relaciona com a quantidade de eletricidade em cada uma das duas pequenas esferas igualmente eletrizadas, que se repelem na unidade de distância com a unidade de força. A unidade de força deve ser considerada aquela força que fornece à massa de um miligrama uma unidade de velocidade em 1 segundo.

A partir de nossa determinação anterior, a *corrente* dada é aquela que vai exercer exatamente as mesmas ações à distância que um ímã que possui uma unidade de momento magnético quando ela flui ao redor de uma região plana com uma unidade de área;²⁸³ isto é, a corrente cuja intensidade é usualmente escolhida entre todas as correntes como sendo

²⁸¹[Web52c] com tradução para o inglês em [Web21c].

²⁸²Com intensidade = i .

²⁸³ver a Nota de rodapé 105 na página 72.

aquela que possui a unidade de intensidade ao observá-la com um galvanômetro tangencial, e a *quantidade de eletricidade* que está presente em cada uma das pequenas esferas é a quantidade que estamos acostumados a designar como sendo a unidade de medida para as medições eletrostáticas com a balança de torção de Coulomb.²⁸⁴

8.5 Planejamento para Resolver o Problema — Medição Eletrostática da Quantidade de Eletricidade Acumulada em uma Garrafa de Leiden — Medição Eletromagnética da Corrente Gerada pela Descarga da Garrafa

Planejamento para Resolver o Problema.

Se a *quantidade de eletricidade* E que foi coletada em um condutor isolado for descarregada para a Terra através do multiplicador de um galvanômetro, ela exercerá então um torque sobre a agulha magnética do galvanômetro enquanto ela flui através dele. Mesmo que o *tempo de descarga* tenha sido prolongado tanto quanto necessário pela inserção de colunas de água no caminho da corrente, de modo que nenhuma faísca salte entre os enrolamentos do multiplicador, mas todos os enrolamentos sejam atravessados pela corrente de descarga um após o outro, ainda assim este *tempo de descarga* será uma fração extremamente pequena do *período de oscilação* da agulha magnética, de modo que a parte do caminho que a agulha percorre durante este *tempo de descarga* (ou seja, durante a ação da corrente de descarga) é insignificamente pequena em comparação com todo o caminho da agulha, isto é, em relação ao valor da *elongação* que a agulha atinge após o decurso de *meio período de oscilação*. A ação da corrente de descarga pode então ser considerada com sendo um *impulso* que a agulha sofreria em sua posição de repouso, após o qual, a partir da *observação da elongação inicial da agulha após a descarga*, a *velocidade angular* transmitida pela corrente de descarga à agulha no momento do próprio impulso pode ser calculada a partir das leis conhecidas de oscilação.

Aliás, tudo aqui é exatamente igual a um *impulso de indução*,²⁸⁵ também no sentido de que a natureza da corrente de descarga é completamente irrelevante, quer ela consista em muitas descargas parciais separadas que se seguem umas às outras em rápida sucessão, quer seja contínua com uma intensidade que decai rapidamente a zero de acordo com alguma lei. *A velocidade angular transmitida à agulha sempre dependerá inteiramente da quantidade E de eletricidade.*²⁸⁶

Podemos fornecer à agulha do galvanômetro um *impulso* similar por meio de uma *corrente*

²⁸⁴Ver a Nota de rodapé 89 na página 66.

²⁸⁵Ver a Nota de rodapé 168 na página 126.

²⁸⁶[Nota de Kohlrausch e Weber:] Esse fato é confirmado em todas as experiências. Como mostrado nos experimentos do Apêndice II (entre outras coisas), a elongação não é apenas proporcional à *quantidade da eletricidade* descarregada, mas é também independente do *tempo de descarga*, dentro de amplos limites; pois não faz diferença quão longa ou curta é a coluna de água que inserimos, desde que os enrolamentos do multiplicador não sejam saltados [por faíscas], ou que o tempo de descarga seja estendido de tal maneira, que a ação da corrente de descarga ainda continue mesmo quando a agulha já tiver perceptivelmente se afastado da posição de repouso.

constante quando deixamos a corrente atuar apenas por um tempo muito curto e, de fato, a elongação inicial será a mesma quer a corrente tenha uma intensidade i durante o tempo t , ou tenha uma intensidade maior ni durante um tempo menor t/n . A saber, se a duração t da corrente for muito curta comparada com o período de oscilação da agulha, então a *velocidade angular* será sempre a mesma.²⁸⁷ Contudo, a mesma *quantidade de eletricidade* vai atravessar a seção reta do condutor no tempo t com uma intensidade i , que aquela quantidade que flui através dela no tempo t/n com uma intensidade ni .

Portanto, quando fornecemos um *impulso* à agulha por meio de uma *corrente constante de curta duração*, a *velocidade angular* da agulha (e, conseqüentemente, também sua *elongação*) vai depender nesse caso *apenas da quantidade de eletricidade que atravessou a seção reta do multiplicador durante a duração da corrente*.

Agora, se tivermos descarregado uma quantidade E conhecida de eletricidade positiva através do mesmo multiplicador *em um caso* e tivermos produzido a *mesma elongação da agulha magnética* por meio de uma corrente constante de duração muito curta *no outro caso*, então poderemos concluir que *a quantidade x de eletricidade positiva que atravessa a seção reta do condutor durante a curta duração da corrente será:*

$$x = \frac{1}{2}E ,$$

que é um resultado cuja validade podemos facilmente nos convencer, qualquer que seja a ideia que se tenha do que acontece dentro dos condutores durante a descarga.

Se, por exemplo, assumirmos na descarga que *toda* a quantidade *positiva* acumulada de eletricidade E fluiu através de *todo* o multiplicador apenas na direção da Terra, ou que uma quantidade *igual* de eletricidade *negativa* fluiu somente na direção oposta a partir da Terra, então a ação magnética de tal *corrente de descarga* seria exatamente igual à ação de uma corrente na qual apenas *metade* dessa quantidade positiva de eletricidade fluiu na direção indicada através de cada seção transversal do condutor, mas ao mesmo tempo, uma quantidade negativa igual de eletricidade fluiu na direção oposta, um processo que se supõe acontecer com essa *corrente constante*. — Mas se alguém fosse da opinião oposta, ou seja, que absolutamente nada da eletricidade E acumulada no próprio condutor isolado (e tão pouco disso na Terra) flui através de todos os enrolamentos do multiplicador, mas que ela vai apenas *dar origem* a uma corrente dupla nos fios contendo massas tão grandes de fluido neutro que um deslocamento muito pequeno dessas massas é suficiente para introduzir tanta eletricidade negativa no condutor isolado que a eletricidade positiva E acumulada nele seja neutralizada, então o mesmo resultado seria obtido; pois todo o fio de descarga pode ser dividido em um número muito grande de pequenos pedaços tal que a quantidade de eletricidade $+\frac{1}{2}E$ fluiria de cada pedaço para o *próximo* pedaço, enquanto que $-\frac{1}{2}E$ fluiria para o pedaço *anterior* e, conseqüentemente, uma quantidade de eletricidade $+\frac{1}{2}E$ fluiria do último pedaço para a Terra, que iria substituir o primeiro pedaço do fio com o condutor isolado, enquanto que a quantidade de eletricidade $-\frac{1}{2}E$ fluiria para fora do primeiro pedaço para dentro do condutor isolado e neutralizaria a eletricidade que permanece nele, mas que vai substituir o último pedaço do fio com a Terra. — Finalmente, se também fôssemos forçados a supor que um

²⁸⁷[Nota de Kohlrausch e Weber:] A *aceleração* transmitida a uma agulha, cujo momento magnético é M e cujo momento de inércia é K , por uma *corrente constante* de intensidade i , desde que a direção de seu eixo magnético se desvie pouco do plano dos enrolamentos multiplicadores, é $= AMi/K$, onde A denota uma constante dependente das dimensões do multiplicador e da distribuição do magnetismo da agulha. Segue disso que a *velocidade angular* que ela adquire durante o tempo t será igual a $AMit/K$, cujo valor vai permanecer inalterado quando i é substituído por ni e, simultaneamente, t é substituído por t/n .

pouco mais da metade da quantidade positiva E de eletricidade passou do condutor isolado para o fio e, conseqüentemente, um pouco menos de $-\frac{1}{2}E$ da eletricidade negativa passou na direção oposta do fio para o condutor isolado, isso também não altera nada nos resultados, porque a ação magnética é condicionada pela soma das duas eletricidades em movimento.

O impulso que a agulha sofre quando a *quantidade acumulada de eletricidade E é descarregada* através do multiplicador será *exatamente o mesmo* que ocorre quando uma *corrente constante* flui através do multiplicador em um intervalo de tempo τ de tal forma que precisamente *metade* de E atravessa a seção reta na direção da corrente *como eletricidade positiva* e a mesma quantidade flui na direção oposta *como eletricidade negativa*, assumindo que o intervalo de tempo τ representa apenas uma parte muito pequena do período de oscilação da agulha.

A solução para o problema se resume aos *dois pontos* a seguir:

1. Medir a quantidade de eletricidade E na unidade eletrostática dada e observar a elongação da agulha magnética de um galvanômetro quando ela for descarregada.
2. Determinar o pequeno tempo τ durante o qual uma corrente constante de intensidade igual a 1 (em unidades magnéticas) tem de fluir através do multiplicador desse galvanômetro para que a agulha adquira a mesma elongação.

Se multiplicarmos então $\frac{1}{2}E$ pelo número que mostra quão frequentemente τ está incluído em um segundo, então $E/2\tau$ expressará a *quantidade de eletricidade positiva* que atravessa a seção reta do condutor durante um segundo na direção de uma corrente cuja intensidade é igual a 1 em unidades magnéticas. Em outras palavras:

$$\frac{1}{2\tau} \cdot E : 1$$

é a razão entre essa *quantidade de eletricidade positiva* que atravessa essa seção reta e aquela que foi considerada como unidade de medida da quantidade de eletricidade E acumulada no condutor isolado, a saber, a quantidade que tem de ser encontrada em cada uma de duas pequenas esferas para que elas sejam repelidas entre si com uma força igual a 1 quando estão a uma distância igual a 1.

No que diz respeito ao *segundo* ponto, a determinação de τ não requer experiência especial, pois o valor de τ pode ser determinado por cálculo a partir do número e dimensões dos enrolamentos do multiplicador, da elongação do galvanômetro tangencial que é observada na descarga, e da intensidade do magnetismo terrestre de maneira muito mais precisa do que seria possível por uma experiência direta, como veremos na Seção 8.13.

Contudo, o *primeiro* ponto, que lida com a determinação da quantidade de eletricidade E , necessita de uma combinação de várias experiências, que serão descritas nas Seções 8.6 até 8.12. Tratava-se, *em primeiro lugar*, de dividir uma quantidade maior ainda desconhecida de eletricidade em duas partes em uma proporção *pré-determinada*, e então *descarregar* a maior parte E através do galvanômetro tangencial para observar sua ação magnética, e, *finalmente*, medir a *menor* parte pela força elétrica exercida por ela na balança de torção de Coulomb a fim de descobrir a parte E descarregada medida de acordo com a mesma unidade.

Uma *garrafa de Leiden* cuja cobertura externa estava conectada à Terra de maneira bem condutiva, parecia ser mais conveniente como um recipiente para aquela quantidade de eletricidade cuja parte E não devia ser insignificante caso sua descarga tivesse de produzir uma ação precisamente mensurável sobre a agulha do galvanômetro tangencial. Portanto

(Seção 8.6), investigou-se em primeiro lugar a *razão* em que a *carga positiva dessa garrafa* era dividida entre ela e *uma grande esfera isolada*, quando essa última [esfera] era tocada com o botão da garrafa. Com a ajuda do *eletrômetro senoidal*,²⁸⁸ foi determinada a razão $n : 1$ em que a carga da garrafa *antes* do toque com a esfera grande estava para sua carga *depois* [do contato], da qual resultou a razão $1 : (n - 1)$, na qual a quantidade de eletricidade E restante na garrafa estava para aquela [quantidade de eletricidade] que foi transferida para a esfera.

Após uma determinação precisa desta *razão*, que foi repetida várias vezes, avançou-se na medição da quantidade de eletricidade transferida para a grande esfera após tal divisão, no final da qual a grande esfera, imediatamente após a carga ter ocorrido pelo contato com a garrafa de Leiden, foi tocada novamente com a *esfera estacionária* de 1 polegada de uma *balança de torção* de Coulomb feita em grande escala. Como mostrado por Poisson e Plana,²⁸⁹ a razão pela qual a eletricidade é dividida entre essas duas esferas pode ser calculada a partir da razão entre seus raios. Isso será feito na Seção 8.8, de onde a carga que a *grande esfera* recebeu da garrafa de Leiden pode ser encontrada a partir da quantidade de eletricidade e que é transferida para a *esfera fixa da balança de torção*, e então também pode ser encontrada a quantidade que permanece na garrafa de Leiden, que será utilizada para a *corrente de descarga* cuja *ação magnética* é para ser observada.

Entretanto, a quantidade de eletricidade e foi medida depois que a *esfera estacionária* da balança de torção de Coulomb, na qual ela estava contida, ter sido tocada pela *esfera móvel* do mesmo tamanho, e assim e foi dividido igualmente entre essas duas esferas. A saber (Seção 8.7), ao observar a diminuição gradual na torção que seria necessária para manter as duas esferas a uma *distância bem definida* entre si, era então calculada a torção que teria sido necessária no primeiro instante de tempo, se da mesma maneira o carregamento da grande esfera através da garrafa de Leiden, o carregamento da esfera fixa através da grande [esfera], e [o carregamento] da esfera móvel através da esfera fixa, pudessem ter ocorrido ao mesmo tempo em que observamos a torção. — Encontraremos na Seção 8.9 o cálculo da *quantidade de eletricidade* ε que, dividida igualmente entre as duas esferas da balança de torção, à mesma distância, exerceria *uma unidade de torque* na balança, levando em consideração a distribuição desigual da eletricidade nas superfícies das esferas. — Encontraremos na Seção 8.10 a determinação da *torção* da balança de torção que da mesma maneira exerceria *uma unidade de torque* sobre a balança a partir de várias observações. — Com o auxílio das determinações que estão contidas nas Seções 8.9 e 8.10, pode ser facilmente determinada a própria quantidade de eletricidade e a partir da torção que foi encontrada na Seção 8.7, e então também a quantidade [de eletricidade] que permanece na garrafa de Leiden, o que será feito na Seção 8.11, onde essa última [quantidade de eletricidade] será denominada por E' , para distingui-la da quantidade de eletricidade E que é utilizada pela corrente de descarga cuja *ação magnética* é para ser determinada. — No curto intervalo de tempo entre o momento da divisão [da carga] até o momento da descarga, a eletricidade que permanece na garrafa de Leiden vai ser modificada, a saber, uma pequena parte da carga na garrafa será perdida para o ar, e parte dela será perdida devido a uma mudança no *resíduo*²⁹⁰ na garrafa. Embora essa mudança tenha sido extremamente pequena durante um intervalo tão curto de apenas cerca de 3 segundos e para a excelente qualidade da garrafa escolhida para essas experiências, ela é, no entanto, levada em consideração nos cálculos da Seção 8.12, de

²⁸⁸Ver a Nota de rodapé 237 na página 149.

²⁸⁹Ver as Notas de rodapé 89 e 240 nas páginas 66 e 150.

²⁹⁰Ver a Nota de rodapé 241 na página 150.

onde veremos pelo menos como a mudança $E - E'$ seria determinada para outras garrafas e para intervalos de tempo maiores.

Finalmente, com o auxílio da determinação do [tempo] τ que está contida na Seção 8.13 e mencionado na página 233,^{291,292} será calculada na Seção 8.14 a grandeza $\frac{1}{2\tau} \cdot E$, e com isso será solucionado o problema apresentado anteriormente. As Seções seguintes contêm principalmente *aplicações*, incluindo a determinação da *constante c*, que foi mencionada diversas vezes.

Os dois *Apêndices* incluem descrições mais precisas da *balança de torção* e do *galvanômetro tangencial*, para uma descrição do *eletrômetro senoidal*, ver os *Annalen* de Pogendorff, Vol. 88 (1853).²⁹³

Com base na concordância satisfatória entre todas as experiências publicadas sem seleção (dentre as quais aquelas que serão analisadas nas Seções 8.6 e 8.7 foram as mais difíceis), pode-se concluir que o resultado pode ser considerado acurado com precisão de 1 a 2 por cento. O cálculo foi feito com uma precisão ainda maior para que a determinação da incerteza nos resultados dependesse apenas do valor dos erros inevitáveis de observação.

8.6 Determinação da Razão na Qual a Eletricidade é Dividida entre o Revestimento Interior de uma Garrafa de Leiden e uma Grande Esfera, enquanto o Revestimento Exterior da Garrafa está Conectado à Terra

A próxima Tabela fornece os resultados de duas séries de observações que foram realizadas com o *eletrômetro senoidal* da diminuição na carga de uma garrafa de Leiden, comunicando-a com uma grande esfera descarregada que foi tocada com o botão da garrafa enquanto o revestimento externo da garrafa estava conectado à Terra por um bom condutor.

A garrafa de Leiden estava previamente conectada ao eletrômetro senoidal com um fio condutor cuja extremidade foi colocada em uma pequena reentrância feita no botão da garrafa. Uma vez que a posição do eletrômetro senoidal tenha sido observada, essa extremidade do fio condutor era levantada com uma linha de seda, e então a grande esfera conectava o botão da garrafa, enquanto que o exterior da garrafa sempre estava conectado à Terra por um condutor. Quando tocados duas, três ou quatro vezes, os toques individuais se sucederam tão rapidamente quanto permitia a descarga completa da grande esfera entre esses contatos. Se o eletrômetro senoidal, que entretanto havia sofrido apenas uma pequena perda para o ar, fosse então reconectado à garrafa por meio do fio condutor isolado preso por uma linha de seda, então a agulha do eletrômetro, que estava inicialmente em repouso, seria defletida apenas ligeiramente dessa maneira, pois a garrafa havia perdido relativamente pouco de sua carga ao tocar a esfera e porque essa perda é aproximadamente compensada pela perda comparativamente ainda menor para o ar que a garrafa sofre em comparação com o eletrômetro senoidal, o que explica o curto período de tempo em que, especialmente no final de cada série de testes, as medições individuais poderiam ser realizadas.

²⁹¹[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 621.

²⁹²[KW57, pág. 621 das *Obras* de Weber], ver também a página 167 na Seção 8.5.

²⁹³Ver a Nota de rodapé 237 na página 149.

Não foi possível determinar o momento exato de cada contato individual, e a informação contida na Tabela seguinte baseia-se, portanto, em uma mera estimativa, que pode, no entanto, ser considerada confiável dentro de 1 a 2 segundos, uma precisão que foi suficiente aqui. Ambas as séries foram feitas em 2 de abril de 1854 no Instituto de Física de Göttingen.

Primeira Série			
Número	Horário	Deflexão da agulha no eletrômetro senoidal	n
1.	8 ^h 49'54"	32° 36, 2'	
2.	50'0"	(contato quádruplo)	1,0324
3.	51'25"	24° 13, 7'	
4.	53'46"	23° 31, 3'	
5.	53'52"	(contato quádruplo)	1,0299
6.	54'42"	17° 45, 6'	
7.	58'56"	14° 49, 3'	
8.	59'2"	(contato quádruplo)	1,0167
9.	59'55"	12° 47, 6'	
10.	9 ^h 2'7"	12° 34, 3'	
11.	2'13"	(contato quádruplo)	1,0325
12.	2'50"	9° 41, 7'	
13.	4'12"	9° 41, 7'	
14.	4'18"	(contato quádruplo)	1,0355
15.	4'53"	7° 21, 3'	
16.	7'22"	7° 30, 2'	
17.	7'28"	(contato quádruplo)	1,0311
18.	8'9"	5° 51, 2'	
19.	10'7"	4° 48, 3'	
20.	10'13"	(contato quádruplo)	1,0305
21.	10'51"	4° 32, 9'	

Segunda Série			
Número	Horário	Deflexão da agulha do eletrômetro senoidal	n
1.	9 ^h 40'7"	46° 30, 5'	
2.	41'57"	44° 9, 0'	
3.	42'0"	(contato simples)	1,0330
4.	42'23"	40° 23, 9'	
5.	44'0"	39° 10, 5'	
6.	44'3"	(contato simples)	1,0308
7.	44'23"	36° 15, 7'	
8.	46'24"	35° 11, 7'	
9.	46'27"	(contato simples)	1,0379
10.	46'51"	32° 24, 6'	
11.	48'24"	32° 46, 6'	
12.	48'27"	(contato simples)	1,0490
13.	48'51"	29° 21, 1'	
14.	51'41"	28° 31, 0'	
15.	51'44"	(contato simples)	1,0390
16.	52'9"	26° 14, 2'	
17.	52'52"	26° 14, 2'	
18.	52'55"	(contato simples)	1,0375
19.	53'25"	24° 14, 7'	
20.	58'30"	19° 41, 9'	
21.	9 ^h 58'33"	(contato simples)	1,0303
22.	59'1"	18° 27, 6'	
23.	10 ^h 5'52"	17° 42, 6'	
24.	5'56"	(contato duplo)	1,0328
25.	6'28"	15° 30, 1'	
26.	7'14"	15° 30, 1'	
27.	7'19"	(contato triplo)	1,0338
28.	7'45"	12° 38, 7'	
29.	10'13"	12° 38, 7'	
30.	10'19"	(contato quádruplo)	1,0315
31.	11'27"	9° 50, 0'	
32.	12'44"	9° 50, 0'	
33.	12'50"	(contato quádruplo)	1,0292
34.	13'27"	7° 47, 8'	

A *última* coluna dessa Tabela, sob n , fornece a *razão* da carga na garrafa antes do contato com a esfera para a carga após o contato, calculada para o momento do contato a partir das duas observações feitas imediatamente antes e depois [do contato], contidas na segunda e terceira colunas, de acordo com a seguinte regra:

- q''^2 e q'^2 denotam os senos das deflexões observadas para os dois tempos de observação anteriores,
- q'^2 e q''^2 denotam os senos das deflexões observadas para os dois tempos de observação seguintes,

- $-t''$, $-t'$, t' , t'' são os tempos de observação associados, medidos a partir do momento de contato,
- m é o número de vezes que o contato foi repetido.

Portanto:²⁹⁴

$$n = \sqrt[m]{\frac{t'' - t'}{t'' - t'} \cdot \frac{t''q' - t'q''}{t''q' - t'q''}} .$$

Na verdade, algumas das observações nessas duas séries de observações são menos definitivas (o que é quase inevitável quando três observadores colaboram), e dessa maneira

²⁹⁴[Nota de Kohlrausch e Weber:] As observações da deflexão da agulha na terceira coluna e o tempo na segunda coluna vão fornecer imediatamente os valores de q'' , q' , q , q'' e os valores associados de $-t''$, $-t'$, t' , t'' , a partir dos quais devem ser calculados os valores de q_0 e q^0 , que são válidos para os instantes imediatamente antes e após o contato. A regra anterior é obtida da seguinte maneira:

1) Para a breve duração de tempo da experiência, é suficiente assumir que a perda para o ar é proporcional ao tempo e à carga no momento da observação, de acordo com a qual os seguintes valores são obtidos para as quatro observações reduzidas ao momento do contato:

$$(1 - \alpha t'') q'' , \quad (1 - \alpha t') q' , \quad (1 + \alpha t') q' , \quad (1 + \alpha t'') q'' .$$

2) Se adicionarmos cada um desses valores ao resíduo na garrafa no tempo em questão, então os dois primeiros, que representam a *carga total antes do contato*, têm de ser iguais, e similarmente para os dois últimos, que representam a *carga total após o contato*. Quando denotamos o resíduo no tempo t por r_t , obtemos então as equações:

$$(1 - \alpha t'') q'' + r_{-t''} = (1 - \alpha t') q' + r_{-t'} = q_0 + r_0 ,$$

$$(1 + \alpha t') q' + r_{t'} = (1 + \alpha t'') q'' + r_{t''} = q^0 + r^0 .$$

Contudo, os resíduos *antes* e *após* o contato (ver a Seção 8.12) podem ser representados por:

$$r_t = \beta \left(1 - e^{-\gamma(\vartheta+t)^\delta} \right) \cdot (q_0 + r_0) , \quad r_t = \beta \left(1 - e^{-\gamma(\vartheta+t)^\delta} \right) \cdot (q^0 + r^0) .$$

O resíduo permanece inalterado no momento do contato, de tal forma que $r_0 = r^0$. Isso implica facilmente que *para pequenos valores de t antes e após o contato*, r_t pode ser colocado como:

$$r_t = r_0 + at , \quad r_t = r_0 + a't ,$$

onde a e a' denotam dois coeficientes que são determinados pelas observações. — Ao substituir esses valores nas equações anteriores, nas quais podemos da mesma maneira substituir $\alpha q''$ e $\alpha q'$ por αq_0 , e similarmente substituir $\alpha q'$ e $\alpha q''$ por αq^0 , obtemos:

$$q_0 = q' - (a + \alpha q_0) t' = q'' - (a + \alpha q_0) t'' ,$$

$$q^0 = q' + (a' + \alpha q^0) t' = q'' + (a' + \alpha q^0) t'' ;$$

e, consequentemente:

$$q_0 = \frac{t''q' - t'q''}{t'' - t'} , \quad q^0 = \frac{t''q' - t'q''}{t'' - t'} ,$$

$$n = \sqrt[m]{\frac{q_0}{q^0}} = \sqrt[m]{\frac{t'' - t'}{t'' - t'} \cdot \frac{t''q' - t'q''}{t''q' - t'q''}} .$$

podemos encontrar que é permissível descartar completamente alguns valores de n : por exemplo, aquele que é citado no número 8 na primeira coluna e aqueles nos números 12, 15 e 33 na segunda coluna. Contudo, será obtido que a remoção desses valores não vai ter uma influência apreciável sobre a determinação do valor médio de n , pois encontramos que os valores médios *com* e *sem* a remoção são:

$$n = 1,032\,82 \quad , \quad n = 1,032\,97 \quad ,$$

respectivamente.

Uma série similar de observações realizada anteriormente em Marburg com a mesma garrafa e esfera forneceu o seguinte valor médio para a razão n :

$$n = 1,032\,63 \quad .$$

Portanto, a razão procurada será daqui por diante assumida como sendo:

$$n = 1,032\,76 \quad .$$

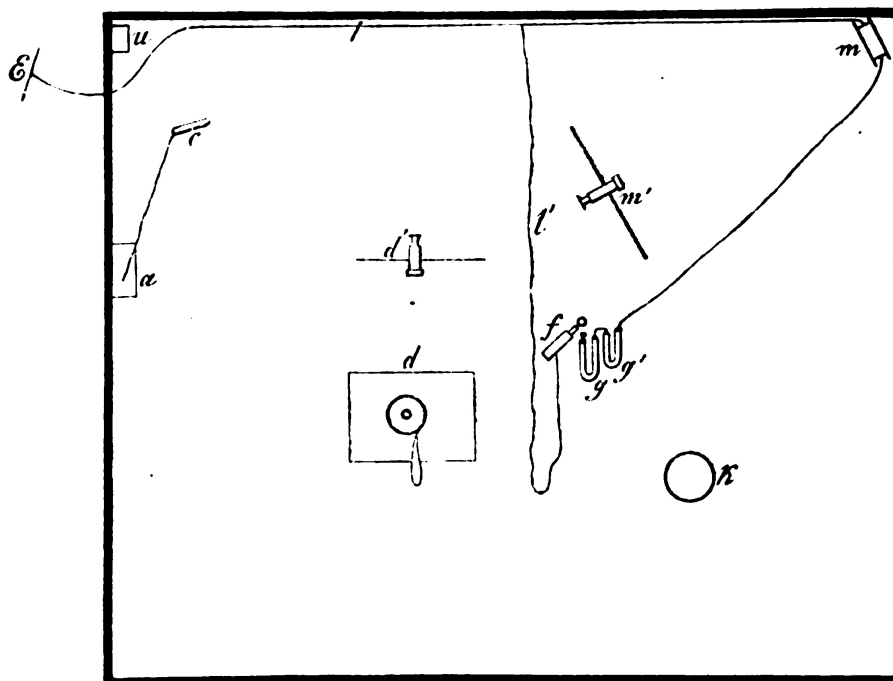
Finalmente, essa razão de carga na garrafa *antes* e *após* o contato com a grande esfera também fornece a *razão da distribuição da eletricidade entre a garrafa e a grande esfera no momento do contato; a saber, ela é igual a*:

$$1 : 0,032\,76 \quad .$$

8.7 Observações Correspondentes da Deflexão do Galvanômetro Tangente Produzida pela Quantidade E de Eletricidade Fluindo Através do Multiplicador, e da Torção da Balança de Torção de Coulomb, pela Qual as Duas Esferas Eletrizadas com a Quantidade e de Eletricidade São Mantidas à Mesma Distância que as Esferas Descarregadas

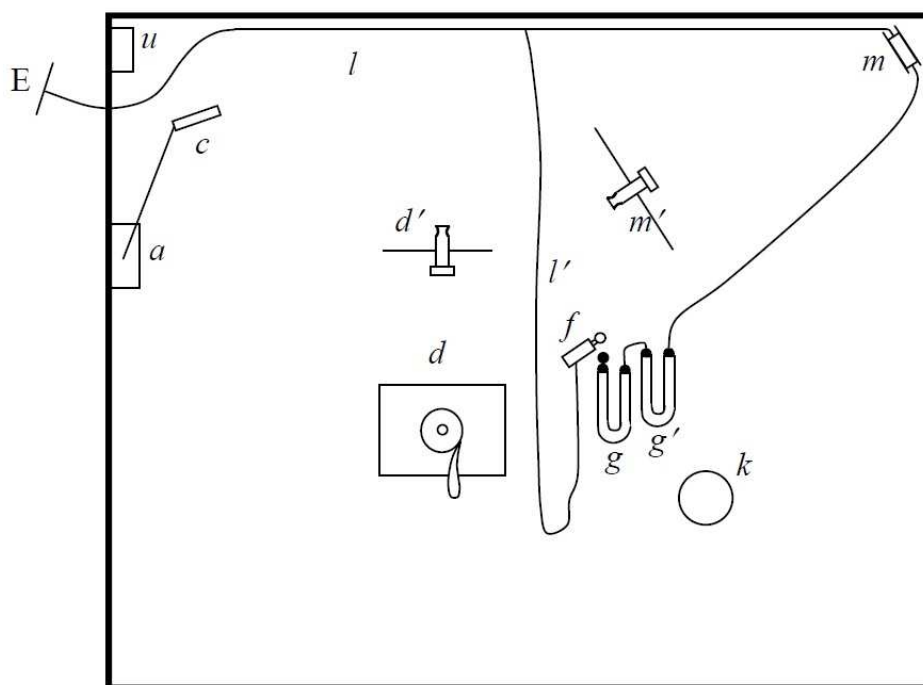
A disposição dos instrumentos utilizados, mostrada na Figura 1, serve para melhor ilustrar os experimentos já mencionados na Seção 8.5.²⁹⁵

Fig. 1.



O *galvanômetro tangencial* é denominado por *m*, cujo fio do multiplicador está conectado à Terra em uma de suas extremidades por um fio condutor *l* que é soldado a uma placa *E* que está enterrada no solo úmido, enquanto que em sua outra extremidade ele foi conduzido

²⁹⁵Uma versão melhorada da Figura 1 foi preparada por D. H. Delphenich, a saber:



pelo ar até os longos tubos de vidro g e g' em forma de U , que são preenchidos com água. m' representa a escala e telescópio para observação da agulha do galvanômetro tangencial, que é provida de um espelho.²⁹⁶

A *balança de torção* de Coulomb é representada por d , a qual será descrita com mais detalhes no final desse Tratado no Apêndice I. d' representa a escala e telescópio para observar o estado da balança de torção. Presa ao fio de torção sob o braço, que carregava a esfera móvel, havia uma longa haste suspensa de goma-laca, que em sua extremidade carregava um espelho para o qual o telescópio era direcionado. — Em k , a grande esfera está dependurada no teto da sala por uma linha de seda. Já l' é um ramo do fio l para conectar o revestimento externo da garrafa [de Leiden] f até a Terra. — Em u está o relógio, em a uma aba no teto da sala, através da qual um fio era conduzido do condutor de uma máquina eletrostática²⁹⁷ na sala superior até o pequeno condutor c para carregar a garrafa [de Leiden] f .

Depois que a garrafa f foi carregada e presa ao fio l' por um parafuso de fixação, a grande esfera k foi tocada com seu botão.²⁹⁸ A quantidade de eletricidade que permaneceu na garrafa após o contato será denominada por E' . Três segundos depois, sendo que durante esse intervalo de tempo E' transformou-se em E ao perder eletricidade para o ar e devido à formação de um resíduo, o botão da garrafa f , como mostrado na Figura 1, é tocado com um botão de metal que se projeta do tubo g em forma de U , e o observador no telescópio m' observa a elongação da agulha magnética do galvanômetro tangencial que foi produzida pela corrente de descarga da quantidade E de eletricidade que fluiu através do multiplicador.

Imediatamente após a garrafa f ter sido descarregada, a esfera fixa na balança de torção de Coulomb, que foi mantida pronta, foi carregada pela esfera k e colocada rapidamente dentro da balança de torção; a própria esfera k , entretanto, foi imediatamente descarregada.

Em seguida, em um curto intervalo de tempo, foi medida várias vezes a torção necessária para manter as duas esferas em sua posição na qual os dois raios traçados pelo eixo de rotação em direção aos centros das esferas formavam um ângulo reto. A partir da diminuição gradual dessa torção, de acordo com a lei de Coulomb de que a carga diminui geometricamente com o aumento aritmético do tempo,^{299,300} foi então possível *calcular* a torção que teria ocorrido se no momento em que a grande esfera k foi carregada através da garrafa f , as duas esferas da balança de torção já pudessem ter sido carregadas e ajustadas. Na Tabela a seguir, a torção primeiramente observada em cada número é aquela *calculada* desta forma; a partir disso, na Seção 8.11, será determinada a quantidade de eletricidade e , que passou da grande esfera k para a esfera estacionária da balança de torção no momento de seu contato.

Na última coluna da Tabela seguinte, intitulada $A/\sqrt{T}$, são dados os quocientes da deflexão, expressa em partes da escala, da agulha magnética no galvanômetro tangencial

²⁹⁶Ver a Nota de rodapé 22 na página 18.

²⁹⁷Ver a Nota de rodapé 273 na página 162.

²⁹⁸Isto é, a esfera condutora k foi tocada pelo botão da garrafa de Leiden. Dessa maneira a esfera recebeu uma parte da carga elétrica da garrafa de Leiden.

²⁹⁹[Nota de Kohlrausch e Weber:] Através de uma série de testes, nos quais a esfera estacionária entre as determinações individuais de torção estava algumas vezes fora e algumas vezes dentro da caixa da balança de torção, foi estabelecido que a perda de eletricidade para o ar dentro e fora da caixa era a mesma, o que podia ser esperado pelo [grande] tamanho da caixa. Se esse não fosse o caso, então não teria sido permitido a aplicação mencionada da lei de Coulomb, já que a esfera fixa estaria fora da caixa por alguns instantes antes que pudesse ser colocada dentro da balança de torção.

³⁰⁰Coulomb mostrou que a carga q sobre uma esfera condutora isolada da Terra e distante de outros corpos, mas em contato com o ar ao seu redor, diminui exponencialmente com o tempo t de acordo com a seguinte equação: $q = q_0 e^{-t/t_0}$, onde q_0 é a carga inicial da esfera em $t = 0$, enquanto que t_0 é uma constante. Ver [Ass22] e [AB23].

dividida pela raiz quadrada da torção da balança de torção, expressa em minutos [de arco].

— A distância do espelho à escala do galvanômetro tangencial era igual a:

$$6437\frac{1}{2} \text{ divisões da escala.}$$

Número	Horário	Deflexão do galvanômetro tangencial em divisões da escala = A	Torção da balança de torção em minutos = T	$\frac{A}{\sqrt{T}}$
1.	8 ^h 11'8" 16'13" 21'16" 26'35" 32'32"	73,5	175,3' 152,4' 136,1' 118,3' 99,9'	5,55
2.	8 ^h 37'8" 42'4" 45'14" 50'10" 54'40"	80,0	237,1' 208,4' 189,1' 165,3' 148,1'	5,20
3.	9 ^h 0'37" 5'14" 9'19" 14'11" 18'10"	96,5	332,9' 297,5' 270,6' 238,5' 218,3'	5,29
4.	9 ^h 31'14" 35'17" 41'1" 47'43" 55'0"	91,1	265,1' 249,2' 226,2' 201,1' 178,0'	5,59
5.	10 ^h 1'46" 6'24" 10'54" 16'31" 22'4"	97,8	332,4' 306,0' 280,4' 251,1' 228,6'	5,36

8.8 Cálculo da Razão entre as Duas Quantidades de Carga $E' : e$

O raio da esfera maior era:

$$a = 159,46 \text{ milímetros,}$$

e o raio da esfera fixa na balança de torção de Coulomb era:

$$ba = 11,537 \text{ milímetros.}$$

Se definirmos agora a razão segundo a qual a eletricidade $= 0,03276E'$ transferida pela garrafa à primeira esfera de acordo com a Seção 8.6 é dividida quando entra em contato com essa última [esfera] como sendo igual a:

$$(0,03276E' - e) : e = A : b^2B ,$$

obteremos então, de acordo com Plana (“Mémoire sur la distribution de l’électricité à la surface de deux sphères conductrices — Memória sobre a distribuição da eletricidade na superfície de duas esferas condutoras,” Turin, 1845, páginas 64 e 66):³⁰¹

$$\frac{B}{h} = \frac{1}{1+b} + \frac{1}{(1+b)^2} \left\{ k_2 + \frac{b}{1+b} k_3 + \frac{b^2}{(1+b)^2} k_4 + \frac{b^3}{(1+b)^3} k_5 \dots \right\} ,$$

e quando colocamos $b/(1+b) = a$:

$$\frac{A}{h} = \frac{1}{2} + \frac{a^3}{1-a^2} + \frac{\pi a}{2} \cot \pi a + a^3 k_3 + a^5 k_5 + a^7 k_7 \dots ,$$

onde:

$$k_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \dots$$

Isso resulta na razão procurada para os valores listados

$$(0,03276E' - e) : e = A : b^2B = 1 : 0,0079377 ;$$

consequentemente:

$$E' : e = 3876 : 1 .$$

8.9 Cálculo da Quantidade de Eletricidade ε com a Qual as Duas Esferas da Balança de Torção de Coulomb Precisam ser Carregadas para Exercer Uma Unidade de Torque na Balança de Torção Através da Repulsão entre Elas

O raio da esfera fixa na balança de torção de Coulomb era igual a 11,537 milímetros, e o raio da esfera móvel era igual a 11,597 milímetros, de tal forma que podemos assumir no próximo cálculo, sem desvantagem, que o raio médio das duas esferas quase iguais era:

$$a = 11,567 \text{ milímetros}.$$

Além disso, a distância do eixo de rotação até o centro da esfera fixa era igual a 93,53 milímetros, a distância do eixo de rotação até o centro da esfera móvel era igual a 61,7 milímetros, e os dois centros formavam um ângulo reto com o eixo de rotação. Isso forneceu a distância entre os centros [das duas esferas] como sendo igual a:

³⁰¹ Ver a Nota de rodapé 240 na página 150.

112,05 milímetros,

o que também foi confirmado pela medição direta dessa distância.

Agora, se cada uma das duas esferas contiver metade da quantidade de eletricidade ε a ser determinada, e se assumirmos que *essa eletricidade está distribuída uniformemente sobre a superfície de cada esfera*, então a partir das seguintes das leis conhecidas:

1. que uma quantidade de eletricidade distribuída uniformemente sobre a superfície da esfera vai atuar sobre todos os pontos externos como se toda ela estivesse concentrada no centro da esfera,³⁰²
2. que a força de repulsão que a quantidade de eletricidade concentrada em um ponto exerce sobre a quantidade de eletricidade concentrada em outro ponto é igual ao quociente do produto das duas quantidades de eletricidade dividido pelo quadrado da distância entre elas,³⁰³

obteríamos imediatamente a *força de repulsão entre as duas esferas*, a saber:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{\varepsilon^2}{112,05^2} = \frac{\varepsilon^2}{50\,221}.$$

Entretanto, se essa força repulsiva deve ser encontrada *exatamente*, então a condição anterior não é admissível, e temos de determinar precisamente a *não uniformidade da distribuição de eletricidade sobre a superfície de cada esfera* a partir do tamanho [das esferas] e da distância [entre elas], incluindo isso nos cálculos.

No trabalho de Poisson, “Mémoire sur la distribution de l’électricité à la surface des corps conducteurs — Memória sobre a distribuição da eletricidade na superfície dos corpos condutores,” (*Mémoires de l’Institut. Année 1811. Première partie*, página 88),³⁰⁴ encontramos a seguinte expressão para a *densidade* z de eletricidade sobre a superfície de uma pequena esfera a uma grande distância de uma outra esfera quando a densidade *média* sobre a primeira esfera é dada como sendo igual a B , e igual a A sobre a última [esfera]:

$$z = B - \frac{3a^2A}{c^2} \cdot \mu + \frac{5a^2bA}{2c^3} (1 - 3\mu^2) ,$$

³⁰²Esse resultado foi obtido pela primeira vez por Isaac Newton (1642-1727) em 1687 ao supor uma força central inversamente proporcional ao quadrado da distância entre as partículas que estavam interagindo. Em seu livro *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*, usualmente conhecido pela primeira palavra em latim, *Principia*, ele provou os seguintes resultados, [New90, págs. 221-222], [Ass13, Seção 1.4] e [Ass14b, Seção 1.4]:

Seção XII: As forças atrativas de corpos esféricos

Proposição 70. Teorema 30: Se para cada ponto de uma superfície esférica tenderem forças centrípetas iguais, que diminuem com o quadrado das distâncias a partir desses pontos, afirmo que um corpúsculo localizado dentro daquela superfície não será atraído de maneira alguma por aquelas forças.

Proposição 71. Teorema 31: Supondo-se o mesmo que acima, afirmo que um corpúsculo localizado fora da superfície esférica é atraído em direção ao centro da esfera com uma força inversamente proporcional ao quadrado de sua distância até este centro.

³⁰³Newton obteve esse resultado para a atração gravitacional entre duas partículas em 1687 e Coulomb obteve um resultado análogo para a atração elétrica em 1785, ver a Nota de rodapé 89 na página 66.

³⁰⁴Ver a Nota de rodapé 89 na página 66.

onde b e a são os raios das duas esferas, c é a distância entre seus centros, e $\mu_{\parallel}$ significa o cosseno do ângulo φ que o raio da primeira esfera forma com a direção de c no local em questão. — Se quisermos aplicar essa regra geral ao caso anterior, então temos de colocar:

$$A = B ,$$

$$a = b ,$$

e quando colocamos o valor de $\cos \varphi$ no lugar de $\mu_{\parallel}$, virá que a *densidade* é:

$$z = A \left[1 - \frac{3a^2}{c^2} \cos \varphi + \frac{5a^3}{2c^3} (1 - 3 \cos^2 \varphi) \right] .$$

Desta *densidade* resulta a *pressão*³⁰⁵ da *eletricidade perpendicular à superfície da esfera, de dentro para fora* no ponto em consideração, de acordo com a conhecida lei provada por Poisson no Tratado citado, segundo a qual a pressão é proporcional ao quadrado da densidade, ou, para ser mais preciso, é igual ao quadrado da densidade z^2 multiplicado pelo número 2π , isto é:

$$2\pi \cdot z^2 .$$

Se esta *pressão* for então decomposta na direção da linha estendida c e em um direção perpendicular a ela, obtém-se então a *componente paralela à linha estendida c*:

$$-2\pi z^2 \cdot \cos \varphi .$$

Finalmente, se substituirmos aqui o valor anterior de z , então *para dois elementos iguais da superfície esférica cuja reta de conexão é paralela à reta c*, para os quais os valores de φ se complementam para formar π , obteremos a *pressão decomposta na direção da linha estendida c*:

$$24 \frac{\pi a^2}{c^2} A^2 \left[1 + \frac{5a^3}{2c^3} (1 - 3 \cos^2 \varphi) \right] \cos^2 \varphi ,$$

a partir da qual encontramos a *força de pressão*³⁰⁶ paralela à linha estendida c , *em primeiro lugar*, para as duas zonas de largura $ad\varphi$, que contêm todos os elementos da superfície esférica pertencentes aos dois valores de φ que são complementares a π , ao multiplicar pela área $2\pi a^2 \sin \varphi d\varphi$:

$$48 \frac{\pi^2 a^4}{c^2} A^2 \left[1 + \frac{5a^3}{2c^3} (1 - 3 \cos^2 \varphi) \right] \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi ,$$

e, *em segundo lugar*, para a superfície total da esfera, através da integração:

$$\begin{aligned} 48 \frac{\pi^2 a^4}{c^2} A^2 \int_0^{\pi/2} \left[1 + \frac{5a^3}{2c^3} (1 - 3 \cos^2 \varphi) \right] \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \\ = 16 \frac{\pi^2 a^4}{c^2} \left(1 - 2 \frac{a^3}{c^3} \right) A^2 , \end{aligned}$$

³⁰⁵Em alemão: *Druck*. Essa palavra pode ser traduzida como pressão ou tensão.

³⁰⁶Em alemão: *Druckkraft*. Essa expressão pode ser traduzida como força ou força de pressão.

na qual A é a densidade *média* da eletricidade sobre a superfície de cada uma das duas esferas de raio a , consequentemente:

$$4\pi a^2 \cdot A$$

vai representar a *quantidade de eletricidade* que está distribuída sobre a superfície de cada esfera.

Contudo, a *quantidade procurada de eletricidade* que está distribuída sobre as duas superfícies coletivamente (cuja força repulsiva deve exercer uma unidade de torque sobre a balança de torção) foi denominada por ε anteriormente; consequentemente temos então:

$$\frac{1}{2}\varepsilon = 4\pi a^2 \cdot A ,$$

de onde:

$$A = \frac{\varepsilon}{8\pi a^2} .$$

Substituindo o valor de A , obtém-se a *força de pressão* paralela ao prolongamento da linha c , ou seja, a *força repulsiva entre as duas esferas*:

$$\frac{1}{4} \left(1 - 2\frac{a^3}{c^3} \right) \frac{\varepsilon^2}{c^2} ,$$

ou, quando substituirmos os valores já mencionados para a e c nessa [expressão], a saber:

$$a = 11,567 ,$$

$$c = 112,05 ,$$

obtemos:³⁰⁷

$$\frac{\varepsilon^2}{50\,331} .$$

O produto da força repulsiva entre as duas esferas com a perpendicular traçada a partir eixo de rotação até a direção desta força, ou seja, até a linha c , fornece finalmente o valor do torque exercido por esta força repulsiva sobre a balança de torção, que deve ser $= 1$.

Contudo, como a linha c que conecta os centros das duas esferas forma um triângulo retângulo no eixo de rotação com as horizontais que são traçadas a partir dos dois centros até o eixo de rotação, a perpendicular que é traçada a partir do eixo de rotação até a hipotenusa do triângulo retângulo c é igual ao produto dos dois catetos dividido pela hipotenusa, ou,

³⁰⁷[Nota de Kohlrausch e Weber:] Segue-se que a eletricidade contida em cada esfera, devido à sua distribuição desigual pela superfície, não deve ser pensada como estando concentrada no *centro* da esfera. — Contudo, temos:

$$\frac{\varepsilon^2}{50\,331} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\varepsilon^2}{112,1743^2} ,$$

o que implica então que a força de repulsão entre as duas esferas é a mesma como se as duas metades da quantidade total de eletricidade que estão contidas nelas estivessem concentradas em dois pontos que estão separados por 112,1734 milímetros, isto é, como essa distância é 0,1234 milímetros maior do que a distância entre os centros, em dois pontos que estão a uma distância de 0,0617 milímetros dos dois centros.

como os dois catetos têm 93,53 e 61,7 milímetros de comprimento, $c = 112,05$ milímetros, essa expressão será igual a:

$$\frac{61,7 \times 93,53}{112,05} = 51,5025 \text{ milímetros.}$$

Disto segue que o *torque* exercido na balança de torção pela força elétrica repulsiva entre as duas esferas é:

$$51,5025 \cdot \frac{\varepsilon^2}{50331} = \frac{\varepsilon^2}{977} .$$

A exigência de que o *torque* resultante da força elétrica repulsiva entre as duas esferas seja igual a 1 será satisfeita se a *quantidade de eletricidade* combinada contida nas duas esferas for

$$\varepsilon = \sqrt{977} = 31,25 .$$

Essa determinação de ε é baseada naquela quantidade de eletricidade que, considerada como sendo de uma unidade, exerce uma unidade de força de repulsão sobre uma quantidade igual de eletricidade separada pela unidade de distância, em repouso relativo.

8.10 Cálculo da Torção ϑ que o Fio no Qual Está Suspensa a Balança de Torção de Coulomb Deve Receber para Exercer Uma Unidade do Torque na Balança de Torção Através de Sua Força de Torção

Sabe-se que o *torque* que é exercido sobre a balança de torção pela torção no fio ao qual ela está suspensa é proporcional à *torção* e ao *coeficiente de torção* do fio, ou, mais precisamente, é igual ao *produto do ângulo de torção, expresso em unidades do raio, com a força diretriz*³⁰⁸ *que o fio exerce sobre a balança de torção*. Portanto, precisamos apenas determinar a *força diretriz* para inferir a partir dela o ângulo de torção ϑ para o qual o torque que é exercido sobre a balança de torção seja igual a *uma unidade*.

A partir das leis conhecidas de elasticidade dos corpos sólidos, o valor da força diretriz que é exercida sobre o fio é independente do tamanho e peso do corpo que está dependurado no fio. Portanto, para determinar a *força diretriz* do fio, outros corpos, em vez da balança de torção, podem ser dependurados e observados no fio.

Em primeiro lugar, em vez da balança de torção, um disco de latão foi dependurado horizontalmente no fio em seu centro. Esse disco de latão tinha:

uma *massa* de 191 112,4 miligramas,

³⁰⁸Ver a Nota de rodapé 122 na página 87. Representando o torque por τ , o ângulo de torção por ϑ , e a força diretriz (ou coeficiente de torção) por D , temos então como obtido originalmente por Coulomb, ver [Ass22] e [AB23]:

$$\tau = -D\vartheta .$$

um *raio* de 63,95 milímetros.

Um pequeno cilindro vertical com:

uma *massa* de 2626,0 miligramas,

um *raio* de 3,25 milímetros,

foi usado para conectar o fio ao disco.

O *período* t das oscilações de torção do disco foi então observado e encontrado como sendo dado por:³⁰⁹

$$t = 47,139 \text{ segundos.}$$

Contudo, a partir dos dados anteriores, o *momento de inércia da placa oscilante* era:

$$K_1 = \frac{1}{2} \cdot 63,95^2 \cdot 191112,4 = 390\,790\,000 ,$$

e o *momento de inércia* do pequeno cilindro era:

$$K_2 = \frac{1}{2} \cdot 3,25^2 \cdot 2626 = 13\,868 ,$$

logo, quando eles são combinados:

$$K = K_1 + K_2 = 390\,603\,868 .$$

Agora, das leis conhecidas de tais oscilações, obtemos o valor da *força diretriz* D a partir do *momento de inércia* K e do *período de oscilação* t observado:³¹⁰

$$D = \frac{\pi^2 K}{t^2} = 1\,735\,800 .$$

Em segundo lugar, um cilindro de bronze foi pendurado horizontalmente por seu centro no mesmo fio. Esse cilindro tinha:

uma *massa* de 58 897,1 miligramas,

um *comprimento* de 269,7 milímetros,

um *raio* de 2,865 milímetros.

Aquele mesmo pequeno cilindro vertical serviu para conectá-lo com o fio, assim como foi feito na experiência anterior. Foi observado o *período* t' da oscilação de torção dessa haste e encontrou-se:

$$t' = 44,9537 \text{ segundos.}$$

A partir dos dados anteriores, o *momento de inércia da haste oscilante* foi:

$$K'_1 = \frac{1}{12} (269,7^2 + 3 \cdot 2,865^2) 58\,897,1 = 357\,130\,000 ,$$

e então o *momento de inércia total*, incluindo o pequeno cilindro vertical, foi:

$$K' = 357\,143\,868 .$$

³⁰⁹Ver a Nota de rodapé 24 na página 19.

³¹⁰Weber está utilizando a equação de movimento de um corpo rígido com momento de inércia K dada por $\tau = -D\vartheta = K\ddot{\vartheta}$. Aqui $\tau = -D\vartheta$ é o torque ou momento rotacional atuando nele devido ao fio pelo qual está pendurado, quando a parte inferior do fio sofre uma deflexão ϑ em relação à parte superior do fio, sendo D o coeficiente de torção ou força diretriz desse fio. A conhecida solução dessa equação fornece um movimento periódico senoidal com frequência angular $\omega = \sqrt{D/K}$. O período T de uma oscilação completa é dado por $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{K/D}$. O período de oscilação de Gauss e Weber discutido na Nota de rodapé 24 na página 19 é então dado por $t = T/2 = \pi\sqrt{K/D}$, de tal forma que $D = \pi^2 K/t^2$.

Essas observações forneceram então o valor da *força diretriz* D como:

$$D = \frac{\pi^2 K'}{t'^2} = 1\,744\,200 .$$

Consequentemente, a média das duas séries de observações foi:

$$D = 1\,740\,000 .$$

Agora, se o produto desse valor de D com o ângulo de torção, expresso em unidades do raio — isto é, o *torque* que o fio exerce sobre a balança de torção — for igual a 1, então isso vai implicar que o valor do ângulo de rotação ou a *torção* ϑ desejada *no fio* será igual ao ângulo cujo arco é igual a $1/1740000$ do raio, ou:

$$\vartheta = 0,001\,975\,7 \text{ minutos de arco.}$$

8.11 Cálculo das Quantidades de Eletricidade E' e e nas Observações que foram Descritas na Seção 8.7

Nas experiências que foram descritas na Seção 8.7, foram encontrados os seguintes valores para o ângulo de torção na balança de torção de Coulomb quando ela estava em equilíbrio, sendo que as várias experiências são distinguidas por números:

Número	Ângulo de torção em minutos
1.	175,3
2.	237,1
3.	332,9
4.	265,1
5.	332,4

Contudo, o equilíbrio da balança de torção mostra que o torque que é exercido sobre a balança de torção pelo fio é igual e oposto ao torque da força de repulsão entre as duas esferas. — Contudo, o *primeiro* torque foi encontrado ao dividir o ângulo de torção observado pelo ângulo $\vartheta = 0,0019757$ minutos de arco que foi determinado na Seção anterior, que era o ângulo pelo qual o fio teria de ser girado para exercer *uma unidade de torque* sobre a balança de torção. Dessa forma obtemos o *torque* que o fio exerce sobre a balança de torção nas experiências que foram descritas.

Número	Torque do fio
1.	88 728
2.	120 010
3.	168 500
4.	134 180
5.	168 240

Este *último* torque, resultante da força de repulsão elétrica das duas esferas, decorre da Seção 8.9:

$$\frac{e^2}{\varepsilon^2} = \frac{e^2}{977} ,$$

onde e denota a *quantidade de eletricidade* com a qual as duas esferas da balança de torção são carregadas coletivamente, a qual podemos então calcular nas cinco experiências citadas a partir da *igualdade* entre os dois torques, o que é feito na próxima Tabela. Além disso, entram na última coluna dessa Tabela os valores de E' que são calculados a partir da proporção:

$$E' : e = 3\,876 : 1$$

que foi encontrada na Seção 8.8.

Número	e	E'
1.	9 310	36 086 000
2.	10 828	41 970 000
3.	12 830	49 730 000
4.	11 450	44 379 000
5.	12 821	49 593 000

8.12 Cálculo da Correção Causada pela Perda de Eletricidade e Acúmulo de Resíduos na Garrafa de Leiden no Intervalo de Tempo Decorrido desde a Divisão da Eletricidade até a Descarga da Garrafa, que é Igual a $E' - E$

A quantidade de eletricidade E' que permanece na garrafa de Leiden após carregar a esfera maior sofre uma pequena mudança durante o intervalo de tempo de *três segundos* até a descarga, parcialmente devido a uma perda para o ar e parcialmente pela formação do resíduo. A quantidade E que ainda está presente na garrafa pode então ser determinada a partir de E' da seguinte maneira:

Nos *Annalen* de Poggendorff, Vol. 91 (1854), encontramos um método dado para determinar a formação do resíduo em uma garrafa de Leiden.³¹¹ Se então Q é uma quantidade de eletricidade transmitida repentinamente à garrafa, que após t segundos passou para Q_t através da perda para o ar, então no instante t um resíduo r_t se formou, que corresponde à equação

$$r_t = p \left(Q_t - Q e^{-\frac{b}{m+1} \cdot t^{m+1}} \right) . \quad (I)$$

A partir da investigação anterior, as constantes da garrafa utilizada possuem os valores:

$$p = 0,044\,94 , \quad b = 0,183\,4 ,$$

enquanto $m + 1$ possui um valor igual a 0,4255, que é o mesmo para todas as garrafas.

Se essas constantes são determinadas para uma garrafa, então a constante α que se refere à eletricidade perdida para o ar também pode ser facilmente encontrada. Uma carga

³¹¹ [Koh54a] e [Koh54b].

desconhecida Q é subitamente transferida à garrafa através de outra garrafa pelo final e observa-se nos tempos

$$t_1, t_2, \dots, t_n ,$$

com o *eletrômetro senoidal* as cargas disponíveis:

$$L_{t_1}, L_{t_2}, \dots, L_{t_n} .$$

Agora, se ν_t denota a quantidade de eletricidade que escapou para o ar até o tempo t , então:

$$L_t = Q - r_t - \nu_t . \quad (II)$$

Contudo, para pequenos valores de t , podemos colocar:

$$\nu_t = \alpha \cdot t \frac{Q + L_t}{2} ,$$

e se, além disso, $Q - \nu_t$ for colocado no lugar de Q_t na Equação (I), teremos então:

$$L_t = Q(1 - \rho_t) - \alpha(1 - p)t \frac{Q + L_t}{2} ,$$

na qual $p \left(1 - e^{-\frac{b}{m+1} \cdot t^{m+1}}\right)$ foi substituído por ρ_t .

Essa equação será suficiente agora para todas as observações. Se calcularmos ρ_t para os instantes da primeira e última observações, substituindo esses valores na equação, juntamente com os valores observados de L_t e t , obteremos então duas equações com as duas grandezas desconhecidas Q e α .

Depois que uma carga foi repentinamente comunicada para a garrafa de Leiden para determinar α no local onde as experiências anteriores foram feitas, os seguintes resultados foram obtidos a partir das observações:

t	L_t	ρ_t
23	0,667 6	0,036 19
65	0,657 6	0,041 42
128	0,648 3	0,043 44
226	0,638 9	0,044 35

Temos aqui $L_t = \sqrt{\text{sen } \varphi}$, e φ é a deflexão que é observada no *eletrômetro senoidal*. Contudo, ρ_t é calculado a partir de t e das constantes da garrafa. — Ao combinar a primeira e última observações, encontramos que:

$$Q = 0,6956 , \quad \alpha = 0,00017935 .$$

A Equação (III) fornece então os seguintes valores associados para t e L_t :

t	L_t
23	0,6676
65	0,6592
128	0,6506
226	0,6389

que se desviam tão pouco dos valores observados que os valores que foram encontrados para α podem ser utilizados precisamente para encontrar a correção para E' . Logo, em *três segundos*, a perda de eletricidade para o ar foi de

$$0,000\,538$$

da carga total E' .

O *resíduo* que é criado no mesmo tempo é encontrado da seguinte maneira:

Imediatamente antes do contato com a grande esfera, o que ocorre t segundos após a garrafa ter sido carregada, a garrafa vai ter uma carga disponível L_t e um resíduo r_t que não pode ser descarregado. Se escrevermos $Q - \nu_t$ no lugar de Q_t na Equação (I), colocarmos ν_t igual a seu valor de $\alpha \cdot t \frac{Q+L_t}{2}$, e colocarmos Q igual ao valor implicado pela Equação (III), obteremos então o resíduo no tempo t , expresso em termos da carga disponível que está presente nesse instante:

$$r_t = \frac{\rho_t - \alpha t \left(p - \frac{1}{2}\rho_t\right)}{1 - \rho_t - \frac{1}{2}\alpha t(1 - p)} \cdot L_t = \beta L_t . \quad (IV)$$

Após a esfera ter sido carregada, só vai permanecer na garrafa uma carga disponível de L_t/n (Seção 8.6), logo uma quantidade de eletricidade $\left(\frac{1}{n} + \beta\right) L_t$. Agora, a forma que a razão do resíduo vai assumir após essa descarga parcial vai depender se o resíduo que forma βL_t é menor, igual, ou maior do que o valor limite dado por

$$p \left(\frac{1}{n} + \beta\right) L_t$$

do resíduo para a carga que ainda está presente na garrafa, que depende, por sua vez, se n é menor, igual, ou maior do que $p/[\beta(1 - p)]$, respectivamente.

Nas experiências atuais, t estava próximo de 60 segundos, na média. Se substituirmos esse valor na Equação (IV), isso vai então implicar que:

$$\beta = 0,042\,86 , \quad \frac{p}{\beta(1 - p)} = 1,097\,8 .$$

Como foi encontrado na Seção 8.6 que $n = 1,032\,76$, logo menor do que $p/[\beta(1 - p)]$, vem que o resíduo vai continuar a aumentar. Contudo, seu crescimento vai ser mais lento do que antes da descarga parcial, já que o valor limite atual do resíduo está mais próximo do resíduo já formado do que o anterior, e na verdade a formação adicional vai proceder como se o resíduo existente βL_t fosse gerado pela carga existente $(1/n + \beta)L_t$. Contudo, isso necessitaria de um tempo que segue da equação:³¹²

$$r_t = \beta L_t = \left(\frac{1}{n} + \beta\right) L_t \cdot p \left(1 - e^{-\frac{b}{m+1}t^{m+1}}\right) ,$$

de onde segue que:

$$\log t = \frac{1}{m+1} \log \left[-\frac{m+1}{b} \ln \left(1 - \frac{\beta}{\left(\frac{1}{n} + \beta\right)p} \right) \right] ,$$

o que fornece 85,9 segundos.

³¹²[Nota de Kohlrausch e Weber:] Essa equação é formada de acordo com a Equação (I) do resíduo, na qual precisamos agora colocar $Q = (1/n + \beta)$ no lugar de Q_t .

A partir da carga $E' = L_t/n$ que está presente no momento após o contato com a esfera grande, perde-se o crescimento do resíduo que ocorre nos *três segundos*, até a descarga da garrafa, que é determinado por:

$$\left[\left(\frac{1}{n} + \beta \right) p \left(1 - e^{-\frac{b}{m+1} 88,9^{m+1}} \right) - \beta \right] L_t = 0,00010 L_t ,$$

ou, como $L_t = nE'$:

$$0,000103 \cdot E' .$$

Isso fornece finalmente a correção desejada:

$$E' - E = (0,000538 + 0,000103)E' = 0,000641E' ,$$

e, portanto, para os valores E' indicados na Seção anterior, os valores corrigidos E , que indicam as quantidades de eletricidade efetivamente descarregadas pelo multiplicador, são obtidos da seguinte forma:

Número	E
1.	36 060 000
2.	41 940 000
3.	49 700 000
4.	44 350 000
5.	49 660 000

8.13 Cálculo da Duração Temporal que uma Corrente com a Intensidade Normal que foi Descrita na Seção 8.4 Precisa Possuir para Produzir as Deflexões do Galvanômetro Tangente que foram Observadas na Seção 8.7

As *deflexões do galvanômetro tangente* que foram citadas na Seção 8.7 foram observadas em *divisões da escala*. Obteremos essas deflexões em *valores de arco para um raio = 1* ao dividi-las pelo raio (ou o dobro da distância do espelho até a escala), expresso em divisões da escala, que é igual a 12875.

Número	Deflexão em divisões da escala	Deflexão em valores de arco para o raio = 1 φ
1.	73,5	0,005 708 7
2.	80,0	0,006 213 6
3.	96,5	0,007 495 2
4.	91,1	0,007 075 7
5.	97,8	0,007 596 2

No Segundo Tratado sobre *Medições Eletrodinâmicas*, página 363,^{313,314} foi provado que uma corrente de intensidade 1 que atravessa uma espira de um multiplicador cujo raio é a vai exercer uma *força* F sobre uma partícula do fluido *magnético Norte* $+\mu$ ou sobre uma partícula do fluido *magnético Sul* $-\mu$ que se encontra a uma distância b do plano do enrolamento do multiplicador, e cuja projeção sobre esse plano está a uma distância x do centro, perpendicular ao plano do enrolamento do multiplicador, dada por:

$$F = \pm \frac{2\pi a^2 \mu}{(a^2 + b^2 + x^2)^{3/2}} \cdot \left\{ 1 + \frac{3}{4} (3a^2 - 2b^2 - 2x^2) \frac{x^2}{(a^2 + b^2 + x^2)^2} + \dots \right\} ,$$

de onde segue que a mesma corrente vai exercer um *torque* D sobre uma *agulha* que contém as partículas $+\mu$ e $-\mu$, separadas por uma distância 2ε muito pequena que é paralela ao plano do multiplicador, dado por:

$$D = \frac{4\pi a^2 \mu \varepsilon}{(a^2 + b^2 + x^2)^{3/2}} \cdot \left\{ 1 + \frac{3}{4} (3a^2 - 2b^2 - 2x^2) \frac{x^2}{(a^2 + b^2 + x^2)^2} + \dots \right\} ,$$

onde $2\mu\varepsilon$ denota o *momento magnético* da agulha ou o *magnetismo da agulha*.

Agora, três aplicações diferentes podem ser feitas dessa equação: *Em primeiro lugar*, para as *condições normais* que foram assumidas para as ações magnéticas na Seção 8.1, *em seguida*, para o *galvanômetro tangente com uma única espira*, e, *finalmente*, para o *galvanômetro tangente com várias espiras no multiplicador* que foi usado nas experiências atuais. As duas primeiras aplicações mostram apenas que, como foi mencionado anteriormente na *obra citada* com relação às intensidades de corrente, essa equação é de fato a base para a unidade de intensidade de corrente que é deduzida a partir das ações magnéticas. A última aplicação leva ao cálculo do *intervalo de tempo desejado* τ .

Se aplicarmos essa equação *em primeiro lugar* às *condições normais* que foram assumidas para as ações magnéticas de uma corrente na Seção 8.1, teremos então $\pi a^2 = 1$, $b = 0$, $2\mu\varepsilon = 1$, $x = R$, e a/R como sendo uma fração extremamente pequena. *A equação anterior* vai então fornecer o torque D (sem o sinal, que depende da direção da corrente):

$$D = \frac{1}{R^3} \quad \text{ou} \quad R^3 D = 1 ,$$

que concorda então com a ação magnética da corrente que foi estabelecida para uma corrente de intensidade $= 1$ na Seção 8.1. Segue-se disso que a equação anterior é a base para a unidade de intensidade de corrente que foi deduzida a partir das ações magnéticas na Seção 8.1.

Em segundo lugar, se aplicarmos essa equação a um *galvanômetro tangente com um único círculo multiplicador* de raio R , no qual uma pequena agulha magnética está no centro do círculo, paralela ao plano da espira, direcionada para o meridiano magnético, então $a = R$, $b = 0$, $x = 0$. *A equação anterior* fornece então o torque que a corrente exerce sobre a agulha quando ela se encontra *ao longo do meridiano magnético*:

$$D = \frac{4\pi\mu\varepsilon}{R} .$$

Quando a agulha é *desviada* do meridiano magnético de φ , isso se transforma em:

$$D \cos \varphi = \frac{4\pi\mu\varepsilon}{R} \cdot \cos \varphi .$$

³¹³[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. III, pág. 454.

³¹⁴[Web52c, pág. 454 das *Obras de Weber*] com tradução para o inglês em [Web21c].

Se T denota a componente horizontal do magnetismo terrestre, então $-2\pi\varepsilon T \sin \varphi$ será o torque que a *Terra* exerce sobre a agulha. A soma desses dois torques é igual a 0 quando a agulha permanece em repouso para a *deflexão* φ ; conseqüentemente:

$$\frac{2\pi}{R} = T \tan \varphi \quad \text{ou} \quad \varphi = \arctan \frac{2\pi}{RT} .$$

Contudo, essa deflexão é a mesma [deflexão que uma] *corrente normal* que foi descrita na Seção 8.4 deve produzir em um galvanômetro tangente com uma única espira.

Em terceiro lugar, e finalmente, essa mesma equação deve ser aplicada para o *galvanômetro tangente com várias espiras multiplicadoras* que é usado na experiência atual, e a partir disso deve ser determinado o torque que a *corrente normal* que acabou de ser mencionada, descrita na Seção 8.4, exerce sobre a agulha quando ela passa por todas as espiras do multiplicador.

Consideramos inicialmente *um* enrolamento do multiplicador que tem raio a e cujo plano está separado do plano meridiano da agulha pela [distância] b . O torque D' que esse enrolamento exerce sobre a agulha vai ser determinado pela equação anterior:

$$D' = \frac{4\pi a^2 \mu \varepsilon}{(a^2 + b^2 + x^2)^{3/2}} \cdot \left\{ 1 + \frac{3}{4} (3a^2 - 2b^2 - 2x^2) \frac{x^2}{(a^2 + b^2 + x^2)^2} + \dots \right\} ,$$

na qual podemos colocar $x = 0$, como na aplicação anterior, se o comprimento da agulha for uma fração muito pequena do diâmetro da espira do multiplicador. Agora, o comprimento da agulha em nosso *galvanômetro tangente* era, de fato, de apenas 60 milímetros, enquanto que o diâmetro médio dos enrolamentos do multiplicador chegava a 267 milímetros, o que, contudo, ainda não era suficiente para desprezar x completamente. No entanto, é suficiente definir um valor aproximado para x , que é obtido se, no magnetismo da agulha³¹⁵ $= 2\mu\varepsilon$, entendermos $+\mu$ e $-\mu$ como as quantidades de fluido magnético Norte e Sul distribuídos de acordo com a *distribuição ideal* na superfície da agulha, e, conseqüentemente, 2ε é determinado, o que significa a distância do centro de gravidade do fluido magnético Norte em relação ao fluido magnético Sul, de modo que deve ser colocado $x = \varepsilon$. A partir do comprimento e natureza da agulha que foi usada, 2ε não podia ser muito diferente de 40 milímetros, e podemos então colocar com precisão suficiente que

$$x = \varepsilon = 20 \text{ milímetros.}$$

Se denotarmos então com a' e a'' os raios interno e externo do anel multiplicador e se denotarmos com $2b'$ sua largura, então a seção reta de todo o anel será igual a:

$$2(a'' - a')b' .$$

Se denotarmos além disso por $da \cdot db$ a parte da seção reta ocupada pelo enrolamento multiplicador (cujo raio era igual a a , e cujo plano estava separado do centro comum da agulha e do anel multiplicador por b), então o produto desses elementos de seção reta no enrolamento multiplicador que está sendo considerado com o torque que é exercido sobre a bússola será igual a:

$$\frac{4\pi a^2 \mu \varepsilon}{(a^2 + b^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \cdot da db \left\{ 1 + \frac{3}{4} (3a^2 - 2b^2 - 2\varepsilon^2) \frac{\varepsilon^2}{(a^2 + b^2 + \varepsilon^2)^2} + \dots \right\} ,$$

³¹⁵Isto é, se no momento magnético da agulha dado por $2\mu\varepsilon$.

ou, como os termos que incluem a quarta potência e potências maiores da fração ε/a podem ser desprezados, devido ao valor pequeno dessa fração, teremos:

$$\frac{4\pi a^2 \mu \varepsilon}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \cdot da db \left\{ 1 + \frac{3}{4} \frac{a^2 - 4b^2}{(a^2 + b^2)^2} \cdot \varepsilon^2 \right\} .$$

Segue-se então disso que a soma dos produtos da seção reta de cada enrolamento com o torque que é exercido por ele será:

$$\begin{aligned} & 4\pi \mu \varepsilon \int_{a'}^{a''} a^2 da \int_{-b'}^{+b'} \frac{db}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \cdot \left\{ 1 + \frac{3}{4} \frac{a^2 - 4b^2}{(a^2 + b^2)^2} \cdot \varepsilon^2 \right\} \\ &= 8\pi \mu \varepsilon b' \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{a''^2 + b'^2}}{a' + \sqrt{a'^2 + b'^2}} + \frac{1}{4} \left(\frac{a''^3}{(a''^2 + b'^2)^{3/2}} - \frac{a'^3}{(a'^2 + b'^2)^{3/2}} \right) \cdot \frac{\varepsilon^2}{b'^2} \right\} . \end{aligned}$$

Ao dividir esse valor pela seção reta de todo o anel, que é igual a $2(a'' - a')b'$, obteremos o torque que é exercido sobre a agulha no centro de *uma* espira multiplicadora, a partir do qual, após multiplicar pelo número n de enrolamentos, obteremos o *torque* total que o multiplicador exerce sobre a agulha devido à *corrente normal* que flui através dele, a saber:

$$D = \frac{4\pi n \mu \varepsilon}{a'' - a'} \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{a''^2 + b'^2}}{a' + \sqrt{a'^2 + b'^2}} + \frac{1}{4} \left(\frac{a''^3}{(a''^2 + b'^2)^{3/2}} - \frac{a'^3}{(a'^2 + b'^2)^{3/2}} \right) \cdot \frac{\varepsilon^2}{b'^2} \right\} .$$

Esse *torque* D , quando dividido pelo *momento de inércia* K da agulha, que é então igual a:

$$\frac{D}{K} ,$$

vai fornecer a aceleração angular da agulha em termos da *corrente normal* dada, e quando essa aceleração é multiplicada pela *duração* τ da *corrente*, que é muito pequena em comparação com o período de oscilação, que é igual a t , isso vai fornecer a *velocidade angular* que é fornecida à agulha pela *corrente normal* durante sua breve duração, que é igual a:

$$\frac{D\tau}{K} .$$

Finalmente, a *deflexão* — isto é, a *primeira largura de alongamento* φ — da agulha que é colocada em oscilação pode ser calculada a partir dessa velocidade angular que é fornecida repentinamente à agulha em repouso a partir de regras conhecidas (ver o Segundo Tratado sobre *Medições Eletrodinâmicas*, página 348),^{316,317} a saber, quando a diminuição no arco de oscilação da agulha é dado pela razão de dois arcos de oscilação sucessivos $e^\lambda : 1$:

$$\varphi = \frac{D\tau}{K} \cdot \frac{t}{\pi} \cdot \frac{e^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}}} .$$

³¹⁶[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. III, pág. 440.

³¹⁷[[Web52c](#), pág. 440 das *Obras de Weber*] com tradução para o inglês em [[Web21c](#)].

Para não ter de determinar nessa equação o valor do momento de inércia K da agulha e seu momento magnético $2\mu\varepsilon$ a partir de observações especiais, podemos eliminar ambos ao consultar a equação conhecida para o período de oscilação, mas na qual temos de levar em conta a força de torção³¹⁸ do fio. Se $1 : \vartheta$ denotar a razão da força diretriz geomagnética que atua sobre a agulha, que é igual a $2\mu\varepsilon T$, em relação à [força diretriz] que é exercida pelo fio, então a equação para o período de oscilação t será:

$$\frac{2\mu\varepsilon \cdot T}{K} = \frac{\pi^2}{t^2} \cdot \frac{1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}}{1 + \vartheta} ,$$

consequentemente, se colocarmos:

$$d = \frac{D}{2\mu\varepsilon} = \frac{2\pi n}{a'' - a'} \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{a''^2 + b'^2}}{a' + \sqrt{a'^2 + b'^2}} \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \left(\frac{a''^3}{(a''^2 + b'^2)^{3/2}} - \frac{a'^3}{(a'^2 + b'^2)^{3/2}} \right) \cdot \frac{\varepsilon^2}{b'^2} \right\}$$

e multiplicarmos a equação anterior por $\frac{D}{2\mu\varepsilon \cdot T} = \frac{d}{T}$ então:

$$\frac{D}{K} = \frac{d}{T} \cdot \frac{\pi^2}{t^2} \cdot \frac{1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}}{1 + \vartheta} .$$

Se substituirmos esse valor na equação para φ teremos então:

$$\varphi = \pi \frac{d}{T} \cdot \frac{\tau}{t} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}}}{1 + \vartheta} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}} ,$$

e isso vai fornecer a desejada *duração da corrente normal*:

$$\tau = t \cdot \frac{\varphi}{\pi} \cdot \frac{T}{d} \cdot \frac{1 + \vartheta}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}}} \cdot e^{\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}} .$$

Contudo, foi determinado por medições para o multiplicador do galvanômetro tangente que foi usado aqui que:

$$\begin{aligned} 2\pi a' &= 709,0 \text{ milímetros}, \\ 2\pi a'' &= 965,35 \text{ milímetros}, \\ 2b' &= 72,04 \text{ milímetros}, \\ n &= 5635, \end{aligned}$$

a partir disso, com o valor mencionado anteriormente de $\varepsilon = 20$ milímetros, obtemos o valor de d :

$$d = 262,1 .$$

Assim, se ε fosse incerto em 1 milímetro, a incerteza de d seria 0,4 em 262 (isto é, apenas 1/657), o que não vale a pena considerar.

Além disso, o período de oscilação t da agulha, a componente horizontal T do magnetismo terrestre no local do galvanômetro tangente, o decremento logarítmico λ na diminuição

³¹⁸Em alemão: *Torsionskraft*.

do arco de oscilação, e a razão ϑ da força diretriz do fio para a força diretriz devida ao geomagnetismo T , foram encontrados da maneira usual como sendo dados por:

$$t = 9,244 \text{ segundos,}$$

$$T = 1,7983,^{319}$$

$$\lambda = 0,070 ,$$

$$\vartheta = \frac{1}{691} .$$

Se substituirmos esses valores na equação para τ obteremos então:

$$\tau = 0,020921 \cdot \varphi .$$

Os valores de φ que foram obtidos a partir das cinco experiências que foram descritas na Seção 8.7 foram apresentados no início dessa Seção. Se os substituirmos na equação para τ , obteremos então os seguintes cinco resultados para as experiências citadas:

Número	τ
1.	0,000 119 4
2.	0,000 130 0
3.	0,000 156 8
4.	0,000 148 0
5.	0,000 158 9

8.14 Cálculo da Grandeza $\frac{1}{2\tau} \cdot E$

Finalmente, ainda nos falta calcular o valor de $\frac{1}{2\tau} \cdot E$ a partir dos valores encontrados de E e τ . A saber, se resumirmos os valores correspondentes de E e τ a partir das duas Seções anteriores na próxima Tabela:

Número	E	τ
1.	36 060 000	0,000 119 4
2.	41 940 000	0,000 130 0
3.	49 700 000	0,000 156 8
4.	44 350 000	0,000 148 0
5.	49 660 000	0,000 158 9

isso vai fornecer então os seguintes cinco valores de $\frac{1}{2\tau} \cdot E$ que resultam das cinco medições que foram descritas na Seção 8.7:

³¹⁹Ver a Nota de rodapé 37 na página 28.

Número	$(1/2\tau) \cdot E$
1.	$151\,000 \cdot 10^6$
2.	$161\,300 \cdot 10^6$
3.	$158\,500 \cdot 10^6$
4.	$149\,800 \cdot 10^6$
5.	$156\,250 \cdot 10^6$

Todas as medições consideradas em conjunto fornecem então o valor médio:

$$\frac{1}{2\tau} \cdot E = 155\,370 \cdot 10^6 .$$

Contudo, a partir da Seção 8.5:

$$\frac{1}{2\tau} \cdot E : 1$$

denota a razão na qual, para uma corrente constante que é composta de massas igualmente grandes de eletricidade positiva e negativa que fluem em direções opostas e cuja intensidade é igual à unidade *magnética* da intensidade de corrente, a *quantidade de eletricidade positiva* que atravessa a seção reta do condutor em um segundo está para a quantidade que, concentrada em um ponto, exerce uma força sobre uma quantidade igual de eletricidade a uma distância de 1 milímetro, que fornece durante 1 segundo à massa de 1 miligrama a velocidade de 1 milímetro por segundo. Determinar essa razão era o *Problema* que, de acordo com a Seção 8.4, deveria ser resolvido, o que foi feito agora.

8.15 Reduzindo as Unidades Magnética, Eletrodinâmica e Eletrolítica da Intensidade de Corrente para a Unidade Mecânica

Contudo, a solução do problema que foi colocado na Seção 8.4 será usada agora para *reduzir as unidades magnética, eletrodinâmica e eletrolítica da intensidade de corrente para a unidade mecânica*.

A partir da Seção 8.2, para uma corrente constante que é composta de massas iguais de eletricidade positiva e negativa que fluem em direções opostas, e cuja intensidade é igual à unidade *mecânica* de intensidade de corrente, a *quantidade de eletricidade positiva* que atravessa a seção reta do condutor em 1 segundo deve ser $= 1$, ou seja, igual à quantidade de eletricidade concentrada em um ponto que exerce uma força em outra quantidade igual de eletricidade concentrada em um outro ponto à distância de 1 milímetro, [força essa] que fornece durante um segundo a velocidade de 1 milímetro por segundo a uma massa de um miligrama.

Contudo, a partir da Seção anterior, essa quantidade *unitária* de eletricidade positiva tem uma razão com a *quantidade de eletricidade positiva* que atravessa a seção reta em 1 segundo para uma corrente cuja intensidade é dada pela unidade de corrente *magnética* de:

$$155\,370 \cdot 10^6 : 1 .$$

Agora, como as intensidades de corrente são proporcionais às quantidades de eletricidade que atravessam a seção reta em iguais intervalos de tempo, isso implica imediatamente na

redução da unidade magnética de intensidade de corrente para a unidade mecânica; porque a quantidade de eletricidade que atravessa a seção transversal no mesmo tempo é

$$155\,370 \cdot 10^6$$

vezes maior na unidade de corrente *magnética* do que na unidade de corrente *mecânica*. Consequentemente, a *unidade magnética da intensidade de corrente também será* $155\,370 \cdot 10^6$ *vezes maior do que a unidade mecânica*, de acordo com a proporção anterior.

Além disso, como de acordo com a Seção 8.1, página 160,^{320,321} a *unidade magnética de intensidade de corrente tem uma razão de $\sqrt{2} : 1$ com a unidade eletrodinâmica*, a *unidade eletrodinâmica da intensidade de corrente será* $109\,860 \cdot 10^6 \left(= 155\,370 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \right)$ *vezes maior do que a unidade mecânica*.

Finalmente, como de acordo com a Seção 8.1, página 161,^{322,323} a *unidade mecânica de intensidade de corrente tem uma razão de $1 : 106\frac{2}{3}$ com a unidade eletrolítica*, a *unidade eletrolítica de intensidade de corrente será* $16\,573 \cdot 10^9 \left(= 106\frac{2}{3} \cdot 155\,370 \cdot 10^6 \right)$ *vezes maior do que a unidade mecânica*.

O problema nesse Tratado, como foi expresso na Seção 8.2, de reduzir aquelas três unidades de intensidade de corrente para a unidade mecânica, está então resolvido. Tudo que resta é discutir as *aplicações* que podem ser feitas desse resultado.

³²⁰[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. III, pág. 613.

³²¹Ver a página 160 da Seção 8.1, ou [KW57, pág. 613 das *Obras de Weber*].

³²²[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. III, pág. 614.

³²³Ver a página 161 da Seção 8.1, ou [KW57, pág. 614 das *Obras de Weber*]. Ver também a Nota de rodapé 232 na página 148.

II - Aplicações

8.16 Determinação da Quantidade de Eletricidade que é Necessária para Liberar 1 Miligrama de Hidrogênio de 9 Miligramas de Água

A primeira aplicação que vamos fazer dos resultados encontrados é a determinação precisa da quantidade de eletricidade que é necessária para liberar 1 miligrama de hidrogênio de 9 miligramas de água, sendo que sobre isso já foi mencionado na Nota de rodapé da Seção 8.3, página 163, a determinação de Buff feita com seu galvanômetro tangente e um longo fio condutor, publicada nos *Annalen der Chemie und Physik*, Vol. 86, pág. 33.^{324,325}

De acordo com Buff, essa quantidade de eletricidade foi suficiente para carregar uma bateria de 45 480 garrafas de Leiden, sendo que cada uma tinha 480 milímetros de altura e 160 milímetros de diâmetro, até uma distância de faísca de 100 milímetros. Essa determinação feita por Buff só não apresentou dados mais precisos sobre a quantidade de eletricidade que uma garrafa de Leiden continha quando havia sido carregada como descrito.

Os resultados que foram encontrados no presente Tratado implicam agora que a quantidade de eletricidade que é necessária para liberar 1/9 miligrama de hidrogênio de 1 miligrama de água é igual à *quantidade de eletricidade positiva* que atravessa a seção reta do condutor em 1 segundo para uma corrente constante com a unidade *eletrolítica* de intensidade. Contudo, essa última [quantidade] é, de acordo com a proporção das intensidades de corrente correspondentes às unidades *eletrolítica* e *magnética* de corrente (ver a Seção 8.1, página 161),^{326,327} $106\frac{2}{3}$ vezes maior do que a *quantidade de eletricidade positiva* que atravessa a seção reta em 1 segundo para uma corrente constante com a unidade *magnética* de intensidade de corrente, a qual, de acordo com a Seção 8.14, é:

$$155\,370 \cdot 10^6$$

vezes maior do que *uma unidade* da quantidade de eletricidade que, concentrada em um ponto, exerce, sobre uma quantidade igual [de eletricidade concentrada em um outro ponto] a uma distância de 1 milímetro, uma força que fornece durante um segundo à massa de um miligrama a velocidade de 1 milímetro por segundo.

Segue-se disso que:

$$9 \cdot 106\frac{2}{3} \cdot 155\,370 \cdot 10^6 = 149\,157 \cdot 10^9 \text{ unidades, como acabou de ser determinado, são necessárias para liberar 1 miligrama de hidrogênio de 9 miligramas de água.}$$

Se uma tal quantidade de eletricidade positiva estivesse concentrada em uma nuvem e uma quantidade igual de eletricidade negativa estivesse concentrada na superfície da Terra em um local diretamente abaixo dela, isso produziria então uma atração da nuvem para a Terra que seria igual a um peso de 45 000 quintais³²⁸ (= 2 268 000 quilogramas) se estivessem a uma distância de 1000 metros entre si.

³²⁴[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 616.

³²⁵Ver as Notas de rodapé 276 e 277 da Seção 8.3, ou [KW57, pág. 616 das *Obras* de Weber].

³²⁶[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 614.

³²⁷Ver a página 161 da Seção 8.1, ou [KW57, pág. 614 das *Obras* de Weber].

³²⁸Ver a Nota de rodapé 207 na página 142.

Se dividirmos esse número de unidades pelo número de garrafas de Leiden na bateria descrita por Buff (a saber, 45 480), obteremos então o dado preciso para a quantidade de eletricidade contida na carga de 1 garrafa de Leiden como descrita por Buff, a saber:

$$3\,280 \cdot 10^6 \text{ unidades.}$$

Contudo, a partir da descrição de Buff, a superfície carregada de tal garrafa tem uma área de:

$$480 \cdot 160 \cdot \pi = 241\,300 \text{ milímetros quadrados,}$$

consequentemente, cada milímetro quadrado estará carregado com

$$13\,600 \text{ unidades,}$$

de onde podemos determinar a compressão ou condensação da eletricidade na garrafa necessária para atingir uma distância de faísca de 100 milímetros de acordo com Buff.

8.17 Determinação da Constante c

A partir da lei fundamental da ação elétrica que foi estabelecida no Primeiro Tratado sobre *Medições Eletrodinâmicas*,³²⁹ que engloba a *eletrostática*, *eletrodinâmica*, e *indução*, a força que uma quantidade de eletricidade e exerce sobre uma quantidade de eletricidade e' à distância r com uma velocidade relativa dr/dt e uma aceleração d^2r/dt^2 é expressa por:

$$\frac{ee'}{r^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr^2}{dt^2} - 2r \frac{d^2r}{dt^2} \right) \right] .$$

Essa força é dividida em duas partes, a primeira das quais, que é igual a ee'/r^2 , pode ser chamada de força *eletrostática*, e a segunda parte, que é igual a $-(ee'/c^2r^2)(dr^2/dt^2 - 2rd^2r/dt^2)$, pode ser chamada de força *eletrodinâmica*. A relação entre essas duas forças é determinada pela constante c ; sendo que c significa o valor da velocidade relativa (suposta constante) na qual a força *eletrostática* cancelaria a força *eletrodinâmica*. Essa *constante* c será determinada agora da seguinte maneira:

Encontrou-se na Seção 8.14 que a razão $\frac{1}{2\pi}E : 1$ (isto é, a *razão da unidade magnética de intensidade de corrente para a unidade mecânica*) era:

$$155\,370 \cdot 10^6 : 1 .$$

Na Seção 26, página 261 do Segundo Tratado sobre *Medições Eletrodinâmicas*,^{330,331} a razão da unidade *magnética* de intensidade de corrente para a unidade *eletrodinâmica* foi dada como:

$$\sqrt{2} : 1 ,$$

³²⁹[Web46] com tradução parcial para o francês em [Web87] e traduções completas para o inglês em [Web07] e [Web21b].

³³⁰[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 360.

³³¹[Web52c, pág. 360 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21c].

e na Seção 27, página 269,^{332,333} a razão da unidade *eletrodinâmica* de intensidade de corrente para a unidade *mecânica* foi dada como:

$$c : 4 ,$$

de onde segue a *razão da unidade magnética de corrente para a unidade mecânica*:

$$c\sqrt{2} : 4 .$$

Colocando essa razão igual à razão que foi encontrada na Seção 8.14 fornece então:

$$c = 4 \cdot 155\,370 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = 439\,450 \cdot 10^6 .$$

A partir dessa determinação da *constante* c , vemos então que duas massas elétricas têm de se deslocar com uma velocidade muito grande entre si para que a força *eletrodinâmica* anule a força *eletrostática*, a saber, com uma velocidade de 439 milhões de metros ou 59 320 milhas por segundo, o que excede significativamente a velocidade da luz.³³⁴

Contudo, a velocidade da luz não é a velocidade de movimento de um corpo, mas uma onda, enquanto que todas as velocidades dos movimentos reais dos corpos que são conhecidos por nós, até mesmo dos corpos celestiais, constituem apenas frações muito pequenas dela. Se observarmos agora que a razão da força *eletrodinâmica* para a *eletrostática* corresponde ao quadrado dessa fração, isso vai implicar então que a força eletrodinâmica pode sempre ser considerada como sendo desprezivelmente pequena em comparação com a força eletrostática. — De fato, ainda não temos conhecimento sobre as velocidades com as quais os fluidos elétricos se deslocam em condutores metálicos.³³⁵ Mas pode-se deduzir de diversas circunstâncias que a quantidade de eletricidade neutra contida nesses condutores é extremamente grande. Porém, quanto maior for esta quantidade, menor será a velocidade do movimento real, que resulta então das *medições de intensidade de corrente* existentes. A velocidade desses movimentos é, portanto, provavelmente apenas uma pequena fração da velocidade c .

Além disso, o grande valor encontrado para a *constante* c implica na consequência interessante de que tal parte dinâmica também poderia ser adicionada à *força gravitacional entre corpos ponderáveis* (o que mostraria uma grande analogia entre as interações de corpos *ponderáveis* e *imponderáveis*) sem que a parte dinâmica da força tivesse a menor influência observável sobre os movimentos dos corpos celestes.

O fato de que na eletricidade a ação da força *eletrodinâmica* nem sempre desaparece, mas frequentemente aparece de forma muito óbvia nas correntes galvânicas, deve-se unicamente ao *cancelamento completo de todas as forças eletrostáticas que ocorrem na neutralização* da eletricidade positiva e negativa, contra as quais ela desapareceria.³³⁶ Sempre que não

³³²[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 367.

³³³[Web52c, pág. 367 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21c].

³³⁴Ver a discussão sobre a constante c de Weber no Capítulo 19.

³³⁵Weber está se referindo aqui às velocidades de deriva ou de arraste das partículas eletrizadas em relação à matéria do condutor no caso de correntes elétricas fluindo em um metal como o cobre, isto é, velocidades em relação ao fio. A determinação experimental dessas velocidades só foi feita após a morte de Weber, ver a Nota de rodapé 102 na página 71.

³³⁶Ou seja, em geral a ação da componente eletrodinâmica vai ser desprezível comparada com a ação da componente eletrostática da força. No caso das correntes galvânicas isso não ocorre devido à neutralização elétrica das correntes, o que faz com que a componente eletrostática se anule, sobrando apenas a componente eletrodinâmica da força de Weber.

ocorrer tal neutralização, mas estiver presente eletricidade livre, apenas a força *eletrostática* será levada em consideração na ação da eletricidade livre. Isso explica porque nem todas as experiências que foram planejadas para estabelecer as leis fundamentais da ação elétrica puderam ser realizadas com apenas *duas* massas de eletricidade livre, mas algumas experiências tiveram de ser realizadas com *dois pares* de massas elétricas (a saber, elementos de corrente) que eram *neutralizadas eletrostaticamente*.³³⁷

Para as massas *ponderáveis*, para as quais é válida a lei da atração indiferente, não podemos falar de *neutralização das massas*.

8.17.1 Observação

No início dessa Seção foi apresentada a seguinte equação para a determinação da *constante* c :

$$c = \frac{E}{\tau} \cdot \sqrt{2} ,$$

na qual $\frac{1}{2\tau} \cdot E : 1$ denotava a razão que foi encontrada na Seção 8.14 da quantidade de *eletricidade positiva* que atravessa a seção reta de um condutor em 1 segundo para uma corrente constante com a intensidade da unidade *magnética* de corrente em relação à quantidade de eletricidade concentrada em um ponto que exerceria sobre uma quantidade igual de eletricidade concentrada em um outro ponto uma força à distância de 1 milímetro que forneceria durante um segundo uma velocidade de 1 milímetro por segundo para uma massa de um miligrama. — Para provar essa equação foi mencionado o Segundo Tratado sobre *Medições Eletrodinâmicas*.³³⁸ Contudo, a validade dessa equação também pode ser inferida diretamente da *lei fundamental da ação elétrica* e da *definição da unidade magnética de corrente*. Precisamos apenas considerar para esse fim a interação entre dois elementos de corrente iguais α e α de uma corrente fluindo ao longo de uma linha reta separados por uma distância r que, como já foi mencionado na Nota de rodapé na página 160^{339,340} repelem-se com uma força igual a:

$$\frac{\alpha^2}{r^2} i^2 ,$$

caso i seja expresso em termos da unidade *magnética* de corrente. Como é bem conhecido, isso segue da *lei fundamental de Ampère* e da relação que ela fornece entre *eletromagnetismo* e *eletrodinâmica*.

Supondo isso, imagine que o condutor linear de nossa corrente contém uma unidade de eletricidade positiva e negativa em cada pedaço de um milímetro de comprimento. De acordo com a Seção 8.14, $\frac{1}{2\tau} \cdot E$ denota então o número de milímetros que as duas eletricidades precisam atravessar em direções opostas em um segundo para que tenhamos:

$$i = 1 .$$

Estas condições simples incluem não apenas as quantidades de eletricidade nos dois elementos de corrente α e α , sua distância e outras condições das quais depende sua força repulsiva

³³⁷Por exemplo, no caso da interação entre dois elementos de corrente, considera-se cada elemento como composto de cargas positivas e negativas de mesma intensidade, mas de sinais opostos.

³³⁸[Web52c] com tradução para o inglês em [Web21c].

³³⁹[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 614.

³⁴⁰Ver a página 160 da Seção 8.1, ou [KW57, pág. 614 das *Obras* de Weber].

(de acordo com a lei fundamental da ação elétrica), mas também a *magnitude desta própria força repulsiva* dada, ou seja, como $i = 1$:

$$\frac{\alpha^2}{r^2} .$$

Trata-se, portanto, apenas de deduzir essa força repulsiva já conhecida a partir da lei fundamental da ação elétrica; então, como c está contido nessa lei fundamental, será obtida uma expressão para essa força que depende de c , e precisamos apenas colocar [a força repulsiva] igual ao valor que já é conhecido com o objetivo de encontrar c . Contudo, a força de repulsão entre dois elementos de corrente α e α pode ser deduzida muito facilmente da lei fundamental da ação elétrica com as relações simples que foram descritas. Se decomposmos então a força total que é dada pela lei fundamental em duas partes, a saber, nas forças *eletrostática* e *eletrodinâmica*, é óbvio que a soma das forças eletrostáticas entre os dois elementos de corrente será nula (devido à neutralização eletrostática que ocorre nos dois elementos de corrente). Também está claro que nenhuma aceleração existe entre as massas elétricas nos dois elementos de corrente, de tal forma que $d^2r/dt^2 = 0$. Com isso, a expressão geral para a ação elétrica:

$$\frac{ee'}{r^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr^2}{dt^2} - 2r \frac{d^2r}{dt^2} \right) \right]$$

fica em nosso caso reduzida a:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{ee'}{r^2} \frac{dr^2}{dt^2} .$$

Agora, quando é aplicada essa expressão:

1) para as duas massas positivas nos dois elementos de corrente $e = +\alpha$ e $e' = +\alpha$, ela vai fornecer uma força repulsiva que é igual a zero, pois a velocidade relativa entre as massas $dr/dt = 0$ (já que as duas massas deslocam-se na mesma direção com velocidades iguais);

2) a mesma coisa vale para duas massas negativas $e = -\alpha$ e $e' = -\alpha$;

3) contudo, quando a mesma expressão é aplicada a uma massa positiva $e = +\alpha$ e a uma massa negativa $e' = -\alpha$, ela vai fornecer uma força de repulsão que é igual a $+\frac{1}{c^2} \frac{ee'}{r^2} \cdot \frac{1}{\tau^2} \cdot E^2$, pois a velocidade relativa entre essas massas é $dr/dt = E/\tau$ (já que ambas deslocam-se em direções opostas com a velocidade $\frac{1}{2\tau} \cdot E$);

4) a mesma coisa vale para uma massa negativa $e = -\alpha$ e uma massa positiva $e' = +\alpha$.

Segue-se então disso que a soma de todas as forças de repulsão entre as massas elétricas que estão contidas nos dois elementos de corrente é igual a:

$$2 \cdot \frac{1}{c^2} \frac{\alpha^2}{r^2} \cdot \frac{1}{\tau^2} \cdot E^2 ,$$

e se essa soma for colocada igual a seu valor α^2/r^2 que já é conhecido, isso vai implicar então na seguinte equação para a determinação de c :

$$\frac{\alpha^2}{r^2} = 2 \cdot \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\alpha^2}{r^2} \cdot \frac{1}{\tau^2} \cdot E^2 ,$$

ou

$$c = \frac{E}{\tau} \cdot \sqrt{2} ,$$

o que era para ser provado.

8.18 As Leis Elétricas, com a Determinação Numérica de Suas Constantes

As leis elétricas que foram desenvolvidas no Primeiro e Segundo Tratados sobre *Medições Eletrodinâmicas* são as seguintes:

1) *A lei fundamental da ação elétrica.* — De acordo com ela, a força que a massa elétrica e exerce sobre a massa elétrica e' a uma distância r com uma velocidade relativa dr/dt e uma aceleração d^2r/dt^2 é expressa por:

$$\frac{ee'}{r^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr^2}{dt^2} - 2r \frac{d^2r}{dt^2} \right) \right] .$$

2) *A lei fundamental da eletrodinâmica.* — De acordo com ela, a força que um elemento de corrente imutável e imóvel de comprimento α e intensidade de corrente i exerce sobre um elemento de corrente igual de comprimento α' e intensidade de corrente i' à distância r quando α faz um ângulo ϑ com r , α' faz um ângulo ϑ' com a extensão de r , e α faz um ângulo ε com α' , é expressa por:

$$\frac{\alpha\alpha'}{r^2} ii' (3 \cos \vartheta \cos \vartheta' - 2 \cos \varepsilon) .$$

3) *A lei de indução voltaica*³⁴¹ *para um elemento de corrente constante que se desloca com relação a um condutor.* — De acordo com ela, a força eletromotriz que um elemento de corrente de comprimento α e intensidade de corrente i exerce sobre um elemento de um condutor de comprimento α' que se desloca com uma velocidade u a uma distância r quando α faz um ângulo ϑ com r , α' faz um ângulo φ com r , u faz um ângulo ϑ' com a extensão de r , e α faz um ângulo ε com u , é expressa por:

$$\frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{\alpha\alpha'}{r^2} \cdot ui \cos \varphi (3 \cos \vartheta \cos \vartheta' - 2 \cos \varepsilon) .$$

4) *A lei de indução voltaica para um elemento de corrente variável que não se desloca em relação a um condutor.* — De acordo com ela, a força eletromotriz que um elemento de corrente de comprimento α cuja intensidade de corrente cresce uniformemente até i no intervalo de tempo t exerce sobre um elemento de condutor de comprimento α' à distância r quando α faz um ângulo ϑ com r , e α' faz um ângulo ϑ' com a extensão de r , é expressa por:

³⁴¹A expressão utilizada por Weber, *das Gesetz der Volta-induktion*, havia sido sugerida inicialmente pelo próprio Faraday no parágrafo 26 de seu primeiro artigo sobre indução eletromagnética de 1831 ao definir a expressão *volta-electric induction*, [Far32a, parágrafo 26, pág. 267 do *Great Books of the Western World*] com tradução para o alemão em [Far32b] e tradução para o português em [Far11, págs. 158-159]:

For the purpose of avoiding periphrasis, I propose to call this action of the current from the voltaic battery, *volta-electric induction*.

Isto é:

Com a finalidade de evitar perífrase, proponho chamar essa ação da corrente da bateria voltaica de *indução eletrovoltáica*.

A palavra “perífrase” significa circunlóquio ou rodeio de palavras. Nessa tradução em português das obras de Weber vou utilizar as expressões *indução eletrovoltáica* ou *indução voltaica* para essa classe de fenômenos que hoje em dia é chamada de lei de indução de Faraday.

$$-\frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{\alpha\alpha'}{r} \cdot \frac{i}{t} \cos \vartheta \cos \vartheta' .$$

5) *A lei de indução voltaica para um contato deslizante.* — De acordo com ela, a força eletromotriz exercida por uma corrente de intensidade i que passa pelo contato deslizante com velocidade de deslizamento v ao atuar sobre um elemento condutor de comprimento α' à distância r , quando v faz um ângulo ϑ com r , e α' faz um ângulo ϑ' com a extensão de r , é expressa por:

$$-\frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{\alpha'}{r} vi \cos \vartheta \cos \vartheta' .$$

Um valor positivo nas expressões (1) e (2) significa uma força de repulsão, enquanto que um valor negativo significa uma força de atração. Os valores numéricos de nossas medições fornecem as magnitudes das forças como razões com a força que forneceria durante 1 segundo uma velocidade de 1 milímetro por segundo a uma massa de um miligrama. Na expressão (2), assim como em todas as expressões seguintes, as intensidades de corrente i e i' são supostas como sendo medidas em unidades *magnéticas*, o que sempre pode ser facilmente feito com o *galvanômetro tangente*. Se ε' denotar a *capacidade elétrica* do condutor α' — isto é, a razão da quantidade de eletricidade positiva que ele contém (que é igual à quantidade de eletricidade negativa) em relação a seu comprimento, — então para $\varepsilon' = 1$ as expressões (3), (4) e (5) vão fornecer a diferença entre as duas forças que atuam na direção de α' sobre as quantidades de eletricidade positiva e negativa que estão contidas em α' , e, de fato, elas vão fornecer essa *diferença de força* em relação à força que forneceria durante um segundo uma velocidade de 1 milímetro por segundo a uma massa de um miligrama. — Se ε' não for igual a 1, então as expressões (3), (4) e (5) precisam ser multiplicadas por ε' para fornecer a *diferença de força* dada.

Uma determinação completa de todas as forças por meio das leis dadas requer que a *constante c* tenha de ser colocada igual ao valor numérico que foi encontrado na Seção anterior em todas as expressões anteriores. Obteremos então:

$$\begin{aligned} & \frac{ee'}{r^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr^2}{dt^2} - 2r \frac{d^2r}{dt^2} \right) \right] \\ = & \frac{ee'}{r^2} \left[1 - \frac{1}{193\,120 \cdot 10^{18}} \left(\frac{dr^2}{dt^2} - 2r \frac{d^2r}{dt^2} \right) \right] , \quad (1.) \end{aligned}$$

$$\frac{\alpha\alpha'}{r^2} ii' (3 \cos \vartheta \cos \vartheta' - 2 \cos \varepsilon) , \quad (2.)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{\alpha\alpha'}{r^2} \cdot ui \cos \varphi (3 \cos \vartheta \cos \vartheta' - 2 \cos \varepsilon) \\ = & \frac{1}{155\,370 \cdot 10^6} \cdot \frac{\alpha\alpha'}{r^2} \cdot ui \cos \varphi (3 \cos \vartheta \cos \vartheta' - 2 \cos \varepsilon) , \quad (3.) \end{aligned}$$

$$-\frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{\alpha\alpha'}{r} \cdot \frac{i}{t} \cos \vartheta \cos \vartheta' = -\frac{1}{155\,370 \cdot 10^6} \cdot \frac{\alpha\alpha'}{r} \cdot \frac{i}{t} \cos \vartheta \cos \vartheta' , \quad (4.)$$

$$-\frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{\alpha'}{r} \cdot vi \cos \vartheta \cos \vartheta' = -\frac{1}{155\,370 \cdot 10^6} \cdot \frac{\alpha'}{r} \cdot vi \cos \vartheta \cos \vartheta' . \quad (5.)$$

As leis elétricas nesta última forma, *com a determinação numérica de todas as constantes*, satisfazem todos os requisitos práticos. Contudo, para investigações *teóricas*, em alguns casos pode ser necessário usar nas expressões acima os valores de i e i' deduzidos das *causas* da intensidade de corrente (ver a Seção 8.2), em vez das intensidades de corrente i e i' medidas em unidades *magnéticas*. A saber, se $+\alpha\varepsilon$ e $-\alpha\varepsilon$ denotam as quantidades de eletricidade positiva e negativa, respectivamente, que estão contidas no condutor α , e $+u$ e $-u$, respectivamente, são as velocidades com que elas se deslocam no condutor, e se $+\alpha'\varepsilon'$, $-\alpha'\varepsilon'$, $+u'$, e $-u'$, respectivamente, denotam as mesmas coisas para o condutor α' , então εu e $\varepsilon' u'$, respectivamente, serão os valores das intensidades de corrente, quando determinadas em unidades *mecânicas*, e a partir das relações que foram encontradas na Seção 8.15, esses valores precisam ser divididos por $155\,370 \cdot 10^6$ para obter os valores das mesmas intensidades de corrente, quando expressas em unidades *magnéticas*. Teremos então consequentemente nas expressões acima:

$$i = \frac{\varepsilon u}{155\,370 \cdot 10^6} , \quad i' = \frac{\varepsilon' u'}{155\,370 \cdot 10^6} ,$$

e esses valores podem ser substituídos no lugar de i e i' nas expressões acima se isso for necessário.

8.19 Aplicação na Eletrólise — Medição de uma Força de Afinidade Química

Todas as forças elétricas que são determinadas por meio das leis que foram citadas nas Seções anteriores são forças que atuam diretamente sobre as massas elétricas. *Contudo, todas as forças que atuam diretamente apenas sobre massas elétricas também vão atuar indiretamente sobre os portadores ponderáveis dessas massas elétricas*. Isso abre um amplo campo para a aplicação das leis elétricas ao estudo dos corpos ponderáveis, pois a eletricidade torna-se para nós um instrumento pelo qual podemos fazer com que forças conhecidas atuem sobre corpos ponderáveis em condições em que nenhuma outra força conhecida atue.

O teorema anterior é evidente se as massas elétricas estiverem conectadas ao seu portador ponderável de tal forma que não possam ser movidas sem ele. Contudo, mesmo em condutores metálicos nos quais a eletricidade pode se deslocar, enquanto que seu portador ponderável (o metal) permanece em repouso, de tal forma que as massas elétricas vão de uma partícula metálica para outra, ainda encontramos um acoplamento entre as massas elétricas e as partículas metálicas que precisa ser dissolvido antes que as massas elétricas possam ir de uma partícula metálica para a outra. Contudo, enquanto houver esse acoplamento, todas as forças que atuam diretamente apenas sobre as massas elétricas serão transferidas indiretamente às partículas metálicas com as quais estão associadas, e apenas aquelas forças que atuam sobre as massas elétricas depois que tenham sido liberadas das partículas metálicas não serão transferidas a essas partículas metálicas, mas irão fornecer uma certa velocidade a essas massas elétricas até que elas alcancem a próxima partícula metálica, porém, devido ao acoplamento entre essas massas elétricas e a próxima partícula metálica, ela será novamente cancelada,³⁴² o que teria o mesmo efeito como se as forças elétricas que produziram essa velocidade tivessem sido transferidas para a próxima partícula metálica. Denominamos de *forças de resistência* a todas essas forças que surgem do acoplamento das massas elétricas

³⁴²Ou seja, a velocidade adquirida será novamente cancelada.

com partículas metálicas individuais, por meio das quais o metal se opõe ao movimento da eletricidade em seu interior, a partir das quais surge a *lei de Ohm*,³⁴³ de acordo com a qual a eletricidade em um condutor metálico só pode persistir em um movimento uniforme quando ela é forçada para a frente continuamente por uma força igualmente grande, e que a corrente vai desaparecer imediatamente tão logo cesse a força motora. — Disso segue então que, mesmo em condutores, todas as forças que atuam diretamente sobre a eletricidade no condutor, serão transferidas indiretamente ao próprio condutor devido à *resistência* do condutor.

Na *eletrólise*, não lidamos com um condutor metálico que permanece em repouso enquanto o fluido elétrico se desloca nele, mas sim com um corpo (por exemplo, água) que é composto de vários tipos de partículas ponderáveis, das quais as partículas de um tipo (a saber, partículas de hidrogênio) seguem o movimento da eletricidade *positiva*, enquanto que as do outro tipo (a saber, partículas de oxigênio) seguem o movimento da eletricidade *negativa*. Isso então levanta a seguinte questão. Qual é a origem das forças que produzem os vários movimentos das duas componentes da água? As leis eletrolíticas provam que estes movimentos devem ser, se não um efeito direto, pelo menos um efeito indireto das forças elétricas. Ora, se as forças elétricas atuam diretamente apenas sobre as massas elétricas ligadas às partículas de hidrogênio e de oxigênio, o fato de que as partículas de hidrogênio seguem o movimento da eletricidade positiva, enquanto as partículas de oxigênio seguem o movimento da eletricidade negativa, prova que as primeiras [partículas] devem estar contidas na água conectadas com eletricidade positiva livre, e as últimas [partículas] devem estar contidas na água conectadas com eletricidade negativa livre, ficando a questão de saber se, além da eletricidade livre, elas também contêm uma quantidade de fluido neutro. Também não se discute o quão forte é essa conexão das partículas de hidrogênio com a eletricidade positiva livre e das partículas de oxigênio com a eletricidade negativa livre; ou seja, se a conexão é tão forte que elas não podem ser separadas de forma alguma, de tal forma que na eletrólise a eletricidade só vai se deslocar juntamente com seu portador ponderável, ou se esse acoplamento se comporta como o faz nos condutores metálicos, de tal forma que a eletricidade, além do movimento conjunto com o portador ponderável, também vai assumir um movimento que é independente do movimento do portador ponderável. Só que, neste último caso, a lei da decomposição de diferentes corpos compostos ocasionada pela mesma corrente de acordo com a proporção dos equivalentes químicos, não poderia ter uma validade estrita, como parece ser o caso de acordo com as últimas investigações.

Agora, se as forças elétricas que apenas tentam separar diretamente o fluido elétrico forem transmitidas às componentes da água por qualquer ligação que acopla o fluido às componentes, poderemos então obter uma determinação mais precisa das *forças de separação químicas*³⁴⁴ que produzem a separação das componentes ponderáveis a partir de um melhor conhecimento das forças de separação elétricas, e esse é o motivo para o interesse especial que a eletrólise possui em comparação aos outros métodos de separação química. Ou seja, a eletricidade pode ser utilizada como um instrumento pelo qual ligamos cada partícula de hidrogênio e oxigênio na água por um fio e podemos esticar os dois fios em direções opostas com forças conhecidas até que as partículas de hidrogênio e oxigênio sejam separadas entre si.

Para utilizar esse instrumento e determinar de fato as forças necessárias para separar as partes ligadas quimicamente em termos de unidades conhecidas, *as leis elétricas tiveram*

³⁴³Ver a Nota de rodapé 191 na página 135.

³⁴⁴Em alemão: *Chemischen Scheidungskräfte*. Ver também a Nota de rodapé 58 na página 54.

que ser fornecidas juntamente com a determinação numérica de suas constantes. Feito isso, tentaremos também fazer esta aplicação dos resultados obtidos.

As forças que colocam o fluido elétrico em movimento de corrente são chamadas de *forças eletromotrizes*. Essa terminologia especial (que é utilizada para distinguir *esse tipo de força*, e não apenas suas ações) é baseada no fato de que até agora essas forças não podiam ser medidas com unidades conhecidas, mas só podiam ser determinadas indiretamente pelas ações das correntes que elas produzem (ações térmicas, químicas e magnéticas), através das quais elas podiam de fato ser comparadas entre si, mas não podiam ser expressas em termos absolutos de acordo com nenhuma unidade conhecida e, portanto, também não podiam ser comparadas com outras forças conhecidas. Esse motivo não mais se aplica quando determinamos essas forças a partir das leis fornecidas na Seção anterior, por meio das quais elas são expressas em termos de unidades conhecidas. Também podemos expressar as forças que não podem ser calculadas diretamente a partir das leis anteriores em termos de unidades conhecidas a partir da comparação delas com as forças que podem [ser calculadas diretamente]. — Finalmente, como podemos determinar precisamente a resistência em um circuito fechado, e para uma corrente constante a força eletromotriz e resistência precisam sempre ter a mesma razão entre si, de acordo com a lei de Ohm, também descobrimos como as forças eletromotrizes estão distribuídas nas várias partes do circuito. Assim, se um voltâmetro³⁴⁵ for introduzido em um circuito, então as forças de separação elétricas que atuam na água podem ser precisamente determinadas.

No entanto, o que acontece com a água é que, quando pura, ela forma um condutor de eletricidade muito ruim e é muito difícil de decompor. Todas as medições eletrolíticas se relacionam então com a água que foi misturada com ácido sulfúrico ou outros produtos químicos: para misturas diferentes obtemos resultados diferentes no que diz respeito à decomponibilidade. Logo, é necessário inicialmente nos restringirmos a uma mistura particular, e aqui vamos escolher uma mistura de água e ácido sulfúrico com uma gravidade específica de 1,25, seguindo as investigações que Horsford publicou nos *Annalen* de Poggendorff, Vol. 70 (1847), pág. 238, a qual, entre todas as misturas de água e ácido sulfúrico, é a mais fácil de decompor.³⁴⁶

Para comprimentos e seções retas iguais, a *resistência* pela qual essa mistura se opõe à corrente foi encontrada por Horsford como sendo

$$696\,700$$

vezes maior do que a resistência da prata, ou, quando colocamos a razão da resistência da prata para aquela do cobre como igual a 1 : 0,7417, segundo Lenz (*Annalen* de Poggendorff, Vol. 34, pág. 418, e Vol. 45, pág. 105):³⁴⁷

$$516\,750$$

vezes maior do que a resistência do cobre utilizado por Lenz. — A partir das medições que foram comunicadas nos *Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen*, Vol. 5 (“Über die Anwendung der magnetischen Induktion auf Messung der Inklination mit

³⁴⁵Um voltâmetro, também chamado Volta-eletrômetro ou coulombímetro, é um instrumento usado para medir a carga elétrica através da ação eletrolítica. Usualmente ele é uma célula eletrolítica e a medida é feita pelo peso do elemento depositado ou libertado no cátodo em um intervalo de tempo específico. Faraday utilizou um instrumento que denominou de Volta-eletrômetro, [Far34b, Artigo 565, Nota 1] e [Far34a, artigo 704] com tradução para o alemão em [Far34c]. Mais tarde essa expressão foi abreviada para voltâmetro. O termo atual é coulombímetro. Não deve ser confundido com um voltímetro que mede a diferença de potencial elétrico.

³⁴⁶Eben Norton Horsford (1818-1893), ver [Hor47] e [Sto88].

³⁴⁷[Len35] e [Len38].

dem Magnetometer — Sobre a aplicação da indução magnética na medição da inclinação com o magnetômetro”),³⁴⁸ a resistência de um fio de cobre com 1 milímetro de comprimento e massa de 1 miligrama ($= \frac{1}{8,427}$ milímetros quadrados de seção reta) encontrou-se igual a.^{349,350}

$$2\,310\,000$$

em unidades absolutas do sistema *magnético*, isto é, para um fio de cobre com 1 milímetro de comprimento e uma seção reta de 1 milímetro quadrado, ela será igual a:

$$274\,100.$$

Isso fornece a resistência da mistura anterior quando ela possui 1 milímetro de comprimento e 1 milímetro quadrado de seção reta como sendo:

$$141\,640 \cdot 10^6$$

em unidades *magnéticas* de resistência. Contudo, essa mistura continha aproximadamente 9 partes de água para 1 parte de ácido sulfúrico por volume, e a água pura chegaria então a apenas 9/10 da seção reta total. Se assumirmos que a corrente total atravessa apenas a água (já que se uma parte da corrente fosse conduzida pelo ácido sulfúrico isso definiria então uma corrente auxiliar, a qual teria de ser excluída de qualquer consideração da decomposição da água), então a resistência estaria relacionada apenas com a água, e teríamos de colocá-la igual a:

$$127\,476 \cdot 10^6$$

para 1 milímetro de comprimento e 1 milímetro quadrado de seção reta.

Mas se a intensidade de corrente para essa *resistência* for $106\frac{2}{3}$ de acordo com a unidade *magnética* — isto é, forte o suficiente para, de acordo com a Seção 8.1, página 161,^{351,352} decompor 1 miligrama de água em 1 segundo — então a força eletromotriz para cada milímetro em unidades *magnéticas* chegaria a:

$$106\frac{2}{3} \cdot 127\,476 \cdot 10^6 ,$$

que precisa ser multiplicado por $\frac{2\sqrt{2}}{c} = \frac{1}{155\,370 \cdot 10^6}$ para obter essa expressão em unidades *mecânicas*.

Contudo, a partir da Seção anterior, esse número significa a *diferença entre as forças* que atuam na direção da corrente em *cada unidade* de eletricidade positiva livre (nas partículas de hidrogênio) em uma coluna de água com 1 milímetro de comprimento e em *cada unidade* da eletricidade negativa livre (no ácido sulfúrico que se encontra aí), e esse número precisa então ser multiplicado por n para obter a *força total que atua*, se n unidades de eletricidade positiva livre ou negativa livre estiverem contidas nas partículas de hidrogênio ou oxigênio da coluna de água com 1 milímetro de comprimento.

³⁴⁸[Web53e], [Web53a] e [Web53c].

³⁴⁹[Nota de Kohlrausch e Weber:] No lugar citado, [Obras de Wilhelm Weber, Vol. II, pág. 319], encontramos as resistências dadas para vários tipos de cobre, entre os quais encontramos o cobre mencionado, que corresponde ao cobre utilizado por Jacobi para seu padrão de resistência, que possui o maior valor. Esse valor foi escolhido pois Lenz, que frequentemente trabalhava com Jacobi, provavelmente utilizava o mesmo tipo de cobre que Jacobi em suas experiências.

³⁵⁰Ver [Web53e, pág. 319 das Obras de Weber] e [Jac51].

³⁵¹[Nota de Heinrich Weber:] Obras de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 614.

³⁵²Ver a página 161 da Seção 8.1, ou [KW57, pág. 614 das Obras de Weber].

Contudo, o hidrogênio em 1 miligrama de água decomposta fornece sua eletricidade positiva livre para o eletrodo onde se desenvolve, que vai então fluir através do eletrodo (ou, o que dá no mesmo, vai ser neutralizada pelo fornecimento de eletricidade negativa nele) e vai fluir através da seção reta em 1 segundo. Contudo, como a intensidade de corrente em unidades *eletrolíticas* é igual a 1 e, da Seção 8.15, com essa intensidade de corrente, $106\frac{2}{3} \cdot 155\,370 \cdot 10^6$ unidades de eletricidade positiva e uma mesma quantidade de eletricidade negativa vai atravessar a seção reta em 1 segundo (quando metade da eletricidade positiva que ficou livre no eletrodo flui através do eletrodo, enquanto que a outra metade é neutralizada pela eletricidade negativa fornecida pelo eletrodo), obtemos:

$$\frac{1}{2}n = 106\frac{2}{3} \cdot 155\,370 \cdot 10^6 .$$

Se multiplicarmos esse número por:

$$\frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot n = 2 \cdot 106\frac{2}{3} ,$$

então o produto

$$2 \cdot \left(106\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 127\,476 \cdot 10^6$$

fornece a *diferença entre as forças* que precisam atuar na direção da corrente sobre a eletricidade positiva livre contida nas partículas de hidrogênio em 1 miligrama de água que forma uma coluna de 1 milímetro de comprimento, e sobre a eletricidade negativa contida nas partículas de oxigênio (sob a influência do ácido sulfúrico ao redor) se a decomposição da água for para ocorrer com uma velocidade de 1 milímetro por segundo e, de fato, essa *diferença nas forças* é determinada a partir do número anterior em relação à força que fornece durante um segundo a uma massa de 1 miligrama a velocidade de 1 milímetro por segundo.

O peso de um miligrama é uma força que vai fornecer em um segundo uma velocidade de 9811 milímetros por segundo a uma massa de um miligrama. Portanto, se dividirmos o número dado por 9811, obteremos então essa *diferença de força*, como expressa em peso de miligrama³⁵³ igual a:

$$\frac{2}{9811} \cdot \left(106\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 127\,476 \cdot 10^6 = 2 \cdot 147\,830 \cdot 10^6 .$$

Podemos expressar esse resultado da seguinte maneira: *Se todas as partículas de hidrogênio em 1 miligrama de água em uma coluna com 1 milímetro de comprimento estivessem ligadas por um fio e todas as partículas de oxigênio estivessem ligadas por um outro fio, então cada um dos dois fios teria de ser tensionado em direções opostas com um peso de*

147 830 quilogramas,

*ou aproximadamente 2956 quintais,*³⁵⁴ *para produzir uma decomposição da água com a mesma velocidade com que 1 miligrama de água seria decomposta em um segundo.* A tensão permaneceria a mesma para colunas com seções retas diferentes, mas aumentaria proporcionalmente ao comprimento da coluna.

³⁵³Em alemão: *im Milligrammgewicht ausgedrückt.*

³⁵⁴Ver a Nota de rodapé 207 na página 142.

Se a água for decomposta em uma taxa menor nas mesmas condições — por exemplo, a uma taxa de 1 miligrama em 2956 segundos — então a tensão anterior terá de ser proporcionalmente menor; a saber, apenas 1 quintal. Em geral, a tensão poderia ser tão pequena quanto desejado; a decomposição sempre ocorreria, mas a uma taxa mais lenta quanto menor a tensão. Contudo, isso só vale sob a suposição de que a *força de resistência* pela qual a água se opõe à sua decomposição (o movimento do hidrogênio e oxigênio em direções opostas), que é análoga à *força de resistência* que se opõe ao movimento da eletricidade positiva e negativa em um condutor metálico de acordo com a lei de Ohm, seja proporcional à taxa de decomposição.³⁵⁵ Contudo, para condutores metálicos, é muito provável que a lei de Ohm não corresponda precisamente à realidade mas que, falando precisamente, a força de resistência seja constituída de duas partes, uma das quais é proporcional à velocidade, enquanto que a outra é constante, já que apenas dessa maneira os melhores condutores (por exemplo, metais) podem ser incluídos na mesma lei que os piores condutores (por exemplo, isolantes). A mesma coisa provavelmente também vale para a força de resistência pela qual a água se opõe ao movimento do hidrogênio e oxigênio em direções opostas em seu interior. A *resistência* (a saber, a força de resistência dividida pela velocidade de deriva)³⁵⁶ será então representada pela soma de uma parte constante w e uma parte k/i que é inversamente proporcional à velocidade de deriva. Agora, se substituirmos essa soma pela *resistência* na lei de Ohm, obteremos então a intensidade de corrente i , expressa em termos da força eletromotriz E e da soma dada, da seguinte maneira:

$$i = \frac{E}{w + k/i} ,$$

ou

$$E = k + wi .$$

Para condutores metálicos, k é muito pequeno comparado ao valor de wi que vem das medições; para isolantes, wi desaparece comparado com k .

Embora não existam experimentos precisos com água a partir dos quais o valor da constante k possa ser determinado, existem, no entanto, experimentos que mostraram que essa constante, embora pequena, não tem um valor completamente desprezível. Se correntes induzidas magneticamente forem passadas através da água, pode-se deduzir a partir das ações mensuráveis da corrente que a mesma indução, dependendo se for realizada mais rápida ou mais lentamente, decompõe mais ou menos água, o que não deveria ser o caso se $k = 0$. — Em medições eletrolíticas, wi geralmente é tão grande que k não precisa ser levado em consideração.

Nos referimos às forças que causam a resistência à decomposição do hidrogênio e oxigênio na água como *forças de afinidade química* as quais, contudo, até o momento não estamos em condições de expressar em unidades conhecidas. Nessa Seção, será mostrado em um exemplo como os resultados das investigações anteriores podem ser utilizados de fato para implementar tal determinação. Isto abre caminho para pesquisas mais detalhadas sobre as *leis das forças de afinidade química*, mas requer medições mais numerosas dessas forças, das quais apenas uma medição deve ser dada aqui como exemplo.

³⁵⁵[Nota de Kohlrausch e Weber:] De acordo com a lei de Ohm, a razão entre a força de resistência que um condutor oferece ao movimento da eletricidade dentro dele e a velocidade desse movimento é uma *constante*, que é chamada de *resistência* do condutor.

³⁵⁶Em alemão: *Stromgeschwindigkeit*. Ver a Nota de rodapé 102 na página 71.

8.20 Conteúdo de Eletricidade dos Condutores

A intensidade da corrente que atravessa um condutor é proporcional à velocidade com que a eletricidade positiva e negativa atravessa a *seção reta do condutor* e, portanto, depende de dois fatores:

1. A quantidade de eletricidade que está contida em cada *elemento de comprimento* do condutor (que pode ser denominada de *capacidade* do condutor).
2. A velocidade com que essa quantidade de eletricidade (a saber, positiva e negativa deslocando-se em direções opostas) flui no condutor.

Agora, se é possível medir a intensidade da corrente, isto é, determinar a quantidade de eletricidade positiva e negativa que flui *através da seção transversal do condutor* de acordo com unidades conhecidas, não é possível determinar individualmente a quantidade de eletricidade contida em um *elemento de comprimento* do condutor, nem a *velocidade* com que a mesma se move no condutor: isso só poderia acontecer nos casos em que a eletricidade não se movia sozinha, mas era transportada pelas partículas do condutor nas quais estava contida.

Se este caso ocorre quando a eletricidade salta de um condutor para outro (através de uma camada de ar),³⁵⁷ onde pequenas partículas são arrancadas de um condutor e transferidas para o outro condutor, não foi determinado experimentalmente e não pode ser determinado de forma completa e confiável, mas, sob certas circunstâncias, parece ser de fato certo que pequenas partículas são arrancadas apenas do condutor carregado positivamente e conduzidas para o condutor negativo. Também não há dúvida de que essas pequenas partículas que são arrancadas estão carregadas com eletricidade positiva livre e que a transferência de uma quantidade bem definida de eletricidade de um condutor para um outro [condutor] será mediada por elas. Contudo, ainda não foi objeto de qualquer discussão adicional se será mediada dessa maneira a transferência de apenas parte da eletricidade positiva ou de toda ela de um condutor para o outro e, além disso, se essas pequenas partículas arrancadas contêm apenas eletricidade positiva livre ou se também possuem, além disso, uma quantidade bem definida de fluido neutro e, finalmente, como a eletricidade negativa no outro condutor se comporta durante o processo.

No que se refere, em primeiro lugar, ao comportamento da eletricidade do condutor carregado negativamente, do qual, nas condições mencionadas, nenhuma partícula é arrancada e levada para o condutor positivo, parece concluir-se que a carga negativa deste condutor sofreu algum retardo nessas condições e que, portanto, antes que esta carga tenha atingido a intensidade necessária para arrancar pequenas partículas, as partículas arrancadas do condutor carregado positivamente já atingiram o [condutor] negativo e, ao transmitir sua carga positiva, impedem o crescimento da carga negativa. Nessas condições, nenhuma eletricidade passaria do condutor carregado negativamente para aquele carregado positivamente.

No que diz respeito à outra questão, sobre saber se as partículas liberadas contêm apenas eletricidade positiva ou se elas transportam com elas uma quantidade bem definida de fluido neutro, uma opinião definida sobre isso só pode ser baseada em algum fato bem preciso sobre as partículas liberadas.

³⁵⁷Por meio de faíscas ou descargas elétricas quando há uma grande diferença de potencial entre os dois condutores.

A saber, é conhecido que quando uma esfera maior é separada de uma menor após o contato, a eletricidade livre que é contida nas duas esferas vai ser dividida entre elas em uma razão bem definida e, de fato, de tal forma que as densidades das camadas de eletricidade encontradas na superfície de cada esfera não serão iguais, mas a densidade encontrada na superfície da esfera menor será maior do que a densidade encontrada na superfície da esfera maior e, de fato, essa razão vai se aproximar de

$$1,6449 : 1$$

quanto mais desiguais forem as duas esferas.

Agora, uma partícula arrancada pode ser considerada como sendo apenas uma esfera extremamente pequena e, portanto, quando denominamos a densidade da camada de eletricidade que está presente sobre a superfície do condutor carregado positivamente por ε , a densidade da camada de eletricidade presente na superfície da partícula arrancada terá de ser colocada igual a $1,6449 \cdot \varepsilon$. Embora se saiba, no caso do condutor com carga positiva, que ε desaparece contra o raio de curvatura de sua superfície, não se pode assumir que $1,6449 \cdot \varepsilon$ desaparece contra o raio da pequena partícula arrancada. Pelo contrário, dada a extrema pequenez desta partícula, pode-se assumir que seu raio é menor ou pelo menos não maior que $1,6449 \cdot \varepsilon$. Contudo, disso seguiria então que essa camada de eletricidade positiva preencheria toda a partícula positiva e, portanto, não haveria espaço livre nessa camada que pudesse conter uma quantidade bem definida de fluido neutro. A pequena partícula liberada conteria então apenas eletricidade positiva.

Finalmente, quanto à questão de saber se a eletricidade livre é transportada do condutor carregado positivamente para o condutor negativo apenas pelas partículas arrancadas ou se, além disso, outra quantidade de eletricidade positiva sem um portador ponderável segue seu próprio caminho até o condutor carregado negativamente, então, somente a falta de qualquer razão física pode ser apontada para o fato de que uma parte da eletricidade, sob as mesmas condições, deveria se mover independentemente de seu portador ponderável, enquanto a outra teria que arrastar seu portador ponderável junto com ela. Uma vez que, portanto, está de fato provado que uma parte da eletricidade transmitida arrasta consigo o seu portador ponderável, o mesmo deve ser assumido de toda a eletricidade transferida, até que tenha sido provado o contrário.

Na verdade, este seria o caso de uma corrente em que as partículas condutoras, que contêm apenas eletricidade positiva, avançam. A quantidade de eletricidade móvel que vai de um condutor para o outro pode agora ser determinada precisamente (ao medir a intensidade de corrente). Consequentemente, tudo que falta é medir precisamente a quantidade de massa ponderável que é arrancada simultaneamente do condutor positivo e termina no condutor negativo. Por menor que seja esta massa ponderável, ela ainda pode ser claramente observada e pode-se supor que seu peso também pode ser determinado com as melhores balanças que temos.

De qualquer forma, isso implica que mesmo para quantidades muito grandes de eletricidade que vão do condutor carregado positivamente para aquele carregado negativamente, é muito pequena a massa ponderável das partículas condutoras que são arrancadas e, conseqüentemente, a quantidade de eletricidade que está contida em cada *elemento de comprimento* no condutor é excepcionalmente alta. Contudo, quanto maior for essa quantidade de eletricidade, menor será a *velocidade* com que essa quantidade de eletricidade fluirá no condutor para uma dada intensidade de corrente,³⁵⁸ e essa pequena velocidade com que o fluido

³⁵⁸Weber está se referindo aqui à velocidade de deriva, isto é, à velocidade da partícula eletrizada em relação

elétrico se desloca em seu condutor não deve ser confundida com a velocidade extremamente grande com que a perturbação do equilíbrio no fluido elétrico se propaga através do condutor metálico, à qual se refere a experiência bem conhecida de Wheatstone.³⁵⁹

Os fatos de que a quantidade de eletricidade que está contida em um elemento de comprimento em um *condutor metálico* é muito grande, e que a velocidade com que a quantidade de eletricidade se desloca no condutor é muito pequena para todas as correntes já analisadas na realidade, poderiam ser esperados de antemão por analogia com os resultados que foram encontrados na Seção 8.15 para um *condutor úmido* (por exemplo, água), pois foi encontrado lá que para uma corrente de intensidade = 1 em unidades *eletrolíticas*, uma quantidade de eletricidade positiva de $106\frac{2}{3} \cdot 155\,370 \cdot 10^6$ unidades, juntamente com 1/9 miligrama de hidrogênio, vai se deslocar em uma direção, enquanto que uma quantidade igualmente grande de eletricidade negativa que está ligada a 8/9 miligrama de oxigênio vai se deslocar na direção oposta através da seção reta do condutor em 1 segundo, de onde seguiria que $106\frac{2}{3} \cdot 155\,370 \cdot 10^6$ unidades de eletricidade positiva e uma quantidade igualmente grande de eletricidade negativa está contida em 1 miligrama de água, porém essas quantidades (juntamente com seus portadores ponderáveis) avançam apenas com a velocidade muito pequena de 1/2 milímetro em um segundo, quando a área da seção reta do condutor úmido é de apenas 1 milímetro quadrado. Caso a seção reta fosse maior, então a velocidade seria proporcionalmente menor.

8.21 Aplicação para as Unidades — Dedução de Todas as Unidades a partir da Unidade Espacial

As unidades que são úteis na física estão divididas entre as *unidades fundamentais* e as *unidades derivadas*. Na mecânica geral, onde todas as forças são consideradas como dadas individualmente, todas as unidades podem ser reduzidas às unidades fundamentais conhecidas de *espaço*, *tempo*, e *massa*. — Em todos os ramos da física onde tem de ser assumido que vale a *lei da gravitação*, todas as unidades podem ser reduzidas a apenas duas unidades fundamentais de *espaço* e *tempo*, já que a unidade de *massa* também pode ser deduzida com o auxílio da lei da gravitação. A saber, podemos assumir a unidade de massa como sendo aquela massa que, caso estivesse concentrada em um ponto, exerceria uma força sobre uma outra massa na unidade de distância que forneceria na unidade de tempo uma velocidade a essa última massa que seria igual a uma unidade de comprimento por unidade de tempo de acordo com a lei da gravitação.

Agora, é interessante observar que esse sistema de unidades pode ser ainda mais simplificado, e que é possível deduzir todas as unidades que são usadas na física *a partir apenas da unidade de espaço* quando assumimos para essa finalidade duas leis fundamentais da natureza, a saber, além da *lei da gravitação entre massas ponderáveis*, a *lei fundamental da ação elétrica*,³⁶⁰ já que também podemos *deduzir a unidade de tempo a partir da unidade de espaço* com o auxílio dessa última lei. Isto é, podemos assumir essa unidade de tempo como sendo o intervalo de tempo durante o qual duas massas elétricas que se deslocam com velocidade relativa uniforme devem aproximar-se ou afastar-se por uma unidade de comprimento se, de acordo com essa lei, não devem exercer qualquer ação uma sobre a outra.

à matéria ou corpo do condutor.

³⁵⁹Ver as Notas de rodapé 102 e 215 nas páginas 71 e 144, respectivamente.

³⁶⁰Isto é, a força de Weber de interação entre duas partículas eletrizadas.

Se escolhermos o *milímetro* como sendo a unidade espacial, então a unidade de tempo pode ser deduzida dessa unidade espacial supondo a lei fundamental da ação elétrica, que seria a

$$439\,450 \text{ milionésima parte de um segundo,}$$

já que quando duas massas elétricas que se deslocam com velocidade relativa uniforme se aproximam ou se afastam por 1 milímetro nesse pequeno intervalo de tempo,³⁶¹ elas não vão exercer ação entre si de acordo com a lei fundamental da ação elétrica.

Uma vez que a unidade de tempo tenha sido deduzida da unidade espacial dessa maneira, a unidade de massa também pode ser deduzida dessas duas unidades assumindo a lei da gravitação. A saber, a partir da lei da gravitação, a Terra é uma massa que, caso estivesse concentrada em um ponto, forneceria uma aceleração igual a 9811 sobre uma outra massa à distância igual ao raio da Terra se o milímetro fosse usado como a unidade espacial e o segundo fosse utilizado como a unidade de tempo. Se, em vez do segundo, fôssemos considerar a unidade de tempo que acabou de ser deduzida, que é 439450 milhões de vezes menor, então a unidade deduzida da aceleração seria 439450^2 trilhões de vezes maior, e a aceleração anterior seria igual a:

$$\frac{9\,811}{439\,450^2 \cdot 10^{12}}$$

de acordo com essa unidade maior. Agora, se colocarmos o raio da Terra igual a $6\,370 \cdot 10^6$ (milímetros) então, de acordo com a lei da gravitação, se a massa da Terra estivesse concentrada em um ponto, ela forneceria então uma aceleração sobre uma outra massa na unidade de distância que seria igual a:

$$\frac{9\,811 \cdot 6\,370^2 \cdot 10^{12}}{439\,450^2 \cdot 10^{12}},$$

e, conseqüentemente, uma massa que chega a $439450^2/(9811 \cdot 6370^2)$, ou quase metade da massa da Terra, é a massa que vamos obter como a *unidade de massa deduzida* a partir da lei da gravitação, assumindo o milímetro como a unidade espacial e com o auxílio da unidade de tempo que foi deduzida dele.

Finalmente, todas as unidades remanescentes que são usadas na física podem ser deduzidas do milímetro como a unidade espacial, juntamente com as unidades de tempo e massa que acabaram de ser deduzidas dele de maneira conhecida.

De acordo com esse sistema, no qual todas as unidades são deduzidas de uma única unidade fundamental de espaço, a força atrativa entre duas massas m e m' na distância r será igual a mm'/r^2 , e a força de repulsão entre duas quantidades de eletricidade e e e' à distância r será igual a $(ee'/r^2)(1 - dr^2/dt^2 + 2rd^2r/dt^2)$, sem ter de adicionar fatores constantes a essas expressões ou a termos individuais.

³⁶¹Isto é,

$$\frac{1 \text{ s}}{439\,450 \times 10^6}.$$

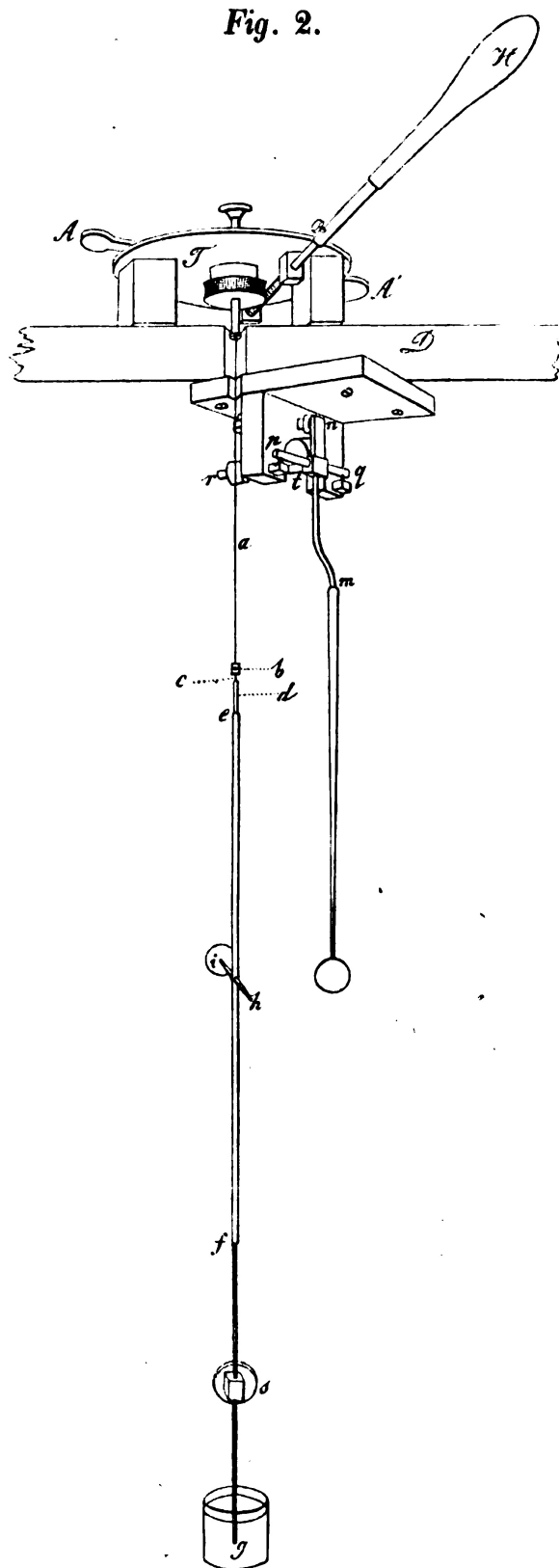
Apêndices

I. Descrição da Balança de Torção

Para evitar, tanto quanto possível, uma reação desigual das paredes da balança de torção, que são eletrizadas por influência pelas esferas carregadas,³⁶² sobre a esfera em movimento, a balança é projetada em uma escala excepcionalmente grande. A caixa na qual as esferas foram dependuradas era um paralelepípedo que tinha 1,16 metro de comprimento, 0,87 metro de largura, e 1,44 metro de altura. As doze bordas do paralelepípedo foram construídas de postes quadrados (80 milímetros de lado) de madeira dura. Uma vez que a estrutura foi montada sobre uma grande base de pedra, uma pesada camada de madeira foi colocada sobre ela como uma tampa, mas as paredes laterais foram revestidas com um pano oleado bem esticado para que as bordas dos postes não se projetassem para o interior da sala. Após esse revestimento, que deixou apenas o quarto superior de uma parede aberto para que pudéssemos dependurar o aparelho, a rigidez da caixa foi bem reforçada por suportes aparafusados. Para fazer as próprias medidas, depois que a esfera fixa foi introduzida, a abertura foi fechada por um controle deslizante. Contudo, além disso toda a caixa foi coberta com múltiplas camadas de toalhas e cobertores que estavam sobre a pedra com o objetivo de eliminar toda corrente de vento. Mesmo assim, foi necessário fazer as observações à noite em uma sala não aquecida, já que a abertura e fechamento de portas em outras partes do prédio e o aquecimento desigual do solo pelo Sol formava correntes de ar que produziam uma oscilação ocasional da esfera móvel de até meio grau. Contudo, à noite, quando o ar externo não estava muito agitado, a esfera não oscilava nem de um minuto [de arco].

³⁶²Isto é, as paredes ficam eletrizadas por indução eletrostática devido à presença das esferas carregadas em seu interior, que induzem cargas imagem nas paredes da balança de torção.

Fig. 2.



O círculo de torção T era fixado sobre o centro da tampa, cuja seção reta é representada por D na Figura 2, cuja alidade AA' permitia a leitura dos minutos [de arco] individuais a

partir de sua escala Vernier³⁶³ e a regulação mais precisa da torção por meio de uma junta de Hooke H ,³⁶⁴ ou, após sua liberação, também pode ser guiado manualmente. Além disso, as definições dos símbolos na Figura são como segue:

- a é o fio de latão trefilado (Número 12) com 398 milímetros de comprimento, preso ao eixo da alidade;
- b é um pequeno cilindro de latão com um parafuso lateral para prendê-lo à extremidade inferior de a . Abaixo dele está
- c , um fuso de parafuso com projeção de 5 milímetros, seja para aparafusar os corpos, cujo coeficiente de torção é determinado pelo período de oscilação, ou o fio de latão
- d , ao qual foi fundida a haste cilíndrica ef de goma-laca pura com 5 mm de espessura e 450 mm de comprimento.³⁶⁵
- hi significa a alavanca de goma-laca para a esfera móvel, que se afunilou para uma espessura de 2,5 milímetros em ambos os lados em um comprimento de cerca de 60 milímetros.
- fg é um fio que está imerso uma polegada em óleo de oliva, com um espelho s fixado na madeira. O óleo tem o efeito de amortecer não apenas a oscilação da esfera móvel, mas também os movimentos pendulares que surgem das vibrações, no menor tempo possível enquanto que, por outro lado, ele não impede que a alavanca acompanhe as mudanças mais imperceptíveis na torção.

As duas esferas da balança de torção são feitas de uma camada metálica muito leve de Argentan, finamente polidas e douradas, e eram coladas à goma-laca simplesmente por aquecimento.

A longa haste vertical de goma-laca para a *esfera fixa*, afinando na parte inferior, foi colada a uma haste curva de latão mn . Um eixo horizontal pq com duas pontas de aço estava firmemente fixado a ela e, ortogonalmente a ela, uma haste de latão rt com um peso móvel. As pontas repousavam sobre rolamentos de latão, q em um furo cônico, p em uma fenda. O peso móvel empurrava a extremidade superior da haste de latão mn contra um parafuso de ajuste, de tal forma que a esfera estacionária sempre ficava exatamente na mesma posição na balança de torção toda vez que era removida e inserida novamente. Se empurrássemos a haste de latão mn para frente para eletrizar a esfera móvel até que a haste tr se juntasse com um parafuso de ajuste, então a esfera fixa eletrizada se encontraria próxima da esfera

³⁶³Em alemão: *Dessen Alidade AA' die einzelne Minute durch ihre Nonien ablesen liess*. O nônio ou vernier é um instrumento de medição angular usado na navegação e astronomia. Ele pode ser instalado em um astrolábio náutico ou em um quadrante graduado de 0 a 90 graus, sendo possível efetuar medições de alguns minutos de grau. Ele foi inventado pelo cientista português Pedro Nunes (1502-1578), escrito em latim como Petrus Nonius. Ele foi adaptado na escala vernier pelo cientista francês Pierre Vernier (1580-1637). Alidade é um dispositivo destinado a medir ângulos mediante o alinhamento óptico. Ela pode ser uma régua de madeira ou metal que gira em torno de um de seus pontos e da qual uma das extremidades se move sobre uma escala.

³⁶⁴Em alemão: *Hook'schen Schlüssel*. A junta de Hooke também é chamada de junta universal, junta de Cardan ou junta cardã, sendo nomeada em homenagem a Robert Hooke (1635-1703). É uma junção de acoplamento de um eixo que transfere o movimento em outra direção sem modificar o sentido de giro.

³⁶⁵[Nota de Kohlrausch e Weber:] Comparado com o tamanho da parte superior da Figura, o comprimento ef , assim como o comprimento Tg , é desenhado muito curto. As esferas estavam mais longe da tampa.

móvel, assim a primeira [esfera] podia atrair e eletrizar a última [esfera] sem que essa última precisasse percorrer uma grande trajetória.

Do lado oposto do espelho s , havia uma abertura na parede da balança de torção que era fechada com vidro plano. A uma certa distância do lado de fora, encontra-se uma escala horizontal cuja imagem espelhada podia ser observada em um telescópio.³⁶⁶ A distância até a escala era escolhida de tal maneira que quando a rotação da alavanca na balança de torção chegava a um minuto [de arco], a escala no telescópio seria deslocada de uma divisão da escala. Ao mesmo tempo, a escala era posicionada de tal forma que quando os centros das duas esferas formava exatamente um ângulo reto com o eixo de rotação, seu ponto nulo, que era colocado no centro e a partir do qual a escala estava numerada dos dois lados para o lado de fora, apareceria na mira do telescópio.

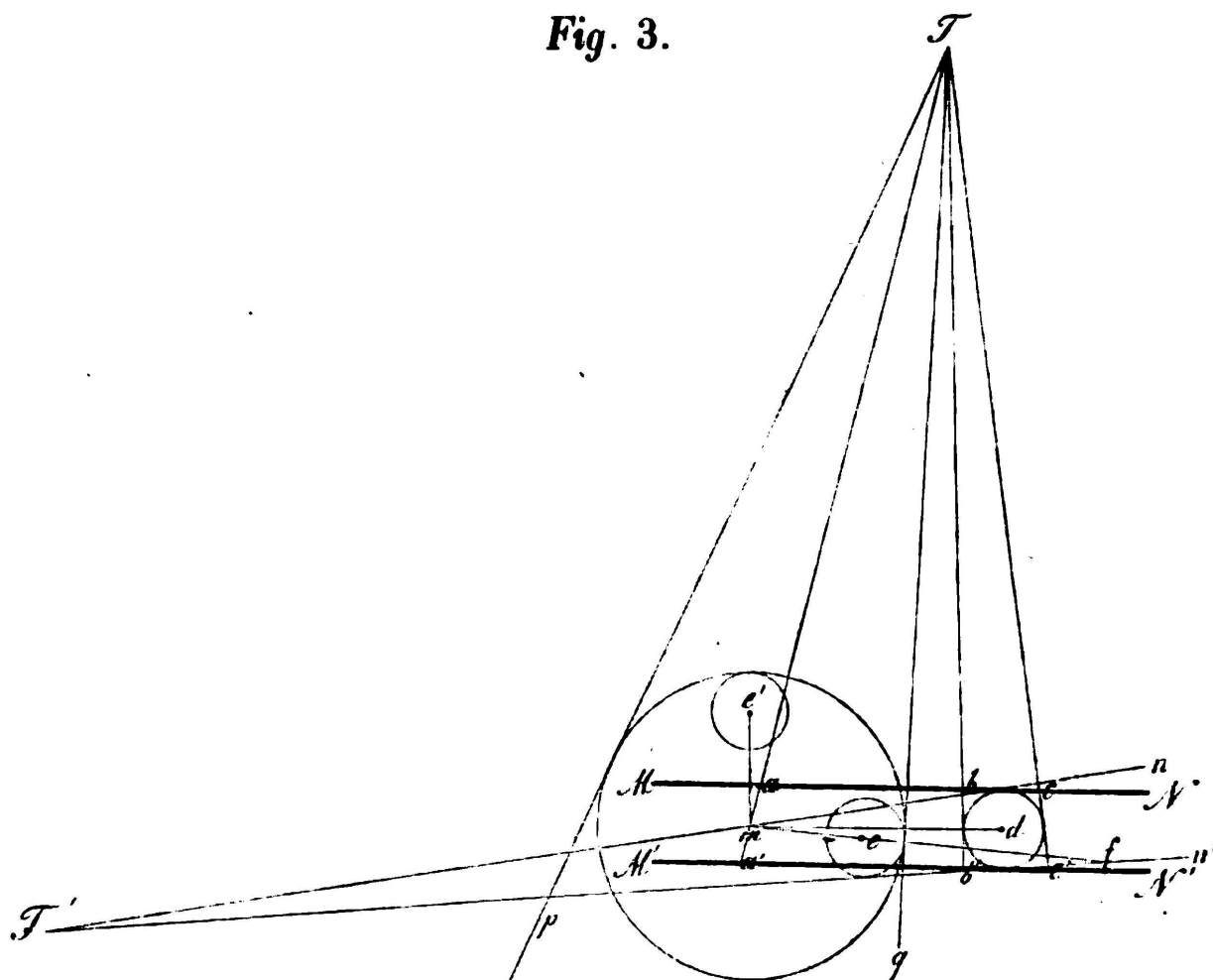
Essa era a posição das esferas na qual elas deveriam ser observadas e que sempre podiam ser reconhecidas com grande precisão dessa maneira. Se a esfera móvel tivesse se deslocado mais além da esfera fixa após terem sido eletrizadas, então o observador que estava no telescópio podia da mesma forma ler quantos graus ou minutos seriam necessários para corrigir o estado da esfera móvel por torção. Por outro lado, um disco foi instalado na junta de Hooke que permitia que observássemos a rotação dessa junta em minutos da rotação da alidade, e assim o segundo observador regulando a torção era capaz de efetuar a correção sob comando,³⁶⁷ sem olhar para o nônio. Alguma prática em dar e executar este comando em tempo hábil e o excelente efeito do óleo logo levaram ao ponto que, em um tempo relativamente muito curto, a esfera móvel, que havia sido colocada em movimento violento pela eletrização, ficou completamente imóvel, de tal forma que os centros das duas esferas formava um ângulo com o eixo de rotação que era maior do que o ângulo reto apenas em poucos minutos [de arco]; isto é, de tal forma que o ponto zero da escala do telescópio estava a algumas divisões de distância da mira do telescópio. A perda da eletricidade trazia então gradualmente a esfera [móvel] para mais perto da esfera fixa devido à torção que estava presente sobre ela, de tal forma que o instante de tempo no qual o ponto nulo da escala que estava deslizando lentamente passava pela mira do telescópio podia ser precisamente determinado. A torção podia então ser lida a partir disso.

O estado no qual os centros das duas esferas forma precisamente um ângulo reto com o eixo de rotacional da balança de torção é obtido da seguinte maneira:

³⁶⁶Ver a Nota de rodapé 22 na página 18.

³⁶⁷[Nota de Kohlrausch e Weber:] Se quiséssemos trazer a alavanca de uma balança de torção não eletrizada de uma posição para outra sem produzir oscilações de longa duração, faríamos então repentinamente meia correção quando a alavanca ainda estivesse em repouso e a outra meia correção da mesma forma tão repentina no instante em que ela alcança sua maior elongação e começa a reverter. Ela então ficará ainda mais calma, quanto menos for levada em consideração a resistência do ar em relação a seu momento de inércia. No caso da balança de torção eletrizada, o objetivo é aproximadamente alcançado dessa maneira.

Fig. 3.



Depois que, no lugar da haste de goma-laca, um fio fino pesado na parte inferior foi preso ao pequeno cilindro do fio de torção (cuja projeção m representa o eixo de rotação na Figura 3), um teodolito T foi montado a uma distância de alguns metros e a distância Tm foi medida com precisão.³⁶⁸ Uma régua de marfim dividida em milímetros foi então colocada horizontalmente nas posições MN e $M'N'$ de modo que ficasse sempre paralela a md e tocasse a esfera fixa na metade de sua altura. A mira vertical no telescópio do teodolito nos permitia então estimar os comprimentos ab , ac , $a'b'$ e $a'c'$ até um décimo de um milímetro devido à sua alta ampliação. Tínhamos então:

$$md = \frac{1}{4}(ab + ac + a'b' + a'c') .$$

Após isso, um segundo teodolito foi colocado em um ponto T' de tal forma que a linha vertical em seu telescópio cobrisse o eixo rotacional m e fosse tangente à esfera fixa. Após $T'm$ ter sido medido, o telescópio foi girado para a posição $T'n$ de modo que o fio tocasse o outro lado da esfera e então permanecesse estacionário.

Dependurávamos então a haste de goma-laca com a esfera móvel novamente a partir do fio de torção e medíamos o ângulo pTq com o teodolito T . A esfera móvel, que estava protegida da reflexão da luz, aparecia de maneira bem nítida a partir do fundo branco, e o teodolito apontava para a tangente do círculo dentro do qual ela se deslocava com uma

³⁶⁸O teodolito é um instrumento de precisão óptico que mede ângulos verticais e horizontais.

rotação lenta. A distância entre o centro da esfera móvel e o eixo de rotação era então:

$$me = Tm \sin \frac{1}{2}pTq - r' ,$$

na qual r' é o raio da esfera móvel medido anteriormente.

A esfera fixa era agora removida e, para evitar correntes de ar, a caixa da balança de torção era completamente fechada, exceto por duas pequenas aberturas na direção já conhecida $T'n'$, e a esfera móvel era colocada de tal forma que ela fosse tangente à direção $T'n'$ por meio do fio de torção.

A esfera móvel agora tinha que ser girada em $90^\circ + dme$ para que seu centro atingisse a posição e' , que descreve um ângulo reto com m e d . Agora, o ângulo:

$$dme = mfT' + mT'f - nmd ,$$

enquanto que:

$$mfT' = \arcsen \frac{T'm \sin mT'n' - r'}{me} ,$$

$$mT'f = 2 \cdot \arcsen \frac{r}{T'm + md \cos nmd} ,$$

$$nmd = \arcsen \frac{r}{md} .^{369}$$

Como tudo é dado aqui, dme pôde ser facilmente calculado, e a rotação da esfera móvel de $90^\circ + dme$ foi realizada usando o círculo de torção e assim o ponto zero da escala de observação foi localizado corretamente.

II. Descrição do Galvanômetro Tangente

O fio de cobre usado no multiplicador foi primorosamente fiado com seda e depois passado através do colódio ao longo de todo o seu comprimento de quase dois terços de milha.³⁷⁰ A partir do grande rolo no qual então se encontrava, com o auxílio de uma polia tensionada de maneira bem uniforme, ele era enrolado ao redor do anel circular do galvanômetro tangente com 5635 espiras. Este anel de metal, que tinha uma seção transversal retangular, havia sido previamente revestido com cera de lacre no calor, onde quer que o fio fosse aplicado a ele. Após isso, foi colocado um peso de cobre de 20 libras sobre o anel como um amortecedor. Todos os procedimentos remanescentes são conhecidos.

A principal ideia foi confirmar nossa crença de que todos os enrolamentos do galvanômetro tangente seriam de fato atravessados pela corrente de descarga, e que ela não iria pular alguns

³⁶⁹[Nota de Kohlrausch e Weber:] A multiplicidade dessas possibilidades foi ocasionada pela opacidade da haste de goma-laca pendurada.

³⁷⁰[Nota de Kohlrausch e Weber:] Não foram realizadas experiências para detectar se o grau de isolamento aumentou de fato dessa maneira, contudo, devemos assumir que isso aconteceu. De qualquer forma, dessa maneira conseguimos com que a seda não apenas fique bem aderida ao fio, mas também que não fique ligeiramente enrugada na superfície. O processo é simples: passamos o fio do rolo original através de um pequeno rolo fixo com um eixo horizontal, e de lá para um rolo maior a uma grande distância, ao redor do qual ele será temporariamente enrolado. O pequeno rolo fixo é imerso pela metade em um recipiente de colódio.

deles por meio de uma faísca que ocorresse bem no interior dos enrolamentos, mas talvez de maneira não visível. Agora, um pequeno multiplicador de 1000 espiras que havia sido utilizado frequentemente em Marburg estava disponível, e podia ser previsto a partir das dimensões dos dois instrumentos que eles teriam aproximadamente a mesma sensibilidade em relação à descarga de uma garrafa de Leiden. Os dois multiplicadores foram acoplados de tal forma que a mesma descarga de uma garrafa de Leiden maior, quando retardada por uma coluna de água, teria de fluir através das espiras nos dois multiplicadores. Agora, como ocorreu não apenas o comportamento previsto da sensibilidade mas, ao aumentar a carga, os dados dos dois galvanômetros permaneceram proporcionais entre si, assim como os dados que corresponderam a um eletrômetro senoidal, o que nos permitia comparar a carga na garrafa de Leiden isolada quando acoplada a ele, nos convencemos que o grande galvanômetro tangente serviria a seu propósito. Em todas as descargas que foram reguladas por um pêndulo especialmente projetado, o botão da garrafa permaneceu em contato com o multiplicador por apenas $2/3$ segundos, permitindo que apenas uma fração muito pequena e proporcional do resíduo reaparecido atuasse. Aqui estão os resultados:

Número	<i>a.</i> Deflexão φ do eletrômetro senoidal	<i>b.</i> $\sqrt{\sin \varphi}$	<i>c.</i> Pequeno multiplicador. Elongação em divisões da escala	<i>d.</i> Galvanômetro tangente. Elongação em divisões da escala	d/c	d/b
1.	9°31'	0,4078	41,75	170,40	4,1060	417,85
2.	19°59'	0,5845	59,50	244,85	4,1151	418,91
3.	34°57'	0,7569	76,95	316,10	4,1078	417,62
4.	49°54'	0,8746	88,97	365,45	4,1076	417,85

Cada um dos números em *c* e *d* é a média de 2 a 3 medições que diferiam entre si por no máximo uma divisão da escala. A proporcionalidade desejada surge então completamente a partir disso. Agora, a distância entre o espelho e a escala era 1633 [divisões da escala] para o pequeno multiplicador e 6437,6 divisões da escala para o multiplicador grande, e então suas sensibilidades tinham aproximadamente a razão que foi necessária anteriormente, a saber, 1 : 1,0423.

Estas medições, a segunda das quais aparentemente sugere um erro de observação no caso do galvanômetro tangente, mostram uma extraordinária precisão na comparação da carga disponível de uma garrafa de Leiden com todos os três instrumentos.

Capítulo 9

[Kirchhoff, 1857a] Sobre o Movimento da Eletricidade nos Fios

Gustav Kirchhoff^{371,372}

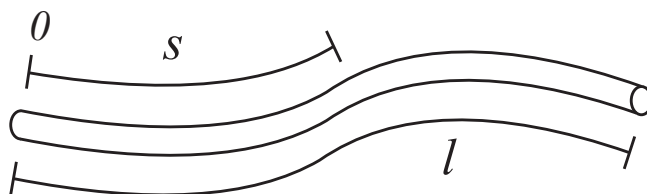
Tentei estabelecer uma teoria geral do movimento da eletricidade em um fio infinitamente fino ao assumir como sendo universalmente válidos certos fatos que são observados nas correntes constantes e nas correntes cuja intensidade varia apenas lentamente. Desenvolverei aqui essa teoria e mostrarei sua aplicação a alguns casos de natureza simples.

Imagino um fio homogêneo que possua a mesma espessura por toda a parte e que tenha uma seção reta circular. Considero no eixo desse fio um ponto fixo e um variável; denomino de s à porção do eixo entre os dois pontos. Passo uma seção reta através do ponto móvel e denomino ρ e ψ às coordenadas polares desse ponto dessa seção com relação a um sistema de coordenadas cuja origem é o ponto central.³⁷³ Vou calcular a força eletromotriz que tende a separar, na direção do comprimento do fio, as duas eletricidades nas vizinhanças do ponto determinado por s , ρ e ψ . Esta força surge em parte da eletricidade livre existente e em parte da indução que ocorre em todas as partes do fio como resultado de mudanças na intensidade

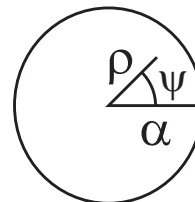
³⁷¹[Kir57b] com traduções para o inglês em [Kir57a] e [Kir21b].

³⁷²As Notas de Gustav Kirchhoff são representadas por [Nota de Kirchhoff:]; todas as outras Notas são de minha autoria.

³⁷³A Figura dessa Nota de rodapé mostra minha representação dessa configuração. A Figura (a) indica um ponto fixo 0 na extremidade esquerda do fio e um ponto variável a uma distância s ao longo do eixo curvo do fio que possui um comprimento total l . A Figura (b) mostra a seção reta circular do fio de raio α e coordenadas polares (ρ, ψ) de um ponto dentro do fio.



(a)



(b)

da corrente. Com relação à primeira parte, podemos utilizar a lei eletrostática de Coulomb.³⁷⁴ Seja V o potencial da eletricidade livre em relação ao ponto que está sendo considerado, ou seja, a soma de todas as quantidades individuais de eletricidade, cada uma delas dividida por sua distância até esse ponto. As quantidades de eletricidade devem ser medidas aqui em unidades mecânicas; isto é, a unidade de eletricidade deve ser aquela que, ao atuar sobre uma quantidade igual [de eletricidade] que está na unidade de distância, produz a unidade de força. Em geral, todas as grandezas que aparecem nessa investigação — intensidade de corrente, resistência, etc. — devem ser consideradas como medidas em unidades mecânicas, como fornecido diversas vezes por Weber em suas *Medições Eletrodinâmicas*.³⁷⁵ Temos aqui $-\partial V/\partial s$ como a força com a qual a eletricidade livre tenta mover a unidade de eletricidade positiva no ponto que está sendo considerado na direção em que s aumenta. Uma força igual tende a mover a eletricidade negativa na direção oposta. Portanto, temos $-2\partial V/\partial s$ como a força eletromotriz vindo da eletricidade livre e atuando no ponto em questão.

Ao desenvolver o valor de V vou assumir que apenas a eletricidade livre que está presente no próprio fio atua sobre o fio. Vou denotar por eds à quantidade de eletricidade livre que, no instante t , está contida no elemento ds do eixo;³⁷⁶ seja ds' um segundo elemento do eixo e $e'ds'$ a quantidade de eletricidade contida no elemento correspondente do fio. Imagino uma porção do fio cujo centro está em ds e cujo comprimento é 2ε , onde ε denota uma quantidade que é para ser considerada como infinitamente pequena em comparação com o comprimento de todo o fio, mas como infinitamente grande em comparação com o raio de sua seção reta.³⁷⁷ Quando o elemento do fio no qual está contida a quantidade de eletricidade $e'ds'$ está fora da porção anterior podemos imaginar, no cálculo de V , que sua eletricidade está concentrada na linha ds' , e o ponto ao qual V se refere como situado na linha ds . Portanto, a parte de V vindo de todo o fio, com exceção da porção mencionada, é

$$= \int \frac{e'ds'}{r},$$

na qual r denota a distância entre os elementos ds e ds' , e onde a integração deve ser estendida ao longo de toda a linha central, com exceção do comprimento 2ε .

Com relação à parte de V que vem da parte separada, isso só pode ser calculado quando é conhecida a distribuição da eletricidade dentro de uma seção reta. Vou assumir aqui, como no caso de uma corrente constante e da eletricidade em equilíbrio, que a eletricidade livre encontra-se apenas sobre a superfície [do fio] e, além disso, que sua densidade é a mesma em todos os pontos da periferia de uma seção reta. Denotando de α ao raio da seção reta obtemos de acordo com isso a densidade da eletricidade livre em qualquer ponto que está sendo considerado da superfície do fio $= \frac{e}{2\pi\alpha}$.³⁷⁸ Portanto, como esse pedaço de fio pode ser considerado retilíneo devido ao seu comprimento infinitesimal, a parte de V que se origina dele é

³⁷⁴Ver a Nota de rodapé 89 na página 66.

³⁷⁵Em alemão: *elektrodynamischen Maassbestimmungen*. Kirchhoff está se referindo aqui aos trabalhos principais de Wilhelm Weber sobre *Medições Eletrodinâmicas*: [Web46] com tradução parcial para o francês em [Web87] e traduções completas para o inglês em [Web07] e [Web21b]; [Web52c] com tradução para o inglês em [Web21c]; [Web52b] com tradução para o inglês em [Web21e] e tradução para o português no Capítulo 3; e [KW57] com tradução para o inglês em [KW21] e tradução para o português no Capítulo 8.

³⁷⁶Portanto, e significa a densidade linear de carga, isto é, quantidade de carga por unidade de comprimento.

³⁷⁷Ou seja, sendo α o raio do fio e l seu comprimento, temos então: $\alpha \ll \varepsilon \ll l$.

³⁷⁸Ou seja, a densidade superficial, ou a carga por unidade de área, em um ponto da superfície do fio é dada por: $e/(2\pi\alpha)$.

$$= \frac{e}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \int_0^{2\pi} \frac{dx' d\psi'}{\sqrt{x'^2 + \alpha^2 + \rho^2 - 2\alpha\rho \cos(\psi' - \psi)}} .$$

Nessa expressão foi utilizado x' no lugar de $s' - s$, e ψ' denota o ângulo entre o raio traçado até um elemento da superfície do fio e a linha a partir da qual é medido o ângulo ψ . Quando é realizada a integração de acordo com x' , e utilizando que ε , em comparação com α e ρ , pode ser considerado como infinitamente grande, obtemos a seguinte expressão:³⁷⁹

$$= \frac{e}{\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \left(\ln 2\varepsilon - \ln \sqrt{\alpha^2 + \rho^2 - 2\alpha\rho \cos(\psi' - \psi)} \right) ,$$

isto é,

$$= 2e \left(\ln 2\varepsilon - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \ln \sqrt{\alpha^2 + \rho^2 - 2\alpha\rho \cos(\psi' - \psi)} \right) .$$

Colocando

$$\int_0^{2\pi} d\psi' \ln \sqrt{\alpha^2 + \rho^2 - 2\alpha\rho \cos(\psi' - \psi)} = U ,$$

então a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} = 0$$

precisa ser satisfeita, já que a grandeza dentro do sinal de integração multiplicada por $d\psi'$ satisfaz a essa equação para todos os valores de ψ' ; porém é facilmente visto, ao colocar $\psi' - \psi$ no lugar de ψ' como sendo a variável de acordo com a qual tem de ser realizada a integração, que U é independente de ψ ; portanto, precisamos ter:

$$\frac{d^2 U}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dU}{d\rho} = 0 ;$$

mas disso segue que:

³⁷⁹No artigo original de Kirchhoff, [Kir57b, pág. 196 dos *Annalen der Physik und Chemie* ou pág. 134 de suas *Obras Reunidas*], essa equação foi escrita como:

$$= \frac{e}{\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \left(\lg 2\varepsilon - \lg \sqrt{\alpha^2 + \rho^2 - 2\alpha\rho \cos(\psi' - \psi)} \right) .$$

Na tradução em inglês desse artigo, [Kir57a, pág. 395 do *Philosophical Magazine*], essa equação foi escrita como:

$$= \frac{e}{\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \left(\log 2\varepsilon - \log \sqrt{\alpha^2 + \rho^2 - 2\alpha\rho \cos(\psi' - \psi)} \right) .$$

Essa última expressão dá a impressão que o logaritmo de Kirchhoff de uma grandeza m , que ele escreveu como $\lg m$, deve ser entendido como o logaritmo comum de base 10, $\log_{10} m = \lg m$. Contudo, esse não é o caso. O que Kirchhoff escreveu como $\lg m$ deve ser entendido como o logaritmo natural que tem o número de Euler ($e \approx 2,718...$) como sua base, a saber, $\lg m = \log_e m = \ln m$.

Na tradução apresentada nesse livro estou utilizando o símbolo moderno, $\ln$, em vez do símbolo utilizado no artigo original de Kirchhoff, $\lg$. Dessa forma seu raciocínio matemático pode ser melhor compreendido, evitando mal-entendidos. Na Seção 10.1 do Capítulo 10, na página 239, apresento uma solução moderna dessa integral.

$$U = C_1 \ln \rho + C_2 ,$$

onde C_1 e C_2 denotam duas constantes desconhecidas. Essas constantes podem ser facilmente determinadas ao assumir ρ como sendo infinitamente pequeno em comparação com α ; a realização da integração na expressão para U fornece então:

$$U = 2\pi \ln \alpha ,$$

de onde segue que $C_1 = 0$, e U possui esse valor constante para todos os valores de ρ . Consequentemente, a parte de V vindo do pedaço 2ε do fio é

$$= 2e \ln \frac{2\varepsilon}{\alpha} ,$$

e, portanto,

$$V = 2e \ln \frac{2\varepsilon}{\alpha} + \int \frac{e' ds'}{r} , \quad (1)$$

onde a integração é para ser estendida a todo o fio, com exceção da porção 2ε .

Temos agora de formar a expressão para a força eletromotriz induzida no ponto que está sendo considerado devido à variação na intensidade da corrente em todas as porções do fio.

Quando é modificada a intensidade i' da corrente no elemento de um condutor que tem um comprimento l' , uma força eletromotriz vai ser induzida por essa variação em um segundo elemento do condutor que, com referência à unidade da quantidade de eletricidade, de acordo com Weber,^{380,381} é igual a

$$= -\frac{8}{c^2} \frac{\partial i'}{\partial t} \frac{l'}{r} \cos \theta \cdot \cos \theta' ,$$

onde θ e θ' denotam os ângulos formados pelos dois elementos com a linha traçada do primeiro ao segundo [elemento], r é o comprimento dessa linha, e c [denota] a velocidade constante com que duas partículas de eletricidade precisam se aproximar de tal forma que não exerçam força entre si.

Para todas as partes do fio, excetuando o pedaço de comprimento 2ε já mencionado, a corrente elétrica pode ser considerada como estando concentrada ao longo da linha central. Portanto, a parte da força eletromotriz induzida procurada, que se origina do fio, com exceção do pedaço já mencionado, é então

$$-\frac{8}{c^2} \int \frac{\partial i'}{\partial t} \frac{ds'}{r} \cos \theta \cdot \cos \theta' ,$$

onde i' é a intensidade da corrente que atravessa a seção reta do fio no local ds' , sendo θ e θ' os ângulos que os elementos ds e ds' formam com a linha que é traçada do último [elemento] até o primeiro, r é o comprimento dessa linha, e onde a integração deve ser estendida por todo o fio, com exceção do pedaço já mencionado.

³⁸⁰[Nota de Kirchhoff:] *Elektrodynamische Maassbestimmungen*, 1846, pág. 354; e 1856, pág. 268.

³⁸¹[Web46, pág. 354 do artigo original de Weber de 1846 e págs. 187-188 das *Obras* de Weber], [Web07, págs. 121-122] e [Web21b, Seção 5.28, págs. 177-180]; [KW57, pág. 268 dos *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse*, ou págs. 655-656 das *Obras* de Weber] e [KW21, págs. 55-56]. Ver também o item (4) da página 200 na Seção 8.18 da tradução em português do quarto Tratado principal de Weber sobre *Medições Eletrodinâmicas*.

Nesse pedaço a corrente não pode ser considerada como estando concentrada na linha central, em vez disso pode ser considerada como retilínea e paralela a ds . Imagine uma seção transversal do fio colocada através do ponto inicial de ds' , e deixe ρ' , ψ' denotarem as coordenadas polares de um ponto em relação a um sistema de coordenadas cujo ponto inicial é o ponto central, e cujo eixo é paralelo à linha a partir da qual o ângulo ψ é calculado. Se então J' for a densidade de corrente no ponto determinado por ρ' e ψ' , obtemos para a porção da força eletromotriz induzida devida ao pedaço 2ε do fio a seguinte expressão:

$$-\frac{8}{c^2} \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\partial J'}{\partial t} \cdot \frac{\rho' d\rho' d\psi' x'^2 dx'}{(x'^2 + \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\psi' - \psi))^{3/2}} .$$

Como J' pode ser considerada como independente de x' , a integração de acordo com x' pode ser facilmente efetuada: utilizando o fato que ε é infinitamente grande em comparação com todos os valores de ρ e ρ' obtemos³⁸²

$$-\frac{16}{c^2} \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \frac{\partial J'}{\partial t} \rho' d\rho' d\psi' \left[\ln 2\varepsilon - 1 - \ln \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\psi' - \psi)} \right] .$$

Contudo, como

$$\int_0^\alpha \int_0^{2\pi} J' \rho' d\rho' d\psi = i ,$$

essa expressão é

$$= -\frac{16}{c^2} \left[(\ln 2\varepsilon - 1) \frac{\partial i}{\partial t} - \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \frac{\partial J'}{\partial t} \rho' d\rho' d\psi' \ln \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\psi' - \psi)} \right] .$$

Portanto, a força eletromotriz induzida total é

$$= -\frac{8}{c^2} \frac{\partial W}{\partial t} ,$$

onde

$$W = \int i' \frac{ds'}{r} \cos \theta \cos \theta' + 2i (\ln 2\varepsilon - 1) - 2 \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} J' \rho' d\rho' d\psi' \ln \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\psi' - \psi)} .$$

No caso de uma corrente elétrica estacionária,³⁸³ a densidade de corrente é igual ao produto da força eletromotriz com a condutividade, relativa à unidade da quantidade de eletricidade. Vou assumir que o mesmo acontece quando a corrente não é estacionária. Essa suposição será cumprida quando as forças que atuam sobre a eletricidade e que constituem a resistência forem tão potentes que o tempo durante o qual uma partícula de eletricidade

³⁸²Devido a um erro de impressão a equação original foi escrita como:

$$-\frac{16}{c^2} \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \frac{\partial J'}{\partial t} \rho' d\rho' d\psi' \left[\ln 2\varepsilon - 1 - \ln \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\psi' - \psi)} \right] .$$

³⁸³Isto é, no caso de uma corrente elétrica constante que não varia com o tempo.

permanece em movimento devido à inércia após cessarem as forças aceleradoras pode ser considerado como infinitamente pequeno, mesmo em comparação com o pequeno intervalo de tempo que é levado em consideração com uma corrente elétrica não estacionária. De acordo com essa suposição, se k for a condutividade do fio, e J a densidade de corrente no ponto determinado pelos valores de s , ρ e ψ no tempo t , teremos a seguinte equação:

$$J = -2k \left(\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{4}{c^2} \frac{\partial W}{\partial t} \right) .$$

Deduzo a partir dessa expressão para a densidade J uma expressão para a intensidade i da corrente ao multiplicar isso por $\rho d\rho d\psi$, e ao integrar a expressão com relação a ρ de 0 até α e com relação a ψ de 0 até 2π . Como V é independente de ρ e ψ , quando coloco

$$w = \frac{1}{\pi\alpha^2} \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} W \rho d\rho d\psi ,$$

obtenho

$$i = -2\pi k \alpha^2 \left(\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{4}{c^2} \frac{\partial w}{\partial t} \right) . \quad (2)$$

Temos aqui³⁸⁴

$$w = \int i' \frac{ds'}{r} \cos \theta \cos \theta' + 2i (\ln 2\varepsilon - 1) \\ - \frac{2}{\pi\alpha^2} \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} J' \rho' d\rho' d\psi' \rho d\rho d\psi \ln \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\psi' - \psi)} .$$

A integral

$$\int_0^{2\pi} d\psi \ln \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\psi' - \psi)}$$

é do mesmo formato que aquela integral já considerada e denominada de U . A partir das conclusões que foram então apresentadas, segue-se que a integral é $= 2\pi \ln \rho'$ quando $\rho' > \rho$, e $= 2\pi \ln \rho$ quando $\rho' < \rho$. Portanto, ao ser multiplicada por $\rho d\rho$ e integrada de 0 até α , ela fornece a seguinte expressão:

$$\pi\alpha^2 \left(\ln \alpha - \frac{\alpha^2 - \rho'^2}{2\alpha^2} \right) .$$

Como podemos colocar

$$\int_0^\alpha \int_0^{2\pi} J' \rho' d\rho' d\psi' = i ,$$

o terceiro membro na expressão para w será

$$= -2i \ln \alpha + \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \frac{\alpha^2 - \rho'^2}{\alpha^2} J' \rho' d\rho' d\psi' ;$$

³⁸⁴Devido a um erro de impressão no artigo original, a primeira expressão entre parêntesis foi escrita como $(\ln 2r - 1)$.

portanto, obtemos então:

$$w = \int i' \frac{ds'}{r} \cos \theta \cos \theta' + 2i \left(\ln \frac{2\varepsilon}{\alpha} - 1 \right) + \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \frac{\alpha^2 - \rho'^2}{\alpha^2} J' \rho' d\rho' d\psi' .$$

A integral dupla remanescente não pode ser reduzida a um formato simples já que J' é uma função desconhecida de ρ' . Contudo, seu valor pode ser desprezado em comparação com o membro $2i \left(\ln \frac{2\varepsilon}{\alpha} - 1 \right)$, e para esse [membro] podemos colocar $2i \ln \frac{2\varepsilon}{\alpha}$, caso a espessura do fio seja pequena o suficiente em comparação com as dimensões da figura formada por sua linha central; pois então ε pode ser escolhido de tal maneira que $\ln \frac{2\varepsilon}{\alpha}$ será um número infinitamente grande e, apesar disso, ε será infinitamente pequeno em comparação com as dimensões da figura já mencionada. Temos portanto, de acordo com essa suposição:

$$w = 2i \ln \frac{2\varepsilon}{\alpha} + \int i' \frac{ds'}{r} \cos \theta \cos \theta' , \quad (3)$$

onde a integração deve ser estendida para todo o fio, com exceção do comprimento 2ε .

Tem de ser adicionada uma equação em relação às Equações (1), (2) e (3) entre as quatro grandezas i , e , V , w .

Imagine duas seções transversais colocadas no ponto inicial e no ponto final de ds . No primeiro [ponto], no [intervalo de] tempo dt , entra a quantidade de eletricidade positiva idt no elemento de fio delimitado pelas duas [seções transversais]; através do segundo [ponto] sai do elemento de fio no mesmo tempo a quantidade de eletricidade positiva $\left(i + \frac{\partial i}{\partial s} ds\right) dt$. Portanto, no tempo dt o elemento perde a quantidade $\frac{\partial i}{\partial s} ds dt$ de eletricidade positiva. A eletricidade negativa flui em quantidade igual e na direção oposta através das duas seções retas. Portanto, o elemento de fio ganha no tempo dt tanta eletricidade negativa quanto ele perde de eletricidade positiva. Logo sua eletricidade livre, isto é, a diferença entre suas [eletricidades] positiva e negativa, diminui de $2 \frac{\partial i}{\partial s} ds dt$ durante o elemento de tempo. Contudo, essa eletricidade livre é dada por eds , logo temos:³⁸⁵

$$2 \frac{\partial i}{\partial s} = - \frac{\partial e}{\partial t} . \quad (4)$$

Desenvolverei agora a teoria contida nas quatro equações distinguidas por números com a suposição de que o formato da linha central do fio é tal que a distância entre dois de seus pontos, entre os quais encontra-se um pedaço finito do fio, nunca é infinitamente pequena. Com essa suposição exclui-se o caso de ter bobinas de indução contidas no circuito.³⁸⁷ Isso simplifica significativamente as Equações (1) e (3).

Seja A a posição do elemento ds e sejam B e C dois pontos do fio de ambos os lados de A e a uma distância finita dele. Nesse caso a integral

³⁸⁵A próxima equação é a equação de continuidade, isto é, a equação da conservação de cargas.

³⁸⁶[Nota de Kirchhoff:] A dedução dessa equação é baseada na suposição de que no caso de uma corrente não estacionária quantidades iguais de eletricidades opostas atravessam cada seção reta do condutor em tempos iguais. Contudo, caso essa suposição seja rejeitada, as equações ainda seriam válidas; seria então apenas necessário definir a intensidade de corrente como a média aritmética das duas quantidades de eletricidade que na unidade de tempo deslocam-se em direções opostas através da seção reta do condutor.

³⁸⁷Em alemão: *dass Inductionsrollen sich in der Leitung befinden*. A palavra *Rolle* pode ser traduzida como bobina, rolo, polia, roldana ou carretel. Normalmente uma bobina consiste em um enrolamento de várias espiras. A expressão *Inductionsrollen* está sendo traduzida aqui por bobinas de indução, ou seja, solenoides compostos de várias espiras.

$$\int \frac{e' ds'}{r},$$

estendida por todo o fio, com exceção do pedaço BAC , é uma quantidade finita e, portanto, infinitamente pequena com comparação com $2e \ln \frac{2\varepsilon}{\alpha}$. Portanto, na Equação (1), essa integral só pode ser estendida sobre a porção BAC , com exceção do pedaço 2ε . Logo, denotando por σ ao arco entre A e um ponto variável do fio, a integral mencionada pode ser colocada como:

$$= \int_{\varepsilon}^{AB} \frac{e' d\sigma}{r} + \int_{\varepsilon}^{AC} \frac{e' d\sigma}{r}.$$

A grandeza e'/r é uma função de σ , que se aproxima do valor e/σ quando σ se aproxima de 0. Portanto, as integrais³⁸⁸

$$\int_{\varepsilon}^{AB} \left(\frac{e'}{r} - \frac{e}{\sigma} \right) d\sigma \quad \text{e} \quad \int_{\varepsilon}^{AC} \left(\frac{e'}{r} - \frac{e}{\sigma} \right) d\sigma$$

possuem valores finitos, já que a função a ser integrada nunca será infinitamente grande. Logo, em vez da integral na Equação (1), podemos colocar:

$$\int_{\varepsilon}^{AB} \frac{e d\sigma}{\sigma} + \int_{\varepsilon}^{AC} \frac{e d\sigma}{\sigma};$$

isto é,

$$e \ln \frac{AB}{\varepsilon} + e \ln \frac{AC}{\varepsilon}.$$

A escolha dos comprimentos AB e AC é arbitrária, eles apenas precisam ser finitos em comparação com o comprimento do fio; para ambos podemos colocar a metade desse comprimento. Denotando por l o comprimento total, a Equação (1) será:

$$V = 2e \ln \frac{2\varepsilon}{\alpha} + 2e \ln \frac{l}{2\varepsilon},$$

isto é,

$$V = 2e \ln \frac{l}{\alpha}.$$

Por meio de considerações do mesmo tipo, pode ser visto que a Equação (3) vai ter um formato similar. Temos assim:

$$w = 2i \ln \frac{l}{\alpha}.$$

Esses valores de V e w devem ser substituídos na Equação (2). Ao fazer isso e ao colocar, por brevidade,

³⁸⁸Devido a um erro de impressão, a última integral apareceu no artigo original como:

$$\int_{\varepsilon}^{AC} \left(\frac{e_l}{r} - \frac{e}{\sigma} \right) d\sigma.$$

$$\ln \frac{l}{\alpha} = \gamma ,$$

e ao denotar por r a resistência de todo o fio, isto é, a grandeza

$$\frac{l}{k\pi\alpha^2} ,$$

obteremos então:

$$i = -4\gamma \frac{l}{r} \left(\frac{\partial e}{\partial s} + \frac{4}{c^2} \frac{\partial i}{\partial t} \right) .$$

A partir dessa equação, em conexão com a Equação (4), a saber,

$$2 \frac{\partial i}{\partial s} = - \frac{\partial e}{\partial t} ,$$

temos de determinar i e e como funções de s e t .³⁸⁹

Uma solução particular da equação diferencial é obtida ao colocar

$$e = X \operatorname{sen} ns ,$$

$$i = Y \cos ns ,$$

onde n denota uma constante arbitrária, enquanto que X e Y são funções desconhecidas de t . Com isso as equações ficam no seguinte formato:

$$Y = -4\gamma \frac{l}{r} \left(nX + \frac{4}{c^2} \frac{dY}{dt} \right) ,$$

$$2nY = \frac{dX}{dt} .$$

A partir disso obtemos, ao eliminar Y :

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{c^2 r}{16\gamma l} \frac{dX}{dt} + \frac{c^2 n^2}{2} X = 0 .$$

A integral geral dessa equação diferencial é:

$$X = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t} ,$$

onde C_1 e C_2 são duas constantes arbitrárias, “e” é a base dos logaritmos naturais,³⁹⁰ enquanto que λ_1 e λ_2 são as raízes da equação quadrática

$$\lambda^2 - \frac{c^2 r}{16\gamma l} \lambda + \frac{c^2 n^2}{2} = 0 .$$

De acordo com isso os valores de λ_1 e λ_2 são

³⁸⁹Discuto na Seção 10.2 do Capítulo 10, página 240, a equação do telégrafo obtida por Kirchhoff.

³⁹⁰Isto é, $e = 2,718\dots$

$$\frac{c^2 r}{32\gamma l} \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{32\gamma}{cr\sqrt{2}} nl \right)^2} \right] .$$

Para ter uma ideia se essas raízes são reais ou imaginárias vai ser considerado um caso particular. Seja o fio o padrão de resistência de Jacobi,³⁹¹ cuja resistência foi medida por Weber.³⁹² Esse fio é um fio de cobre com 7,620 metros de comprimento e 0,333 milímetros de raio. De acordo com isso o valor de γ é muito próximo de 10. Weber^{393,394} encontrou sua resistência de acordo com a unidade eletromagnética como:

$$= 598 \cdot 10^7 ,$$

considerando o milímetro e o segundo como unidades de comprimento e tempo. Para encontrar a resistência de acordo com a unidade mecânica, isto é, o valor de r , temos de multiplicar o valor anterior por $8/c^2$. Agora, como de acordo com as mesmas unidades temos^{395,396}

$$c = 4,39 \cdot 10^{11} , \quad ^{397}$$

obtemos:

$$r = 2,482 \cdot 10^{-13} ,$$

e a partir disso vem também:

$$\frac{32\gamma}{rc\sqrt{2}} = 2070 .$$

A grandeza n , que ainda foi deixada indeterminada, vai ser escolhida em seguida de tal forma que nl seja um múltiplo de π . Logo o termo negativo dentro da raiz quadrada nas expressões para λ_1 e λ_2 será então tão grande em comparação com 1 que pode ser considerado como infinitamente grande. Essa circunstância traz consigo uma considerável simplificação. Na sequência só vamos considerar o caso no qual acontece essa circunstância, a saber, quando

$$\frac{32\gamma}{rc\sqrt{2}}$$

pode ser considerado como sendo infinitamente grande em comparação com 1. Este requisito será atendido tanto mais rigorosamente quanto menor for a resistência do fio, enquanto que

³⁹¹Moritz Hermann von Jacobi (1801-1874). Ver [Jac51].

³⁹²[Web51] com traduções para o inglês em [Web61a] e [Web21m].

³⁹³[Nota de Kirchhoff:] *Elektrodynamische Maassbestimmungen*, 1850, pág. 252.

³⁹⁴Essa data de 1850 com essa página de 252 é um pouco confusa. Talvez Kirchhoff esteja se referindo ao artigo de Weber de 1851, [Web51, pág. 358 dos *Annalen der Physik und Chemie*, ou pág. 292 das *Obras* de Weber] com traduções para o inglês em [Web61a, p. 262] e [Web21m, pág. 282]; ou à Segunda Memória principal de Weber sobre *Medições Eletrodinâmicas* de 1852, [Web52c, pág. 252 dos *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse*, ou pág. 351 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21c, pág. 333].

³⁹⁵[Nota de Kirchhoff:] Ibidem (Weber e Kohlrausch) 1856, pág. 264.

³⁹⁶Kirchhoff estava se referindo à Quarta Memória principal de Weber sobre *Medições Eletrodinâmicas*, a saber, uma obra conjunta de Kohlrausch e Weber de 1857: [KW57, pág. 264 dos *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse*, ou pág. 652 das *Obras* de Weber] e [KW21, pág. 52]. Ver também a página 197 na Seção 8.17 da tradução em português.

³⁹⁷Ver o Capítulo 19 para uma discussão sobre a constante c de Weber.

permanece constante a razão de seu comprimento para seu raio. Contudo, esta resistência pode ser consideravelmente maior que a do fio de Jacobi, sem que os resultados a que chegaremos deixem de ser válidos.

De acordo com as suposições anteriores, os valores de λ_1 e λ_2 serão

$$h \pm \frac{cn}{\sqrt{2}}\sqrt{-1} ,$$

onde, por questões de brevidade, colocamos:

$$\frac{c^2 r}{32\gamma l} = h .$$

Ao introduzir novas constantes no lugar de C_1 e C_2 , a expressão para X pode ser colocada no formato

$$X = e^{-ht} \left(A \cos \frac{cnt}{\sqrt{2}} + B \sin \frac{cnt}{\sqrt{2}} \right) .$$

Obtemos então:

$$Y = -\frac{e^{-ht}}{2} \left\{ \left(\frac{h}{n}A - \frac{c}{\sqrt{2}}B \right) \cos \frac{cnt}{\sqrt{2}} + \left(\frac{c}{\sqrt{2}}A + \frac{h}{n}B \right) \sin \frac{cnt}{\sqrt{2}} \right\} .$$

Vou assumir que $i = 0$ para $t = 0$, logo também vale $Y = 0$; essa condição fornece:

$$B = \frac{A}{\frac{nc}{h\sqrt{2}}} .$$

A grandeza n , como já mencionado, será colocada igual a um múltiplo de π/l . Portanto, o denominador da expressão para B será um múltiplo de

$$\pi \cdot \frac{c}{hl\sqrt{2}} ;$$

mas a grandeza aqui multiplicada por π é

$$= \frac{32\gamma}{rc\sqrt{2}} ;$$

ou seja, precisamente aquela que foi assumida como sendo infinitamente grande. Portanto B será infinitamente pequeno em comparação com A e podemos então colocar:

$$X = A \cdot e^{-ht} \cdot \cos \frac{cnt}{\sqrt{2}} ,$$

$$Y = -\frac{c}{2\sqrt{2}} A e^{-ht} \sin \frac{cnt}{\sqrt{2}} .$$

Multiplicando essas expressões respectivamente por $\sin ns$ e $\cos ns$, e colocando os produtos iguais a e e i , obtemos uma solução particular das equações diferenciais válidas para e e i . Essa solução pode ser generalizada adicionando uma constante arbitrária a s ; obtemos assim:

$$e = e^{-ht} \cos \frac{cnt}{\sqrt{2}} (A \sin ns + A' \cos ns) ,$$

$$i = -\frac{c}{2\sqrt{2}}e^{-ht} \operatorname{sen} \frac{cnt}{\sqrt{2}} (A \cos ns - A' \operatorname{sen} ns) .$$

Uma solução particular de outro formato, que também satisfaz à condição de que $i = 0$ para $t = 0$, é:

$$e = a + bs ,$$

$$i = -\frac{c^2}{8h}b(1 - e^{-2ht}) ,$$

onde a e b denotam duas constantes arbitrárias. O fato de que as duas equações diferenciais são satisfeitas é facilmente comprovado se usarmos que uma, introduzindo a grandeza h , assume a forma:

$$2hi = -\left(\frac{c^2}{4} \frac{\partial e}{\partial s} + \frac{\partial i}{\partial t}\right) .$$

Obtém-se uma solução que pode ser adaptada às outras condições do problema, se e e i forem colocadas iguais às somas de soluções particulares das formas fornecidas.

Vamos examinar agora com mais detalhes o caso no qual o fio retorna a si mesmo.³⁹⁸ Nesse caso e e i precisam ter valores iguais para $s = 0$ e para $s = l$; além disso, isso tem de ocorrer qualquer que seja a origem de s . Isso faz com que e e i sejam funções de s periódicas com relação a l . Para isso é necessário que:

$$b = 0 \quad \text{e} \quad n = m \frac{2\pi}{l} ,$$

onde m denota um inteiro. Temos assim para e e i as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} e &= e^{-ht} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos m \frac{2\pi}{l} \frac{c}{\sqrt{2}} t \cdot \operatorname{sen} m \frac{2\pi}{l} s \\ &+ a + e^{-ht} \sum_{m=1}^{\infty} A'_m \cos m \frac{2\pi}{l} \frac{c}{\sqrt{2}} t \cdot \cos m \frac{2\pi}{l} s , \\ i &= -\frac{c}{2\sqrt{2}} e^{-ht} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \operatorname{sen} m \frac{2\pi}{l} \frac{c}{\sqrt{2}} t \cdot \cos m \frac{2\pi}{l} s \\ &+ \frac{c}{2\sqrt{2}} e^{-ht} \sum_{m=1}^{\infty} A'_m \operatorname{sen} m \frac{2\pi}{l} \frac{c}{\sqrt{2}} t \cdot \operatorname{sen} m \frac{2\pi}{l} s . \end{aligned}$$

As constantes a , A , A' podem ser determinadas de acordo com o teorema de Fourier³⁹⁹ se, para $t = 0$, e é dado em função de s . Contudo, a solução pode ser reduzida a um outro formato que mostra mais claramente suas características.

³⁹⁸Ou seja, no caso de um circuito fechado.

³⁹⁹Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830). Ver [Fou22] com tradução para o inglês em [Fou52].

Para $t = 0$ seja

$$e = f(s) .$$

As expressões dentro dos sinais de somatória em e e i são transformadas de acordo com as seguintes equações:

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2} \sin(y + x) + \frac{1}{2} \sin(y - x) ,$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} \cos(y + x) + \frac{1}{2} \cos(y - x) ,$$

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} \cos(y + x) + \frac{1}{2} \cos(y - x) .$$

Quando se considera que a função f é necessariamente periódica com relação a l , vemos que as expressões para e e i podem ser escritas como segue:

$$e = a + \frac{1}{2} e^{-ht} \left[f\left(s + \frac{c}{\sqrt{2}}t\right) + f\left(s - \frac{c}{\sqrt{2}}t\right) - 2a \right] ,$$

$$i = -\frac{c}{4\sqrt{2}} e^{-ht} \left[f\left(s + \frac{c}{\sqrt{2}}t\right) - f\left(s - \frac{c}{\sqrt{2}}t\right) \right] .$$

A grandeza a é determinada aqui pela equação

$$a = \frac{1}{l} \int_0^l f(s) ds ;$$

isto é, la é a quantidade de eletricidade livre contida em todo o fio.

A expressão para e mostra uma analogia bem notável entre a propagação da eletricidade no fio e a propagação de uma onda em um fio esticado ou uma haste elástica vibrando longitudinalmente. Quando $a = 0$, isto é, quando a quantidade total de eletricidade = 0, a eletricidade se divide, como quero me expressar, em duas ondas de igual intensidade, que se propagam em direções opostas ao longo do fio com a velocidade $c/\sqrt{2}$. A densidade de eletricidade diminui em todos os lugares proporcionalmente com e^{-ht} . Contudo, essa diminuição é muito lenta em comparação com a velocidade das ondas. O tempo que cada uma das duas ondas leva para completar uma revolução é $l\sqrt{2}/c$.⁴⁰⁰ Portanto, a razão das densidades elétricas em um ponto antes e após a revolução é

$$1 : e^{-hl\sqrt{2}/c} .$$

Essa razão difere de 1 por uma quantidade infinitamente pequena, já que o expoente de “e”, de acordo com a suposição já feita, é infinitamente pequeno.⁴⁰¹ Em comparação com velocidades acessíveis à nossa percepção, é claro que a diminuição da densidade elétrica será sempre muito rápida. Se o fio fosse o padrão de resistência de Jacobi, então $1/h$ seria muito próximo da 2000^a parte de um segundo e, portanto, nesse pequeno tempo a densidade elétrica diminuiria na razão de $e : 1$, isto é, de $2,7 : 1$.

⁴⁰⁰Ou seja, esse é o tempo para cada onda dar uma volta completa no circuito fechado de comprimento l .

⁴⁰¹Ou seja, $hl\sqrt{2}/c \ll 1$.

Quando $a \neq 0$, ou quando a densidade média de eletricidade não é $= 0$, a expressão para e mostra que o excesso da densidade sobre a média muda exatamente como se a densidade média fosse igual a 0.

Descobriu-se aqui que a velocidade de propagação de uma onda elétrica é $= c/\sqrt{2}$, ou seja, independente da seção transversal e da condutividade do fio, bem como da densidade da eletricidade; seu valor é de 41950 milhas em um segundo, ou seja, quase igual à velocidade da luz no espaço vazio.⁴⁰²

Quando o fio não retorna a si mesmo,⁴⁰³ a grandeza b não pode ser $= 0$, e as grandezas n podem ter outros valores diferentes daqueles do caso que acabou de ser considerado. No que diz respeito às extremidades do fio, certas equações precisam ser satisfeitas de acordo com as condições a que estão sujeitas as extremidades. Se uma extremidade estiver isolada, nessa extremidade i tem de sempre ser $= 0$; se a extremidade for colocada em conexão completa com a Terra, o potencial V , assim como e para todos os valores de t , precisam se anular aqui. Não há dificuldade em formar expressões para e e i para os casos em que as duas extremidades estão isoladas, quando as duas estão conectadas com a Terra, ou quando uma delas está isolada e a outra conectada com a Terra. Em todos os casos ocorre uma reflexão da onda na extremidade em que ela chega. Se a extremidade estiver conectada com a Terra, a reflexão está associada a uma reversão da onda, isto é, dela emana eletricidade negativa quando foi atingida por eletricidade positiva; já na extremidade isolada ocorre a reflexão sem reversão. Portanto, quando a extremidade está conectada com a Terra, ela corresponde de certa forma à extremidade fixa de uma haste vibrando longitudinalmente; já a extremidade isolada, ao contrário, corresponde à extremidade livre da haste.

Vamos discutir aqui mais detalhadamente um outro caso. Vamos examinar como a eletricidade se desloca no fio de conexão de uma bateria galvânica antes que a corrente fique estacionária. Vou supor que a resistência da bateria é infinitamente pequena em comparação com a resistência do fio conectando seus polos, e que um de seus polos fica em conexão perfeita com a Terra. No instante $t = 0$ o início do fio deve ser conectado a este polo e o final do fio deve ser conectado ao outro polo. Podemos então assumir que no início do fio, ou para $s = 0$, o potencial é sempre $= 0$; e no final do fio, ou para $s = l$, ele tem um valor constante que depende da força eletromotriz do circuito. Se K denota a força eletromotriz, esse valor tem de ser $K/2$. Portanto, as condições a serem satisfeitas pelas expressões para e e i são as seguintes:

$$\begin{aligned} &\text{para } s = 0 \text{ precisamos ter } e = 0 , \\ &\text{para } s = l \text{ precisamos ter } e = \frac{1}{4\gamma} K , \\ &\text{para } t = 0 \text{ precisamos ter } e = 0 . \end{aligned}$$

Devido à primeira condição, precisamos ter as grandezas $A' = 0$ e também $a = 0$. Como e precisa ser independente de t para $s = l$, as grandezas n precisam satisfazer à condição

$$\text{sen } nl = 0 ;$$

isto é, precisamos ter:

$$n = m \frac{\pi}{l} ,$$

⁴⁰²Ver o Capítulo 19 para uma discussão sobre a constante c de Weber.

⁴⁰³Ou seja, no caso de um circuito aberto.

onde m denota um número inteiro. Além disso, para que e possua o valor necessário em $s = l$, temos de fazer

$$b = \frac{1}{4\gamma l} K .$$

Colocando, por brevidade,

$$\frac{\pi}{l} \frac{c}{\sqrt{2}} t = \tau$$

e

$$\frac{\pi}{l} s = \varphi ,$$

obtemos para e a seguinte equação:

$$e = \frac{K}{4\gamma l} s + e^{-ht} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos m\tau \sin m\varphi .$$

As constantes A^{404} podem ser determinadas pela última condição. De acordo com isso, para todos os valores de φ entre 0 e π precisamos ter

$$\frac{K}{4\gamma\pi} \varphi = - \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin m\varphi .$$

Contudo, pelo teorema de Fourier, entre os mesmos limites temos a seguinte equação:

$$\varphi = -2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m} \sin m\varphi .$$

Portanto, temos de colocar

$$A_m = (-1)^m \frac{K}{4\gamma\pi} \frac{1}{m} ;$$

e obtemos assim:

$$e = \frac{K}{4\gamma} \left\{ \frac{s}{l} + \frac{2}{\pi} e^{-ht} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \cos m\tau \sin m\varphi \right\} .$$

Se for formada a expressão correspondente para i , lembrando a equação pela qual h foi definido, obtemos:

$$i = -\frac{K}{r} (1 - e^{-2ht}) - \frac{cK}{4\sqrt{2}\gamma\pi} e^{-ht} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sin m\tau \cos m\varphi .$$

O significado dessas expressões será desenvolvido agora, em primeiro lugar o significado da expressão para i . Nosso principal objetivo aqui é encontrar o valor da somatória que aparece nessa expressão. Vamos considerar φ como uma constante, e como uma função de τ . Essa função é periódica em 2π . Além disso, ela tem valores opostos para τ e $2\pi - \tau$. Portanto, é suficiente encontrar os valores que ela assume quando τ está entre 0 e π . Temos:

⁴⁰⁴Isto é, as constantes A_m .

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \operatorname{sen} m\tau \cos m\varphi = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \operatorname{sen} m(\tau + \varphi) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \operatorname{sen} m(\tau - \varphi) .$$

Porém, quando x está entre $-\pi$ e $+\pi$, temos a soma:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \operatorname{sen} mx = -\frac{x}{2} ;$$

e como ela é periódica em 2π , ela é em geral

$$= -\frac{1}{2}(x - 2p\pi) ,$$

onde p denota um número inteiro, para o qual $x - 2p\pi$ está entre $-\pi$ e $+\pi$. Com os limites que foram assumidos para τ , vem que $\tau - \varphi$ está entre $-\pi$ e $+\pi$, já que para todos os pontos do fio o valor de φ está entre 0 e π . Temos, portanto:

$$\sum \frac{(-1)^m}{m} \cdot \operatorname{sen} m(\tau - \varphi) = \frac{\tau - \varphi}{2} .$$

Com relação ao valor de $\tau + \varphi$, ele pode ser maior ou menor do que π . Temos⁴⁰⁵

$$\begin{aligned} \sum \frac{(-1)^m}{m} \operatorname{sen} m(\tau + \varphi) &= -\frac{\tau + \varphi}{2} , \quad \text{quando} \quad \varphi < \pi - \tau , \\ &= -\frac{\tau + \varphi}{2} + \pi , \quad \text{quando} \quad \varphi > \pi - \tau . \end{aligned}$$

Disso segue que:

$$\begin{aligned} \sum \frac{(-1)^m}{m} \cos m\tau \cos m\varphi &= -\frac{\tau}{2} , \quad \text{quando} \quad \varphi < \pi - \tau , \\ &= -\frac{\tau}{2} + \frac{\pi}{2} , \quad \text{quando} \quad \varphi > \pi - \tau . \end{aligned}$$

Aqui supõe-se que τ está entre 0 e π ; se estiver entre π e 2π , a mesma soma resulta em:

$$= \pi - \frac{\tau}{2} , \quad \text{quando} \quad \varphi < \tau - \pi ,$$

e

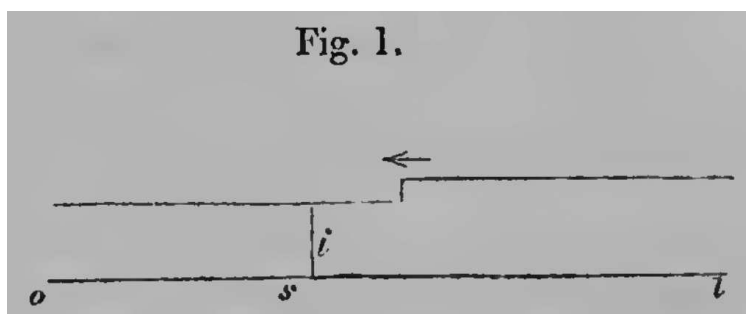
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\tau}{2} , \quad \text{quando} \quad \varphi > \tau - \pi .$$

Para encontrar a somatória para valores maiores de τ , deve ser lembrado que ela é periódica em 2π .

⁴⁰⁵Devido a um erro de impressão, a próxima equação apareceu no texto original da seguinte forma:

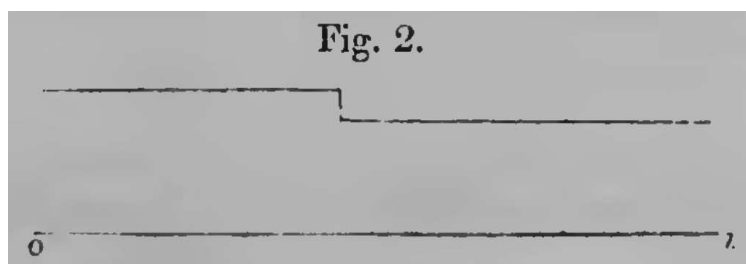
$$\begin{aligned} \sum \frac{(-1)}{m} \operatorname{sen} m(\tau + \psi) &= -\frac{\tau + \varphi}{2} , \quad \text{quando} \quad \varphi < \pi - \tau , \\ &= -\frac{\tau + \varphi}{2} + \pi , \quad \text{quando} \quad \varphi > \pi - \tau . \end{aligned}$$

Disso vem que em todo instante existe um ponto no fio para o qual a intensidade da corrente sofre uma mudança repentina. Esse ponto, no instante $t = 0$, está no final do fio, mas desloca-se com a velocidade $c/\sqrt{2}$ em direção ao início [do fio], sendo que após chegar lá, ele volta com a mesma velocidade para o fim; volta de novo daí, e assim desloca-se perpetuamente para a frente e para trás ao longo do comprimento do fio. Em cada uma das duas partes nas quais o fio, em cada instante, é dividido por esse ponto, existe a mesma intensidade de corrente em todo lugar naquele instante; de tal maneira que se s e i forem consideradas como as coordenadas retangulares de um ponto, será descrita uma linha no formato da Figura 1.



Deixando de lado o sinal, a intensidade da corrente é sempre menor na frente do ponto onde ocorre o salto, e maior atrás dele, e as palavras *antes* e *depois* são usadas no sentido do movimento do ponto. Portanto, a Figura 1 só é verdadeira para um instante no qual o ponto se desloca do final do fio em direção ao início.

A Figura 2 refere-se a um instante no qual ocorre o contrário.⁴⁰⁶

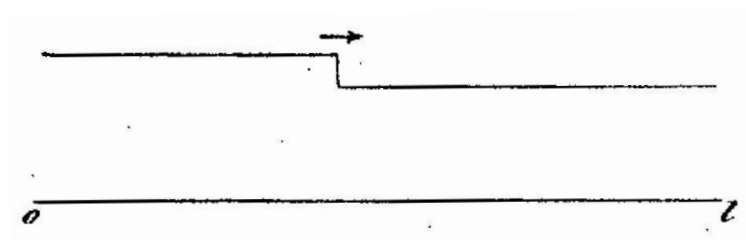


O valor do salto é dado por:

$$= \frac{cK}{8\sqrt{2}\gamma} e^{-ht} ;$$

ou, se denotarmos por J ao valor ao qual i se aproxima cada vez mais quando o tempo é

⁴⁰⁶A seta apontando para a direita não foi incluída na Figura 2 da tradução para o inglês que apareceu no *Philosophical Magazine*. A Figura 2 original do *Annalen der Physik und Chemie*, incluindo a seta, aparece nessa Nota de rodapé, a saber:



aumentado, isto é, o valor de K/r ,

$$= J \cdot \frac{cr}{8\sqrt{2}\gamma} e^{-ht} .$$

Essa grandeza possui seu maior valor quando $t = 0$; mas isso, de acordo com uma suposição já feita, também é infinitamente pequeno em comparação com J . A expressão para o tamanho do salto pode ser escrita um pouco mais curta se for introduzido o tempo que o ponto em que ocorre o salto, ou uma onda elétrica, precisa para se propagar através do comprimento do fio. Seja T esse tempo, isto é, colocando

$$T = \frac{l\sqrt{2}}{c} ,$$

encontra-se facilmente que essa expressão é:

$$= J \cdot 2hT e^{-ht} .$$

Quando o tempo aumenta, o valor do salto diminui, mas tão lentamente que durante o tempo T ocorre apenas uma diminuição infinitamente pequena.

Para obter uma visão completa do processo só é necessário examinar as alterações da intensidade da corrente no início do fio. Seja i_0 esse valor de i para $s = 0$. Então, usando os símbolos J e T , obtemos:

$$i_0 = J (1 - e^{-2ht}) + \frac{J4hT}{\pi} e^{-ht} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \text{sen } m\tau .$$

Colocando o valor da somatória e lembrando que:

$$\frac{\tau}{\pi} = \frac{t}{T} ,$$

obtemos:

$$i_0 = J (1 - e^{-2ht}) + J2he^{-ht}(2pT - t) ,$$

onde p denota o número inteiro para o qual

$$\frac{t - 2pT}{T}$$

é uma fração própria, positiva ou negativa.⁴⁰⁷ Logo p pode ser definido como o maior inteiro que está contido na fração

$$\frac{t + T}{2T} .$$

Para valores de t para os quais p não é muito grande, a expressão para i_0 pode ser muito simplificada. Nesse caso a grandeza ht é infinitamente pequena; e ao desprezar termos de ordens superiores, a equação para i_0 pode então ser escrita como:

⁴⁰⁷Uma fração própria é definida como a fração onde o numerador é menor que o denominador e que representa parte do inteiro, isto é, representa um valor maior que zero e menor que um. Exemplos: 1/2, 1/4, 2/3 etc.

$$i_0 = J \cdot 2ht + J2h(2pT - t) ,$$

isto é,

$$i_0 = pJ4hT .$$

Essa expressão mostra que a intensidade de corrente no começo do fio é nula até o instante em que $t = T$; nesse momento e nos instantes $t = 3T$, $t = 5T$, etc., ela muda por saltos; e, além disso, o salto é o dobro de seu valor em outros pontos do fio. Durante os tempos intermediários a intensidade de corrente é constante.

Pode ser discutida de maneira similar a expressão para e . Temos⁴⁰⁸

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \cos m\tau \sin m\varphi = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sin m(\tau + \varphi) - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sin m(\tau - \varphi) ;$$

ou, tão logo τ esteja entre 0 e π :

$$= -\frac{\varphi}{2} , \quad \text{quando} \quad \varphi < \pi - \tau ,$$

$$= -\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2} , \quad \text{quando} \quad \varphi > \pi - \tau ;$$

se τ estiver entre π e 2π , a mesma somatória vale:

$$= -\frac{\varphi}{2} , \quad \text{quando} \quad \varphi < \tau - \pi ,$$

$$= -\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2} , \quad \text{quando} \quad \varphi > \tau - \pi .$$

O segundo fato segue do primeiro, quando se considera que a somatória tem o mesmo valor para τ e para $2\pi - \tau$. Para maiores valores de τ , encontra-se o valor da somatória quando lembramos que ela é periódica em 2π .

Disso segue que em cada instante em algum ponto do fio, e também sofre um salto. Esse ponto sempre coincide com aquele ponto no qual ocorre o salto para i . O valor de e é sempre maior no lado desse ponto no qual se encontra o final do fio, e menor no lado do início [do fio]. O valor do salto é:

$$= \frac{K}{4\gamma} e^{-ht} ;$$

ou, chamando de E ao valor constante de e no final do fio:

$$= Ee^{-ht} .$$

Naquele lado do salto em que se encontra o início do fio, temos

⁴⁰⁸Na tradução para o inglês do *Philosophical Magazine* essa equação apareceu da seguinte forma:

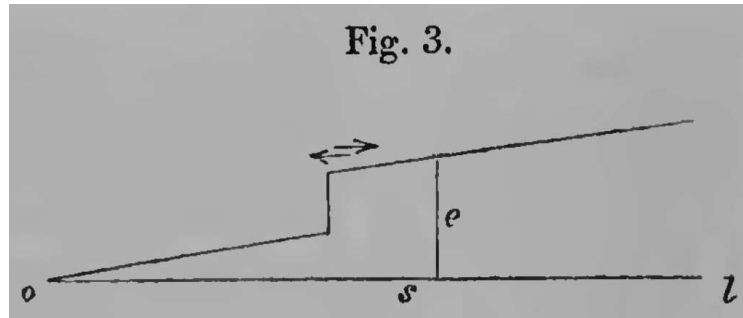
$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \cos m\tau \sin m\phi = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sin m(\tau + \phi) .$$

$$e = E \cdot \frac{s}{l} (1 - e^{-ht}) ;$$

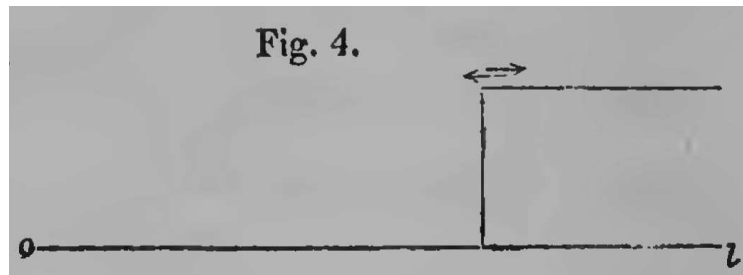
e no lado em que se encontra o final do fio, temos:

$$e = E \left\{ \frac{s}{l} (1 - e^{-ht}) + e^{-ht} \right\} .$$

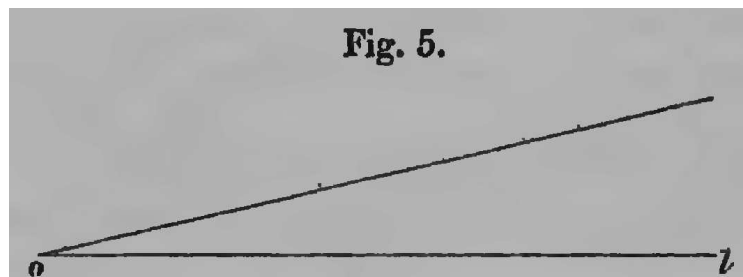
Se e e s forem as coordenadas retangulares de um ponto, então para um certo valor de t obtemos uma linha no formato mostrado na Figura 3.



Quando t não ultrapassa um múltiplo moderado de T , a linha tem o formato mostrado na Figura 4.



Quanto mais t aumenta, mais a Figura vai se aproximar da linha reta, Figura 5.



Capítulo 10

Comentários sobre o Artigo de 1857 de Kirchhoff sobre o Movimento da Eletricidade nos Fios

A. K. T. Assis⁴⁰⁹

10.1 Solução de uma Integral que Aparece no Artigo de Kirchhoff

Nesse trabalho Kirchhoff chegou à seguinte Equação (ver a página 221):

$$\frac{e}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \int_0^{2\pi} \frac{dx' d\psi'}{\sqrt{x'^2 + \alpha^2 + \rho^2 - 2\alpha\rho \cos(\psi' - \psi)}} . \quad (10.1)$$

Ele afirmou (ver a Nota de rodapé 379 na página 221) que a integração em x' dessa Equação tem a seguinte solução quando $\varepsilon \gg \alpha > 0$ e $\varepsilon \gg \rho \geq 0$:

$$\frac{e}{\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \left(\lg 2\varepsilon - \lg \sqrt{\alpha^2 + \rho^2 - 2\alpha\rho \cos(\psi' - \psi)} \right) . \quad (10.2)$$

Substituindo o “lg” de Kirchhoff com o logaritmo natural de base $e = 2,718\dots$, isto é, substituindo “lg” por “ln”, obtém-se:

$$\frac{e}{\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \left(\ln 2\varepsilon - \ln \sqrt{\alpha^2 + \rho^2 - 2\alpha\rho \cos(\psi' - \psi)} \right) . \quad (10.3)$$

Vou mostrar detalhadamente como chegar no resultado de Kirchhoff. Vou chamar de a^2 à seguinte grandeza: $\alpha^2 + \rho^2 - 2\alpha\rho \cos(\psi' - \psi) \geq 0$. É necessário então resolver a seguinte equação:

$$I = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{dx'}{\sqrt{x'^2 + a^2}} . \quad (10.4)$$

Com essa finalidade utilizo que:

⁴⁰⁹Homepage: www.ifi.unicamp.br/~assis

$$\int \frac{dx'}{\sqrt{x'^2 + a^2}} = \ln |x' + \sqrt{x'^2 + a^2}| + C , \quad (10.5)$$

onde C é uma constante arbitrária. Com isso obtenho:

$$I = \ln |\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + a^2}| - \ln |-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + a^2}| = \ln \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + a^2} + \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + a^2} - \varepsilon} . \quad (10.6)$$

Multiplicando o numerador e o denominador por $\sqrt{\varepsilon^2 + a^2} + \varepsilon$ obtém-se:

$$I = \ln \frac{(\sqrt{\varepsilon^2 + a^2} + \varepsilon)^2}{a^2} = \ln \frac{(\sqrt{\varepsilon^2 + a^2} + \varepsilon)^2}{(\sqrt{a^2})^2} = 2 \ln \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + a^2} + \varepsilon}{\sqrt{a^2}} . \quad (10.7)$$

Assumindo que $\varepsilon^2 \gg a^2$ obtém-se:

$$I = 2 \ln \frac{2\varepsilon}{\sqrt{a^2}} = 2 \left[\ln(2\varepsilon) - \ln \sqrt{a^2} \right] = 2 \left[\ln(2\varepsilon) - \ln \sqrt{\alpha^2 + \rho^2 - 2\alpha\rho \cos(\psi' - \psi)} \right] . \quad (10.8)$$

Esse é o resultado apresentado por Kirchhoff. Essa dedução mostra claramente que o símbolo “lg” apresentado por ele em seu artigo original⁴¹⁰ deve ser entendido como o logaritmo natural representado nos livros didáticos atuais por “ln”.

10.2 A Equação do Telégrafo Obtida por Kirchhoff

Nesse artigo Kirchhoff chegou à sua Equação (4) na página 225:

$$2 \frac{\partial i}{\partial s} = - \frac{\partial e}{\partial t} , \quad (10.9)$$

Ele também chegou (ver a página 227) a uma outra equação que poderia ter sido numerada como Equação (5), a saber:

$$i = -4\gamma \frac{l}{r} \left(\frac{\partial e}{\partial s} + \frac{4}{c^2} \frac{\partial i}{\partial t} \right) . \quad (10.10)$$

A derivada parcial da Equação (10.9) com relação a t e a derivada parcial da Equação (10.10) com relação a s fornecem, respectivamente:

$$2 \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial s} = - \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} , \quad (10.11)$$

e

$$\frac{\partial i}{\partial s} = -4\gamma \frac{l}{r} \left(\frac{\partial^2 e}{\partial s^2} + \frac{4}{c^2} \frac{\partial^2 i}{\partial s \partial t} \right) . \quad (10.12)$$

Assumo agora funções bem comportadas tal que

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial s} = \frac{\partial^2 i}{\partial s \partial t} . \quad (10.13)$$

⁴¹⁰[Kir57b, pág. 196 dos *Annalen der Physik und Chemie* ou pág. 134 de suas *Gesammelte Abhandlungen* — *Obras Reunidas*].

Finalmente, ao combinar as Equações (10.11), (10.12) e (10.13), é obtida a completa equação do telégrafo, a saber:

$$\frac{\partial^2 e}{\partial s^2} - \frac{2}{c^2} \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = \frac{r}{8\gamma l} \frac{\partial e}{\partial t} . \quad (10.14)$$

Ao seguir o mesmo procedimento, mas agora começando com a derivada parcial da Equação (10.9) com relação a s e com a derivada parcial da Equação (10.10) com relação a t , obtém-se:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial s^2} - \frac{2}{c^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \frac{r}{8\gamma l} \frac{\partial i}{\partial t} . \quad (10.15)$$

Kirchhoff também obteve que $V = 2e \ln \frac{l}{\alpha}$. Isso significa que o potencial devido à eletricidade livre, V , também vai satisfazer à mesma equação, a saber:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} - \frac{2}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{r}{8\gamma l} \frac{\partial V}{\partial t} . \quad (10.16)$$

As Equações (10.14), (10.15) e (10.16) representam as equações completas do telégrafo para a densidade linear de carga, e , para a intensidade de corrente, i , e para o potencial devido às cargas livres, V . Essas equações foram obtidas ao levar em consideração a resistência do fio, a força eletromotriz devida à eletricidade livre espalhada sobre toda a superfície do fio, e também a indução que ocorre em consequência da alteração da intensidade de corrente em todas as partes do fio. Em termos da terminologia atual, Kirchhoff deduziu a completa equação do telégrafo levando em conta não apenas a resistência e capacitância do fio, mas especialmente sua auto-indutância. Tudo isso foi realizado partindo da força eletrodinâmica fundamental de Weber.

Para um fio de resistência desprezível, isto é, quando o lado direito das Equações (10.14), (10.15) e (10.16) vai a zero, elas ficam reduzidas à equação de onda com o sinal deslocando-se ao longo do fio com a velocidade $c/\sqrt{2}$:

$$\frac{\partial^2 e}{\partial s^2} - \frac{1}{(c/\sqrt{2})^2} \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 i}{\partial s^2} - \frac{1}{(c/\sqrt{2})^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} - \frac{1}{(c/\sqrt{2})^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 . \quad (10.17)$$

A constante c de Weber foi medida pela primeira vez por Weber e Kohlrausch. Eles encontraram o seguinte valor:⁴¹¹ $c = 4,39 \times 10^{11} \text{ mm/s}$. Isso fornece então:

$$\frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{4,39 \times 10^{11} \text{ mm/s}}{\sqrt{2}} = 3,1 \times 10^8 \frac{m}{s} . \quad (10.18)$$

Esse número tem o mesmo valor que a velocidade da luz no vácuo. Por esse motivo Kirchhoff chegou à seguinte conclusão na página 232:

Descobriu-se aqui que a velocidade de propagação de uma onda elétrica é $= c/\sqrt{2}$, ou seja, independente da seção transversal e da condutividade do fio, bem como da densidade da eletricidade; seu valor é de 41950 milhas em um segundo, ou seja, quase igual à velocidade da luz no espaço vazio.

⁴¹¹[KW57, pág. 264 dos *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse*, ou pág. 652 das *Obras de Weber*] e [KW21, pág. 52]. Ver também a página 197 da Seção 8.17.

Representando a velocidade da luz no vácuo por $v_L = c/\sqrt{2}$, a Equação (10.17) pode então ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 e}{\partial s^2} - \frac{1}{v_L^2} \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 i}{\partial s^2} - \frac{1}{v_L^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} - \frac{1}{v_L^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 . \quad (10.19)$$

Esse foi um resultado notável indicando uma conexão profunda entre a eletrodinâmica e a óptica. E tudo isso obtido a partir da eletrodinâmica de Weber, bem antes dos trabalhos de Maxwell sobre a teoria eletromagnética da luz.

Na sequência desse mesmo artigo de 1857 Kirchhoff analisou as soluções das Equações (10.14), (10.15) e (10.16) não apenas nesse caso particular de resistência desprezível, mas também ao levar em consideração a resistência do fio. Ele considerou circuitos abertos e fechados, ver a página 227 e as páginas seguintes.

Uma dedução da equação completa do telégrafo a partir da eletrodinâmica de Weber em geometrias diferentes (fio cilíndrico, cabo coaxial etc.) utilizando o Sistema Internacional de Unidades atual, MKSA, foi apresentada em diversos trabalhos recentes.⁴¹²

Apresento no Capítulo 19 uma discussão da constante c de weber e sua relação com a velocidade da luz no vácuo.

⁴¹²[Ass99], [Ass00], [HA00], [HA01], [Ass03a], [AH05], [AH07], [AH09], [AH13], [Ass14a] e [Ass19a].

Capítulo 11

[Poggendorff, 1857] Comentário sobre o Artigo do Prof. Kirchhoff

Johann Christian Poggendorff^{413,414,415,416,417}

Talvez seja permitido acrescentar a este ensaio (página 193 desta edição)⁴¹⁸ a observação de que o Prof. W. Weber, durante sua recente visita a Berlim, quando falei com ele sobre as investigações do Prof. Kirchhoff, mostrou-me um tratado totalmente elaborado sobre o mesmo assunto, que ele, no entanto, ainda não pretendia enviar para impressão porque queria primeiro aguardar os resultados de um estudo experimental que havia iniciado em conjunto com R. Kohlrausch.⁴¹⁹ A passagem do professor Kirchhoff por Berlim, alguns dias depois, deu-lhe a oportunidade de falar sobre este encontro com ele, — um encontro que pode ser considerado agradável, na medida em que ambos os trabalhos, partindo de uma base substancialmente idêntica, levaram a resultados concordantes, o que certamente merece atenção em um assunto até agora tão pouco pesquisado como as leis de formação da corrente [elétrica].

⁴¹³[Pog57] com tradução para o inglês em [Pog21].

⁴¹⁴Traduzido e editado por A. K. T. Assis, www.ifi.unicamp.br/~assis. Agradeço a Laurence Hecht por sugestões relevantes.

⁴¹⁵As Notas de Heinrich Weber, o Editor do Volume 4 das *Obras* de Wilhelm Weber, são representadas por [Nota de Heinrich Weber:]; todas as outras Notas são de minha autoria.

⁴¹⁶[Nota de Heinrich Weber:] Esse artigo de J. C. Poggendorff, ao qual W. Weber se refere no artigo [de 1864], na página 130 [das *Obras* de Weber], foi incluído aqui devido ao seu interesse histórico.

⁴¹⁷Esse trabalho de Poggendorff está relacionado ao artigo de Kirchhoff de 1857 e ao artigo de Weber de 1864, que estão traduzidos para o português nos Capítulos 9 e 18. Weber vai mencionar o trabalho de Poggendorff na página 369 dessa tradução em português, Seção 18.6 de sua Quinta Memória principal sobre *Medições Eletrodinâmicas*, [Web64, pág. 130 das *Obras* de Weber].

⁴¹⁸Poggendorff está se referindo ao artigo de Kirchhoff de 1857 publicado na página 193 do Volume 100 dos *Annalen der Physik und Chemie*, [Kir57b]. O trabalho de Kirchhoff está traduzido no Capítulo 9. Deve ser lembrado que Poggendorff era o Editor dos *Annalen der Physik und Chemie*, ver o Capítulo 1 e a Nota de rodapé 218 na página 145.

⁴¹⁹Ver a Nota de rodapé 197 na página 139.

Capítulo 12

Comentários sobre o Artigo de 1857 de Poggendorff

A. K. T. Assis⁴²⁰

Wilhelm Weber e Carl Friedrich Gauss (1777-1855) inventaram em 1833 o primeiro telégrafo eletromagnético operacional do mundo.⁴²¹ Era um cabo bifilar com 3 km de comprimento ligando a Universidade de Göttingen, onde Weber era Professor de Física, com o Observatório Astronômico (*Sternwarte*), dirigido por Gauss. Esse telégrafo funcionava com base na lei de indução de Faraday descoberta dois anos antes.⁴²² A Figura 12.1 mostra uma representação desse telégrafo.

Vinte e quatro anos depois, em 1857, Weber e Kirchhoff foram os primeiros a deduzir teoricamente a completa equação do telégrafo. Como observado por Poggendorff nesse artigo, eles trabalharam independentemente entre si e chegaram simultaneamente ao mesmo resultado. Obtiveram a equação do telégrafo levando em consideração a resistência do fio, a força eletromotriz devida às cargas espalhadas pela superfície do fio, assim como a indução devida à variação da intensidade de corrente em todos os pontos do fio. Utilizando os conceitos atuais e a terminologia usual da teoria de circuitos, podemos dizer que eles foram os primeiros a considerar não apenas a resistência e capacitância do fio, mas também sua auto-indutância. Os dois utilizaram em seus cálculos a eletrodinâmica de Weber.

Johann Christian Poggendorff (1796-1877) editou os *Annalen der Physik und Chemie* de 1824 até 1876. Foi nesse periódico que foram publicados muitos artigos de Weber e Kirchhoff. O atual periódico *Annalen der Physik* é o sucessor desse jornal editado por Poggendorff. O artigo de 1857 de Kirchhoff foi publicado nesse periódico. Esses comentários de Poggendorff sobre o trabalho de Kirchhoff foram publicados no mesmo Volume que o trabalho de Kirchhoff.

Rudolf Kohlrausch (1809-1858) colaborou com Weber na primeira medição da constante fundamental c de Weber, que não deve ser confundida com a constante c atual que aparece nos livros didáticos. A constante c de Weber é escrita no atual Sistema Internacional de Unidades, MKSA, como $\sqrt{2}/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$, enquanto que a constante c atual dos livros didáticos

⁴²⁰Homepage: www.ifi.unicamp.br/~assis

⁴²¹[LB67, Seção 66, págs. 41-42], [Ano89], [Fey33a], [Fey33b], [Wie60, Capítulo 5, págs. 17-20], [Wie67, págs. 85-90], [Tim05], [Wol05], [MRGL10] e <https://www.uni-goettingen.de/de/historische-sammlung/47114.html>.

⁴²²[Far32a] com tradução para o alemão em [Far32b] e [Far89], e com tradução para o português em [Far11].

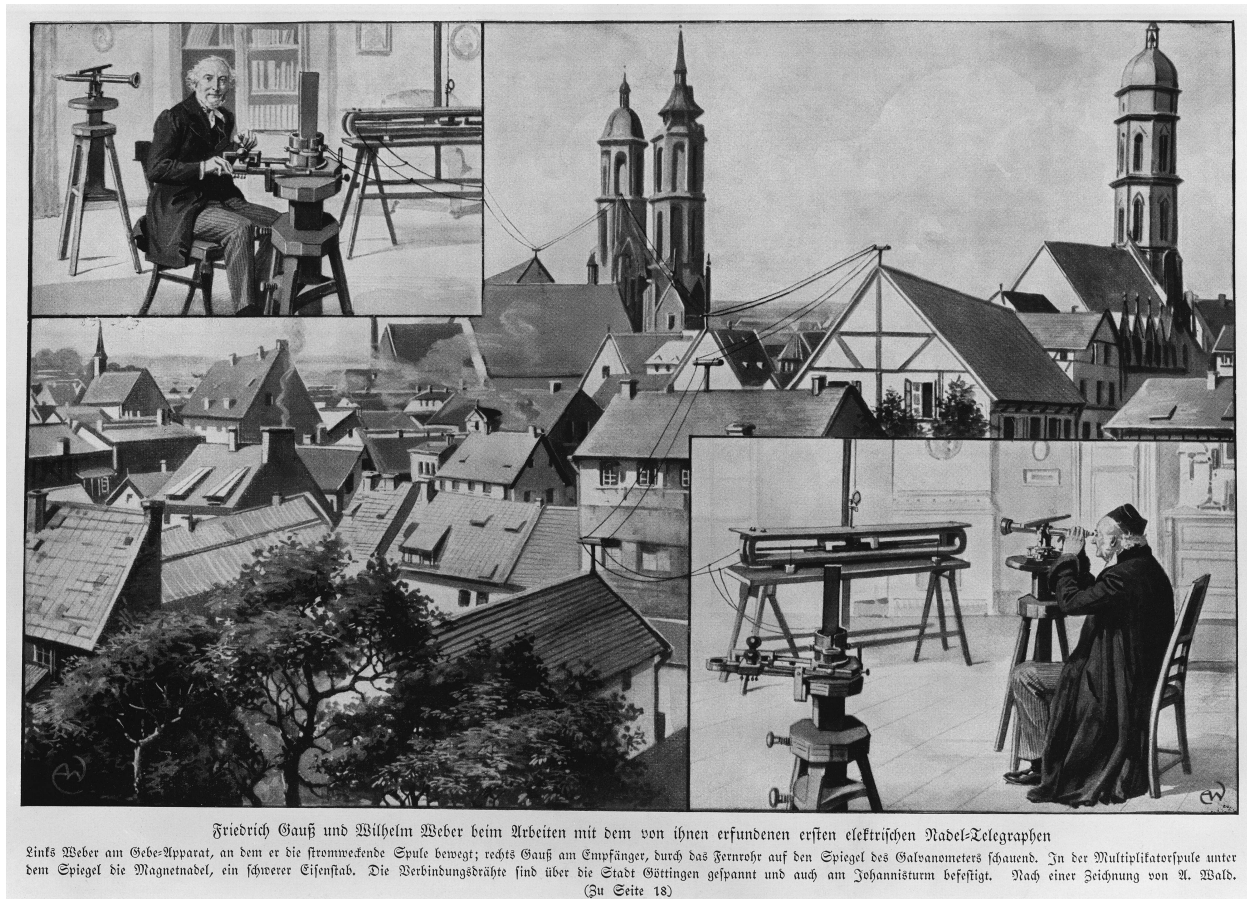


Figura 12.1: O telégrafo de Gauss e Weber.

é escrita como $1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$, onde $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$ é chamada de constante de permissividade do vácuo (ou constante de permissividade elétrica do vácuo), enquanto $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ kgmC}^{-2}$ é chamada de constante de permeabilidade do vácuo (ou constante de permeabilidade magnética do vácuo, ou constante magnética). A experiência de Weber e Kohlrausch foi realizada entre 1854 e 1856. Publicaram três trabalhos sobre esse assunto em 1855, 1856 e 1857, que estão traduzidos para o português nos Capítulos 6, 7 e 8. Obtiveram o valor da constante c de Weber como sendo dado por $4,39450 \times 10^8 \text{ m/s}$, ver a página 197 na Seção 8.17. Portanto,

$$\frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \frac{4,39450 \times 10^8 \text{ m/s}}{\sqrt{2}} = 3,1 \times 10^8 \text{ m/s} = v_L. \quad (12.1)$$

Isto é, $c/\sqrt{2}$ tem essencialmente o mesmo valor que a velocidade da luz no vácuo, que estamos representando nessa tradução por v_L .

Weber e Kirchhoff deduziram a equação do telégrafo utilizando a lei de força de 1846 de Weber atuando entre partículas eletrizadas.⁴²³ Eles mostraram, em particular, que quando o condutor tinha resistência desprezível, a velocidade de propagação de uma onda elétrica ao longo do fio era aproximadamente igual à velocidade da luz no espaço vazio. Esse resultado indicou uma conexão direta entre o eletromagnetismo e a óptica, assim como foi apontado por Kirchhoff no artigo que está sendo discutido aqui (ver a página 232). Esse resultado

⁴²³[Web46] com traduções para o inglês em [Web07] e [Web21b].

de Kirchhoff e Weber foi obtido muitos anos antes de James Clerk Maxwell (1831-1879) desenvolver sua teoria eletromagnética da luz.

Rudolf Kohlrausch, que também estava colaborando com Weber em algumas experiências relacionadas com a propagação de ondas eletromagnéticas, morreu em 1858. Devido a isso o trabalho de Weber teve sua publicação adiada e apareceu apenas em 1864. Na Seção 6 desse artigo de 1864 Weber comparou seus resultados com aqueles de Kirchhoff e, além disso, mencionou esse artigo de 1857 de Poggendorff.⁴²⁴

⁴²⁴[[Web64](#), Seção 6, págs. 130-132 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [[Web21a](#), Seção 6]. Ver a página [369](#) da Seção [18.6](#) dessa tradução em português.

Capítulo 13

[Kirchhoff, 1857b] Sobre o Movimento da Eletricidade nos Condutores

Gustav Kirchhoff^{425,426}

Desenvolvi em um artigo anterior^{427,428} uma teoria do movimento da eletricidade em condutores lineares. Vou agora mostrar como as considerações anteriores podem ser generalizadas para condutores de formato arbitrário.

As coordenadas cartesianas x, y, z localizam um ponto no condutor.⁴²⁹ Decompomos a corrente que atravessa esse ponto no tempo t ao longo dos três eixos coordenados para fornecer as componentes u, v, w da densidade de corrente. Essas densidades de corrente têm de ser iguais aos produtos das componentes da força eletromotriz com a condutividade elétrica no ponto (x, y, z) , considerando essa força eletromotriz como atuando na unidade da quantidade de eletricidade. A força eletromotriz é devida parcialmente à presença da eletricidade livre, e parcialmente devida à indução que surge por causa de mudanças na intensidade de corrente em todas as partes do condutor. Seja Ω a função potencial da eletricidade livre relacionada ao ponto (x, y, z) . Logo, as componentes da primeira parte da força eletromotriz são dadas por:

$$-2\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \quad -2\frac{\partial\Omega}{\partial y}, \quad -2\frac{\partial\Omega}{\partial z}.$$

Para deduzir as componentes da segunda parte, denoto as coordenadas de um segundo ponto do condutor por x', y', z' , enquanto que u', v', w' são os valores de u, v, w para esse ponto. Seja r a distância entre os pontos (x, y, z) e (x', y', z') . Defino:

$$U = \int \int \int \frac{dx' dy' dz'}{r^3} (x - x') [u'(x - x') + v'(y - y') + w'(z - z')] ,$$

⁴²⁵[Kir57c] com tradução para o inglês feita por Peter Graneau (1921-2014) em [GA94] e [Kir21a]. Ver também [Ass14c].

⁴²⁶As Notas de Gustav Kirchhoff são representadas por [Nota de Kirchhoff:]; todas as outras Notas são de minha autoria.

⁴²⁷[Nota de Kirchhoff:] Esses *Annalen*, Vol. 100, pág. 193.

⁴²⁸[Kir57b] com traduções para o inglês em [Kir57a] e [Kir21b], e tradução para o português no Capítulo 9.

⁴²⁹Essas coordenadas recebem esse nome em homenagem a René Descartes (1596-1650), um dos fundadores da geometria analítica. Ver [Des54], [Des65] e [Des09].

$$V = \int \int \int \frac{dx' dy' dz'}{r^3} (y - y') [u'(x - x') + v'(y - y') + w'(z - z')] ,$$

$$W = \int \int \int \frac{dx' dy' dz'}{r^3} (z - z') [u'(x - x') + v'(y - y') + w'(z - z')] ,$$

onde as integrações são estendidas por todo o volume do condutor. De acordo com a lei de indução de Weber,⁴³⁰ as componentes da segunda parte da força eletromotriz que está sendo considerada são:

$$-\frac{8}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} , \quad -\frac{8}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} , \quad -\frac{8}{c^2} \frac{\partial W}{\partial t} ,$$

onde c é a velocidade constante com que duas partículas de eletricidade têm de se deslocar entre si, de tal forma que não exerçam força mútua. Se k é a condutividade do condutor, obtemos:

$$u = -2k \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{4}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} \right) , \quad (1)$$

$$v = -2k \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} + \frac{4}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) , \quad (2)$$

$$w = -2k \left(\frac{\partial \Omega}{\partial z} + \frac{4}{c^2} \frac{\partial W}{\partial t} \right) . \quad (3)$$

Não tem de ser suposto agora que a eletricidade livre está confinada à superfície do condutor, assim como ocorria nos casos de equilíbrio ou de corrente constante. De fato, será mostrado que em geral ocorre o oposto. Seja ε a densidade [volumétrica] de eletricidade livre no ponto (x, y, z) , ε' a densidade em (x', y', z') , e a densidade [superficial] em um elemento da superfície dS , e e' a densidade em um outro elemento superficial dS' . Temos então:

$$\Omega = \int \frac{dx' dy' dz'}{r} \varepsilon' + \int \frac{dS'}{r} e' , \quad (4)$$

onde a primeira integração é sobre o volume do condutor, e a segunda sobre sua superfície.

Podemos adicionar a essas equações duas outras equações que lidam com as mudanças temporais da densidade de eletricidade livre.⁴³¹ Temos, portanto, para cada ponto dentro do condutor:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} ; \quad (5)$$

e, ao denotar por N à normal ao elemento dS apontando para dentro, temos então para cada ponto da superfície:

$$u \cos(N, x) + v \cos(N, y) + w \cos(N, z) = -\frac{1}{2} \frac{\partial e}{\partial t} . \quad (6)$$

⁴³⁰[Web46, pág. 354 do artigo original de 1846 e págs. 185-189 da Seção 28 das *Obras* de Weber], [Web07, págs. 120-122] e [Web21b, Seção 5.28, págs. 177-180]; [KW57, pág. 268 dos *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse*, ou págs. 655-657 das *Obras* de Weber] e [KW21, págs. 55-58].

⁴³¹As duas próximas equações descrevem a conservação da carga elétrica ou equação de continuidade.

Podemos deduzir a partir dessas equações uma relação notável entre ε e Ω . Substituindo os valores de u , v , w de (1), (2) e (3) em (5) e usando que:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} = -4\pi\varepsilon ,$$

encontramos:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -16k \left[\pi\varepsilon - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] .$$

A equação para U pode ser escrita como:

$$U = - \int dx' dy' dz' \frac{\partial^{\frac{1}{r}}}{\partial x} [u'(x - x') + v'(y - y') + w'(z - z')] ,$$

portanto, segue que:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = - \int dx' dy' dz' \frac{\partial^{\frac{1}{r}}}{\partial x} u' - \int dx' dy' dz' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} [u'(x - x') + v'(y - y') + w'(z - z')] .$$

Ao obter de maneira similar o valor de $\partial V/\partial y$ e $\partial W/\partial z$, encontramos:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = - \int dx' dy' dz' \left(u' \frac{\partial^{\frac{1}{r}}}{\partial x} + v' \frac{\partial^{\frac{1}{r}}}{\partial y} + w' \frac{\partial^{\frac{1}{r}}}{\partial z} \right) ;$$

já que vale:

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} = 0$$

para todos os pontos (x', y', z') , que não coincidem com o ponto (x, y, z) ; e ao serem estendidas sobre um volume infinitamente pequeno ao redor do ponto (x, y, z) , as integrais das segundas partes de $\partial U/\partial x$, $\partial V/\partial y$, $\partial W/\partial z$ são infinitamente pequenas. É fácil nos convencer da validade dessa última suposição pelo método utilizado por Gauss para provar que a contribuição para o potencial em um ponto devido a massas infinitamente próximas a esse ponto é desprezível comparada com a contribuição devida à matéria distribuída continuamente por todo o espaço.^{432,433} Se, na integral que forma o lado direito da equação encontrada, substituirmos os quocientes diferenciais tomados para x, y, z pelos quocientes diferenciais negativos tomados para x', y', z' , e se o resultado for dividido em três diferenciais parciais com relação a x', y' e z' , obteremos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \\ &= - \int \frac{dS'}{r} [u' \cos(N', x) + v' \cos(N', y) + w' \cos(N', z)] - \int \frac{dx' dy' dz'}{r} \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) ; \end{aligned}$$

⁴³²[Nota de Kirchhoff:] *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins*; 1839, pág. 7.

⁴³³[Gau40, pág. 7 dos *Resultate*] com tradução para o inglês em [Gau43, págs. 158-159].

onde N' é a normal apontando para dentro em relação ao elemento superficial dS' . Devido às Equações (6), (5) e (4), essa equação pode ser escrita como:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial t} .$$

Disso segue que:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -8k \left(2\pi\varepsilon - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} \right) . \quad (7)$$

Essa equação mostra claramente que $\varepsilon = 0$ é um caso especial e que, em geral, encontramos eletricidade livre dentro dos condutores. É provável que a eletricidade livre tenha um papel importante nas assim denominadas ações mecânicas da corrente de descarga de uma garrafa de Leiden como, por exemplo, na pulverização de um fio fino.⁴³⁴

Gostaria de aplicar a teoria desenvolvida aqui ao caso considerado no artigo mencionado no início, isto é, ao caso no qual o condutor é um fio infinitamente fino, nas proximidades do qual não existem outros corpos elétricos. Mostrarei que a teoria fornece os mesmos resultados que obtive anteriormente e, além disso, esclarece questões que permaneceram sem resposta até agora.

Para começar vou simplificar a equação geral com a suposição de que o condutor é cilíndrico com seção reta circular e que a corrente, assim como a distribuição de eletricidade livre, é simétrica ao redor do eixo. Considero o eixo como sendo a direção x e introduzo as novas coordenadas ρ e φ no lugar de y e z , de tal forma que:

$$y = \rho \cos \varphi , \quad z = \rho \sin \varphi ,$$

em conformidade com isso também coloco:

$$y' = \rho' \cos \varphi' , \quad z' = \rho' \sin \varphi' .$$

Além disso, denoto ainda no ponto (x, y, z) por σ a densidade de corrente perpendicular à componente da corrente ao longo do eixo do cilindro — positiva para a direção progressiva do eixo, e para o ponto (x', y', z') a denoto por σ' . Temos então:

$$v = \sigma \cos \varphi , \quad w = \sigma \sin \varphi ,$$

$$v' = \sigma' \cos \varphi' , \quad w' = \sigma' \sin \varphi' .$$

Portanto:

$$u = -2k \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{4}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} \right) , \quad (8)$$

onde⁴³⁵

⁴³⁴Kirchhoff está se referindo aqui ao fenômeno conhecido usualmente hoje em dia sob o nome de explosão de fios. Ver [Gra84b], [Gra84a], [Gra86], [Gra87], [Gra94] e [GG96].

⁴³⁵Devido a um erro de impressão, o texto original apresentou a seguinte equação:

$$U = \int \frac{dx' \rho' d\rho' d\varphi'}{r^3} (x - x') [u'(x - x') + \sigma' (\rho \cos(\varphi - \varphi') - \rho')] . \quad (9)$$

Desprezando a ação da eletricidade livre nas superfícies da base do cilindro, então, com α denotando o raio do cilindro, a Equação (4) pode ser escrita como:

$$\Omega = \int \frac{dx' \rho' d\rho' d\varphi'}{r} \varepsilon' + \alpha \int \frac{dx' d\varphi'}{r} e' . \quad (10)$$

A Equação (5) fica da seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho \sigma}{\partial \rho} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} ; \quad (11)$$

e a Equação (6), que se refere à superfície, fica como:

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{\partial e}{\partial t} . \quad (12)$$

As expressões para Ω e U ficam muito simplificadas se for suposto que a seção reta do cilindro é infinitamente pequena, enquanto que o fio tem um comprimento finito. Seja l esse comprimento e a origem das coordenadas considerada como sendo o centro do cilindro. Os limites de integração na direção x' são então $-l/2$ e $+l/2$. Por brevidade também considero:

$$x' - x = \xi ;$$

logo, nas integrais, $d\xi$ pode ser escrito no lugar de dx' . A integração ao longo de ξ tem então os limites $-l/2 - x$ e $l/2 - x$, dos quais o primeiro é sempre negativo e o segundo é sempre positivo. A grandeza r das integrais é determinada pela seguinte equação:

$$r^2 = \xi^2 + \beta^2 ,$$

onde

$$\beta^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi') .$$

Para começar com a transformação da segunda parte de Ω , imagino na seguinte integral⁴³⁶

$$\int_{-\frac{l}{2}-x}^{\frac{l}{2}-x} \frac{d\xi e'}{\sqrt{\beta^2 + \xi^2}} ,$$

que [a grandeza] e' foi expandida de acordo com o teorema de Taylor⁴³⁷ em potências de ξ , isto é:

$$U = \int \frac{dx' \rho' d\rho' d\varphi'}{r^3} (x - x') [u'(x - x') + \sigma' (\rho \cos \varphi - \varphi' - \rho')] . \quad (9)$$

⁴³⁶Devido a um erro de impressão, o texto original apresentou a seguinte equação:

$$\int_{-\frac{l}{2}-x}^{\frac{l}{2}-x} \frac{d\xi e'}{\sqrt{\beta^2 + \xi^2}} .$$

⁴³⁷Esse teorema leva o nome do matemático Brook Taylor (1685-1731).

$$e' = e + \frac{\partial e}{\partial x} \xi + \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \frac{\xi^2}{1 \cdot 2} + \dots ;$$

logo, os termos individuais nos quais a integral foi dividida assumem então a seguinte forma:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n} \frac{\partial^n e}{\partial x^n} \int \frac{\xi^n d\xi}{\sqrt{\beta^2 + \xi^2}} .$$

Temos, porém:

$$\int \frac{\xi^n d\xi}{\sqrt{\beta^2 + \xi^2}} = \frac{1}{n} \xi^{n-1} \sqrt{\beta^2 + \xi^2} - \frac{n-1}{n} \beta^2 \int \frac{\xi^{n-2} d\xi}{\sqrt{\beta^2 + \xi^2}} ,$$

e⁴³⁸

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{\beta^2 + \xi^2}} = \ln \left(\xi + \sqrt{\beta^2 + \xi^2} \right) ,$$

$$\int \frac{\xi d\xi}{\sqrt{\beta^2 + \xi^2}} = \sqrt{\beta^2 + \xi^2} .$$

Quando β é infinitamente pequeno, o que ocorre quando α é infinitamente pequeno, o primeiro termo (e apenas ele) torna-se então infinitamente grande. Portanto, podemos desprezar todos os termos seguintes comparados com o primeiro termo, escrevendo:

$$\int \frac{e' d\xi}{\sqrt{\beta^2 + \xi^2}} = 2e \ln \frac{\sqrt{l^2 - 4x^2}}{\beta} ,$$

ou ainda, ao desprezar termos finitos comparados com o termo infinito:

$$= 2e \ln \frac{l}{\beta} .$$

Além disso:

$$\int_0^{2\pi} \ln \beta d\varphi' = 2\pi \ln \rho' , \quad \text{quando} \quad \rho' > \rho .$$

Na segunda parte de Ω temos $\rho' = \alpha$. Logo a segunda parte é:

$$\alpha \int \frac{dx' d\varphi'}{r} e' = 4\pi \alpha e \ln \frac{l}{\alpha} .$$

Considerações similares podem ser utilizadas na primeira parte de Ω . Seja ε'_o o valor de ε no ponto (x, ρ', φ') . Essas considerações levam então a:

⁴³⁸A próxima equação apareceu no texto original no seguinte formato:

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{\beta^2 + \xi^2}} = \lg \left(\xi + \sqrt{\beta^2 + \xi^2} \right) .$$

Aquilo que Kirchhoff representou como o logaritmo de uma grandeza m , ou seja, $\lg m$, será substituído em todo lugar dessa tradução pelo logaritmo natural que tem como base o número de Euler, e $\approx 2,718\dots$, isto é, $\lg m = \log_e m = \ln m$. Ver ainda a Seção 10.1.

$$\int \frac{\varepsilon' dx'}{r} = 2\varepsilon'_o \ln \frac{l}{\beta} .$$

Além disso:

$$\begin{aligned} \int \ln \beta d\varphi' &= 2\pi \ln \rho' , \quad \text{quando} \quad \rho' > \rho \quad \text{e} \\ &= 2\pi \ln \rho , \quad \text{quando} \quad \rho > \rho' . \end{aligned}$$

Para essas duas expressões podemos escrever $2\pi \ln \alpha$ ao ignorar quantidades finitas comparadas com quantidades infinitas. Portanto:

$$\int \frac{dx' \rho' d\rho' d\varphi'}{r} \varepsilon' = 4\pi \ln \frac{l}{\alpha} \int_0^\alpha \rho' d\rho' \varepsilon'_o .$$

Seja

$$2\pi\alpha e + 2\pi \int_0^\alpha \rho' d\rho' \varepsilon'_o = E ,$$

isto é, se $E dx$ denota a quantidade de eletricidade livre contida no elemento dx do fio,^{439,440} encontramos então:

$$\Omega = 2E \ln \frac{l}{\alpha} . \quad (13)$$

A expressão para U na Equação (9) pode ser tratada da mesma maneira. Imagino u' e σ' desenvolvidos em potências de ξ , e denoto por u'_o e σ'_o aos valores de u e σ no ponto (x, ρ', φ') . Encontramos integrais do seguinte formato nas partes em que a expressão pode ser dividida:

$$\int \frac{\xi^n d\xi}{(\beta^2 + \xi^2)^{3/2}} . \quad ^{441}$$

Temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{\xi^n d\xi}{(\beta^2 + \xi^2)^{3/2}} &= \frac{1}{n-2} \frac{\xi^{n-1}}{\sqrt{\beta^2 + \xi^2}} - \frac{n-1}{n-2} \beta^2 \int \frac{\xi^{n-2} d\xi}{(\beta^2 + \xi^2)^{3/2}} , \quad ^{442} \\ \int \frac{\xi d\xi}{(\beta^2 + \xi^2)^{3/2}} &= -\frac{1}{\sqrt{\beta^2 + \xi^2}} , \end{aligned}$$

⁴³⁹[Nota de Kirchhoff:] Aqui E representa a mesma grandeza que aquela que chamei de e no artigo anterior.

⁴⁴⁰Ou seja, E aqui é a densidade linear de carga, isto é, a quantidade de carga por unidade de comprimento.

⁴⁴¹Devido a um erro de impressão, essa equação apareceu no texto original da seguinte forma:

$$\int \frac{\xi^n d\xi}{(\beta_2 + \xi)^{3/2}} .$$

⁴⁴²Devido a um erro de impressão, essa equação apareceu no texto original da seguinte forma:

$$\int \frac{\xi^n d\xi}{(\xi^2 + \xi^2)^{3/2}} = \frac{1}{n-2} \frac{\xi^{n-1}}{\sqrt{\beta^2 + \xi^2}} - \frac{n-1}{n-2} \beta^2 \int \frac{\xi^{n-2} d\xi}{(\beta^2 + \xi^2)^{3/2}} .$$

$$\int \frac{\xi^2 d\xi}{(\beta^2 + \xi^2)^{3/2}} = -\frac{\xi}{\sqrt{\beta^2 + \xi^2}} + \ln \left(\xi + \sqrt{\beta^2 + \xi^2} \right) .^{443}$$

Das integrais dessa forma, se elas forem consideradas de um limite finito negativo até um limite finito positivo, aquela para a qual $n = 2$ (e *somente* essa [integral]) será infinitamente grande se β for infinitamente pequeno. Todas as outras integrais podem ser desprezadas ao serem comparadas com essa, e a parte finita do termo infinito também pode ser desprezada. Um fator dela é:

$$u'_o - \frac{\partial \sigma'_o}{\partial x} (\rho \cos(\varphi - \varphi') - \rho') ,^{444}$$

mas, devido à pequenez de ρ e ρ' , podemos substituir esse fator por u'_o . Usando o mesmo método empregado anteriormente para o cálculo de Ω , obtemos:

$$U = 4\pi \ln \frac{l}{\alpha} \int \rho' d\rho' u'_o .$$

Se denotarmos por i à quantidade de eletricidade que, na unidade de tempo, atravessa a seção reta do fio, isto é, a intensidade da corrente, essa equação pode ser simplificada para:

$$U = 2i \ln \frac{l}{\alpha} .$$

Substituindo esse valor de U e o valor de Ω que vem de (13) na Equação (8), obtém-se:

$$u = -4 \ln \frac{l}{\alpha} k \left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{4}{c^2} \frac{\partial i}{\partial t} \right) .$$

O lado direito dessa equação é independente de ρ , e como u é independente de ρ , obtemos:

$$i = \pi \alpha^2 u ;$$

portanto:

$$i = -4\pi \alpha^2 k \ln \frac{l}{\alpha} \left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{4}{c^2} \frac{\partial i}{\partial t} \right) . \quad (14)$$

Pode ser deduzida das Equações (11) e (12) uma segunda equação entre as grandezas E e i . Se multiplicarmos a primeira equação por $\rho d\rho d\varphi$ e a integrarmos então sobre a seção reta do fio, e subtrairmos do resultado a segunda equação, após multiplicá-la por $2\pi\alpha$, obteremos:

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial t} . \quad (15)$$

⁴⁴³Devido a um erro de impressão, essa equação apareceu no texto original da seguinte forma:

$$\int \frac{\xi^2 d\xi}{(\beta^2 + \xi^2)^{3/2}} = -\frac{\xi}{\sqrt{\beta^2 + \xi^2}} + \ln \left(\xi + \sqrt{\beta^2 + \xi^2} \right) .$$

⁴⁴⁴Devido a um erro de impressão, essa equação apareceu no texto original como:

$$u'_o - \frac{\partial \sigma'_o}{\partial x} (\rho \cos \varphi - \varphi' - \rho') .$$

A dedução das Equações (14) e (15) pressupõe que o fio é reto. Mas como essas equações mostram que o estado elétrico de um ponto dentro do fio é independente do estado elétrico em todos os outros pontos a uma distância finita do primeiro ponto, as equações também serão válidas para fios curvos, desde que o raio da curvatura seja finito em todos os lugares e os pontos entre os quais existe um pedaço finito do fio não sejam infinitamente próximos entre si. As Equações (14) e (15) são as mesmas equações que deduzi para o mesmo caso no artigo anterior. Portanto, a teoria mais geral desenvolvida aqui leva aos mesmos resultados obtidos antes, porém ela leva a consequências adicionais. Se, por exemplo, (14) e (15) forem utilizadas para determinar E e (13) for usada para determinar Ω , será possível calcular ε de (7), isto é, a densidade de eletricidade livre dentro do fio, desde que ε seja fornecido para o instante inicial. Caso o valor inicial de ε seja independente de ρ , então ε permanecerá independente disso, isto é, a densidade de eletricidade será a mesma para todos os pontos da seção reta já que, de acordo com (13), Ω é independente de ρ , e ρ não aparece na Equação (7). Após calcular ε podemos encontrar e . Se o valor inicial de ε for independente de ρ , o que deve ser assumido, podemos utilizar a seguinte equação:

$$E = 2\pi\alpha e + \pi\alpha^2\varepsilon .^{445}$$

Com a mesma suposição será fácil calcular σ a partir de ε já que:

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\alpha} \frac{\partial e}{\partial t} .$$

Aprendemos da Equação (12) que essa equação é válida para $\rho = \alpha$, e a partir da Equação (11) aprendemos que σ é proporcional a ρ . Se multiplicarmos essa equação por $\rho d\rho$ e a integrarmos, lembrando que u e ε são independentes de ρ , encontraremos:

$$\sigma = -\frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right) + \frac{\text{constante}}{\rho} .$$

A constante de integração tem de ser nula, já que, para $\rho = 0$, σ não pode ser infinita. De fato, o oposto é verdadeiro; essa constante tem de desaparecer, já que ao longo do eixo do fio a corrente tem de estar na direção do eixo.

Discuti no artigo anterior a solução das Equações (14) e (15) para um caso que se aproxima tanto mais quanto menor for a resistência do fio. Provei que nesse caso a eletricidade no fio avança como uma onda em uma corda tensionada, a saber, com a velocidade da luz no espaço vazio. É interessante considerar o caso oposto que se aproxima tanto mais quanto maior for a resistência do fio. Farei isso aqui supondo que as duas extremidades do fio estão conectadas entre si.⁴⁴⁶

Como no artigo anterior, seja r a resistência do fio, e seja

$$\ln \frac{l}{\alpha} = \gamma ;$$

logo, a solução das Equações diferenciais (14) e (15), qualquer que seja o valor de r , será como segue:

⁴⁴⁵Isto é, podemos usar essa equação para encontrar e .

⁴⁴⁶Isto é, no caso de um circuito fechado.

$$E = \sum (C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}) \operatorname{sen} nx + (C'_1 e^{-\lambda_1 t} + C'_2 e^{-\lambda_2 t}) \cos nx ,$$

$$i = \sum -\frac{1}{2n} (\lambda_1 C_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{-\lambda_2 t}) \cos nx + \frac{1}{2n} (\lambda_1 C'_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 C'_2 e^{-\lambda_2 t}) \operatorname{sen} nx ,$$

onde n é um múltiplo de $2\pi/l$, enquanto que λ_1 e λ_2 possuem os seguintes valores:

$$\frac{c^2 r}{32\gamma l} \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{32\gamma}{cr\sqrt{2}} nl \right)^2} \right] ,$$

sendo C_1 , C_2 , C'_1 e C'_2 constantes arbitrárias. A somatória ocorre para todos os valores de n . As constantes C são determinadas facilmente caso E e i sejam fornecidas para $t = 0$. Se as funções de x , nas quais, para $t = 0$, E e i devem ser transformadas, forem representadas na forma:

$$\sum (E_n \operatorname{sen} nx + E'_n \cos nx) ,$$

e

$$\sum (-i_n \cos nx + i'_n \operatorname{sen} nx) ,$$

obteremos as seguintes equações:

$$E_n = C_1 + C_2 ,$$

$$i_n = \frac{1}{2n} (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2) ;^{447}$$

e

$$E'_n = C'_1 + C'_2 ,$$

$$i'_n = \frac{1}{2n} (\lambda_1 C'_1 + \lambda_2 C'_2) ;^{448}$$

suas soluções são:

$$C_1 = \frac{\lambda_2 E_n - 2n i_n}{\lambda_2 - \lambda_1} ,$$

⁴⁴⁷Devido a um erro de impressão, essa equação apareceu no texto original da seguinte forma:

$$i_n = \frac{1}{2n} (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2) .$$

⁴⁴⁸Devido a um erro de impressão, essa equação apareceu no texto original da seguinte forma:

$$i'_n = \frac{1}{2n} (\lambda_1 C'_1 + \lambda'_2 C'_2) .$$

$$C_2 = \frac{-\lambda_1 E_n + 2ni_n}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad ^{449}$$

$$C'_1 = \frac{\lambda_2 E'_n - 2ni'_n}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

$$C'_2 = \frac{-\lambda_1 E'_n + 2ni'_n}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

No artigo anterior examinamos o caso para o qual

$$\frac{32\gamma}{cr\sqrt{2}}$$

pode ser considerada como sendo infinitamente grande. Será agora assumido que essa grandeza é infinitamente pequena. Nesse caso as duas raízes λ_1 e λ_2 serão reais. Se λ_2 for a maior raiz, então, ao desprezar os termos de ordem inferior:

$$\lambda_2 = \frac{c^2 r}{16\gamma l}, \quad \lambda_1 = \frac{8\gamma l}{r} n^2. \quad ^{450}$$

Disso segue que:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \left(\frac{16\gamma}{cr\sqrt{2}} nl \right)^2;$$

essa expressão é infinitamente pequena, já que nl é um múltiplo de 2π , que tem um valor finito. As expressões dos coeficientes C podem então ser escritas como:

$$\begin{aligned} C_1 &= E_n - \frac{2n}{\lambda_2} i_n, & C'_1 &= E'_n - \frac{2n}{\lambda_2} i'_n, \\ C_2 &= -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} E_n + \frac{2n}{\lambda_2} i_n, & C'_2 &= -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} E'_n + \frac{2n}{\lambda_2} i'_n. \end{aligned}$$

Logo, o coeficiente de $\sin nx$ na expressão para E fica como:

$$E_n \left(e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 t} \right) - \frac{2n}{\lambda_2} i_n (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}), \quad ^{451}$$

ou

⁴⁴⁹Devido a um erro de impressão, essa equação apareceu no texto original da seguinte forma:

$$C'_2 = \frac{-\lambda_1 E_n + 2ni_n}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

⁴⁵⁰Devido a um erro de impressão, essa equação apareceu no texto original como:

$$\lambda_2 = \frac{c^2 r}{16\gamma l}, \quad \lambda_2 = \frac{8\gamma l}{r} n^2.$$

⁴⁵¹Devido a um erro de impressão, essa equação apareceu no texto original como:

$$E_n \left(e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} e^{-\lambda_2 t} \right) - \frac{2n}{\lambda_2} i_n (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}).$$

$$E_n e^{-\lambda_1 t} - \frac{2n}{\lambda_2} i_n (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) , \quad 452$$

e o coeficiente de $-\cos nx$ na expressão de i fica como:

$$E_n \frac{\lambda_1}{2n} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) - i_n \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} \right) . \quad 453$$

Ao colocar E'_n e i'_n no lugar de E_n e i_n , obtemos os coeficientes de $\cos nx$ em E e de $\sin nx$ em i . Excluindo o caso no qual o valor inicial de i é infinitamente grande, comparado ao valor que i assume para valores iniciais constantes de E , a expressão pode ser simplificada quando o valor inicial de i é $= 0$. Pode então ser visto que quando $i = 0$ para $t = 0$, isto é, quando $i_n = 0$, o valor de i é da ordem de $E\lambda_1/2n$. Sob as mesmas condições, i_n é da ordem de $E_n\lambda_1/2n$. Os coeficientes de $\sin nx$ em E e de $-\cos nx$ em i podem ser escritos como:

$$E_n e^{-\lambda_1 t} ,$$

e

$$E_n \frac{\lambda_1}{2n} e^{-\lambda_1 t} + \left(i_n - E_n \frac{\lambda_1}{2n} \right) e^{-\lambda_2 t} .$$

Se excluirmos dessas considerações os valores de t que são tão pequenos que $\lambda_1 t$ fica infinitamente pequeno, então $\lambda_2 t$ torna-se infinitamente grande. Portanto, o segundo termo na segunda expressão pode ser desprezado comparado com o primeiro termo. Como as mesmas considerações com relação aos coeficientes de $\cos nx$ e $\sin nx$ são válidas nas expressões de E e i , então, quando substituirmos para λ_1 os valores obtidos previamente, teremos:

$$E = \sum (E_n \sin nx + E'_n \cos nx) e^{-\frac{8\gamma l}{r} n^2 t} , \quad (16)$$

$$i = \frac{4\gamma l}{r} \sum n (-E_n \cos nx + E'_n \sin nx) e^{-\frac{8\gamma l}{r} n^2 t} . \quad (17)$$

Essas expressões são independentes de c . Quando consideramos c como sendo infinitamente grande, as soluções das Equações diferenciais (14) e (15) ficam como:

$$i = -\frac{4\gamma l}{r} \frac{\partial E}{\partial x} ,$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial t} .$$

Eliminando i , obtemos:

⁴⁵²Devido a um erro de impressão, essa equação apareceu no texto original como:

$$E_n e^{-\lambda_1 t} - \frac{2n}{\lambda_2} i_n (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_1 t}) .$$

⁴⁵³Devido a um erro de impressão, essa equação apareceu no texto original como:

$$E_n \frac{\lambda_1}{2n} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) i_n \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} \right) .$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{8\gamma l}{r} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} ,$$

que é uma equação da mesma forma que aquela que determina a condução do calor no condutor. Portanto, no caso considerado aqui, a eletricidade se propaga através do metal da mesma forma que o calor.

Com as suposições feitas com relação à resistência r nas Equações (16) e (17), é facilmente provado *a posteriori* que (16) e (17) são soluções reais de (14) e (15). É possível nos convencer sem dificuldade que $(4/c^2)(\partial i/\partial t)$ é infinitamente pequeno comparado com $\partial E/\partial x$ quando i e E são obtidos de (17) e (16).

De maneira bastante semelhante à forma como aqui é tratado o caso de um circuito fechado, também pode ser tratado o caso em que as extremidades do fio são separadas e o potencial nelas tem dois valores constantes. No circuito aberto, desde que a resistência do fio seja grande o suficiente, encontramos a mesma analogia entre a condução da eletricidade e calor.

Com o padrão de resistência de Jacobi,⁴⁵⁴ um fio de cobre com 7,62 m de comprimento e 0,333 mm de raio, como mostrado no artigo anterior, temos:

$$\frac{32\gamma}{rc\sqrt{2}} = 2070 .$$

Para um fio do mesmo material, da mesma seção reta, e com um comprimento de 1000 km, essa grandeza vale 0,034. Ela pode ser considerada de forma aproximada como infinitamente grande para o primeiro caso e infinitamente pequena para o segundo caso. No primeiro caso a eletricidade se propaga como uma onda em uma corda esticada e no segundo caso ela se propaga como o calor.

Thomson^{455,456} examinou o movimento da eletricidade em um fio telegráfico submarino. Ele supôs, sem checar sua admissibilidade, que a indução não traz uma contribuição significativa para o fenômeno. Para esse caso ele mostrou que a eletricidade se propaga como o calor. As considerações atuais provaram que essa conclusão também é justificada no caso de um fio simples, desde que seja longo o suficiente. Ela será ainda mais correta no fio telegráfico submarino, no qual o movimento da eletricidade é consideravelmente retardado como resultado da condução que ocorre na água do mar.

⁴⁵⁴Ver a Nota de rodapé 391 na página 228.

⁴⁵⁵[Nota de Kirchhoff:] *Phil. Mag., Ser. IV, Vol. II, pág.* 157.

⁴⁵⁶Ver [Tho56a] e [Tho56b] com tradução para o português em [TBA18].

Capítulo 14

[Weber, 1858] Relatório sobre Alguns Experimentos Realizados no Instituto de Física de Göttingen

Wilhelm Weber^{457,458,459}

Apresentado à Sociedade Real [de Ciências de Göttingen] em 10 de Abril 10 de 1858.

No Instituto de Física dessa Universidade, além das aulas regulares do curso de física, existem exercícios práticos de física⁴⁶⁰ dos quais participam os membros do seminário de matemática e física. Aqueles que escolhem física como seu assunto principal e já adquiriram uma prática maior encontrarão a oportunidade de fazer por si próprios um trabalho especial tal como, por exemplo, foi feito no ano passado pelo Dr. Arndtsen e pelo Dr. Christie de Christiania,⁴⁶¹ que publicarão em mais detalhes o trabalho realizado nos *Annalen* de Poggendorff.⁴⁶² O resultado que obtiveram será brevemente apresentado aqui.

Devido ao interesse particular que o *diamagnetismo* ainda desperta como sendo uma das descobertas mais recentes prometendo informações sobre a natureza interna e a conexão dos corpos, e devido à falta ainda existente de determinações *quantitativas*, o *diamagnetômetro* construído pelo Sr. Leyser em Leipzig,⁴⁶³ de acordo com as especificações do Prof. Weber, com o qual o Sr. John Tyndall realizou experiências interessantes em Londres e as apre-

⁴⁵⁷[Web58] com tradução para o inglês em [Web21q].

⁴⁵⁸As Notas de Heinrich Weber, o Editor do Volume 4 das *Obras* de Wilhelm Weber, são representadas por [Nota de Heinrich Weber:]; as Notas de Peyman Ghaffari, o tradutor da versão em inglês desse trabalho, são representadas por [Nota de Ghaffari:]; todas as outras Notas são de minha autoria.

⁴⁵⁹[Nota de Heinrich Weber:] Nachrichten von der G. A. Universität und der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 16 de April de 1858. Número 6, págs. 67-76.

⁴⁶⁰[Nota de Ghaffari:] Em alemão: *praktische physikalische Uebungen*. Esse sistema ainda existe no sistema universitário alemão.

⁴⁶¹Hartvig Caspar Christie (1826-1873), um mineralogista e físico norueguês que estudou sob a orientação de Weber em Göttingen de 1857 a 1859. Ele mediu, por exemplo, o diamagnetismo no bismuto. Adam Arndtsen (1829-1919), um físico e professor norueguês, que também estudou em Göttingen sob a orientação de Weber em 1857. Cristiania é o antigo nome de Oslo, a capital da Noruega.

⁴⁶²Ver, por exemplo, [Chr58]. Ver ainda a Nota de rodapé 218.

⁴⁶³Ver a Nota de rodapé 162 na página 112.

sentou nos *Philosophical Transactions* de 1856 (Further Researches on the Polarity of the Diamagnetic Force — Pesquisas adicionais sobre a polaridade da força diamagnética),⁴⁶⁴ e do qual uma segunda cópia está no Instituto de Física local, foi utilizado como um instrumento de medição para algumas determinações *quantitativas* relacionadas ao diamagnetismo.

O Sr. Tyndall encontrou em suas experiências uma deflexão quase idêntica da agulha magnética astática⁴⁶⁵ pelo corpo diamagnético quando o diamagnetismo era excitado por uma corrente de *duas, três ou quatro* células,⁴⁶⁶ sendo que devido a isso foi questionado o *crescimento proporcional* da força diamagnética em relação à força que excita o diamagnetismo. Essa dúvida foi resolvida por meio de *medições* mais completas realizadas pelo Dr. Christie com o mesmo instrumento, associando a cada observação da *deflexão* uma determinação da *sensibilidade*⁴⁶⁷ da agulha astática, a partir das quais se descobriu que esta [sensibilidade] *variava* com a intensidade da corrente. Disso vem que as deflexões observadas tinham, em primeiro lugar, de ser reduzidas à *mesma sensibilidade*, antes que pudessem servir como uma medida do diamagnetismo excitado. Após essa redução e após medições precisas das *intensidades de corrente* (as quais, como é bem conhecido, não podem ser colocadas proporcionais ao número de células) com o auxílio do *galvanômetro tangente*,⁴⁶⁸ foi cuidadosamente testada e confirmada a proporcionalidade da força diamagnética com a força galvânica que a excita. A intensidade de corrente, determinada de acordo com unidades absolutas conhecidas, foi aumentada de 16 a 44 unidades.

O mesmo instrumento ofereceu agora ao mesmo tempo a oportunidade de medir com mais precisão a relação constante entre a força diamagnética e a força galvânica que a excita. Essa razão é chamada de *constante diamagnética* e foi determinada pelo Prof. Weber com um instrumento que foi construído de acordo com os princípios mencionados, mas que ainda não havia recebido uma execução mecânica tão precisa, pela primeira vez no [artigo] sobre *Medições Eletrodinâmicas* (*Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften*, Vol. I, Leipzig 1852).^{469,470} Logo, parecia interessante fazer uma repetição dessa medição com um instrumento mais preciso, o que foi feito pelo Dr. Christie.⁴⁷¹

Esta medição foi particularmente precisa pelo fato de não ter sido baseada na comparação do bismuto diamagnético com o ferro magnético, que, além de outras circunstâncias, não é capaz de grande nitidez devido à distribuição diferente do magnetismo no ferro e do diamagnetismo no bismuto, mas que se baseava na comparação do bismuto diamagnético com um

⁴⁶⁴John Tyndall (1820-1893). Ver, por exemplo, [Tyn54], [Tyn55b], [Tyn55a], [Tyn55c] e [Tyn56].

⁴⁶⁵O adjetivo “astático” é utilizado na física com o significado de não ter tendência a assumir uma posição ou direção definida. Uma agulha astática pode ser uma combinação de duas agulhas magnetizadas paralelas que possuem momentos magnéticos iguais, mas com seus polos voltados para os lados opostos, isto é, em posição antiparalela. Essa montagem protege o sistema da influência do magnetismo terrestre. Ele foi inventado por Ampère, [Amp21] e [LA98]. Um sistema anterior composto de uma única agulha magnetizada também havia sido criado por Ampère, [Amp20c, pág. 198] com tradução para o português em [CA09, pág. 133], [Amp20a, pág. 239] e [Amp20b, pág. 2], ver também [AC11, págs. 60-63] e [AC15, pág. 57].

⁴⁶⁶Em alemão: *Becher*. Weber está se referindo aqui a um elemento, bateria, pilha ou célula voltaica que produz uma força eletromotriz.

⁴⁶⁷Em alemão: “Empfindlichkeit”.

⁴⁶⁸Ver a Nota de rodapé 36 na página 27.

⁴⁶⁹[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. III, pág. 473.

⁴⁷⁰Em alemão: *Elektrodynamischen Maassbestimmungen*. Esse trabalho é a Terceira Memória principal de Weber com o título geral de *Medições Eletrodinâmicas*, [Web52b] com tradução para o inglês em [Web21e] e tradução para o português no Capítulo 3.

⁴⁷¹[Chr58].

solenóide (um fio condutor enrolado em espiral) por onde passava uma corrente fraca, medida com precisão com o galvanômetro tangente. Esse solenoide tinha um formato cilíndrico do mesmo diâmetro e altura que o cilindro de bismuto utilizado. A partir do número de seus enrolamentos espirais e da intensidade da corrente fluindo, podia ser determinado o torque⁴⁷² com o qual ele atuava do mesmo lugar que o cilindro de bismuto diamagnético sobre a agulha astática; a corrente também podia ser facilmente regulada de tal forma que essa ação fosse quase igual à do cilindro de bismuto.

A partir dessas medições foi mostrado que uma unidade da força de excitação (em unidades absolutas, de acordo com as quais a força magnética horizontal em Göttingen atualmente = 1,81) em 1 miligrama de bismuto produz um momento [magnético] que, de acordo com a unidade absoluta Gaussiana⁴⁷³ é = 0,000 001 488 5, enquanto que o mesmo momento [magnético] para o ferro foi encontrado pelo Prof. Weber como sendo = 5,6074.⁴⁷⁴ O diamagnetismo do bismuto é assim 3,8 milhões de vezes menor do que o magnetismo do ferro. Esse resultado é um pouco menor do que aquele encontrado por Weber, o que é explicado, além da precisão maior da medida permitida com o instrumento usado aqui, pela diferença no bismuto, o qual nos dois casos não podia ter sido obtido de pureza absoluta. — Para dar uma ideia clara do tamanho dessas forças diamagnéticas, deve ser notado que 1 miligrama de aço de uma forte agulha magnética tem na média um momento [magnético] = 400 de acordo com as mesmas unidades, o qual é 269 milhões de vezes maior do que o momento do bismuto mencionado anteriormente.

Finalmente, em terceiro lugar, o Dr. Christie usou o mesmo instrumento para investigar a polaridade dos corpos diamagnéticos, que havia sido colocada fora de dúvida por Weber e Tyndall, através de um estudo mais preciso da *distribuição do diamagnetismo*. Foi mostrado que, de acordo com o princípio da *distribuição ideal* de Gauss⁴⁷⁵ em uma haste cilíndrica de bismuto, na qual atua por todo lugar a mesma força de excitação paralela a seu eixo, quase todo o diamagnetismo pode ser pensado como se estivesse distribuído sobre as duas faces circulares das extremidades, um resultado totalmente de acordo com o que parece ser esperado pela teoria.

Em todos esses experimentos realizados com o *diamagnetômetro* mencionado, apenas um fato permaneceu obscuro, a saber, por que a *sensibilidade* desse instrumento era tão *variável*, já que, de acordo com a teoria do mesmo, se todas as condições prescritas fossem cumpridas com precisão na construção e regulação, não haveria razão para isso. Agora está claro que esta construção e regulação do instrumento tinham como objetivo compensar forças muito grandes que excitavam o diamagnetismo de tal forma que não tinham nenhuma influência

⁴⁷²Em alemão: “Moment”. Weber parece estar se referindo aqui ao momento de torção, torque de rotação, par de forças, binário de rotação ou binário do solenoide. Isto é, ao torque exercido pelo solenoide sobre a agulha astática.

⁴⁷³Em alemão: *Gauss’schen absoluten Maasse*. Isto é, unidade ou medida absoluta Gaussiana. Gauss introduziu em 1832-1833 o sistema absoluto de unidades para o magnetismo e obteve a intensidade da componente horizontal da força magnética em Göttingen, em unidades absolutas, ou seja, $\sqrt{mg}/(s\sqrt{mm})$, ver a Nota de rodapé 94 na página 69. Essa componente horizontal da força magnética terrestre era usualmente representada por Gauss e Weber pelo símbolo T . Na linguagem da teoria de campos do eletromagnetismo ensinado nos livros didáticos atuais esse valor de $T = 1,81 \sqrt{mg}/(s\sqrt{mm})$ corresponde a uma componente horizontal do campo magnético terrestre $B_{horizontal}$ dada por $B_{horizontal} = 1,81 \times 10^{-5} \text{ Tesla}$, ver [MB82], [Mal82], [Sch88] e [Mal07].

⁴⁷⁴Esse valor pode ser encontrado em [Web52b, Seção 27] com tradução para o inglês em [Web21e, Seção 27]; e [Web52f] com traduções para o inglês em [Web53b], [Web66b] e [Web21i]. Ver, em particular, as páginas 92 e 131 na Seção 3.27 e na Subseção 4.2.6, respectivamente, dessa tradução em português.

⁴⁷⁵Ver a Nota de rodapé 16 na página 15.

sobre a agulha magnética astática extremamente sensível; enquanto as forças a serem medidas com o instrumento, ou seja, as próprias forças diamagnéticas, são muito pequenas, de modo que é de se esperar que a compensação exigida não possa ser alcançada na prática com a precisão necessária. Mais precisamente, a produção da compensação necessária pode ser dividida em duas tarefas diferentes, a saber, *em primeiro lugar*, em relação à posição de equilíbrio da agulha astática e, *em segundo lugar*, em relação a sua sensibilidade. Em relação à *primeira*, após os dois problemas terem sido aproximadamente resolvidos, foi feita uma *correção mais precisa*, sem a qual a agulha astática com telescópio, espelho e escala não podia ser observada. No que diz respeito à *sensibilidade*, porém, para não complicar muito o instrumento, foi omitida uma correção mais precisa, pois na verdade a falta dela não tem nenhum impacto significativo nas medições se apenas as variações de sensibilidade forem determinadas com precisão e levadas em consideração. Contudo, como essas variações de sensibilidade foram de um tamanho e importância inesperadas foi necessário, para controlar totalmente todos os elementos essenciais nessas medições precisas, examinar e investigar mais precisamente as causas dessas variações. Esse exame preciso foi realizado pelo Dr. Arndtsen com os melhores resultados, e disso veio como essas variações podem ser dominadas e, caso necessário, como podem ser totalmente eliminadas. Com a precisão com a qual essas variações podem ser levadas em consideração, não há usualmente motivo para evitá-las, em vez disso, como depende totalmente de nós decidir se a sensibilidade do instrumento é para ser aumentada ou diminuída pela variação, frequentemente podemos nos beneficiar desse fato para as próprias medições. Como a descrição do instrumento deve ser omitida aqui, estes experimentos relacionados à teoria do instrumento não podem ser discutidos com mais detalhes.

Por outro lado, deve ser mencionada uma outra pesquisa do Dr. Arndtsen feita com os mesmos instrumentos. É claro que o mesmo aparelho que é usado para investigar a polaridade do bismuto diamagnético também pode ser utilizado para examinar a polaridade magnética daqueles corpos que foram considerados previamente como sendo não magnéticos ou fracamente magnéticos, para com isso obter determinações *quantitativas* que ainda faltam completamente para esses corpos. Em particular, pareceu importante investigar se nesses corpos, tal como Joule,⁴⁷⁶ Müller⁴⁷⁷ e Weber encontraram para o ferro, pode ser demonstrada um desvio do magnetismo em relação à proporcionalidade da força de magnetização ao aumentar essa força magnetizadora, já que essa circunstância é de grande importância para o estudo das causas internas do magnetismo e de suas variações. Esses testes foram realizados pelo Dr. Arndtsen com *sulfato de ferro*,⁴⁷⁸ *solução de cloreto de ferro*, *ciano-ferro-potássio* e *níquel*. Deve ser observado que a força de magnetização que atuou sobre esses corpos, e que não foi gerada por eletroímãs, mas apenas por correntes galvânicas, podia alcançar apenas a intensidade = 600 pelos meios disponíveis usando a unidade absoluta (de acordo com a qual a força geomagnética horizontal em Göttingen é atualmente = 1,81), enquanto que nas experiências realizadas com ferro por Weber ela foi elevada para mais de 3000. Além disso, essa força de magnetização medida pode ser descrita como uma força *externa*, e que no caso do *ferro puro* existe também uma força *interna* significativa nas partículas *individuais*, resultante da interação magnética, que desaparece quase completamente nos corpos mencionados anteriormente. De acordo com isso, seria de se esperar que o desvio da proporcionalidade em questão, sob condições idênticas, se tornasse perceptível mais tarde

⁴⁷⁶[Jou40b], [Jou40a] e [Jou52].

⁴⁷⁷[Mül50], [Mül51b] e [Mül51a].

⁴⁷⁸[Nota de Ghaffari:] Em alemão foi utilizada a palavra “Eisenvitriol”, isto é, sulfato de ferro ou $FeSO_4$.

do que no caso do ferro puro, ou seja, somente quando a força *externa* por si só agisse tão fortemente quanto as forças *externa* e *interna* juntas no caso do ferro.

Nestas condições, não é de admirar que em vários dos corpos estudados não tenha surgido um desvio perceptível da proporcionalidade; mas o mais interessante é que, no caso do *níquel*, esse desvio da proporcionalidade se manifestou muito mais cedo do que no caso do ferro, de modo que o magnetismo do níquel, em consequência de forças magnetizantes, quase atingiu seu limite máximo, sendo que nessas [forças] o magnetismo do ferro não se afasta sensivelmente da proporcionalidade inicial.

Além dessas experiências, o Dr. Arndtsen também realizou uma investigação abrangente da *resistência* dos metais com uma consideração especial em relação à *temperatura* deles, sendo que a próxima Tabela apresenta um breve resumo dos resultados. Sob o título de *Resistência* é dada em unidade absoluta a resistência de um cilindro com 1 milímetro de altura e 1 milímetro de diâmetro com uma temperatura de 0°; sob o título de *Correção devida à temperatura* é dado o fator pelo qual a resistência em 0° tem de ser multiplicada para obter a resistência em t graus em uma escala dividida em 100 partes.

Metal	Resistência	Correção devida à temperatura
Prata	241 190	$1 + 0,003\,414\,20 \cdot t$
Cobre	244 370	$1 + 0,003\,940\,25 \cdot t$
Alumínio Número 1	476 218	$1 + 0,003\,407\,90 \cdot t$
Alumínio Número 2	427 616	$1 + 0,003\,638\,60 \cdot t$
Latão	949 086	$1 + 0,001\,661\,9 \cdot t$ $+ 0,000\,002\,734 \cdot t^2$
Argentan	1 289 815	$1 + 0,000\,387\,36 \cdot t$ $+ 0,000\,000\,557\,8 \cdot t^2$
Ferro	1 626 643	$1 + 0,004\,130\,4 \cdot t$ $+ 0,000\,005\,271\,3 \cdot t^2$
Chumbo	2 631 490	$1 + 0,003\,767\,68 \cdot t$

O Dr. Christie também fez algumas outras observações e experiências magnéticas que forneceram resultados interessantes. O mecânico local, Inspetor Meyerstein,⁴⁷⁹ construiu os instrumentos para dois observatórios magnéticos completos por ordem do governo brasileiro, para expedições científicas, testados pelo Dr. Christie. A configuração dos magnetômetros transportáveis associados para medir a *declinação* e *intensidade* está detalhadamente descrita em outro lugar. Apenas merecem menção os *magnetômetros de indução* para medir a *inclinação*, que, de acordo com o Prof. Weber, foram feitos em menor escala para serem utilizados em viagens, pois os testes realizados pelo Dr. Christie mostraram que, para medir a *inclinação*, não apenas em observatórios fixos, mas também em viagens, são obtidos os mesmos benefícios que o outro magnetômetro para *declinação* e *intensidade*. — Além disso, as observações e experiências feitas com esses magnetômetros de indução levaram o Dr. Christie a determinar novamente a variabilidade do magnetismo da agulha em posições *normais* e *transversais* da agulha, que é importante para medir a intensidade. Essa determinação foi feita pelo Prof. Weber com o auxílio da *indução magnética* apenas para agulhas menores em seu trabalho no 6° Volume dos Tratados de nossa sociedade (Göttingen, 1855);^{480,481} mas

⁴⁷⁹Moritz Meyerstein (1808-1882). Ver [Hen04], [Hen05], [Hen07] e [Hen20].

⁴⁸⁰[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. II, pág. 333.

⁴⁸¹[Web56], ver também [Web54].

pareceu importante que a mesma determinação fosse repetida para duas agulhas maiores com as quais foram feitas todas as medições de intensidade no Observatório Magnético local desde 1834. Essas tentativas levaram aos resultados que são dados na última coluna sob o título “*Mudança*”. Lá é dado o fator pelo qual a força diretriz magnética,⁴⁸² expressa em unidades absolutas, precisa ser multiplicada para obter a mudança no momento magnético da agulha produzido por isso. Como agora, durante a transição do posição *transversal* para a *normal*, a componente horizontal da força magnética da Terra (atualmente = 1,81) começa a atuar sobre a agulha, segue que obtemos o aumento no magnetismo da agulha associado com essa transição ao multiplicar o fator dado na última coluna por 1,81.

Número da agulha	Peso em gramas	Momento magnético	Mudança
1.	1 770	$714 \cdot 10^6$	450 000
2.	1 750	$674 \cdot 10^6$	462 000

⁴⁸²Ver a Nota de rodapé 122 na página 87.

Capítulo 15

[Weber, 1861] Sobre a Introdução Pretendida de um Padrão ou Estalão de Resistência Galvânica

Wilhelm Weber^{483,484}

Texto lido na Reunião do dia 2 de novembro.

Tomo a liberdade de fazer uma breve comunicação à Sociedade Real [de Ciências de Göttingen] sobre a proposta de introdução de um estalão ou padrão de resistência galvânica. A proposta é motivada por necessidade prática, o que seria de se esperar devido às aplicações técnicas sempre crescentes do galvanismo. Todas as *pilhas* galvânicas⁴⁸⁵ usadas para análise química, galvanoplastia e outros objetivos técnicos, mesmo quando são denominadas de [pilhas] constantes, estão continuamente sujeitas a mudanças menores e frequentemente maiores que precisamos estar cientes para ser capazes de controlá-las. Porém, mesmo se essas pilhas fossem completamente imutáveis, a *ação* delas seria algumas vezes maior e outras menor, dependendo da variedade de aplicações que são feitas delas. Para dominar essas *ações* é necessário não apenas um conhecimento da própria pilha, mas também de todos os corpos através dos quais atravessa a corrente da pilha, ou seja, um conhecimento da *resistência* deles. Esse é o motivo pelo qual as medições de resistência tornaram-se indispensáveis e, na verdade, a necessidade dessas medidas tornou-se mais urgente devido ao uso telegráfico.

Contudo, para as medições de resistência é necessária uma *unidade de resistência*.⁴⁸⁶ Sem tal unidade podemos apenas descrever os corpos atravessados pela corrente enquanto que, uma vez que tenha sido estabelecida uma unidade para a resistência, será suficiente um *número* para descrever tudo que é essencial e, de fato, muito mais precisamente do que é

⁴⁸³[Web61b] com tradução para o inglês em [Web21l].

⁴⁸⁴As Notas de Wilhelm Weber são representadas por [Nota de Wilhelm Weber:]; as Notas de Heinrich Weber, o Editor do Volume 4 das *Obras* de Wilhelm Weber, são representadas por [Nota de Heinrich Weber:]; todas as outras Notas são de minha autoria.

⁴⁸⁵Em alemão: *Alle galvanischen Säulen*. Essa expressão pode ser traduzida como todas as pilhas ou baterias galvânicas. Ver a Nota de rodapé 254 na página 154.

⁴⁸⁶Em alemão: *Ein Widerstandsmaass*. Isto é, uma unidade, dimensão ou padrão de medida para a resistência elétrica. Ver a Nota de rodapé 200 na página 140.

possível através de todas as descrições, já que ainda podem existir diferenças muito grandes na resistência embora as descrições dos corpos possam concordar perfeitamente entre si.

Tal unidade foi utilizada em uma fase inicial comparando basicamente os vários corpos através dos quais as correntes deveriam passar, para evitar descrições, com fios de cobre, cujo comprimento e seção transversal foram medidos. Obviamente isso implica, mesmo que apenas implicitamente, que a resistência de um fio de cobre de comprimento padrão e de seção reta padrão seja tomada como base para uma *unidade de resistência*. Contudo, o primeiro a levantar a necessidade de uma unidade específica de resistência foi Jacobi em [São] Petersburgo em 1846.⁴⁸⁷

O próprio Jacobi disse o seguinte sobre esse tema:⁴⁸⁸

Tão importante quanto a determinação da corrente, é que os físicos utilizem uma unidade comum ao expressar suas medições de resistência. Contudo, até o momento não puderam ser feitas determinações absolutas pois parece haver diferenças nas resistências até mesmo dos metais quimicamente mais puros, o que não pode ser explicado apenas por uma diferença nas dimensões externas. Portanto, se você tivesse baseado seus medidores de resistência e multiplicadores⁴⁸⁹ em um fio de cobre com 1 metro de comprimento e 1 milímetro de espessura, ainda não estaríamos convencidos se o seu fio de cobre e o nosso têm o mesmo coeficiente de resistência. Todas essas dificuldades são eliminadas quando se deixa um fio de cobre ou outro tipo de fio vagar entre os físicos e quando se pede a eles que relacionem seus instrumentos de medição de resistência a esse [fio padrão] e, no futuro, apresentem suas medições somente por essa unidade.

De fato, foram feitas muitas cópias que foram usadas para medições de resistência de tal padrão de resistência escolhido arbitrariamente por Jacobi (um fio de cobre com 25 pés de comprimento e pesando $22\frac{3375}{10000}$ gramas). Porém, quer não tenha sido tomado o cuidado necessário ao fazer essas cópias, independente dos meios de comparação mais precisos usando as pontes de Wheatstone,⁴⁹⁰ quer os padrões de resistência tenham sofrido uma modificação ao longo do tempo, o fato é que mais tarde apareceram diferenças muito importantes.

Por esse motivo Siemens em Berlim em 1860,⁴⁹¹ com uma consideração especial das necessidades cada vez mais urgentes da física técnica, e devido a várias preocupações levantadas sobre o padrão de resistência de Jacobi, propôs algo que satisfazia a todos os requisitos, especialmente um [padrão] que pudesse ser realizado por qualquer pessoa com facilidade e com a precisão necessária, com base na resistência do *mercúrio*, como o metal que pode ser obtido ou produzido em qualquer lugar com grande facilidade, em pureza suficiente e quase perfeita e, enquanto estiver líquido, não tem nenhuma constituição molecular diferente que modifique sua condutividade, também é menos dependente em sua resistência de mudanças de temperatura do que outros metais e, finalmente, oferece conveniência especial para a aplicação devido à magnitude de sua resistência específica.

⁴⁸⁷Ver a Nota de rodapé 391 na página 228. Jacobi trabalhou a maior parte de sua vida na Rússia, tendo falecido em São Petersburgo em 1874.

⁴⁸⁸Uma versão em francês do texto de Jacobi pode ser encontrada em [Jac51].

⁴⁸⁹Ver a Nota de rodapé 44 na página 33.

⁴⁹⁰Em alemão: *Wheatstone'schen Waage*. A assim chamada ponte de Wheatstone foi inventada por S. H. Christie (1784-1865) em 1833 e popularizada por C. Wheatstone (1802-1875) em 1843, [Chr33], [Whe43, pág. 325] com tradução para o francês em [Whe44b] e tradução para o alemão em [Whe44a]. Ver também [Eke01].

⁴⁹¹E. W. v. Siemens (1816-1892), [Sie60] com tradução para o inglês em [Sie61]. Ver ainda [GT19].

Com o estabelecimento desse novo padrão de resistência, Siemens também apontou para a importância de *escalas de resistência* como sendo um mediador necessário e indispensável entre a unidade padrão e os corpos a serem medidos. Ele construiu essas escalas em grande número e com tal perfeição de tal maneira que podem ser facilmente formadas todas as resistências entre (em números inteiros) 1 e 10 000 unidades padrão.

Finalmente, na Inglaterra, pretende-se atualmente estabelecer um certo padrão para a medida da resistência e espera-se que esse objetivo será melhor alcançado se a *British Association* — Associação Britânica [de Ciências] e a *Royal Society* — Sociedade Real adotarem medidas convenientes para fornecer tal padrão a todo experimentador no mundo inteiro, especialmente a todos que estão ocupados com investigações e testes relacionados ao telégrafo elétrico. Um tal padrão deve ser válido não apenas para uma certa temperatura, mas deve também fornecer uma indicação exata de sua variação para uma certa mudança de temperatura assim como, finalmente, determinar seu significado galvânico, *com uma indicação precisa da força [eletromotriz] que é necessária para produzir uma certa corrente nele*. — Devo esta comunicação ao nosso correspondente, Prof. W. Thomson em Glasgow, um dos pesquisadores mais completos no campo da eletricidade.⁴⁹²

Há muito tempo tratei de medições mais precisas para este último propósito, nomeadamente sob o título de *medições absolutas de resistência*. Por exemplo, determinei o significado galvânico do padrão de resistência de Jacobi afirmando que, para excitar uma corrente com uma unidade de intensidade Gaussiana nele, é necessária uma força eletromotriz de 5980 milhões.^{493,494,495} Uma determinação similar de um outro circuito de cobre foi apresentada por mim à Sociedade Real [de Ciências de Göttingen] em 1853.^{496,497,498} Contudo, o objetivo dessas determinações anteriores estava mais focado no método e no significado dos resultados que podiam ser obtidos com ele do que em uma execução quantitativa, que só foi realizada a título amostral utilizando os meios e instrumentos disponíveis para outras investigações.

Contudo, se essas medições absolutas de resistência encontrassem aplicações adicionais, a saber, fornecer uma expressão *duradoura* de todos os resultados quantitativos de pesquisa e observações galvânicas importantes, teríamos uma situação semelhante à da medição do comprimento do pêndulo de segundos e de outras determinações fundamentais:⁴⁹⁹ surgiria a necessidade de realizar uma medição absoluta de resistência de acordo com as regulamentações mais rigorosas, com os instrumentos mais perfeitos e com todos as técnicas da melhor observação. Esta é uma tarefa que só poderia ser resolvida por mãos muito habilitadas, com momentos de lazer tranquilos e com instalações mais sólidas do que as que estão agora disponíveis para a pesquisa física. Mas se a *British Association* e a *Royal Society* realmente assumirem essa tarefa, tudo o que for necessário para esse fim certamente será

⁴⁹²William Thomson (1824-1907), também conhecido como Lorde Kelvin, foi um físico e engenheiro britânico. Ver [Llo80] com tradução para o português em [Llo07].

⁴⁹³[Nota de Wilhelm Weber:] *Abhandlung der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften*, I, pág. 252.

⁴⁹⁴[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. III, pág. 351.

⁴⁹⁵[Web52c, pág. 351 das *Obras de Weber*] com tradução para o inglês em [Web21c]. Weber está se referindo ao sistema absoluto de unidades introduzido por C. F. Gauss (1777-1855).

⁴⁹⁶[Nota de Wilhelm Weber:] *Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Vol. 5.

⁴⁹⁷[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. II, pág. 277.

⁴⁹⁸[Web53e]. Ver também [Web53a] e [Web53c].

⁴⁹⁹Um pêndulo de segundos é um pêndulo cujo período é precisamente de dois segundos; um segundo para uma oscilação em uma direção e um segundo para a oscilação de retorno, uma frequência de 0,5 Hz. Conforme a definição francesa utilizada por Gauss e Weber discutida na Nota de rodapé 24 na página 19, temos então para esse pêndulo $t = 1$ s e $T = 2$ s.

obtido em algum lugar.

A execução mais precisa de uma medição absoluta de resistência tem de ser precedida por várias investigações, algumas das quais apresento aqui.

É feita uma distinção entre *galvanômetros* e *galvanoscópios*. Os galvanômetros, dentre os quais pertence o galvanômetro tangente,⁵⁰⁰ são usados apenas para correntes mais fortes cujas intensidades são obtidas em termos de unidades determinadas precisamente; os galvanoscópios, por outro lado, servem para observar os menores traços de correntes das quais nada mais pode ser percebido. A maior sensibilidade do galvanoscópio só é alcançada circundando firmemente a agulha com seu multiplicador, perdendo-se o conhecimento mais preciso da escala, [conhecimento esse] que surge automaticamente a partir da construção do galvanômetro tangente. De qualquer forma, para utilizar tal galvanoscópio para medições reais, além de observar a deflexão produzida pela corrente, é necessária outra observação como medida da sensibilidade do instrumento. Procuramos, via de regra, estabelecer esse padrão de uma vez por todas ao fazer de antemão as observações correspondentes com o galvanômetro e galvanoscópio. Além do fato que tais observações correspondentes não fornecem um resultado exato devido às sensibilidades muito diferentes dos dois instrumentos, aquele padrão para galvanoscópios muito sensíveis não é de forma alguma constante e, portanto, não pode ser determinado de antemão. Por outro lado, uma outra observação pode ser combinada com a observação da deflexão, a saber, aquela do amortecimento da oscilação, a qual fornece diretamente aquele padrão que estamos procurando.

É baseado na combinação dessas duas observações a possibilidade de usar o galvanoscópio para as medições mais precisas, que é a condição necessária para a execução das medições absolutas de resistência. A teoria de tais galvanoscópios que são convenientes para medições precisas requer um desenvolvimento especial, já que eles necessitam de uma construção que é completamente diferente dos galvanoscópios comuns. O desenvolvimento dessa teoria tem um interesse particular já que o uso dos galvanoscópios abre as portas para muitas outras investigações detalhadas nas quais eles eram inúteis anteriormente.

A construção do galvanoscópio tem de tornar possível observar a deflexão e atenuação simultaneamente com a maior precisão possível, enquanto que com galvanoscópios convencionais só era decisiva para a construção o aumento da deflexão. Contudo, o que aumenta a deflexão nem sempre aumenta o amortecimento e vice-versa. Além disso, existe uma deflexão máxima que não deve ser ultrapassada e há também um certo nível de amortecimento que permite a determinação mais precisa, a saber, o nível de amortecimento no qual duas oscilações consecutivas máximas da agulha do galvanômetro se comportam como 2,7182...:1.⁵⁰¹

Isso resulta em várias tarefas interessantes na teoria dos magnetoscópios⁵⁰² adequados para medições precisas que não irei discutir aqui detalhadamente. Observo apenas que a construção diferente desses galvanoscópios em relação aos comuns se deve principalmente à necessidade de ímãs fortes como agulhas de galvanoscópio para fins de amortecimento, ao que se acrescenta, para fins de medição absoluta de resistência, a necessidade de um período de oscilação mais longo e um estado de repouso menos variável da agulha do galvanoscópio. As duas últimas exigências levam ao uso de dois ímãs igualmente fortes conectados a um sistema astático e suspensos em um fio metálico,⁵⁰³ cuja intensidade pode regular o período de oscilação. Esse magnetoscópio se parece com o usual na aplicação do sistema astático;

⁵⁰⁰Ver a Nota de rodapé 36 na página 27.

⁵⁰¹Isto é, assim como $e/1 = 2,7182.../1$.

⁵⁰²Em alemão: *Magnetoskope*.

⁵⁰³Ver a Nota de rodapé 465 na página 264.

com a única diferença de que o que acontece aqui com agulhas muito pequenas tem de ser feito lá com agulhas maiores e muito mais fortes.

Finalmente, com base nesses *galvanoscópios* preparados para medições absolutas de resistência foram feitos testes para determinar experimentalmente o limite extremo da precisão que pode ser alcançada em medições absolutas de resistência, cujo resultado pode ser expresso como segue.

A medição absoluta de resistência pressupõe o conhecimento da intensidade do magnetismo terrestre (medido em unidades absolutas) no local e no momento da medição absoluta de resistência, que precisa ser fornecido tão exatamente quanto possível, já que a influência de um erro dessa intensidade é dobrado na medição da resistência. Não há necessidade de entrar em uma discussão da precisão que pode ser alcançada para a intensidade do magnetismo terrestre, já que isso foi feito por Gauss nos “Intensitas”,^{504,505} sendo que de acordo com isso essas medições pertencem às determinações fundamentais nessa área da física. Se distinguirmos agora, ao realizar medições absolutas de resistência, entre o erro provável que vem da medição do magnetismo terrestre e o erro provável que vem do restante da medição, pode sempre ser obtido que o último é, se não menor, pelo menos de forma alguma maior do que o anterior. Mas é fácil ver que fazendo mais não vai trazer benefício significativo, já que todas as observações nessa área dependem do magnetismo terrestre que está influenciando todas as agulhas e correntes.

Concluo com uma observação que foi estimulada pelo resultado da determinação absoluta da escala de resistência de Siemens.

De acordo com princípios galvânicos, a razão de uma força eletromotriz para uma intensidade da corrente determina uma *velocidade*, assim como a razão do comprimento de uma trajetória para um tempo.⁵⁰⁶ A razão da força [eletromotriz] que é necessária para excitar uma certa corrente em um dado circuito para a intensidade dessa corrente é assim determinada por uma *velocidade*. De acordo com as leis de Ohm,⁵⁰⁷ a razão dessa força para essa intensidade de corrente para um *circuito dado* é constante, e isso fornece imediatamente a força que é necessária para excitar uma corrente de intensidade = 1 no circuito dado.

A determinação desta *velocidade*, na qual consiste a medição absoluta da resistência, pode agora basear-se no fato de esta própria velocidade ser representada fisicamente, o que é feito com a ajuda do inclinômetro de indução⁵⁰⁸ que descrevi nos “Resultaten und den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837 — Resultados e observações da associação magnética em 1837”.^{509,510} Mas como a medição direta de uma velocidade realmente representada é muito difícil, é preferível um método indireto de medição, como

⁵⁰⁴[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Gauss*, Vol. V, pág. 79.

⁵⁰⁵Para mais informações sobre o trabalho de Gauss sobre a medição absoluta da força magnética terrestre, ver a Nota de rodapé 94 na página 69.

⁵⁰⁶No sistema absoluto de unidades de Gauss e Weber, a resistência elétrica tem dimensão de comprimento por tempo, isto é, a dimensão de uma velocidade.

⁵⁰⁷Ver a Nota de rodapé 191 na página 135.

⁵⁰⁸Em alemão: *Induktions-Inklinatorium*. O inclinômetro, inclinatório ou bússola de inclinação, é um instrumento para medir o ângulo de inclinação de uma bússola em relação à horizontal. Ele consiste essencialmente em uma agulha magnética que pode girar em um círculo vertical graduado ao redor de um eixo horizontal passando pelo centro de gravidade da agulha. O inclinômetro de indução de Weber é um novo instrumento que ele introduziu em 1837, [Web38b]. Ele apresentou uma nova maneira de superar os dois principais problemas das bússolas de inclinação, a saber, o efeito da gravidade e a necessidade de inverter a polaridade da agulha, [WSH03].

⁵⁰⁹[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. II, pág. 75.

⁵¹⁰[Web38b].

aquele a que se referem as discussões anteriores, que ao mesmo tempo torna desnecessária a representação física real dessa velocidade, o que para o assunto não tem importância, mas o resultado encontrado é sempre uma velocidade.

O resultado mencionado anteriormente da medição absoluta da resistência do padrão de resistência de Jacobi foi, portanto, uma certa *velocidade* que, de acordo com Gauss, é baseada no milímetro como unidade de comprimento e no segundo como unidade de tempo. A base para essas medições pode ser expressa adicionando o termo milímetro/(segundo) ao número 5.980.000.000 ali fornecido, o que equivale a 5.980.000 metros/(segundo).

Da mesma forma, o resultado da medição absoluta de resistência para a unidade da escala de resistência de Siemens também foi agora obtido como sendo expresso por uma certa *velocidade*, a saber, o número de metros, que é próximo de 10 milhões, isto é, igual ao comprimento do *quadrante da Terra* (a ser dividido por um segundo).

Mesmo que não interesse quão grande ou pequeno seja escolhido o padrão, faz sentido que, de acordo com a proposta da *British Association* e *Royal Society*, esse padrão seja sempre acompanhado, para determinar seu significado galvânico, pela especificação exata da força [eletromotriz] que é necessária para excitar nele uma certa corrente. Além disso, parece muito conveniente estabelecer a escolha, de outra forma completamente arbitrária, de tal forma que esta informação a ser adicionada seja curta e sucinta pela mera designação de quadrante da Terra/(segundo). — O fato de que uma resistência que é, de acordo com Siemens, muito próxima desse padrão poder ser então produzida facilmente e de forma segura sob todas as condições ao utilizar uma coluna de mercúrio com uma seção reta de 1 milímetro quadrado e um comprimento de 1 metro, seria muitas vezes útil na prática em circunstâncias onde o verdadeiro padrão não está disponível.

Capítulo 16

[Weber, 1862] Sobre a Galvanometria

Wilhelm Weber^{511,512}

Nas aplicações técnicas sempre em expansão do galvanismo, para atender às diversas necessidades já foram feitas várias propostas para a introdução de *unidades de resistência galvânica* (estalões ou padrões),⁵¹³ sendo provável que os sérios esforços feitos pelos especialistas vão ser bem sucedidos não apenas em identificar e estabelecer na maior extensão e na maneira mais perfeita as regras de medição correspondentes a esse propósito, mas também para trazê-las a uma implementação prática e bem sucedida em um futuro próximo.

Todas as *células galvânicas*⁵¹⁴ utilizadas para análises químicas, galvanoplásticas, telegráficas e outros fins técnicos, mesmo que sejam chamadas de constantes, estão sempre sujeitas a alterações menores e muitas vezes maiores, que é preciso conhecer mais de perto para dominá-las.⁵¹⁵ Mas mesmo que estas células fossem completamente imutáveis, as suas *ações* seriam por vezes maiores e por vezes menores, dependendo da variedade de aplicações que delas são feitas. O controle destas *ações* requer, portanto, não só o conhecimento da própria célula, mas também de todos os corpos através dos quais a corrente da célula irá passar, nomeadamente o conhecimento de suas *resistências*. É por isso que as *medições de resistência* tornaram-se indispensáveis para todas as aplicações práticas, em particular para a construção e teste de telégrafos elétricos, especialmente dada a sua crescente extensão e complexidade de condições.

Entretanto, é necessária uma *unidade de resistência* para as medições de resistência. Sem uma medição com essa unidade, os corpos pelos quais a corrente deve ser conduzida podem ser descritos de várias maneiras; após uma medição feita com essa unidade, entretanto, *um único número* é suficiente para expressar tudo o que é essencial de forma mais completa e precisa do que é possível com todas as descrições. Isso ocorre porque as medições de

⁵¹¹[Web62] com tradução para o inglês em [Web24].

⁵¹²As Notas de Wilhelm Weber são representadas por [Nota de Wilhelm Weber:]; as Notas de Heinrich Weber, o Editor do Volume 4 das *Obras* de Weber, são representadas por [Nota de Heinrich Weber:]; todas as outras Notas são de minha autoria.

⁵¹³Em alemão: *galvanischer Widerstandsmaasse (Etalons oder Standards)*. A palavra “Maass”, hoje em dia escrita como “Maß”, pode ser traduzida como unidade, medida, medição, dimensão, padrão etc. Ver a Nota de rodapé 200 na página 140.

⁵¹⁴Em alemão: *galvanischen Säulen*. Ver a Nota de rodapé 254 na página 154.

⁵¹⁵Isto é, mesmo as baterias elétricas que são chamadas de constantes, não produzem na prática uma força eletromotriz sempre constante entre seus terminais.

resistência frequentemente revelam diferenças e alterações nos corpos que não podem ser reconhecidas nem mesmo por sua descrição mais precisa.

Basicamente, uma tal *unidade* foi utilizada em uma fase inicial comparando os vários corpos através dos quais as correntes deveriam ser conduzidas com fios de cobre, cujo comprimento e seção transversal foram medidos. É óbvio que a resistência de um fio de cobre com comprimento igual à unidade de comprimento e seção transversal igual à unidade de área foi utilizada como *unidade de resistência*, mesmo que apenas tacitamente. Contudo, a determinação explícita de uma certa unidade de resistência foi levantada pela primeira vez por Jacobi [na cidade de São] Petersburgo em 1846.

Jacobi disse:⁵¹⁶

Não menos importante do que o caráter absoluto das medições de corrente, é a capacidade dos físicos de expressar o valor das resistências dos condutores que eles medem com uma unidade comum. Nesse caso, entretanto, não é possível fazer uma determinação absoluta, pois parece que há diferenças nas resistências até mesmo dos metais quimicamente mais puros que não podem ser explicadas apenas por uma diferença de dimensões. — Agora, todas essas complicações serão eliminadas se deixarmos um fio de cobre (ou de outro material) escolhido arbitrariamente circular entre os físicos, e implorar doravante que eles refiram seu instrumento de medida de resistência a esse fio e forneçam suas medições em termos dessa unidade.

Um grande número de cópias foi feito de tal *padrão de resistência* escolhido por Jacobi (um fio de cobre de 25 pés ingleses de comprimento e pesando $22\,337\frac{1}{2}$ miligramas) e usado para medições de resistência. Porém, seja por não terem sido tomados os cuidados necessários na produção, seja por tais padrões de resistência sofrerem alterações ao longo do tempo, surgiram posteriormente diferenças muito significativas entre estes exemplares.

Portanto, em 1860, Siemens,⁵¹⁷ em Berlim, considerando especialmente as necessidades cada vez mais urgentes da física técnica, tentou estabelecer uma *nova unidade de resistência* que atendesse a todos os requisitos e pudesse ser produzida com facilidade e precisão por qualquer pessoa, com base no uso da resistência do *mercúrio* como metal, que pode ser obtido ou produzido em todos os lugares com grande facilidade em pureza suficiente e quase perfeita e, enquanto estiver líquido, não assume nenhuma outra constituição molecular que modifique sua condutividade, também é menos dependente em sua resistência de mudanças de temperatura do que outros metais e, finalmente, oferece conveniência especial para a aplicação devido ao valor de sua resistência específica.

Com o desenvolvimento dessa nova *unidade de resistência*, Siemens também criou *escalas de resistência*, como mediadores necessários e indispensáveis entre a unidade e os objetos a serem medidos, e as construiu com tal extensão e perfeição que todas as resistências podem ser formadas com a maior facilidade e precisão que, de acordo com sua unidade, podem ser expressas por números inteiros de 1 a 10.000.

Por fim, o estabelecimento de uma unidade definida de resistência é atualmente pretendido na Inglaterra, e espera-se garantir sua distribuição e aplicação gerais, bem como todos os objetivos científicos e técnicos alcançáveis por meio da fundação de uma instituição sob a proteção conjunta da *British Association* — Associação Britânica e da *Royal Society* — Sociedade Real, por meio da qual todos os pesquisadores do mundo inteiro receberão, mediante

⁵¹⁶Moritz Hermann von Jacobi (1801-1874). Uma versão em francês dessa carta encontra-se em [Jac51].

⁵¹⁷E. W. v. Siemens (1816-1892). Ver [Sie60] com tradução para o inglês em [Sie61]. Ver também [GT19].

solicitação, um *padrão de resistência*, que não só será válido para uma temperatura determinada com precisão, mas também terá uma indicação de sua variação para uma determinada mudança de temperatura, e cujo *significado galvânico será finalmente determinado por uma indicação exata da força [eletromotriz] necessária para excitar uma determinada corrente*.

Há algum tempo, tenho me ocupado com medições mais precisas para esse último propósito, ou seja, investigar o *significado galvânico de um condutor* determinando a força [eletromotriz] necessária para gerar uma determinada corrente, sob o título de *medições absolutas de resistência*. O significado galvânico do padrão de resistência de Jacobi, por exemplo, foi estabelecido pela afirmação de que uma força eletromotriz de 5980 milhões de unidades Gaussianas era necessária para excitar uma corrente de intensidade igual a 1 de acordo com as unidades Gaussianas.^{518,519,520,521} Enviei uma determinação semelhante de outro circuito de cobre para a *Königl. Gesellschaft — Sociedade Real [de Ciências de Göttingen]* em 1853.^{522,523,524} Entretanto, essas determinações anteriores estavam mais preocupadas com o método e a importância dos resultados a serem obtidos do que com a extrema precisão da realização quantitativa, que só havia sido obtida em caráter de teste com as ferramentas e instrumentos disponíveis para outros fins.

Se, no entanto, essas medições absolutas de resistência devem encontrar aplicação adicional, se devem ser usadas para dar expressão *duradoura* a todos os resultados quantitativos de importantes observações e pesquisas galvânicas, então surge um caso semelhante ao de outras determinações fundamentais, ou seja, surge a necessidade de realizar pelo menos uma medição absoluta de resistência de acordo com os métodos mais rigorosos, com os instrumentos mais perfeitos e com toda a arte da melhor observação. Essa é uma tarefa que só pode ser realizada por mãos muito habilidosas, com o lazer mais tranquilo e com instalações mais completas do que as disponíveis atualmente para a pesquisa física. O fato de ser necessária apenas uma dessas medições, que, no entanto, deve ser realizada com a maior precisão, é facilmente compreendido pelo fato de que as resistências de todos os corpos podem ser exatamente comparadas com a resistência de *um único padrão* e que, portanto, é necessário apenas o conhecimento exato do *valor absoluto dessa única resistência padrão* para transferir as vantagens de todas as relações dadas por valores absolutos em geral para todos os corpos.

Além dessas vantagens que o conhecimento do valor absoluto desse padrão de resistência pode proporcionar, a tarefa dessa medição também é interessante por si só, devido à influência que tem no desenvolvimento da ciência. O desenvolvimento de quase toda a *galvanometria* pode ser vinculado a essa tarefa, e todos os avanços na galvanometria podem ser testados na solução dessa tarefa. Uma vez que a meta a ser alcançada tenha sido determinada, uma vez que a possibilidade da solução tenha sido reconhecida, cada solução mais perfeita é quase mais importante como prova do progresso da galvanometria do que para seu próprio benefício imediato.

O desenvolvimento mais refinado da medição absoluta da resistência não apenas preenche

⁵¹⁸Isto é, uma corrente com intensidade igual a 1 de acordo com o sistema absoluto de unidades estabelecido por Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

⁵¹⁹[Nota de Wilhelm Weber:] *Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften*, I, pág. 252.

⁵²⁰[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. III, pág. 351.

⁵²¹[[Web52c](#), pág. 352 das *Obras de Weber*] com tradução para o inglês em [[Web21c](#)].

⁵²²[Nota de Wilhelm Weber:] *Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Vol. 5.

⁵²³[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. II, pág. 319.

⁵²⁴[[Web53e](#), pág. 319 das *Obras de Weber*]. Ver também [[Web53a](#)] e [[Web53c](#)].

lacunas significativas na galvanometria, mas também coloca muitas investigações dispersas em um contexto mais próximo. Por outro lado, se um nível mais alto de galvanometria fosse alcançado por outros meios, isso resultaria em uma versão mais refinada da medição absoluta da resistência. Examinaremos agora mais de perto algumas dessas *investigações galvanométricas* que servem para refinar a medição absoluta da resistência.

É feita uma distinção entre *galvanômetros* e *galvanoscópios*. Os primeiros, aos quais pertencem os galvanômetros tangentes,⁵²⁵ são usados apenas para correntes mais fortes, cuja intensidade, no entanto, é obtida de acordo com uma medida absoluta conhecida com precisão; os últimos, por outro lado, são usados para observar os menores traços de correntes das quais nada mais pode ser percebido. A alta sensibilidade dos últimos, no entanto, só é alcançada circundando muito bem a agulha [magnética] com seu multiplicador,⁵²⁶ o que faz com que o conhecimento mais preciso da escala, que é inerente ao projeto do galvanômetro tangente, seja perdido. Portanto, para usar um galvanoscópio desse tipo para medições, além de observar a deflexão causada pela corrente, é necessária alguma outra observação como medida da sensibilidade do instrumento. Como regra geral, procura-se estabelecer esse padrão de uma vez por todas, fazendo as observações correspondentes no galvanômetro e no galvanoscópio com antecedência. Entretanto, além do fato de que essas observações correspondentes não fornecem um resultado exato devido à sensibilidade muito diferente dos dois instrumentos, a escala de sensibilidade para galvanoscópios muito sensíveis geralmente não é constante e, portanto, não pode ser determinada com antecedência. Por outro lado, a observação da *deflexão* pode ser combinada com outra observação, a saber, a do *amortecimento da vibração*, que fornece diretamente essa escala de medição.

Essa conexão possibilita o uso dos galvanoscópios mais sensíveis para as medições mais precisas, que é a condição necessária para a realização de medições absolutas de resistência. Entretanto, os galvanoscópios para esse uso exigem uma construção diferente da dos galvanoscópios comuns, cuja teoria deve ser especialmente desenvolvida. Esse desenvolvimento também é interessante, pois abre caminho para o uso dos galvanoscópios mais sensíveis em muitas outras investigações refinadas.

O objetivo em questão, portanto, exige uma construção que permita que tanto a *deflexão* quanto a *atenuação* sejam observadas com a maior precisão possível, ao passo que, com os galvanoscópios comuns, apenas a observação mais fina da deflexão era decisiva para a construção. Entretanto, o que aumenta a deflexão nem sempre aumenta a atenuação e vice-versa. Além disso, a deflexão e a atenuação não devem exceder certos limites para que possam ser determinadas com precisão. É a consideração do amortecimento que exige particularmente o uso de ímãs fortes como agulhas de galvanoscópio, além da necessidade de um período mais longo de oscilação e um estado de repouso menos variável da agulha do galvanoscópio. Isso justifica o uso de um sistema *astático*⁵²⁷ formado por dois ímãs fortes, cujo período de oscilação é regulado pelo comprimento e pela resistência do fio metálico usado para suspensão.

A medição absoluta de um *padrão de resistência* depende não apenas da precisão das *medições galvanométricas*, mas também da precisão de nosso conhecimento do *magnetismo da Terra em valor absoluto no local e no instante dessas medições galvanométricas*. O objetivo final das medições galvanométricas é, portanto, garantir que a incerteza inevitável no *valor absoluto do padrão de resistência* resultante da determinação do magnetismo da

⁵²⁵Ver a Nota de rodapé 36 na página 27.

⁵²⁶Ver a Nota de rodapé 44 na página 33.

⁵²⁷Ver a Nota de rodapé 465 na página 264.

Terra não seja visivelmente aumentada pela medição galvanométrica. O principal objetivo deste Tratado é explicar e examinar como esse objetivo pode ser alcançado, o que será seguido por algumas discussões sobre a *cópia* de padrões de resistência e outras questões relativas à determinação e ao significado do padrão de resistência.

I - O Método de Medição Absoluta de Resistência

16.1 Razão de uma Força Eletromotriz para uma Intensidade de Corrente

Uma corrente galvânica i , que é movida com seu portador ponderável em relação a um condutor com a velocidade v , exerce uma *força eletromotriz* e no condutor de acordo com a lei da indução descoberta por Faraday,⁵²⁸ que é proporcional tanto à intensidade da corrente indutora i quanto à velocidade v do movimento indutor. A razão entre essa força eletromotriz e o produto da intensidade da corrente de indução e a velocidade do movimento de indução, e/iv , tem, portanto, um valor que é independente da intensidade i e da velocidade v , e esse valor é determinado como um *valor numérico puro* a partir de proporções geometricamente dadas do portador de corrente e do condutor entre si, ou seja, independente das unidades espaciais usadas para as dimensões geométricas, bem como das unidades das forças eletromotrizes, das intensidades de corrente e das velocidades. Se considerarmos um único elemento de comprimento α da corrente indutora i , que é movido com a velocidade v em relação ao elemento de comprimento α' do condutor, no instante em que a distância entre os dois elementos é $= r$, e denotarmos os quatro ângulos formados pelas direções dos dois elementos, $[\alpha]$ e $[\alpha']$, a partir da direção de sua linha de conexão $[r]$ e da direção do movimento do elemento de corrente $[v]$, por $\vartheta = [r, \alpha]$, $\vartheta' = [r, v]$, $\varepsilon = [\alpha, v]$, $\varphi = [r, \alpha']$, então, de acordo com a lei conhecida aplicável à indução voltaica,⁵²⁹ a força eletromotriz e exercida pelo elemento α da corrente indutora i sobre o elemento induzido α' é [dada por:]

$$e = iv \cdot \frac{\alpha\alpha'}{r^2} (3 \cos \vartheta \cos \vartheta' - 2 \cos \varepsilon) \cos \varphi ,$$

ou temos a razão

$$\frac{e}{iv} = \frac{\alpha\alpha'}{r^2} (3 \cos \vartheta \cos \vartheta' - 2 \cos \varepsilon) \cos \varphi ,$$

cujo valor é então obtido como um *número puro*, já que as razões de duas linhas α/r e α'/r , bem como os cossenos dos ângulos, são números puros.

Se agora chamarmos de *razões normais* às razões entre o condutor e o portador de corrente para as quais esse número $= 1$, segue-se que, sob essas razões normais, a razão entre a força eletromotriz e a intensidade da corrente, e/i , é igual à velocidade v com a qual o portador de corrente é movido, ou seja

$$\frac{e}{i} = v .$$

⁵²⁸Ver a Nota de rodapé 189 na página 135.

⁵²⁹Ver a Nota de rodapé 341 na página 200.

Em geral, pode-se observar que o quociente de qualquer força eletromotriz dividida por qualquer intensidade de corrente é igual a qualquer velocidade, o que é expresso pelo teorema: *uma força eletromotriz está para uma intensidade de corrente assim como uma distância está para um tempo.*

O mesmo teorema também decorre diretamente dos conceitos associados às *forças eletromotrizes* e e às *intensidades de corrente* i na teoria do galvanismo.

Se ε denota a quantidade de eletricidade positiva ou negativa na unidade de comprimento do condutor de acordo com a unidade eletrostática (em partes da quantidade que exerce uma força sobre uma quantidade igual na unidade de distância que daria à unidade ponderável de massa na unidade de tempo a unidade de velocidade), e se u é a velocidade com a qual a eletricidade se move no condutor,⁵³⁰ então i é proporcional a εu e é obtida multiplicando isso pelo fator $[1/c] \cdot \sqrt{8}$, em que c denota uma *velocidade constante* conhecida da lei fundamental da ação elétrica, descrita no quinto volume dos *Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaften der Wissenschaften*, página 264,^{531,532} que foi encontrada $= 439\,450 \cdot 10^6$ milímetros/(segundo).⁵³³

Se, além disso, f denota a diferença entre a força que age sobre a eletricidade positiva contida no condutor induzido na direção do condutor e a força que age sobre a eletricidade negativa contida nele, expressa em partes dessa força que daria à unidade ponderável de massa na unidade de tempo a unidade de velocidade, então a força eletromotriz e que age sobre o condutor induzido é proporcional a f e é obtida por meio da multiplicação pelo fator $[c/\varepsilon] \cdot \sqrt{1/8}$.

Esses significados de i e e são os mesmos, de acordo com os quais uma corrente de intensidade $= 1$, ao passar em torno da área unitária, exerce as mesmas ações que a unidade de momento magnético,⁵³⁴ e de acordo com os quais, além disso, a unidade de força magnética em um condutor fechado, enquanto este é girado de modo que a projeção da superfície delimitada por ele no plano perpendicular à direção da força magnética aumente uniformemente na unidade de tempo pela área unitária, exerce a unidade de força eletromotriz. Esses significados de i e e devem ser tomados como base para todas as medições absolutas devido à sua relação com o magnetismo.

De acordo com esses significados de e e i , que também formam a base das medições absolutas de resistência, resulta a seguinte relação

$$\frac{e}{i} = \frac{\frac{fc}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{8}}}{\frac{\varepsilon u}{c} \sqrt{8}} = \frac{c^2}{8u} \cdot \frac{f}{\varepsilon^2}.$$

Se a força eletrostática que a quantidade de eletricidade positiva ou negativa contida em um pedaço x do condutor, $= \varepsilon x$, exerce sobre uma quantidade igual a uma distância x é denotada por f' , então, como é bem conhecido

$$f' = \frac{\varepsilon x \cdot \varepsilon x}{x^2} = \varepsilon^2,$$

⁵³⁰Ou seja, u é a denominada velocidade de deriva, ou seja, a velocidade das partículas eletrizadas em relação ao fio condutor.

⁵³¹[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 652.

⁵³²[KW57, pág. 652 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [KW21, pág. 179]. Esse trabalho está traduzido em português no Capítulo 8. Ver, em particular, a página 197.

⁵³³Ver a discussão sobre a constante c de Weber no Capítulo 19.

⁵³⁴Ver a Nota de rodapé 228 na página 147.

consequentemente,

$$\frac{e}{i} = \frac{c^2}{8u} \cdot \frac{f}{f'}.$$

Agora, a razão de duas forças f/f' , bem como a razão de duas velocidades c/u , é expressa por números puros, de onde se conclui que

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{c}{u} \cdot \frac{f}{f'} = n$$

é um fator numérico puro e, a partir disso, conclui-se que e/i é uma velocidade, que é n vezes maior do que a velocidade c .

16.2 Representação de uma Velocidade Igual à Resistência de um Condutor

De acordo com a lei de Ohm da corrente galvânica,⁵³⁵ a intensidade da corrente i é diretamente proporcional à força eletromotriz e que atua na corrente e inversamente proporcional à resistência da corrente w e, se a unidade de resistência for escolhida adequadamente, poderá ser estabelecido

$$i = \frac{e}{w},$$

o que significa que o quociente

$$\frac{e}{i} = w$$

tem um valor *constante* para qualquer circuito, que é chamado de sua *resistência de acordo com a unidade absoluta*.

Essa *resistência*, portanto, por ser o quociente de uma força eletromotriz dividida por uma intensidade de corrente, deve, de acordo com a Seção anterior, ser igual a uma determinada *velocidade*, e é interessante não apenas determinar essa velocidade de acordo com sua magnitude, mas também representá-la na realidade, pois ela corresponde à razão e/i em todas as relações físicas.

Forneça ao fio condutor a forma de um círculo, que é colocado paralelamente ao plano do meridiano magnético e girado em torno de seu diâmetro horizontal, enquanto uma pequena bússola está localizada no centro do círculo. Essa bússola é então desviada do meridiano magnético de acordo com as leis conhecidas, tanto mais quanto mais rápido o círculo é girado; porque as correntes induzidas pela componente vertical do magnetismo da Terra no círculo durante essa rotação agem sobre a bússola e exercem uma força diretriz⁵³⁶ sobre ela perpendicular ao plano do meridiano, cujo *valor médio durante meia volta* aumenta proporcionalmente com a velocidade angular.⁵³⁷ — Durante a duração de meia revolução, essa força diretriz é, obviamente, variável, de onde se conclui que a agulha [da bússola] não pode permanecer em repouso, mas deve oscilar dentro de certos limites; mas quanto

⁵³⁵Ver a Nota de rodapé 191 na página 135.

⁵³⁶Ver a Nota de rodapé 122 na página 87.

⁵³⁷Em alemão: *Drehungsgeschwindigkeit*.

menor a duração de meia revolução se torna com a rotação acelerada em relação ao período de oscilação devido à força diretriz geomagnética, mais esses limites se aproximam um do outro, e a oscilação dessa agulha pode ser reduzida de modo que se torne completamente imperceptível e a agulha pareça completamente imóvel. — A *velocidade* na qual as partículas condutoras devem ser movidas pela rotação a uma distância do eixo de rotação igual ao raio do círculo, de modo que esse *valor médio* seja π^2 vezes maior do que a força diretriz vertical exercida diretamente pela componente vertical do magnetismo da Terra na bússola, é a *velocidade igual à resistência do fio condutor*.

No entanto, esse *valor médio* e essa força diretriz vertical exercida diretamente pela Terra na bússola se comportam como as tangentes das deflexões v e I produzidas por elas, onde v denota a deflexão horizontal da bússola observada durante a rotação e I denota a inclinação geomagnética.⁵³⁸ Se observarmos que para n rotações na unidade de tempo, $\tan v / \tan I = \pi^2$, então a resistência do condutor circular será

$$w = 2n\pi r ,$$

onde r denota o raio do condutor circular.

Essa velocidade, assim representada como igual à resistência, está agora realmente na mesma relação física que a razão entre a força eletromotriz e a intensidade da corrente, ou a resistência do condutor; pois é possível demonstrar que essa velocidade, assim como essa resistência, é totalmente independente da intensidade e da direção da força geomagnética que atua indutivamente no condutor, bem como da intensidade da bússola, na qual atua o geomagnetismo e as correntes induzidas no condutor.

As explicações a seguir servem para provar esta relação entre a velocidade e a resistência que acabamos de descrever.

Se φ é o ângulo formado pelo plano do círculo com o plano meridiano, $d\varphi/dt$ é a velocidade angular e r é o raio do círculo, a força eletromotriz exercida no círculo pela componente vertical T' do magnetismo terrestre, de acordo com o significado dado na Seção 16.1, será obtida por:

$$e = \pi r^2 \cdot T' \cdot \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} .$$

Além disso, se a velocidade angular $d\varphi/dt = \rho$ for constante, ou seja, se $e = \pi r^2 T' \rho \cos \varphi$ for proporcional a $\cos \varphi$, então, de acordo com a lei de Ohm, a intensidade da corrente i induzida no condutor também será proporcional a $\cos \varphi$, e poderá ser colocada

$$i = i_0 \cos \varphi ,$$

onde i_0 tem um valor constante.

De acordo com as leis eletromagnéticas, essa corrente induzida exerce um momento rotacional⁵³⁹ sobre a agulha m no centro do condutor circular,⁵⁴⁰ que, se o plano circular fosse vertical, ou $\varphi = 0$, e também a deflexão da agulha em relação ao meridiano magnético fosse $v = 0$, seria conhecido pela teoria do galvanômetro tangente e seria representado pelo quociente do produto do comprimento do condutor $2\pi r$ pela intensidade da corrente i e pelo

⁵³⁸Isto é, I denota a inclinação da agulha imantada devida ao magnetismo terrestre.

⁵³⁹Em alemão: *Drehungsmoment*. Essa expressão pode ser traduzida como momento rotacional, ação rotacional, momento da força, ou torque.

⁵⁴⁰Isto é, essa corrente induzida exerce um torque sobre a agulha que possui um momento magnético m .

magnetismo da agulha m , dividido pelo quadrado do raio circular r^2 , ou seja, $= 2\pi im/r$; mas se φ e v forem diferentes de zero, esse quociente deve, como pode ser facilmente demonstrado, ser multiplicado por $\cos \varphi \cos v$, após o que se obtém o momento rotacional exercido sobre a agulha pela corrente induzida i :⁵⁴¹

$$= \frac{2\pi im}{r} \cdot \cos \varphi \cos v = \frac{2\pi m}{r} i_0 \cos v \cdot \cos \varphi^2 .$$

O *valor médio* desse momento rotacional para a duração de meia revolução $= \pi/\rho$ resulta disso

$$\frac{2\pi m}{r} i_0 \cos v \cdot \frac{\rho}{\pi} \int_0^{\pi/\rho} \cos \varphi^2 dt = \frac{2\pi m}{r} i_0 \cos v \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \varphi^2 d\varphi = \frac{\pi m}{r} i_0 \cos v .$$

Agora, o momento rotacional exercido pela Terra na agulha é, quando T denota a componente horizontal do magnetismo da Terra,

$$= Tm \sin v ,$$

que, se v não sofrer nenhuma mudança perceptível, poderá ser considerado constante. Este momento rotacional exercido pela Terra sobre a agulha deve então ser igual ao *valor médio* daquele exercido pela corrente induzida, ou seja,

$$Tm \sin v = \frac{\pi m}{r} i_0 \cos v ,$$

consequentemente

$$i_0 = \frac{rT}{\pi} \tan v ,$$

$$i = \frac{rT}{\pi} \tan v \cdot \cos \varphi .$$

Mas agora

$$e = \pi r^2 T' \rho \cdot \cos \varphi ,$$

consequentemente

$$\frac{e}{i} = \frac{\pi^2}{\tan v} \cdot \frac{T'}{T} \cdot r \rho ,$$

ou, como $T'/T = \tan I$, se I denota a inclinação geomagnética,

$$\frac{e}{i} = \frac{\tan I}{\tan v} \cdot \pi^2 r \rho .$$

Finalmente, se $2n\pi$ denota o valor de ρ para o qual é observado

$$\frac{\tan v}{\tan I} = \pi^2 ,$$

⁵⁴¹A próxima Equação deve ser entendida como:

$$= \frac{2\pi im}{r} \cdot \cos \varphi \cos v = \frac{2\pi m}{r} i_0 \cos v \cdot \cos^2 \varphi .$$

O mesmo significado deve ser entendido em equações similares.

então

$$\frac{e}{i} = 2n\pi r ,$$

ou seja, a *velocidade* com que a partícula condutora localizada a uma distância r do eixo de rotação se move em sua órbita circular representa a *resistência do condutor* $w = e/i$.

Se denotarmos a resistência do *comprimento unitário* do condutor pelo nome de sua *resistência específica*, então a resistência específica de um condutor circular é igual a uma certa *velocidade angular* deste condutor, ou seja, uma vez que $2\pi r$ é o comprimento do condutor, a velocidade angular n , para a qual é observado

$$\frac{\tan v}{\tan I} = \frac{\pi}{2} .$$

16.3 Determinação da Resistência Através da Razão $\int edt / \int idt$ para um Impulso de Indução

A partir da possibilidade de representar realmente aquelas velocidades que são iguais às resistências dos fios condutores, reconhece-se a possibilidade de *medir* essas velocidades e, portanto, também as resistências iguais a elas. Essas medições são chamadas de *medições absolutas de resistência*.

Mas mesmo que a possibilidade de medições absolutas de resistência fique clara a partir disso, esse procedimento ainda não fornece de forma alguma o método mais preciso e melhor para a execução real, do qual depende o significado prático dessas medições; pelo contrário, para determiná-las, são necessárias discussões adicionais, que devem ser realizadas antes da implementação.

O fio condutor mencionado na Seção anterior, que tem a forma de um círculo e pode ser girado em torno de seu diâmetro horizontal, junto com a bússola localizado no centro do círculo, forma essencialmente o mesmo instrumento que já foi discutido com o nome de *inclinômetro de indução*⁵⁴² nos “Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837 — Resultados das Observações da Associação Magnética em 1837”, páginas 81-96.^{543,544} Através deste *inclinômetro de indução*, as medições de resistência podem ser reduzidas a medições de velocidade. No entanto, uma execução precisa destas medições de velocidade pressupõe, como é evidente, uma velocidade angular completamente uniforme, cuja realização, embora não impossível, está associada a grandes dificuldades práticas. É, portanto, de extrema importância para a execução de uma medição precisa da resistência absoluta que ela seja feita independentemente da produção e medição de uma velocidade angular completamente uniforme.

O método para atingir esse objetivo geralmente se baseia no fato de que, em vez de manter constantes por um longo período de tempo um determinado valor médio da força eletromotriz e , assim como da intensidade de corrente i , por meio da rotação uniforme contínua e medi-los durante esse período, busca-se produzir valores integrais exatamente determinados e mensuráveis $\int edt$ e $\int idt$, mas limitados a um tempo muito curto, sob circunstâncias em que o quociente e/i permanece constante para todos os elementos de tempo dt , mesmo que e

⁵⁴²Ver a Nota de rodapé 508 na página 273.

⁵⁴³[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. II, págs. 75-88.

⁵⁴⁴[Web38b].

e i variem. A medição precisa dos valores integrais $\int edt$ e $\int idt$ produz, então, o quociente $\int edt / \int idt = e/i$, igual à resistência do fio condutor w , sendo irrelevante se o curto período de tempo ao longo do qual essas integrais se estendem, que não precisa ser medido de forma alguma, é um pouco maior ou menor, já que o resultado é completamente independente disso.

16.4 Execução com o Inclinômetro de Indução

O método apresentado na Seção anterior poderia agora ser facilmente executado com o *inclinômetro de indução* da seguinte maneira.⁵⁴⁵ O círculo formado a partir do fio condutor, em vez de movê-lo em uma rotação contínua e uniforme, é simplesmente girado um pouco, por exemplo, na metade da volta, começando mais convenientemente da posição horizontal do círculo até a posição horizontal novamente, e isto em um tempo bastante curto, que é denominado um *impulso de indução*.⁵⁴⁶ O valor integral $\int edt$ para tal impulso de indução é fácil de determinar; pois pela Seção 16.2 temos $e = \pi r^2 T' \cos \varphi \cdot d\varphi/dt$, portanto o valor integral de edt , tomado de $\varphi = -\pi/2$ até $\varphi = +\pi/2$, é

$$\int edt = 2\pi r^2 T' ,$$

se r denota o raio do círculo e T' a componente vertical do magnetismo da Terra.

O valor integral $\int idt$ também pode ser determinado de forma muito simples determinando a velocidade angular na qual o bússola é colocada por tal impulso de indução; porque se esta velocidade angular é denotada por γ , o magnetismo e o momento de inércia da bússola são denotados por m e k ,⁵⁴⁷ então temos

$$\int idt = \frac{2rk}{\pi^2 m} \cdot \gamma . \quad ^{548}$$

Agora, com uma agulha colocada em vibração, a maior velocidade angular γ (no instante em que ela passa pela posição de equilíbrio) está relacionada à maior deflexão da posição de equilíbrio, ou seja, à largura de elongação α , como [a razão de] π para o período de oscilação t da agulha,⁵⁴⁹ ou ela é $\gamma = [\pi/t] \cdot \alpha$, então

$$\int idt = \frac{2rk}{\pi m t} \cdot \alpha .$$

⁵⁴⁵Ver a Nota de rodapé 508 na página-273.

⁵⁴⁶Em alemão: *eines Induktionsstosses*. Ver a Nota de rodapé 168 na página 126.

⁵⁴⁷Isto é, m e k são o momento magnético e o momento de inércia da agulha magnetizada, respectivamente.

⁵⁴⁸[Nota de Wilhelm Weber:] Conforme a Seção 16.2, o torque horizontal exercido na agulha pela corrente induzida $i = i_0 \cos \varphi$ foi $= [2\pi m/r] \cdot i_0 \cos \varphi$, portanto, se no instante do impulso de indução a agulha estiver em repouso e $v = 0$, [essa expressão torna-se] $= [2\pi m/r] \cdot i_0 \cos \varphi$. Este momento rotacional dividido pelo momento de inércia k fornece a aceleração angular da agulha $d\gamma/dt = [2\pi m/rk] \cdot i_0 \cos \varphi$. Disto obtemos, se a velocidade angular do círculo $d\varphi/dt$ é denotada por ρ , $d\gamma = [2\pi m/rk] \cdot [i_0/\rho] \cdot \cos \varphi^2 d\varphi$, e o valor integral disso, de $\varphi = -\pi/2$ até $\varphi = +\pi/2$, $\gamma = [\pi^2 m/rk] \cdot [i_0/\rho]$, ou seja, $i = i_0 \cos \varphi = [rk/\pi^2 m] \cdot \rho \gamma \cos \varphi$, a partir do qual $idt = [rk/\pi^2 m] \cdot \gamma \cos \varphi d\varphi$, e obtemos seu valor integral, entre os limites $\varphi = -\pi/2$ e $\varphi = +\pi/2$, a saber, $\int idt = [2rk/\pi^2 m] \cdot \gamma$. A velocidade angular do círculo ρ foi assumida como constante; mas pode-se ver facilmente que o resultado permaneceria inalterado mesmo se ρ estivesse mudando; porque i_0 também seria mutável, mas a razão i_0/ρ permaneceria constante.

⁵⁴⁹Ver a Nota de rodapé 24 na página 19.

Como $\int edt = 2\pi r^2 T'$, obtemos disso a desejada resistência do fio condutor

$$w = \frac{\int edt}{\int idt} = \frac{\pi^2 m r t T'}{k \alpha}.$$

Se T denota a componente horizontal do magnetismo da Terra e I a inclinação, então sabe-se que $T'/T = \tan I$ e $mT/k = \pi^2/t^2$; consequentemente

$$w = \frac{\pi^4 r}{\alpha \cdot t} \tan I.$$

Se o fio condutor, em vez de um círculo simples, formasse um anel composto por n voltas de tamanhos iguais isoladas umas das outras, encontraríamos:

$$w = \frac{n^2 \pi^4 r}{\alpha \cdot t} \cdot \tan I.$$

16.5 Separação entre o Indutor e o Galvanômetro

Embora o método de medição absoluta de resistência com o *inclinômetro de indução* descrito na Seção anterior pareça simples, ele não se mostra eficaz na prática. *Em primeiro lugar*, a velocidade angular da agulha causada por uma única meia volta do círculo (impulso de indução) e a largura de elongação resultante são muito pequenas para serem observadas e medidas com uma bússola comum; mesmo as melhores observações magnetométricas não seriam suficientes para essa finalidade se a bússola pudesse ser substituída por um magnetômetro equipado com espelho e escala, cuja instalação no centro do círculo giratório estaria, aliás, associada a grandes dificuldades práticas. *Em segundo lugar*, a horizontalidade do eixo da agulha teria de ser completamente garantida com esse método; caso contrário, como pode ser facilmente observado, a indução da componente vertical do magnetismo da Terra seria misturada com a indução da parte vertical do magnetismo da agulha quando o círculo fosse girado em torno de seu diâmetro horizontal.

Essas razões, portanto, fazem com que pareça muito mais conveniente formar *dois círculos* com o fio condutor em vez de um círculo, um dos quais é usado como *indutor* e é girado, enquanto o outro serve como *multiplicador* e é estacionário. Essa separação fornece liberdade para o arranjo mais apropriado do indutor e do multiplicador necessários para o galvanômetro, onde cada um pode ser construído de forma muito mais perfeita sem ter que levar o outro em consideração. Essa separação entre o indutor e o multiplicador é a base do método desenvolvido no primeiro Volume dos *Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften*,^{550,551} sobre o qual a seguinte observação será suficiente aqui.

O cálculo da resistência do fio condutor a partir das observações é apenas ligeiramente alterado pela separação entre o indutor e o multiplicador, ou seja, apenas como resultado da posição fixa em que permanece o multiplicador separado, que não participa mais da rotação do indutor, de acordo com a qual, *em primeiro lugar*, é encontrado o momento rotacional horizontal $= [2\pi m/r] \cdot i_0 \cos \varphi$ exercido pela corrente induzida $i = i_0 \cos \varphi$ na agulha (em vez do valor $= [2\pi m/r] \cdot i_0 \cos \varphi^2$ dado na Nota da Seção 16.4), do qual decorre $\int idt = [rk/2\pi m] \cdot \gamma$; e, *em segundo lugar*, a largura de elongação α não pode mais ser determinada a partir da velocidade angular γ de acordo com a lei $\gamma = [\pi/t] \cdot \alpha$ fornecida na

⁵⁵⁰[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. III, pág. 301.

⁵⁵¹[Web52c] com tradução para o inglês em [Web21c].

Seção 16.4, porque essa lei só se aplica a uma agulha que oscila livremente e não sofre nenhum amortecimento, o que era o caso na Seção 16.4, porque o multiplicador conectado ao indutor estava sempre na posição horizontal antes e depois do impulso de indução. Se, por outro lado, o multiplicador separado do indutor permanecer em sua posição vertical paralela ao plano meridiano durante toda a oscilação da agulha, a agulha oscilante sofrerá amortecimento e a largura da elongação α será então determinada a partir da velocidade angular γ de acordo com as leis desenvolvidas por Gauss nos “Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins in Jahre 1837”.^{552,553} Se γ for determinado de acordo com essas leis a partir da largura de elongação observada e da diminuição simultaneamente observada nos arcos de oscilação da agulha, resulta a seguinte equação para o cálculo de w , ou seja, para círculos simples de mesmo raio r , tanto como indutor quanto como multiplicador:

$$w = \frac{4\pi^4 r}{\gamma \cdot t^2} \cdot \tan I ,$$

ou, no caso de um anel composto de n voltas de raio r como um indutor e para um anel composto de n' voltas de raio r' como um multiplicador:

$$w = \frac{4nn'\pi^4}{\gamma \cdot t^2} \cdot \frac{r^2}{r'} \cdot \tan I .$$

16.6 Amortecimento como uma Medida da Sensibilidade do Galvanômetro

A liberdade de tornar o raio r' dos enrolamentos do multiplicador menor do que o raio r dos enrolamentos do indutor e, em contrapartida, aumentar o número n' de enrolamentos do multiplicador, o que é obtido ao separar o multiplicador do indutor, conforme discutido na Seção anterior, ganha maior importância porque, *em primeiro lugar*, quando o multiplicador está em uma posição fixa, não há mais nenhum obstáculo para trocar a bússola por um magnetômetro; *em segundo lugar*, a velocidade angular γ transmitida à agulha por um impulso de indução pode receber um valor adequado para uma observação mais precisa. Pois pode ser visto na equação no final da Seção anterior que, se r' receber metade do valor e n' o dobro do valor, a velocidade angular γ produzida por um impulso de indução assumirá um valor quatro vezes maior, mantendo-se todas as outras coisas iguais, com o fio condutor inalterado. Somente dessa forma é possível fornecer à largura de elongação α da agulha, que depende de γ , o valor necessário para uma medição precisa com uma indução tão fraca quanto a oferecida pelo magnetismo terrestre.

É óbvio, no entanto, que se o multiplicador circundar a agulha de perto, em vez de formar um círculo largo ao redor dela como em um galvanômetro tangente, a lei válida para galvanômetros tangentes, de acordo com a qual foi determinada a velocidade angular γ dada por um impulso de indução na agulha, ou seja, a equação $\int idt = [rk/2\pi m] \cdot \gamma$ dada na Seção 16.5, segundo a qual $\gamma = [2\pi m/rk] \cdot \int idt$ (ou, para uma pluralidade de voltas n' de raio r' , $\gamma = [2n'\pi m/r'k] \cdot \int idt$) não se aplica mais, porque então a diferença na posição das várias voltas das quais o multiplicador é composto e o modo de distribuição do magnetismo na agulha ganham influência e devem ser levados em consideração com mais precisão;

⁵⁵²[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Gauss*, Vol. V, pág. 389.

⁵⁵³[Gau38a, pág. 389 das *Obras de Gauss*].

mas, mesmo assim, γ permanece proporcional a $\int idt$ e a relação constante $\gamma/\int idt$, que pode ser chamada de coeficiente de sensibilidade do galvanômetro e pode ser denotada por f , pode ser facilmente determinada observacionalmente para qualquer galvanômetro pela medição simultânea de γ e $\int idt$. Deve-se observar, no entanto, que a constância do coeficiente $\gamma/\int idt = f$ está necessariamente ligada à invariabilidade do instrumento, uma invariabilidade que não pode ser atribuída permanentemente a esses galvanoscópios sensíveis com multiplicadores de circunscrição estreita, razão pela qual a sensibilidade desses instrumentos, como já observado na Introdução, não pode ser determinada antecipadamente. O coeficiente f , ou a sensibilidade do instrumento, deve, portanto, ser determinado para o instante da observação em si.

Essa determinação é feita pelas observações combinadas de acordo com o método de retorno⁵⁵⁴ (que foi discutido em mais detalhes no primeiro Volume dos *Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften*, pág. 349),^{555,556} que se relacionam com a *velocidade angular* produzida por um impulso de indução na agulha e, ao mesmo tempo, com seu *amortecimento*; pois esse amortecimento é proporcional ao quadrado do coeficiente f . Se, a partir dessas observações, o amortecimento devido ao fechamento do circuito for determinado pelo valor do decremento logarítmico λ (de acordo com o sistema natural),⁵⁵⁷ então se w denota a resistência do circuito, k o momento de inércia da agulha e τ seu período de oscilação sob a influência do amortecimento,

$$f^2 = \frac{2w}{k\tau} \cdot \lambda . \quad 558$$

Mas agora $f = \gamma/\int idt$, e de acordo com as Seções 16.3 e 16.4, $w = \int edt/\int idt$ e $\int edt =$

⁵⁵⁴Em alemão: *Methode der Zurückwerfung*. Essa expressão pode ser traduzida como método de retorno, de retrocesso, de retrospectiva, de recuo ou retroativo. Ver [Gau38a], [Web39], [Max54, Vol. 2, Artigo 750, págs. 388-390] e [WK68, pág. 108, Nota 13].

⁵⁵⁵[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. III, pág. 441.

⁵⁵⁶[Web52c, pág. 441 das *Obras de Weber*] com tradução para o inglês em [Web21c].

⁵⁵⁷Ver a Nota de rodapé 26 na página 19. Weber está aplicando aqui o logaritmo natural em vez do logaritmo de base 10.

⁵⁵⁸[Nota de Wilhelm Weber:] De acordo com a lei *eletromagnética*, conforme afirmado anteriormente, a velocidade angular fornecida à agulha pelas correntes induzidas por um impulso de indução foi dada por:

$$\gamma = f \cdot \int idt ,$$

ou seja, durante o impulso de indução, $d\gamma = f idt$. Portanto, a aceleração angular dada pela corrente i no multiplicador da agulha é $d\gamma/dt = fi$, e consequentemente, se k denota o momento de inércia da agulha, o momento rotacional exercido sobre a agulha pela corrente i no multiplicador é kfi .

A expressão desse momento rotacional, no entanto, se for colocado $i = 1$, fornece, de acordo com a lei *magnético-elétrica*, o fator que, multiplicado pela velocidade angular γ da agulha, é igual à *força eletromotriz* exercida pela agulha em movimento no multiplicador, $= kf\gamma$, da qual, de acordo com a lei de Ohm, resulta a corrente $i = kf\gamma/w$ induzida pela agulha em movimento no multiplicador. Se agora substituirmos esse valor de i na equação $d\gamma = f idt$, descobriremos que o amortecimento causado pelo fechamento do circuito retarda a velocidade angular da agulha e que esse retardo é $d\gamma/dt = [kf^2/w] \cdot \gamma$. Agora, no entanto, a equação diferencial da agulha oscilante (consulte os *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins*, 1837, página 74) [[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Gauss*, Volume V, página 389][[Nota de AKTA:] [Gau38a, pág. 389 das *Obras de Gauss*.] é $d^2x/dt^2 + 2\epsilon dx/dt + n^2x = 0$, na qual a velocidade angular $\gamma = dx/dt$ e o retardo rotacional resultante do amortecimento, é $[kf^2/w] \cdot \gamma = 2\epsilon dx/dt$, portanto, $kf^2/w = 2\epsilon$. — No entanto, a partir dessa equação diferencial segue-se $x = p + Ae^{-\epsilon t} \sin(t\sqrt{n^2 - \epsilon^2} - B)$, de acordo com a qual o período de oscilação é $\tau = \pi/\sqrt{n^2 - \epsilon^2}$ e o decremento logarítmico natural é $\lambda = \epsilon\tau$. De acordo com isso, $kf^2/w = 2\epsilon = 2\lambda/\tau$, ou $f^2 = [2w/k\tau] \cdot \lambda$, o que deveria ser provado.

$2n\pi r^2 T'$; conseqüentemente, se f , $\int edt$ e $\int idt$ são eliminados dessas quatro equações, obteremos

$$w = \frac{8(n\pi r^2 T')^2}{k\gamma^2 \tau} \cdot \lambda .$$

Com relação à execução das observações, também deve ser apontado que, *em primeiro lugar*, no caso de forte amortecimento, pode ser que o período de oscilação τ com um circuito fechado não possa ser determinado diretamente com exatidão e que, portanto, seja necessário observar o período de oscilação t com um circuito aberto; *em segundo lugar*, mesmo com um circuito aberto, muitas vezes há um amortecimento ainda perceptível, que é determinado pela observação do decremento logarítmico λ_0 . Quando o circuito é fechado, λ_0 é então adicionado a λ , e o decremento logarítmico observado é $\lambda_0 + \lambda = \lambda_1$. Sob tais condições, $\lambda = \lambda_1 - \lambda_0$ e $\tau = t_0 \sqrt{(\pi^2 + \lambda_1^2)/(\pi^2 + \lambda_0^2)}$ devem ser substituídos na equação anterior (como pode ser facilmente visto na Nota anterior) para representar a resistência w em sua dependência dos valores observados t_0 , λ_0 e λ_1 , a saber:

$$w = \frac{8(n\pi r^2 T')^2}{k\gamma^2 t_0} \cdot (\lambda_1 - \lambda_0) \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda_1^2}} .$$

16.7 Indução pela Componente Horizontal do Magnetismo Terrestre

Da mesma forma que a separação entre o multiplicador e o indutor descrita na Seção 16.5 pode ser usada para obter um galvanômetro com um *multiplicador* apertado ao seu redor e da mais alta sensibilidade para as medições, essa separação também pode ser usada para dar ao *indutor* uma disposição mais adequada e vantajosa.

O raio dos enrolamentos do indutor não precisa mais ser limitado pelo galvanômetro, mas pode ser aumentado tanto quanto for compatível com uma rotação rápida e leve do indutor, pelo que os impulsos de indução são significativamente aumentados. Como a intensidade do impulso de indução foi encontrada como sendo $\int edt = 2n\pi r^2 T'$ e pode-se facilmente ver que este valor é aumentado m vezes, mesmo com o comprimento do fio permanecendo inalterado, se o raio r dos enrolamentos do indutor for m vezes maior e conseqüentemente o número n dos enrolamentos do indutor for considerado m vezes menor.

Além disso, como resultado da separação entre o indutor e o multiplicador, a razão pela qual a rotação do indutor teve que ocorrer pelo diâmetro horizontal do indutor quando o indutor e o multiplicador foram combinados não se aplica mais, nomeadamente a razão pela qual, na rotação do indutor, há apenas uma indução devido ao magnetismo terrestre, e não pelo magnetismo de agulha, porque este último seria difícil de determinar ou eliminar. Como resultado da separação entre o indutor e o multiplicador, a rotação também pode ocorrer em torno do diâmetro vertical do indutor, pelo que a indução é feita dependente da componente horizontal T do magnetismo terrestre, em vez da componente vertical T' . Ao trocar T por T' , a equação no final da Seção anterior se transforma na seguinte:

$$w = \frac{8(n\pi r^2 T)^2}{k\gamma^2 t_0} \cdot (\lambda_1 - \lambda_0) \cdot \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda_1^2}} .$$

Esta troca tem a vantagem de que a medição da componente *horizontal* T do magnetismo terrestre é suficiente, enquanto no outro caso a medição da *inclinação* I também foi necessária para poder determinar a componente *vertical* $T' = T \tan I$.

II - Construção do Galvanômetro

16.8

A partir da visão geral do método de medição absoluta de resistência dada na Seção anterior, fica claro que a construção do galvanômetro é importante para realizar tal medição. O que é importante não é apenas um elevado grau de sensibilidade, mas também que este grau de sensibilidade possa ser determinado com precisão a partir das observações de amortecimento das vibrações da agulha.

A teoria do galvanômetro tem sido discutida com frequência sob vários pontos de vista, de acordo com as diferentes finalidades a que se destina; mas o uso do galvanômetro para a medição da *inclinação magnética* por meio de *indução*, conforme discutido no quinto Volume destes Tratados,^{559,560} está mais próximo da finalidade da medição absoluta da resistência, com a qual estamos preocupados aqui, com a qual, no local indicado, já foi associada uma aplicação à própria medição da resistência. As regras fornecidas para a construção do galvanômetro também se aplicam aqui, por exemplo, a resistência do multiplicador deve ser quase igual à do restante do circuito ao qual o indutor pertence. No entanto, no galvanômetro de lá tratava-se principalmente da sensibilidade ou tamanho da deflexão da agulha do galvanômetro posta em oscilação por um impulso de indução, enquanto aqui também se trata do tamanho da atenuação, que deve ser usada para determinar com precisão essa sensibilidade. Embora esse uso da atenuação já tenha sido abordado por ocasião da aplicação feita à medição de resistência, ele ainda requer uma discussão mais aprofundada para determinar qual é o mais alto grau de precisão nessa *determinação de sensibilidade* e como ele deve ser alcançado.

16.9 Limites no Tamanho da Deflexão e Atenuação

Mesmo que a *deflexão* e a *atenuação* pudessem ser aumentadas à vontade, em parte envolvendo a agulha do galvanômetro com o multiplicador e em parte aumentando o magnetismo da agulha, certos limites não devem ser excedidos para que a precisão da medição da resistência não seja reduzida em vez de aumentada.

Em primeiro lugar, no que diz respeito à *deflexão*, que não deve exceder a escala com a qual será medida,⁵⁶¹ um limite é definido para sua ampliação em todas as observações *magnetométricas* pela regra de que ela deve sempre ser restrita a pequenos ângulos de deflexão de acordo com a qual o comprimento da escala é definido. Caso contrário, a vantagem mais importante dessas observações seria perdida, que é o fato de que pequenas deflexões são sempre usadas mesmo para as medições mais precisas e são suficientes quando muitas influências perturbadoras são evitadas e o cálculo das observações é bastante simplificado.

⁵⁵⁹[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. II, pág. 277.

⁵⁶⁰[Web53e].

⁵⁶¹Ver a Nota de rodapé 22 na página 18.

Da mesma forma, em relação ao *amortecimento*, que deve ser determinado a partir da *diferença* na razão de tamanho de dois arcos de oscilação consecutivos em relação à unidade, é óbvio que essa *diferença* deve ser de magnitude suficiente para uma determinação precisa, mas não deve ser tão grande que a própria unidade desapareça [comparada com a diferença], pois, caso contrário, ou o primeiro arco de oscilação seria grande demais para ser medido com a escala, ou o segundo seria pequeno demais para uma medição precisa. Entre esses dois limites, portanto, deve haver um caso em que a precisão alcançada na determinação do amortecimento seja máxima.

Se o arco de oscilação maior, que deve ser quase igual ao limite definido pelo comprimento da escala, for denotado por a e o menor por x , o valor do amortecimento será proporcional a $\log[a/x] = \lambda$, e a precisão alcançável na determinação do amortecimento será representada pelo quociente da menor alteração mensurável de x dividida pela alteração correspondente de λ expressa em partes de λ . O valor de x para o qual o valor absoluto desse quociente é o máximo é determinado pela equação

$$\left(\frac{\lambda dx}{d\lambda}\right)^2 = x^2 \left(\log \frac{a}{x}\right)^2 = \text{máximo},$$

da qual decorre $a : x = e : 1$ se $e = 2,71828$ denotar a base dos logaritmos naturais. Isso leva à regra de que a maneira mais vantajosa de determinar o amortecimento é construir o galvanômetro de forma que a proporção de dois arcos consecutivos da agulha vibratória seja igual ou, pelo menos, próxima da razão $e : 1$.

16.10 Suspensão Unifilar e Bifilar da Agulha do Galvanômetro

A suspensão da agulha do galvanômetro pode ser *unifilar* ou *bifilar*, e somente uma análise mais detalhada das observações a serem realizadas pode dar preferência à escolha de uma ou outra suspensão.

Se a agulha do galvanômetro for colocada em oscilação por um impulso de indução, ou seja, se receber uma determinada velocidade angular γ no instante em que estiver em repouso, não será suficiente observar a deflexão ou a *primeira* elongação a da agulha, mas também será necessário observar a *segunda* elongação b da agulha para o lado oposto da posição de repouso, especialmente para determinar o amortecimento. Para que a medição seja precisa, no entanto, essas duas observações devem ser repetidas com mais frequência. Agora é óbvio que, em vez de esperar até que a agulha chegue ao repouso perfeito entre cada duas repetições, há grandes vantagens em manter um sistema de tais repetições sem interrupção em sucessão contínua, o que é viável se considerarmos que a agulha, no instante de cada impulso de indução, deveria de fato estar na posição em que, se não tivesse movimento, poderia permanecer em equilíbrio, mas que para o propósito dessas observações não é necessário que ela esteja realmente em equilíbrio. Em vez disso, a agulha pode ter uma velocidade angular neste momento, se esta for sempre a mesma para todas as repetições no instante de cada pulso de indução. O método de organizar esses sistemas de observação foi dado por Gauss e pode ser encontrado no primeiro Volume dos *Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften*, página 349, sob o nome de *método*

de retorno.^{562,563} Segue-se que a realização exata de tal sistema de observação requer, *em primeiro lugar*, que a duração de um impulso de indução seja uma fração muito pequena do período de oscilação da agulha e, *em segundo lugar*, que o instante de cada impulso de indução coincida o mais exatamente possível com o momento em que a agulha está na posição em que, se sua velocidade angular fosse zero, ela poderia permanecer em equilíbrio. É óbvio, no entanto, que o cumprimento desses dois requisitos só pode ser alcançado com um período de oscilação mais longo da agulha, por exemplo, de 20 a 30 segundos, de acordo com o qual a construção do galvanômetro deve ser ajustada.

Se for necessário produzir um período de oscilação mais longo por meio da suspensão *unifilar* da agulha e se a agulha tiver o magnetismo mais forte possível em relação ao seu tamanho para fins de amortecimento, então a necessidade de uma agulha maior, por exemplo, de 600 a 900 milímetros de comprimento, é óbvia, o que também torna necessária uma extensão correspondente do multiplicador na direção da agulha. Com essa extensão do multiplicador, uma *atenuação* suficientemente forte pode ser obtida pela amplificação associada do magnetismo da agulha; entretanto, a magnitude da *deflexão* produzida por um impulso de indução diminui tão rapidamente com a extensão da agulha e do multiplicador que pode não ser mais suficiente para medições precisas. Com agulhas maiores, pode-se calcular, em condições normais, que a magnitude da deflexão é inversamente proporcional ao comprimento da agulha, de modo que, por exemplo, com uma agulha de 600 a 900 milímetros de comprimento, o que seria necessário para um período de oscilação de 20 a 30 segundos, a deflexão seria de 4 a 6 vezes menor do que com uma agulha de 150 milímetros de comprimento.⁵⁶⁴ Se fosse demonstrado que, mesmo assim, sob condições favoráveis, a deflexão ainda seria de magnitude suficiente para medições mais precisas, não haveria razão substancial para rejeitar o uso da suspensão *unifilar*. Entretanto, se a deflexão reduzida não fosse mais suficiente, seria necessária uma suspensão *bifilar*.

⁵⁶²[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 441.

⁵⁶³Ver a Nota de rodapé 554 e [Web52c, pág. 441 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21c].

⁵⁶⁴[Nota de Wilhelm Weber:] Para a presente análise, é suficiente considerar apenas uma única espira do multiplicador no plano vertical da agulha, e da agulha apenas dois pontos, que podem ser chamados de polo Norte e polo Sul, cuja distância um do outro é l . O enrolamento do multiplicador forma um semicírculo de raio r em torno de cada um desses pontos, ambos conectados um ao outro por duas peças paralelas de comprimento l . A velocidade angular transmitida à agulha por um impulso de indução é, então, composta de várias partes, a saber, a que se deve aos dois semicírculos que atuam sobre os polos da agulha situados em seus centros, que é obtida $= [\pi m / kr] \cdot \int idt$ quando m denota o momento magnético e k o momento de inércia da agulha; também daquela devido às duas peças de conexão paralelas, $= [2lm / rk\sqrt{l^2 + r^2}] \cdot \int idt$, e, finalmente, daquela devido a cada semicírculo atuando no polo da agulha localizado no centro do outro semicírculo, que, no entanto, pode ser considerada como desprezível se r for muito pequeno em comparação com l . Portanto, se r for muito pequeno em relação a l , pode ser colocada $\gamma = (\pi + 2)(m / kr) \int idt$. Agora, para duas agulhas homogêneas de formato semelhante, os maiores momentos magnéticos que elas podem assumir, $m : m'$, comportam-se como os cubos [das distâncias entre seus polos, $l : l'$], seus momentos de inércia $k : k'$ comportam-se como as quintas potências das distâncias de seus polos $l : l'$, ou seja, $m : m' = l^3 : l'^3$ e $k : k' = l^5 : l'^5$, do que decorre a razão de suas velocidades angulares

$$\gamma : \gamma' = l'^2 : l^2 .$$

E como suas deflexões $\alpha : \alpha'$ estão na razão composta dessa velocidade angular e do período de oscilação proporcional à distância entre os polos, obtemos o seguinte

$$\alpha : \alpha' = l' : l .$$

Essa suspensão *bifilar* pode então ser configurada de modo que a força diretriz estática resultante S seja maior do que a força diretriz magnética D ,⁵⁶⁵ e que (com os polos da agulha invertidos) o período de oscilação da agulha dependa apenas da diferença $S - D$, o que torna possível regular e aumentar o período conforme desejado. Um período de oscilação mais longo produzido dessa forma, combinado com um magnetismo relativamente forte da agulha, não só possibilita a produção de um galvanômetro de altíssima sensibilidade, mas também aumenta o amortecimento de modo que ele possa ser determinado com a mesma precisão que a deflexão da agulha. Por fim, mesmo nos casos em que o objetivo principal que acabamos de descrever poderia ser alcançado pela *suspensão unifilar de ímãs maiores*, essa suspensão *bifilar* tem a vantagem especial de que o galvanômetro pode ser construído *em uma escala menor sem afetar a precisão das medições*, o que geralmente é de grande importância para aplicações práticas.

16.11 Sistema Astático de Agulhas com Suspensão Unifilar

Entretanto, o mesmo objetivo para o qual, de acordo com a Seção anterior, a suspensão *bifilar* era particularmente adequada e, especialmente quando agulhas menores estavam envolvidas, parecia merecer preferência em relação à suspensão *unifilar*, também pode ser alcançado pela suspensão *unifilar*, se a agulha simples for trocada por um *sistema astático de agulhas*, ou seja, por um sistema de duas agulhas idênticas firmemente conectadas uma à outra, uma das quais é envolvida pelo multiplicador e a outra com os polos em posições opostas do lado de fora, acima ou abaixo do multiplicador.⁵⁶⁶ As forças diretrizes magnéticas das duas agulhas conectadas se cancelam mutuamente, e a força diretriz estática pode ser regulada pela seleção de um fio apropriado para a suspensão, de modo que seja obtido o período de oscilação mais adequado. Além de todas as vantagens que também poderiam ser obtidas por meio da suspensão *bifilar* de uma agulha simples, esse dispositivo também oferece uma vantagem especial, pois a influência de alguns distúrbios externos inevitáveis é completamente evitada. Esses distúrbios externos são causados, em especial, pelas *variações de declinação do magnetismo da Terra*. Embora essas variações sejam, via de regra, pequenas durante o curto período de observação, não se deve ignorar que, no caso de uma agulha que é direcionada pela mera *diferença entre a força diretriz estática e magnética*, o que era o caso de uma suspensão bifilar sensível, elas são ampliadas tantas vezes quanto essa diferença está contida na força diretriz magnética total. Como resultado disso, a posição de equilíbrio da agulha pode frequentemente estar sujeita a uma mudança rápida e consideravelmente grande, o que perturba a execução precisa dos impulsos de indução e reduz muito a certeza e a consistência pelas quais essas observações são caracterizadas. Esses distúrbios são completamente evitados no sistema *astático* de agulhas descrito, se prestarmos atenção à igualdade exata das agulhas e ao paralelismo de seus eixos; pois é óbvio que as variações do magnetismo da Terra não têm influência alguma sobre o comportamento desse sistema de agulhas. Portanto, se apenas a força diretriz *estática* for constante, a posição de equilíbrio desse sistema é completamente invariável e permite que sejam feitas as observações mais precisas.

⁵⁶⁵Ver a Nota de rodapé 122 na página 87.

⁵⁶⁶Ver a Nota de rodapé 465 na página 264.

16.12 Teoria do Multiplicador

Após a discussão anterior sobre a construção do galvanômetro em geral e, em particular, sobre a construção da agulha do galvanômetro e sua suspensão, passamos à tarefa principal, ou seja, a teoria do multiplicador, que, para o presente propósito, requer um desenvolvimento mais completo do que o que foi feito até agora.

Os resultados das discussões anteriores podem ser resumidos basicamente da seguinte forma. *Em primeiro lugar*, se estivermos lidando com o multiplicador de um galvanômetro tangente, que deve formar um anel circular de raio muito grande contra o qual as dimensões da agulha e de sua própria seção transversal são muito pequenas, é óbvio que a forma dessa seção transversal tem muito pouca influência. Se, no entanto, essa forma não for deixada para determinação arbitrária, então, em primeiro lugar, a conveniência de dar à seção transversal a forma de um retângulo é evidente por razões práticas e, em segundo lugar, se a área do retângulo for dada e expressa em partes do quadrado do raio do anel $= 2\varepsilon^3$, a regra simples para a proporção dos dois lados desse retângulo é que a altura do retângulo em relação à base se comporte como $\varepsilon : 2$.

Em segundo lugar, se estivermos lidando com o multiplicador de um galvanoscópio, que deve envolver a agulha tão firmemente quanto o movimento livre da agulha permitir, então apenas o formato do enrolamento que inicialmente envolve a agulha deve ser considerado como dado. Como regra geral, esse enrolamento formará uma figura delimitada por duas linhas paralelas e dois semicírculos. Por razões de conveniência prática, pode-se presumir que vários enrolamentos com o mesmo formato e tamanho ficam próximos uns dos outros na superfície de uma coluna que tem essa figura como base e formam a camada mais baixa dos enrolamentos do multiplicador, sobre a qual todos os outros enrolamentos são enrolados na forma de camadas paralelas. Isso dá ao multiplicador inteiro a forma de um anel, para o qual, no entanto, a forma de sua seção transversal ainda precisa ser determinada com mais detalhes.

Essa determinação é obtida considerando-se o torque⁵⁶⁷ exercido sobre a agulha por qualquer enrolamento. Ao considerar o torque dessa forma, é suficiente (como na Nota da Seção 16.10) considerar apenas dois pontos na agulha, que podem ser descritos como os polos Norte e Sul e cuja distância, $= l^0$, pode ser definida como igual ao comprimento dos dois lados paralelos do enrolamento. O torque que a corrente i que passa pelo enrolamento exerce sobre a agulha é, então, composto de várias partes, a saber: *em primeiro lugar*, o que é exercido pelos dois semicírculos nos polos da agulha que se encontram em seus eixos, se o eixo de um semicírculo for entendido como a perpendicular a seu plano erguida em seu ponto central; *em segundo lugar*, a partir do [torque] que se origina dos dois lados paralelos do enrolamento; *em terceiro lugar*, a partir do [torque] que é exercido por cada semicírculo no polo da agulha localizado no eixo do outro semicírculo. Se r denota o raio dos semicírculos e x o comprimento da perpendicular traçada de um polo de agulha até o plano do semicírculo, então são encontradas a *primeira* parte $= \pi r^2 m i / (r^2 + x^2)^{3/2}$, a *segunda* [parte] $= 2 r l^0 m i / [(r^2 + x^2) \sqrt{l^{02} + r^2 + x^2}]$, a *terceira* parte $= 2 r m i \int (l^0 \cos \varphi + r) d\varphi / (l^{02} + r^2 + x^2 + 2 r l^0 \cos \varphi)^{3/2}$, onde o valor integral deve ser considerado entre os limites $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi/2$. Se preferirmos considerar os dois *casos principais*, a saber, *primeiro*, onde $l^0 = 0$ ou os multiplicadores formam círculos, e *segundo*, onde l^0 é tão grande que x e r podem ser considerados como desaparecendo em relação a ele, então, *no primeiro caso*, a segunda parte $= 0$ e a terceira é igual à primeira, $= \pi r^2 m i / (r^2 + x^2)^{3/2}$, *no segundo caso*, a terceira

⁵⁶⁷Em alemão: *Drehungsmoment*. Ver a Nota de rodapé 30 na página 23.

parte se torna $= 2rmi/l^{02}$. Se o quociente do torque total de um enrolamento dividido por seu comprimento for chamado de torque específico, então todos os enrolamentos para os quais o torque específico é igual, no caso em que $l^0 = 0$, ou seja, quando os enrolamentos multiplicadores são circulares, são dados pela seguinte equação:

$$\frac{1}{2\pi r} \cdot \frac{2\pi r^2 mi}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \text{constante};$$

no caso em que l^0 é muito grande comparado a r e x , ou seja, quando os enrolamentos do multiplicador são muito alongados, [os enrolamentos são dados] pela seguinte equação:

$$\frac{1}{2(l^0 + \pi r)} \left(\frac{\pi r^2 mi}{(r^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{2rl^0 mi}{(r^2 + x^2)\sqrt{l^{02} + r^2 + x^2}} + \frac{2rmi}{l^{02}} \right) = \text{constante},$$

que também pode ser escrita como:

$$\frac{mi}{2l^0} \left(\frac{\pi r^2}{(r^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{2r}{r^2 + x^2} \right) = \text{constante}.$$

No primeiro caso, se colocarmos a constante $= mi/d^2$, ou, tomando d como unidade de comprimento, $= mi$, obteremos

$$\frac{r}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = 1 ;$$

no último caso, se colocarmos a constante $= mi/2l^0 d$, ou, tomando d como unidade de comprimento, $= mi/2l^0$, obteremos

$$\frac{\pi r^2}{(r^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{2r}{r^2 + x^2} = 1 .$$

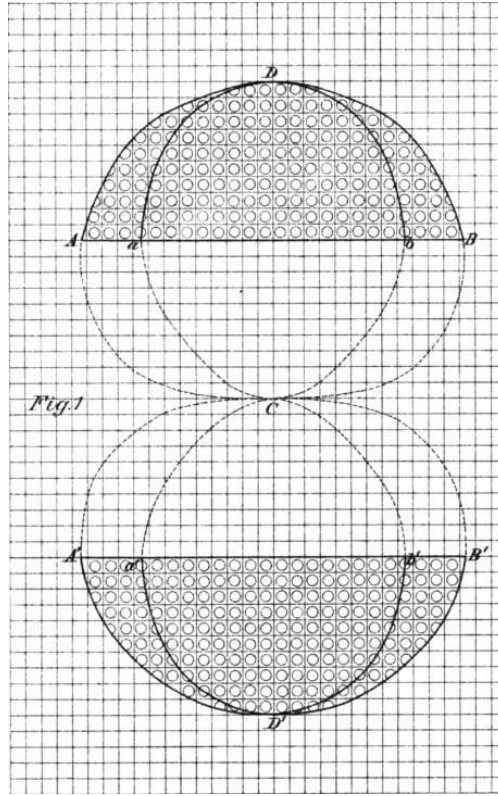
Finalmente, se colocarmos nas duas equações $r^2 + x^2 = \rho^2$, obteremos

no primeiro caso, $r = \rho^3$,

no segundo caso, $\pi r = \rho(\sqrt{1 + \pi\rho} - 1)$.

Agora, a sensibilidade do galvanômetro aumenta proporcionalmente com o torque exercido pelo multiplicador sobre a agulha, e é óbvio que, para que seu valor seja máximo, o torque específico de todos os enrolamentos localizados na superfície externa deve ser o mesmo. Disso resulta que o limite externo da seção transversal do multiplicador deve ser determinado de acordo com as equações anteriores para que o galvanômetro tenha a maior sensibilidade possível. O limite interno da seção transversal do multiplicador é dado pelo espaço a ser deixado livre para a agulha.

A Figura 1 representa então a seção transversal do multiplicador em ambos os casos. O limite interno dado é indicado pelas linhas AB e $A'B'$; [enquanto que] ADB e $A'D'B'$ são os limites externos no primeiro caso, aDb e $a'D'b'$ no último caso.



Se, no entanto, como no caso do multiplicador de um galvanômetro tangente, for preferível uma *seção transversal retangular*, para a qual apenas a proporção dos dois lados do retângulo deve ser determinada, a equação a seguir resultará no primeiro caso, em que os enrolamentos do multiplicador são circulares, se o raio do espaço cilíndrico a ser deixado livre para a agulha for definido como 1 e o lado do retângulo paralelo ao raio for rotulado como a e o lado perpendicular a ele como $2b$:

$$\frac{2}{(1+a)^2 - 1} \int_1^{1+a} \frac{r^2 dr}{(r^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{1}{b} \int_0^b \frac{(1+a) dx}{([1+a]^2 + x^2)^{3/2}},$$

ou, quando a integração é realizada,

$$\log \frac{1+a + \sqrt{(1+a)^2 + b^2}}{1 + \sqrt{1+b^2}} = \frac{3(1+a)^2 - 1}{2(1+a)\sqrt{(1+a)^2 + b^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}.$$

De acordo com isso,

para pequenos valores de a , $b = \sqrt{a}$,

para $a = 1$, $b = 1,1444$,

para $a = \infty$, $b = 0,4413 \cdot a$.

Para o último caso, resulta a seguinte equação da mesma maneira:

$$\frac{1}{a} \int_1^{1+a} \frac{\pi r^2 dr}{(r^2 + b^2)^{3/2}} + \frac{1}{a} \int_1^{1+a} \frac{2r dr}{r^2 + b^2} = \frac{1}{b} \int_0^b \frac{\pi(1+a)^2 dx}{([1+a]^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{1}{b} \int_0^b \frac{2(1+a) dx}{(1+a)^2 + x^2},$$

a partir da qual é obtido

$$\begin{aligned} & \log \frac{(1+a)^2 + b^2}{1+b^2} + \pi \log \frac{1+a+\sqrt{(1+a)^2+b^2}}{1+\sqrt{1+b^2}} \\ &= \frac{\pi(1+2a)}{\sqrt{(1+a)^2+b^2}} - \frac{\pi}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{2a}{b} \arctan \frac{b}{1+a}. \end{aligned}$$

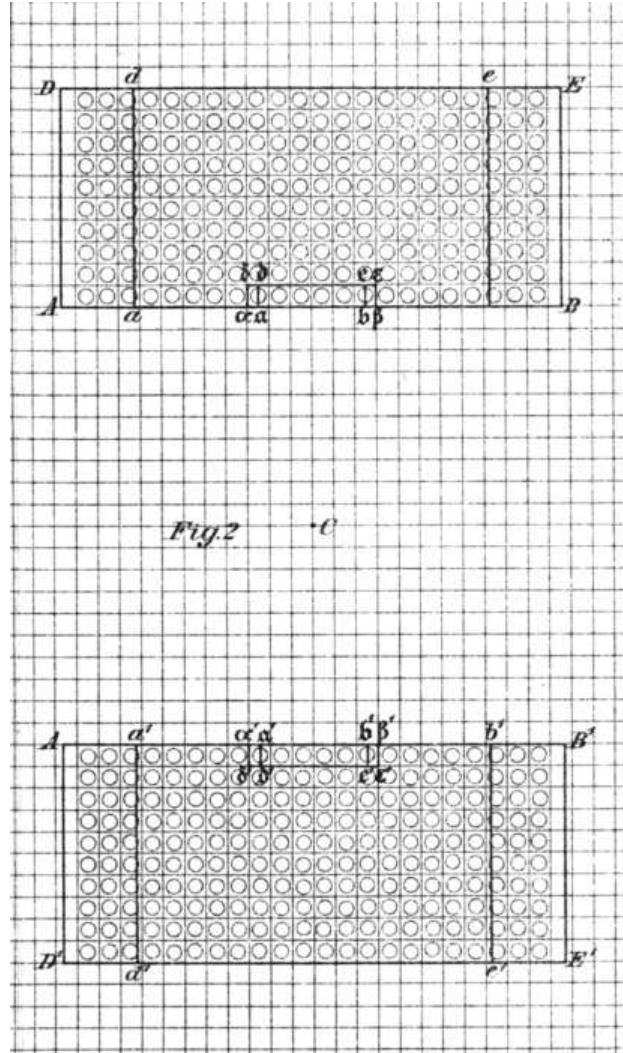
De acordo com isso,

para pequenos valores de a , $b^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{2+\pi}{4+3\pi} \cdot a = 0,5745 \cdot a$,

para $a = 1$, $b = 0,8322$,

para $a = \infty$, $b = 0,3435 \cdot a$.

A Figura 2 representa essas seções retas quando $a = 1$.



O limite interno determinado em relação ao espaço deixado livre para a agulha é indicado pelas linhas AB e $A'B'$; $ADEB$ e $A'D'E'B'$ representam as duas seções transversais retangulares de um multiplicador circular, $adeb$ e $a'd'e'b'$ as de um multiplicador alongado. A primeira seção transversal $ADEB$ é mais que o dobro do quadrado da distância c do eixo da agulha em relação ao multiplicador, enquanto a segunda $adeb$ é quase $5/3$ do mesmo quadrado. Se for necessário formar um multiplicador menor com o mesmo tamanho de espaço

deixado livre para a agulha, então $\alpha\delta\epsilon\zeta$ e $\alpha'\delta'\epsilon'\zeta'$ representarão as seções transversais do multiplicador circular, $abc\delta$ e $a'b'e'\delta'$ as [seções transversais] de um multiplicador alongado, sendo que uma das primeiras é próxima a $1/16$ [do quadrado de c] e uma das últimas é próxima a $1/21$ do quadrado de c .

Por fim, ao projetar a seção transversal do multiplicador, deve-se dar atenção especial à manutenção da *proporcionalidade das deflexões observadas com as intensidades de corrente* dentro dos limites mais amplos possíveis, o que é muito importante para fins de medição. A esse respeito, basta observar que essa proporcionalidade é tanto mais perfeita quanto maior for, para a mesma seção transversal, o lado $2b$ em relação a a ; no entanto, com a pequena extensão das deflexões na observação magnetométrica, esse aumento no lado $2b$ em comparação com a não precisa ser feito às custas da sensibilidade, o que seria o caso se b excedesse o valor determinado anteriormente. Por outro lado, deve-se evitar completamente, como acontece com frequência, que o multiplicador seja dividido em duas partes separadas por um espaço, a fim de dar permissão para a suspensão da agulha. Entre a agulha envolvida pelo multiplicador e a linha de suspensão ou a agulha a ser conectada astaticamente, é sempre fácil criar uma conexão em forma de gancho, suficientemente firme e livre ao redor da seção transversal do multiplicador, que permita espaço suficiente para o movimento da agulha sem encostar, de modo que não haja necessidade de romper o multiplicador para suspender a agulha.

16.13

Em muitos casos, para que o galvanômetro seja construído, é fornecido não apenas o espaço a ser deixado livre para a agulha, ou seja, no caso de uma forma circular, o raio c do espaço cilíndrico delimitado pelo multiplicador, mas também o próprio fio a ser usado para o multiplicador com seu volume v . Em todos esses casos, as regras desenvolvidas na Seção anterior são suficientes; pois, a partir do raio c e do volume v fornecidos, tanto a quanto b podem ser calculados, ou seja, para multiplicadores circulares, de acordo com as duas equações

$$\log \frac{1 + a + \sqrt{(1 + a)^2 + b^2}}{1 + \sqrt{1 + b^2}} = \frac{3(1 + a)^2 - 1}{2(1 + a)\sqrt{(1 + a)^2 + b^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}},$$

$$v = 2\pi(2 + a)abc^3.$$

A situação é diferente, no entanto, se, como no presente caso, a escolha do fio for totalmente opcional para obter a maior sensibilidade e a maior atenuação.

Além da composição específica (geralmente cobre), essa escolha está relacionada apenas à seção transversal e ao volume do fio. Mas como já foi dito na Seção 16.8 que é vantajoso fazer com que a resistência do fio a ser usado como multiplicador seja igual à do restante do circuito à qual o indutor pertence, essa liberdade é reduzida à escolha da seção transversal a partir da qual o volume é determinado ou à escolha do volume a partir do qual a seção transversal é determinada. Portanto, resta determinar como essa escolha pode ser feita de forma mais adequada para aumentar a *sensibilidade* e o *amortecimento*.

Para a seleção do volume a partir do qual a espessura do fio deve ser determinada em cada caso, é importante considerar, em primeiro lugar, que a *sensibilidade* também aumenta rapidamente com o aumento do volume no início, mas que esse crescimento não é constante,

mas diminui até desaparecer completamente, quando então ocorre até mesmo o caso em que a sensibilidade diminui com o aumento do volume. Portanto, há um determinado valor de volume para o qual a sensibilidade é maior.

Para determinar esse valor, a expressão da sensibilidade deve ser desenvolvida com mais precisão. A velocidade angular f que é transmitida à agulha pela unidade de corrente na unidade de tempo é usada para medir a sensibilidade; portanto, f deve ser desenvolvido primeiro.

De acordo com a lei eletromagnética, o torque exercido na agulha m do galvanômetro pelo elemento α de um enrolamento multiplicador pelo qual passa a unidade de corrente é, se r denota o raio do enrolamento e x a distância do eixo de rotação da agulha em relação ao plano do enrolamento, ambos expressos em partes do raio c do espaço deixado livre para a agulha, no caso da forma circular,

$$= \frac{\alpha m}{c^2} \cdot \frac{r}{(r^2 + x^2)^{3/2}} .$$

Multiplicando essa expressão por dx , seu valor integral de $x = -b$ até $x = +b$, dividido por $2b$, fornece o torque *médio* de todos os elementos de corrente

$$= \frac{\alpha m}{c^2} \cdot \frac{1}{r\sqrt{r^2 + b^2}} ,$$

correspondentes ao mesmo valor de r , a partir do qual o torque *médio* de todos os enrolamentos multiplicadores correspondentes ao mesmo valor de r é obtido pela multiplicação por $2\pi rc/\alpha$, a saber

$$= \frac{2\pi m}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + b^2}} .$$

Se essa expressão for multiplicada por dr , o valor integral de $r = 1$ até $r = 1 + a$, dividido por a , dará o torque *médio* de todos os enrolamentos de todo o multiplicador

$$= \frac{2\pi m}{ac} \log \frac{1 + a + \sqrt{(1 + a)^2 + b^2}}{1 + \sqrt{1 + b^2}} ,$$

a partir do qual o torque de todo o multiplicador é obtido pela multiplicação pelo comprimento l de todo o fio do multiplicador e pela divisão pelo comprimento médio de todos os seus enrolamentos $2\pi c(1 + a/2)$.

O quociente deste torque, dividido pelo momento de inércia k da agulha, é a expressão desejada de f , isto é,

$$f = \frac{2l}{(2 + a)ac^2} \cdot \frac{m}{k} \log \frac{1 + a + \sqrt{(1 + a)^2 + b^2}}{1 + \sqrt{1 + b^2}} .$$

Se w denota agora a resistência absoluta do fio do multiplicador e $\varkappa$ a resistência específica do metal (cobre) que o compõe, então a seção transversal do fio, de acordo com a lei de Ohm, é $[\varkappa/w] \cdot l$, ou seja, o volume de todo o multiplicador é

$$\frac{\varkappa}{w} l^2 = 2\pi(2 + a)abc^3 .$$

Se inserirmos o valor resultante de l na expressão anterior de f , obteremos

$$f = 2 \frac{m}{k} \sqrt{\frac{2\pi w}{c\kappa}} \cdot \sqrt{\frac{b}{(2+a)a}} \cdot \log \frac{1+a+\sqrt{(1+a)^2+b^2}}{1+\sqrt{1+b^2}} .$$

Como m , k , w , c , κ são grandezas dadas, a sensibilidade f só muda com o valor de a , tornando-se máxima se

$$\sqrt{\frac{b}{(2+a)a}} \cdot \log \frac{1+a+\sqrt{(1+a)^2+b^2}}{1+\sqrt{1+b^2}} = \text{máximo},$$

onde b é dado como uma função de a pela primeira equação dada no início da Seção. Se adicionarmos a segunda equação dada para v e a equação resultante da lei de Ohm, $l^2 = [w/\kappa] \cdot v$, para o comprimento l do fio (do qual resulta a seção transversal $= v/l$), os quatro elementos a , b , v , l podem ser determinados, nos quais estão completamente contidas todas as regras para a construção do multiplicador.

Se inicialmente levarmos em consideração a equação

$$\sqrt{\frac{b}{(2+a)a}} \cdot \log \frac{1+a+\sqrt{(1+a)^2+b^2}}{1+\sqrt{1+b^2}} = \text{máximo},$$

mas assumirmos que $b/(1+a) = \beta$ é conhecido ou dado, então, colocando $r = 1+a$, podemos escrever

$$\sqrt{\frac{r}{r^2-1}} \cdot \left(\log r + \log \frac{1+\sqrt{1+\beta^2}}{1+\sqrt{1+(\beta r)^2}} \right) = \text{máximo},$$

de onde segue por diferenciação⁵⁶⁸

$$\begin{aligned} & \frac{1+r^2}{2r^{\frac{1}{2}}(r^2-1)^{\frac{3}{2}}} \left(\log r + \log \frac{1+\sqrt{1+\beta^2}}{1+\sqrt{1+(\beta r)^2}} \right) \\ & - \sqrt{\frac{r}{r^2-1}} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{\beta^2 r^2}{1+(\beta r)^2 + \sqrt{1+(\beta r)^2}} \right) = 0 , \end{aligned}$$

que pode ser rastreada até

$$\log \frac{r+\sqrt{r^2+b^2}}{1+\sqrt{1+b^2}} = \frac{3r^2-1}{1+r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} .$$

⁵⁶⁸Essa equação apareceu no texto original como:

$$\begin{aligned} & \frac{1+r^2}{2r^{\frac{1}{2}}(r^2-1)^{\frac{3}{2}}} \left(\log r + \log \frac{1+\sqrt{1+\beta^2}}{1+\sqrt{1+(\beta r)^2}} \right) \\ & - \sqrt{\frac{r}{r^2-1}} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{\beta^2 r^2}{1+(\beta r)^2 + \sqrt{1+(\beta r)^2}} \right) = 0 . \end{aligned}$$

Se adicionarmos agora a equação dada no início dessa Seção, colocando $r = 1 + a$, a saber,

$$\log \frac{r + \sqrt{r^2 + b^2}}{1 + \sqrt{1 + b^2}} = \frac{3r^2 - 1}{2r\sqrt{r^2 + b^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}} ,$$

obteremos, a partir dessas duas equações, uma terceira equação:

$$(1 + r^2)\sqrt{1 + b^2} = 2r\sqrt{r^2 + b^2} ,$$

de onde segue

$$b^2 = \frac{3r^2 + 1}{r^2 - 1} ;$$

e se substituirmos esse valor de b^2 na primeira equação, encontraremos para a determinação de r [a seguinte equação:]

$$\log \frac{r\sqrt{r^2 - 1} + r^2 + 1}{\sqrt{r^2 - 1} + 2r} = \frac{(r^2 - 1)^{3/2}}{r(1 + r^2)} .$$

A partir dessa equação encontramos $r = 3,0951$, a partir desse valor podem ser calculados $a = r - 1$, $b = (3r^2 + 1)/(r^2 - 1)$, $v = 2\pi(2 + a)abc^3$ e $l = \sqrt{wv/\varkappa}$, a saber:

$$\begin{aligned} a &= 2,0951 , \\ b &= 1,86178 , \\ v &= 100,364 \cdot c^3 , \\ l &= 10,0182 \cdot \sqrt{\frac{w \cdot c^3}{\varkappa}} . \end{aligned}$$

Todas essas prescrições para a construção do multiplicador, portanto, resultam apenas da exigência de *maior sensibilidade*, sem qualquer consideração sobre a *atenuação*, e, portanto, resta discutir em particular como a *atenuação* se comporta com esse multiplicador. Se observarmos agora, em relação à *atenuação*, que ela geralmente depende não apenas do multiplicador, mas também do magnetismo da agulha, mas que, em nosso caso, em que se trata apenas da *teoria do multiplicador*, o magnetismo da agulha deve ser considerado como dado, pode-se facilmente provar que, nessas condições, com um determinado magnetismo da agulha, ela aumenta com a sensibilidade e, ao mesmo tempo, atinge o valor mais alto com ela, de modo que, com a mesma construção do multiplicador, que produz a maior sensibilidade, a maior atenuação também é obtida ao mesmo tempo. Se a medida de sensibilidade dada anteriormente for novamente denotada por f , então, conforme já declarado na Seção 16.6, $f^2 = [2w/k\tau] \cdot \lambda$, onde τ denota o período de oscilação com um circuito fechado (que está relacionado ao período de oscilação t com um circuito aberto como $\sqrt{1 + \lambda^2/\pi^2} : 1$) e w denota a resistência de todo o circuito, à qual pertencem o multiplicador e o indutor, além disso, $e^\lambda : 1$ foi a proporção de dois arcos de oscilação consecutivos, cujo expoente $\lambda = [k\tau/2w] \cdot f^2$, para um determinado período de oscilação, pode ser considerado como uma medida de amortecimento. Essa medida de amortecimento é, portanto, com um valor constante do fator $k\tau/2w$, proporcional ao quadrado da sensibilidade f , de onde se conclui que a maior sensibilidade também corresponde ao maior amortecimento.

Para o caso de maior sensibilidade, porém, conforme a página 300⁵⁶⁹

$$f = 2 \frac{m}{k} \sqrt{\frac{2\pi w}{c\kappa}} \cdot \sqrt{\frac{b}{(2+a)a}} \cdot \log \frac{1+a+\sqrt{(1+a)^2+b^2}}{1+\sqrt{1+b^2}} = 1,792\,27 \cdot \frac{m}{k} \sqrt{\frac{w}{c\kappa}},$$

onde w denota a *resistência do multiplicador*; a resistência do *circuito total* tinha o dobro desse valor, de tal forma que de acordo com essa designação

$$\lambda = \frac{k\tau}{4w} f^2 = 0,803\,056 \cdot \frac{\tau}{c} \cdot \frac{m^2}{k\kappa}.$$

Agora, de acordo com a Seção 16.9, a razão deve ser $e^\lambda : 1 = e : 1$, consequentemente,

$$\lambda = 0,803\,056 \cdot \frac{\tau}{c} \cdot \frac{m^2}{k\kappa} = 1.$$

Portanto, se a atenuação correspondente à sensibilidade mais alta fosse muito forte, apenas a agulha do galvanômetro precisaria ser trocada por uma mais fraca, de modo que ela pode ser facilmente configurada para que m/k e, consequentemente, a sensibilidade f , permaneçam inalteradas com essa troca.

16.14

Por uma questão de simplicidade, apenas as regras para a construção de um multiplicador com enrolamentos *circulares* foram desenvolvidas na Seção anterior, apesar de os multiplicadores *alongados* serem geralmente usados para observações mais precisas; no entanto, é óbvio que regras semelhantes para esses últimos podem ser deduzidas das disposições desenvolvidas para multiplicadores *alongados* na Seção 16.12. Para uso prático, no entanto, esse desenvolvimento mais preciso raramente será necessário, mas será suficiente configurar a seção transversal de um multiplicador *alongado* de acordo com as regras fornecidas na Seção 16.12, mas, caso contrário, seguir as regras fornecidas na Seção anterior para multiplicadores circulares, apenas com a modificação de que a expressão da sensibilidade f é reduzida na proporção de

$$1 : \frac{2+\pi}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi c(1+a/2)}{\pi c(1+a/2)+l^0}},$$

de acordo com a qual a proporção de dois arcos de oscilação consecutivos também deve ser modificada, ou seja, seu expoente deve ser colocado como:

$$\lambda = 0,803\,056 \cdot \left(\frac{2+\pi}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{\pi c(1+a/2)}{\pi c(1+a/2)+l^0} \cdot \frac{\tau}{c} \cdot \frac{m^2}{k\kappa},$$

consequentemente, como, de acordo com a Seção 16.9, devemos ter $e^\lambda : 1 = e : 1$,

$$0,803\,056 \cdot \left(\frac{2+\pi}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{\pi c(1+a/2)}{\pi c(1+a/2)+l^0} \cdot \frac{\tau}{c} \cdot \frac{m^2}{k\kappa} = 1.$$

⁵⁶⁹A página 300 corresponde à página 49 do Volume 4 das *Obras* de Weber.

É suficiente aqui, como na Nota da Seção 16.10, considerar apenas uma única espira do multiplicador, cujo torque é reduzido para grandes valores de l^0 na proporção de $2\pi : 2 + \pi$. Além disso, à medida que a massa do fio aumenta proporcionalmente a $\pi c(1 + a/2) : \pi c(1 + a/2) + l^0$ devido ao alongamento do multiplicador, com seção transversal e resistência inalteradas, o número de espiras e, proporcionalmente, o torque e a sensibilidade de todo o multiplicador diminuem proporcionalmente a $\sqrt{\pi c(1 + a/2) + l^0} : \sqrt{\pi c(1 + a/2)}$.

Por fim, deve-se observar que, na teoria do multiplicador desenvolvida aqui, também por uma questão de simplicidade, foi considerada apenas uma agulha simples *envolvida pelo multiplicador*. Para um *sistema astático de agulhas*, de acordo com a Seção 16.11, os resultados encontrados só podem ser aplicados diretamente se a agulha não envolvida pelo multiplicador for mantida tão distante do multiplicador que sua ação sobre ela desapareça em comparação com a ação sobre a agulha envolvida, o que pode ser feito facilmente. No entanto, como regra geral, esse não é o caso, mas as duas agulhas geralmente são suspensas simetricamente a uma distância igual do lado superior do multiplicador, o que resulta em um aumento na sensibilidade e na atenuação. Com um multiplicador *alongado*, a sensibilidade é aumentada em uma proporção de quase 3 : 4 e a atenuação em uma proporção de 9 : 16.

III - Observações Galvanométricas

16.15

Depois de discutir o método de medição absoluta da resistência e a construção do galvanômetro, passamos a considerar as observações, que podem ser divididas em galvanométricas e magnéticas, mas as últimas dizem respeito apenas à intensidade da componente horizontal do magnetismo da Terra, cuja determinação de acordo com o valor absoluto já foi tratada de forma tão completa por Gauss que as observações necessárias para esse fim não precisam de mais considerações.

Se as *observações galvanométricas* tiverem que ser feitas com um galvanômetro construído de acordo com as instruções da Seção anterior, o *padrão* cuja resistência é preferencialmente considerada, ou seja, o padrão destinado ao uso geral e que serve para comparar as resistências de todos os corpos, deve estar disponível e ser dado; pois ele deve fornecer o padrão pelo qual o galvanômetro deve ser construído, de modo que a resistência do circuito formado pelo multiplicador do galvanômetro e pelo indutor se torne igual à sua resistência, o que é necessário para que ambas possam ser diretamente comparadas entre si.

Se essa *resistência padrão* estivesse realmente presente e fosse fornecida, sendo seu valor absoluto pelo menos aproximadamente conhecido, ou seja, $W = 2w$, então, de acordo com as regras desenvolvidas na Seção anterior, uma abordagem mais específica para a construção de todo o aparelho galvanométrico, tanto o galvanômetro quanto o indutor, poderia ser facilmente feita da seguinte forma.

Considere, por exemplo, o raio $c = 20$ milímetros do espaço a ser deixado livre para a agulha do galvanômetro; no caso de um multiplicador *circular*, a equação $v = 100,364 \cdot c^3$ daria o volume do multiplicador = 802 912 milímetros cúbicos. Esse fio teria então de ser enrolado na forma de um anel com $2c = 40$ milímetros de diâmetro e $2bc = 74,4712$ milímetros de altura, de acordo com a regra de que $b = 1,861\,78$, resultando em um diâmetro de anel externo de $2(1+a)c = 123,804$ milímetros. — No caso de um multiplicador *alongado*, que é necessário para poder usar agulhas mais intensas e, assim, produzir um amortecimento

mais forte, a seção transversal especificada teria, a rigor, de ser um pouco alterada de acordo com as regras desenvolvidas na Seção anterior, ou seja, o diâmetro externo teria de ser um pouco aumentado, enquanto a altura do anel teria de ser um pouco reduzida, o que faria com que o tamanho da seção transversal também sofresse uma pequena alteração. No entanto, como o tamanho da seção transversal determinado exatamente de acordo com isso corresponderia a um valor máximo da sensibilidade, em que pequenas alterações na seção transversal têm apenas uma influência insignificante sobre a sensibilidade, é suficiente para a finalidade prática da pesquisa, manter inalterado o tamanho da seção transversal calculada para um multiplicador circular, para o qual, no entanto, é necessário aumentar o volume do multiplicador na proporção de $\pi c(1+a/2) : \pi c(1+a/2) + l^0$, se l^0 denota o comprimento dos lados paralelos inseridos entre os dois meios anéis.⁵⁷⁰ Agora $\pi c(1+a/2) = 128,65$ milímetros, portanto, para $l^0 = 128,65$ [mm], o volume seria = 1 605 824 [milímetros cúbicos], e para $l^0 = 385,95$ [mm], o volume seria = 3 211 648 milímetros cúbicos. Supondo a densidade média = 6 para o cobre, mas levando em conta o invólucro usada para isolamento e os espaços restantes na forma de fio cilíndrico, a massa do fio seria estimada em 9 634 944 [miligramas] para $l^0 = 128,65$ [mm], e em 19 269 888 miligramas para $l^0 = 385,95$ [mm]. Este fio teria, portanto, que ser enrolado em uma armação multiplicadora, que consiste em dois semicírculos, cada um com 20 milímetros de raio, e em dois lados paralelos, cada um de comprimento $l^0 = 128,65$ ou $l^0 = 385,95$ milímetros, o que deixaria um espaço em forma de anel para o fio, que deveria ser um pouco menor em altura do que o valor $2bc$ dado para um multiplicador circular, ou seja, um espaço de cerca de 70 milímetros de altura. O comprimento l do fio a ser formado a partir da massa especificada seria obtido a partir da equação $l^2 = [w/\varkappa] \cdot v$, onde $\varkappa$ denota a resistência [específica] do fio com 1 milímetro de comprimento e 1 milímetro quadrado de seção transversal, para a qual em um número redondo, com a densidade assumida = 6, pode ser calculado o valor $\varkappa = \frac{1}{6} \cdot 2\,000\,000$. Assim, para $l^0 = 128,65$ [mm] o valor é $l = 2,1949\sqrt{w}$, entretanto, para $l^0 = 385,95$ [mm], o valor é $l = 3,104\sqrt{w}$. Assim, por exemplo, se a resistência padrão dada fosse $W = 2w = 2 \cdot 10^{10}$, então a massa especificada para o caso $l^0 = 128,65$ resultaria em um comprimento de fio de 219 490 milímetros, que formaria 426 voltas, para o caso $l^0 = 385,95$ um comprimento de fio de 310 400 milímetros seria produzido, que formaria 302 voltas.

No que diz respeito à fabricação do *sistema astático de agulhas*, o momento de inércia k do mesmo pode ser dividido entre o das duas agulhas e o da sua peça de ligação fixa juntamente com o espelho e outros acessórios. Este último pode ser considerado dado, pois independe da escolha das agulhas e é assumido, por exemplo, para milímetros e miligramas como unidades de comprimento e massa, = $20 \cdot 10^6$. O comprimento das agulhas, que deve depender do comprimento do multiplicador, também pode ser estimado em no máximo 150 [mm] para $l^0 = 128,65$ [mm], e no máximo 400 milímetros para $l^0 = 385,95$ [mm], onde o momento de inércia das duas agulhas deve ser calculado no primeiro caso = $\frac{1}{12} \cdot 150^2 \cdot p$, no último caso = $\frac{1}{12} \cdot 400^2 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^3 p$, assumindo agulhas finas e homogêneas de formato semelhante e a massa do par menor de agulhas sendo denotada por p . De acordo com isso, o momento de inércia de todo o sistema de agulhas astáticas é, para $l^0 = 128,65$ [mm], $k = 20 \cdot 10^6 + \frac{1}{12} \cdot 150^2 \cdot p$, para $l^0 = 385,95$ [mm], $k = 10 \cdot 10^6 + \frac{1}{12} \cdot 400^2 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^3 \cdot p$. O período de oscilação do sistema pode ser adaptado às necessidades da observação escolhendo adequadamente o fio de suspensão, de acordo com as quais é assumido o período de oscilação $\tau = 30$ segundos. Uma vez que a resistência [específica] do fio tendo 1 milímetro de comprimento e 1 milímetro quadrado de

⁵⁷⁰Isto é, entre os dois semi-círculos.

seção transversal foi agora considerada como $\varkappa = \frac{1}{6}2\,000\,000$, então de acordo com a equação na Seção 16.14

$$0,803\,056 \cdot \left(\frac{2+\pi}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{\pi c(1+a/2)}{\pi c(1+a/2)+l^0} \cdot \frac{\tau}{c} \cdot \frac{m^2}{\varkappa k} = 1 ,$$

para $l^0 = 128,65$ [mm] o valor do magnetismo m de uma agulha⁵⁷¹ é igual à média geométrica dos dois números 824 880 e $20 \cdot 10^6 + 1875p$; para $l^0 = 385,95$ [mm] é igual [à média] dos dois números 1 649 760 e $20 \cdot 10^6 + 252\,840p$. Se a massa de uma agulha menor for considerada como $\frac{1}{2}p = 50\,000$ miligramas, seu momento magnético deverá ser = 13 083 000, o que significa que para cada miligrama deve haver em média 261,66 unidades; a massa da agulha maior com formato semelhante seria então de 948 160 miligramas e seu momento magnético deveria ser = 204 310 000, portanto 215,48 unidades para cada miligrama. No entanto, agulhas magnéticas deste tamanho e resistência são fáceis de produzir.

De acordo com o comentário feito no final da Seção 16.14, estas disposições apenas se aplicam a um *sistema astático de agulhas* se a agulha exterior for mantida suficientemente afastada do multiplicador. No entanto, se o dispositivo for configurado de tal forma que o lado superior do multiplicador fique simetricamente entre as duas agulhas, isso resulta na mudança da equação anterior de que a unidade no segundo termo deve ser trocada pela fração 9/16, após o que os momentos magnéticos das agulhas são obtidos numa proporção de 4:3 menores, nomeadamente para a agulha menor = 9 812 250, para a agulha maior = 153 232 500 unidades.

Finalmente, no que diz respeito ao *indutor*, ele deve ser construído de tal forma que o comprimento $2\pi\Sigma r$ do fio utilizado para ele tenha uma resistência igual à resistência w do multiplicador após deduzir a resistência dos fios de conexão; portanto, se todos os fios forem do mesmo tipo, será $2\pi\Sigma r = l - l'$, se l' denotar o comprimento dos dois fios de conexão. O valor integral da corrente produzida por um impulso de indução é então, com o magnetismo terrestre indutor T , $\int idt = [2\pi T/2w] \cdot \Sigma r^2$, e, conseqüentemente, a velocidade angular transmitida ao sistema astático de agulhas por tal impulso de indução de acordo com a Seção 16.13, $\gamma = f \cdot \int idt = 2\pi T \cdot \Sigma r^2 \cdot \sqrt{1/wk\tau}$, se τ denota o período de oscilação com circuito fechado e na proporção $e^\lambda : 1$ de dois arcos de oscilação consecutivos $\lambda = 1$. A partir desta velocidade angular γ , se for dada à agulha na posição de repouso, obtemos o tamanho da primeira deflexão subsequente $\alpha = \gamma\tau \cdot \frac{1+e^2}{\sqrt{1+\pi^2}} \cdot e^{-(\frac{3}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{\pi})}$, ou, se substituirmos o valor para γ ,

$$\alpha = 2\pi T \cdot \Sigma r^2 \cdot (1+e^2) \sqrt{\frac{\tau}{(1+\pi^2)wk}} \cdot e^{-(\frac{3}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{\pi})} .$$

Se o raio de todas as espiras indutoras fossem os mesmos e seu número for n , então o comprimento total do fio seria $l - l' = 2n\pi r$ e $\Sigma r^2 = nr^2 = [(l - l')/2\pi] \cdot r$. Após substituir esse valor, obtemos a partir da equação anterior

$$r = \frac{\alpha}{(1+e^2)(l-l')T} \cdot \sqrt{\frac{(1+\pi^2)wk}{\tau}} \cdot e^{\frac{3}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{\pi}} ,$$

onde α pode ser considerado tão grande quanto permitir a escala com a qual as deflexões da agulha devem ser observadas, uma vez que as deflexões a serem observadas usando o método de retorno nunca atingem o valor α . Se, como normalmente acontece com magnetômetros, for

⁵⁷¹Ou seja, o valor de seu momento magnético m .

necessária uma escala de 1 metro de comprimento a uma distância de 5 metros do espelho,⁵⁷² então pode ser colocado $\alpha = 1/20$ e $T = 1,81$ (como é atualmente o caso em Göttingen), então, como foi assumido $\tau = 30$, obtém-se

$$r = 0,009\,799 \cdot \frac{\sqrt{wk}}{l - l'}.$$

No exemplo já dado, onde $W = 2w = 2 \cdot 10^{10}$, isto resulta no *primeiro* caso, nomeadamente com um multiplicador para o qual $l^0 = 128,65$, $l = 219\,490$ e $k = 20 \cdot 10^6 + 1875p$, para $p = 100\,000$ e $l' = 10\,000$, $r = 67,38$ milímetros; no *segundo* caso, nomeadamente em um multiplicador para o qual $l^0 = 385,95$, $l = 310\,400$ e $k = 20 \cdot 10^6 + 252\,840p$, para os mesmos valores de p e l' , $r = 518,9$ milímetros. No entanto, deve notar-se que, no caso de um sistema astático de agulhas, assumiu-se que a agulha exterior estava tão afastada do multiplicador que a sua ação sobre ela desapareceu em comparação com aquela [ação] sobre a agulha incluída. Mas se ambas as agulhas estivessem simetricamente colocadas em relação ao lado superior do multiplicador, r teria que ser reduzido quase na proporção de 4:3, e então no *primeiro* caso seria $r = 50,53$ [mm], no *segundo* caso seria $r = 389,18$ milímetros.

Porém, se esses raios encontrados não se ajustarem corretamente para uma medição precisa ou rotação conveniente do indutor, basta usar um tipo de fio diferente do multiplicador para construir o indutor. Se, por exemplo, o raio deve ter o valor μr em vez de r , pegue então um fio cujo comprimento e seção transversal estão relacionados aos do fio multiplicador como $1 : \mu$; a resistência e a soma das áreas circulares delimitadas por todas as espiras e, consequentemente, também as ações produzidas por um impulso de indução, permanecerão completamente inalteradas.

Com um aparelho fabricado desta forma, de acordo com todas as regras prescritas, seriam feitas as *observações galvanométricas* a partir das quais (em conjunto com a medição da força magnética horizontal da Terra) a *resistência padrão* dada deveria ser determinada de acordo com o seu valor absoluto. — Entretanto, tal aparelho não pode ser fabricado atualmente, pois ainda não existe o padrão utilizado para sua construção, que é de uso geral e serve para comparar as resistências de todos os corpos.

Se, como já foi referido, não se trata da determinação definitiva de tal *resistência padrão*, mas apenas de testar as *observações galvanométricas* necessárias para tal, que requerem uma precisão pelo menos igual à das outras observações, bastam as observações com um aparelho que não esteja em conformidade com todas as regras prescritas, se apenas os desvios tiverem pouca influência na precisão ou se a sua influência puder ser determinada com facilidade e precisão. As seguintes observações são, portanto, suficientes para este propósito.

16.16

As observações a seguir foram feitas com um aparelho que se desviava das prescrições fornecidas apenas por ter sido utilizado um indutor já existente e precisamente conhecido, cuja resistência era significativamente maior que a do multiplicador. A influência resultante nas observações é fácil de determinar e será discutida com mais detalhes a seguir. Este desvio não apresenta, portanto, nenhuma desvantagem significativa se for simplesmente uma questão de testar a segurança e a precisão que podem ser alcançadas nas *observações galvanométricas*, e as seguintes observações feitas com ele podem ser muito bem utilizadas para este propósito.

⁵⁷²Ver a Nota de rodapé 22 na página 18.

A Tabela a seguir contém um conjunto dessas observações feitas pelo *método de retorno*, dispostas em cinco colunas de tal forma que, em ordem temporal, a *primeira* coluna contém as observações 1, 5, 9 e assim por diante, a *segunda* contém as observações 2, 6, 10 e assim por diante, a *terceira* contém as observações 3, 7, 11 e assim por diante, a *quarta* contém as observações 4, 8, 12 e assim por diante. As observações nas duas primeiras colunas são as elongações da agulha do galvanômetro antes e depois dos impulsos de indução *negativos*; as observações nas duas últimas colunas são as elongações que inicialmente precedem e seguem os impulsos de indução *positivos*. Os números são as divisões da escala observadas no momento de maior elongação.

1.	2.	3.	4.
661,5	600,9	844,8	904,9
659,6	598,7	842,7	903,0
657,2	596,2	840,0	900,4
654,5	593,5	837,5	897,7
751,7	590,4	834,8	894,8
649,5	588,3	832,6	892,7
647,3	586,2	830,5	890,8
645,4	584,7	828,2	889,0
643,3	582,3	826,7	886,7
641,4	580,4	824,3	884,5
639,2	578,0	822,3	882,6
637,5	576,6	820,3	881,3
635,2	574,8	819,0	879,7
634,2	573,9	817,9	879,3
632,8	573,1	816,1	877,0

A posição de repouso da agulha pode ser determinada a partir de quatro observações consecutivas, no instante caindo simetricamente no meio entre essas observações. A média entre dois desses períodos sucessivos de repouso fornece então o período de repouso que corresponde ao instante de elongação intermediária. Desta forma, foram calculadas as posições de repouso correspondentes a todas as observações de elongação individuais da Tabela anterior e as larguras de elongação resultantes após a sua dedução foram compiladas na Tabela seguinte: os dois primeiros e os dois últimos dados desta Tabela são determinados com a inclusão de duas observações anteriores e duas das observações da Tabela anterior subsequentes que foram feitas exclusivamente para este fim.

1.	2.	3.	4.
-92,49	-152,46	+92,01	+152,63
-92,14	-152,54	+92,00	+152,91
-92,24	-152,57	+91,89	+152,96
-92,29	-152,64	+92,05	+152,99
-92,29	-152,89	+92,15	+152,69
-92,07	-152,74	+92,10	+152,74
-92,14	-152,74	+92,04	+152,76
-92,16	-152,35	+91,64	+153,00
-92,21	-152,74	+92,19	+152,66
-92,10	-152,52	+91,93	+152,70
-92,05	-152,76	+91,99	+152,68
-92,00	-152,49	+91,66	+153,18
-92,54	-152,57	+91,95	+152,89
-92,36	-152,47	+91,75	+153,43
-92,75	-151,94	+91,49	+152,91
-92,255	-152,561	+91,923	+152,875

À primeira vista, existe uma concordância muito satisfatória entre estas observações, o que se torna ainda mais claro quando se considera que cada pequena perturbação que reduz ou aumenta ligeiramente a elongação antes de um impulso de indução causa um aumento ou redução da próxima elongação. As médias das duas primeiras e das duas últimas colunas, nas quais essas influências opostas quase se equilibram, fornecem, portanto, um teste ainda mais definido da precisão dos resultados que podem ser obtidos por este método de observação. Essas médias são as seguintes.

1. 2.	Diferença da média.	3. 4.	Diferença da média.
-122,475	+0,067	+122,320	+0,079
-122,340	-0,068	+122,455	-0,056
-122,405	-0,003	+122,425	-0,026
-122,465	+0,057	+122,520	-0,121
-122,590	+0,182	+122,420	-0,021
-122,405	-0,003	+122,420	-0,021
-122,440	+0,032	+122,400	-0,001
-122,255	-0,153	+122,320	+0,079
-122,475	+0,067	+122,425	-0,026
-122,310	-0,098	+122,315	+0,084
-122,405	-0,003	+122,335	+0,064
-122,245	-0,163	+122,420	-0,021
-122,555	+0,147	+122,420	-0,021
-122,415	+0,007	+122,590	-0,191
-122,345	-0,063	+122,200	+0,199
-122,408	+0,095	+122,399	+0,089

Daqui se vê que a diferença entre os valores individuais e sua média é, em média, inferior a 1/10 de uma divisão da escala.

16.17

De acordo com a precisão do método de observação examinado na Seção anterior, é suficiente para uma consideração mais aprofundada nos atermos apenas às quatro médias das elongações observadas, a saber, correspondentes às quatro colunas:

-92, 255	-152, 561	+91, 923	+152, 875

Neste caso, a primeira da terceira elongação e a segunda da quarta elongação devem agora ser opostamente iguais. A razão pela qual isto não é exatamente verdade é que, como resultado da diminuição gradual na posição de repouso da agulha do galvanômetro, que é imediatamente reconhecível a partir das observações listadas na Seção anterior, os impulsos de indução individuais não ocorrem exatamente no instante em que a agulha passou pela posição de repouso, mas em um instante em que a agulha passou por um ponto da escala ligeiramente superior (nomeadamente aquele que estava em repouso pouco antes), do qual se segue facilmente que com um ponto de repouso decrescente uniformemente, a primeira e a terceira elongações são quase tão pequenas quanto a segunda e a quarta tiveram que ser consideradas grandes demais. Este declínio gradual na posição de repouso foi resultado do efeito elástico retardado⁵⁷³ do fio de ferro recentemente suspenso que sustentava a agulha do galvanômetro, e desapareceria com o tempo. Não pareceu necessário esperar por este tempo porque, dada a uniformidade do declínio, não haveria influência prejudicial na medição. Também é fácil levar em conta esta influência adicionando uma pequena correção $+x$ às elongações observadas. Portanto se, em vez das elongações observadas, colocarmos

$-92, 255 + x$	$-152, 561 - x$	$+91, 923 + x$	$+152, 875 - x$

e $x = 0, 1615$, obteremos os valores corrigidos:

-92, 0935	-152, 7225	+92, 0845	+152, 7135

que não se desviam da simetria exigida em $1/100$ de uma divisão da escala.

Para uma consideração mais aprofundada, onde apenas a diferença da quarta e da segunda elongação $= 2a'$ e da terceira e da primeira $= 2b'$ são levadas em consideração, essas correções não são necessárias porque essas diferenças são independentes disso, a saber:

$$\begin{aligned} 2a' &= 305, 436 , \\ 2b' &= 184, 178 . \end{aligned}$$

Se r denotar a distância entre o espelho e a escala e se colocarmos

$$\begin{aligned} a' &= r \tan 2\varphi , \\ b' &= r \tan 2\varphi' , \end{aligned}$$

⁵⁷³Em alemão: *der elastischen Nachwirkung*. Essa expressão pode ser traduzida como efeito elástico retardado ou residual. Esse efeito foi descoberto por Weber em 1835, [Web35] e [Dör91].

então φ e φ' serão os ângulos de deflexão da agulha do galvanômetro e, se eles forem pequenos, podem ser igualados às elongações representadas por a e b na Seção 16.10, de onde podem ser calculadas a velocidade angular γ e o decremento logarítmico λ . Para valores maiores de φ e φ' , contudo, a e b , que devem permanecer proporcionais às velocidades angulares, crescem como os senos de metade dos ângulos de deflexão, de acordo com isso deve ser colocado

$$a = 2 \sin \frac{1}{2} \varphi ,$$

$$b = 2 \sin \frac{1}{2} \varphi' ,$$

A rigor, uma pequena correção também precisaria ser adicionada a essas expressões exatas para agulhas que oscilam sem amortecimento,⁵⁷⁴ o que resultaria da teoria ainda não desenvolvida das oscilações da agulha para arcos de oscilação maiores sob a influência do amortecimento, mas que pode ser desprezada para arcos de oscilação tão pequenos como os observados nas agulhas do magnetômetro.

Se expandirmos a e b em potências de a'/r e b'/r , obteremos

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{a'}{r} - \frac{11}{64} \cdot \frac{a'^3}{r^3} + \dots ,$$

$$b = \frac{1}{2} \cdot \frac{b'}{r} - \frac{11}{64} \cdot \frac{b'^3}{r^3} + \dots .$$

Nas observações descritas na Seção anterior, de onde foram obtidos em partes da escala $a' = 152,718$ e $b' = 92,089$, a distância do espelho até a escala era $r = 3245$ divisões da escala; conseqüentemente

$$a = 0,023\,503 ,$$

$$b = 0,014\,186 .$$

16.18

As observações do galvanômetro descritas na Seção 16.16 também têm de ser acompanhadas por observações auxiliares feitas com o circuito *aberto*, relacionadas ao *período de oscilação* e ao *decrescimento dos arcos de oscilação*. Essas observações forneceram

⁵⁷⁴[Nota de Wilhelm Weber:] Para agulhas que oscilam sem amortecimento, de acordo com a Seção 16.4, a denota o produto do período de oscilação t dividido pela velocidade máxima de oscilação π . No entanto, a maior velocidade de oscilação é $= \gamma/2$ se γ denotar toda a mudança causada pelo impulso de indução, porque, sem amortecimento, a velocidade da agulha antes e depois do impulso de indução (pelo método de retorno) deve ser opostamente igual; conseqüentemente, $a = [t/2\pi] \cdot \gamma$. No entanto, uma agulha cujo período de oscilação é $= t$ oscila exatamente como um pêndulo simples de comprimento $l = gt^2/\pi^2$, que, se tiver a velocidade angular $\gamma/2$ no ponto mais baixo de sua trajetória, sobe até a altura $\frac{1}{4}\gamma^2 l^2/2g = l \sin \text{vers } \varphi$, de onde segue $\gamma/2 = [2\pi/t] \cdot \sin \frac{1}{2}\varphi$, ou seja, $a = 2 \sin \frac{1}{2}\varphi$.

Número da oscilação	Horário	Arco de oscilação
0.	11 ^h 34' 59,15"	464,0
17.	45' 23,20"	376,3
34.	55' 47,39"	307,6

A partir dessas observações, o período de oscilação reduzido a arcos infinitamente pequenos = 36,7109" de acordo com o tempo do relógio ou, após reduzir o tempo do relógio para o tempo médio, o período de oscilação com o *circuito aberto* foi

$$t_0 = 36,7061'' .$$

Para a diminuição dos arcos de oscilação quando o circuito está *aberto*, isso também resulta no decremento logarítmico

$$\lambda_0 = 0,01209 .$$

A esses resultados da observação devem ser adicionadas as constantes dos instrumentos, a saber, o momento de inércia K da agulha do galvanômetro e, para o indutor, o valor de $S = \Sigma \pi r^2$, onde r denota o raio dos enrolamentos do indutor e, finalmente, a intensidade horizontal do magnetismo da Terra encontrada pela *medição magnética* no instante e no local das observações do galvanômetro, a saber

$$\begin{aligned} K &= 1\,132\,000\,000 , \\ S &= 39\,216\,930 , \\ T &= 1,8164 . \end{aligned}$$

O indutor foi o mesmo que aquele descrito no Quinto Volume desses Tratados^{575,576} e que foi usado para medições de inclinação, onde o valor de S também foi dado. Os valores do momento de inércia K e da intensidade horizontal T do magnetismo terrestre foram determinados de acordo com as instruções de Gauss fornecidas no *Intensitas*.⁵⁷⁷

Esses resultados das observações auxiliares, somados aos das observações galvanométricas, finalmente fornecem todos os elementos para determinar a resistência do circuito formado pelo multiplicador e pelo indutor na temperatura de 17,5 graus da escala de 100 partes na qual as observações galvanométricas foram feitas, de acordo com o *valor absoluto*. Em primeiro lugar, de acordo com a teoria do método de retorno, os seguintes resultados são obtidos a partir dos valores fornecidos

$$a = 0,023\,503, \quad b = 0,014\,186, \quad t_0 = 36,706\,1, \quad \lambda_0 = 0,012\,09 ,$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{\pi^2 + \lambda_0^2}}{t_0} \left(a\sqrt{\frac{a}{b}} + b\sqrt{\frac{b}{a}} \right) \cdot \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{\pi} \log \text{nat} \frac{a}{b}\right)} = 0,003\,330\,4 ,$$

⁵⁷⁵[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. II, pág. 323.

⁵⁷⁶[Web53e, pág. 323 das *Obras* de Weber].

⁵⁷⁷Ver a Nota de rodapé 94 na página 69. Ver ainda a Nota de rodapé 37 na página 28 para o significado do valor numérico de T .

$$\lambda_1 = \log \text{nat} \frac{a}{b} = 0,50487 ;$$

então de acordo com a Seção 16.7, onde foi colocado $S = n\pi r^2$, com os valores dados de K , S e T , obtemos a resistência de todo o circuito

$$w = \frac{8S^2T^2}{K\gamma^2t_0} \cdot (\lambda_1 - \lambda_0) \cdot \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda_1^2}} = 42\,855 \cdot 10^6 \frac{\text{milímetros}}{\text{segundo}} .$$

16.19 O Padrão de Thomson e Outros Estalões

Mesmo que ainda não haja um padrão de resistência geralmente aceito e usado ao qual o resultado deduzido das observações anteriores possa ser relacionado, ainda há vários padrões que ganharam interesse especial por meio de investigações feitas com eles ou por meio de medições reduzidas a eles. O motivo específico para as observações descritas anteriormente foi determinar o valor da resistência absoluta de tal estalão, que é chamado de *padrão* de Thomson. Para essa finalidade, ele estava disponível em duas cópias, gentilmente fornecidas pelo professor William Thomson de Glasgow,⁵⁷⁸ uma em fio de cobre, cuja resistência, de acordo com o professor Thomson, aumenta em 36/10000 a cada grau da escala de 100 partes, e a outra em fio de alpaca,⁵⁷⁹ cuja resistência aumenta em 36/100000 a cada grau. Foi garantido que ambas eram exatamente as mesmas para a temperatura de 16,3 graus.

Com esse propósito especial em mente, tomou-se um cuidado especial para garantir que, mesmo que nem todos os requisitos estabelecidos na Seção anterior pudessem ser atendidos nessas observações, pelo menos a resistência da corrente formada pelo multiplicador e pelo indutor fosse a mais próxima possível da resistência do padrão, a fim de relacionar o resultado encontrado para essa corrente com essa resistência do padrão da maneira mais direta e precisa. Essa igualdade foi estabelecida dentro de 1/1850 da resistência do padrão, como foi demonstrado por uma comparação muito precisa com a cópia de cobre feita a 16,6 graus.

Isso é seguido pela resistência da cópia de cobre do *padrão* de Thomson para 17,5 graus da escala de 100 partes a partir dos resultados encontrados na Seção 16.18

$$= 42\,832\,000 \frac{\text{metros}}{\text{segundo}}$$

ou para uma temperatura de zero grau

$$= 40\,293\,000 \frac{\text{metros}}{\text{segundo}} .$$

Outro estalão foi o padrão de Siemens, já discutido na Introdução,⁵⁸⁰ que formou a base de uma escala de resistência de Siemens feita de fios de alpaca como uma unidade. De acordo com os dados de Siemens, essa *unidade de resistência* de Siemens em um fio de alpaca a uma temperatura de 15 graus da escala de 100 partes era exatamente igual à resistência de uma coluna de mercúrio de 1 metro de comprimento e 1 milímetro quadrado de seção transversal em uma temperatura de 0 grau. Se esse fio de alpaca fosse agora inserido na

⁵⁷⁸Ver a Nota de rodapé 492 na página 271.

⁵⁷⁹Em alemão: *Neusilberdraht*. A expressão *Neusilber* pode ser traduzida como alpaca, prata alemã, metal branco, prata nova ou argentan. Ela refere-se a uma liga de cobre, níquel e zinco.

⁵⁸⁰Ver a Nota de rodapé 517.

corrente formada pelo multiplicador e pelo indutor, a resistência da corrente aumentaria na proporção de 1 : 1,2395, de onde se obtém a resistência desse fio de alpaca a 17,5 graus da escala de 100 partes = 10 266 000 metros/segundo e, conseqüentemente, a 15 graus, que é a própria resistência do padrão de Siemens, = 10 257 000 metros/segundo. Entretanto, como pode ser facilmente observado, não se pode atribuir à determinação da resistência do padrão de Siemens deduzida dessa comparação a mesma precisão da determinação anterior da resistência padrão de Thomson, porque a influência dos inevitáveis erros de observação na proporção de duas resistências diferentes é muito maior do que na comparação de duas resistências muito semelhantes.

Por fim, Siemens também comparou sua resistência padrão com a *resistência padrão* de Jacobi, cujo valor absoluto, como já mencionado na Introdução,⁵⁸¹ foi de 5 980 000 metros/segundo, de acordo com uma medição anterior e menos precisa. Siemens descobriu que sua resistência padrão comportava-se em relação à de Jacobi assim como 1000 : 661,8, de onde a resistência padrão de Jacobi = 6 788 000 metros/segundo. Entretanto, o próprio Siemens observa que não tinha o padrão normal de Jacobi à sua disposição, mas que havia obtido várias cópias dele, que diferiam muito umas das outras. Esse é provavelmente o principal motivo do desvio de mais de 12 por cento, já que o erro da medição anterior pode ser estimado em 2 a 3 por cento, no máximo. De qualquer forma, esse caso pode servir como prova de como seria importante ter um centro adequadamente equipado para a disseminação geral de padrões e escalas de resistência testados com precisão.

16.20

Se forem consideradas apenas as *observações galvanométricas* referidas na Seção 16.16, o erro médio de uma distância medida na escala era de 0,092 de uma divisão da escala, de acordo com isso as distâncias consideradas na Seção 16.17 são obtidas como:

$$\begin{aligned} 2a' &= 305,436 \pm 0,092 , \\ 2b' &= 184,178 \pm 0,092 . \end{aligned}$$

Disso segue que:

$$\begin{aligned} a &= 0,023\,503 \left(1 \pm \frac{1}{3320} \right) , \\ b &= 0,014\,186 \left(1 \pm \frac{1}{2000} \right) , \end{aligned}$$

e finalmente a velocidade angular γ e o decremento logarítmico λ_1 da diminuição na oscilação obtida por um impulso de indução na agulha, como considerado na Seção 16.18

⁵⁸¹Ver a Nota de rodapé 516.

$$\begin{aligned}\gamma &= 0,003\,330\,4 \left(1 \pm \frac{1}{2554}\right), \\ \lambda_1 &= 0,504\,87 \left(1 \pm \frac{1}{865}\right).\end{aligned}$$

Caso a sensibilidade do galvanômetro pudesse ser aumentada de acordo com as normas desenvolvidas na Seção anterior, então seria obtida a distância

$$2a' = 1000 \pm 0,92 ,$$

e se o amortecimento também pudesse ser aumentado de modo que $\lambda_1 = 1$, então⁵⁸²

$$2b' = 367,9 \pm 0,92 ;$$

logo da mesma forma o erro médio de γ seria

$$\pm \frac{1}{7127} \gamma ,$$

o erro médio de λ_1 seria

$$= \pm \frac{1}{3753} \lambda ,$$

que pode ser considerado como o mais alto grau de precisão com o qual esses resultados de observações galvanométricas podem ser determinados, mas somente se a sensibilidade e a atenuação forem reguladas da maneira indicada. Além disso, os erros na divisão da escala e na medição da distância do espelho em relação à escala não são levados em conta aqui, porque não devem ser considerados puramente galvanométricos, mas como observações auxiliares.

Finalmente, no entanto, a descrição do aparelho com o qual as observações que acabamos de considerar foram feitas mostra a facilidade com que a sensibilidade e a atenuação necessárias podem ser realmente produzidas. Pois já foi mencionado na Seção 16.16 que esse aparelho se desviava substancialmente das regras prescritas na Seção anterior apenas porque usava um indutor já existente e precisamente conhecido, cuja resistência era significativa, ou seja, quase quatro vezes maior que a do multiplicador. Portanto, apenas a seção transversal do fio do indutor precisaria ser aumentada na proporção de 3 : 8, e a resistência de todo o circuito teria sido reduzida na proporção de 8 + 2 : 3 + 2, de modo que a sensibilidade e a atenuação teriam sido aumentadas na proporção oposta, ou seja, na proporção de 1 : 2.

Acontece mesmo que a sensibilidade, bem como a atenuação, poderiam facilmente ser aumentadas muito além dos limites prescritos, o que significaria que as regulamentações dadas na Seção 16.9 relativamente a estes limites entrariam realmente em vigor.

Por fim, conclui-se que não é por causa das *observações galvanométricas* que o valor absoluto de uma determinada resistência do padrão não seria obtido com grande certeza e

⁵⁸²No texto original a próxima equação apareceu como:

$$2b' = 367,9 \pm 0,92 ;$$

precisão se as regras prescritas fossem seguidas; pois o erro decorrente apenas dessas observações, de acordo com os dados anteriores, seria de apenas cerca de $1/2530$ da resistência total; ao contrário, será difícil realizar as outras observações, especialmente as *magnéticas*, para determinar a intensidade da força geomagnética horizontal no local e no instante das observações galvanométricas, com a precisão correspondente, de onde se conclui que a incerteza inevitável no *valor absoluto da resistência padrão dada*, resultante da determinação do geomagnetismo, não seria consideravelmente aumentada pela incerteza da *medição galvanométrica* realizada de acordo com as regras prescritas, de modo que o objetivo principal deste Tratado, ou seja, mostrar como atingir essa meta, pode ser considerado cumprido.

IV - Métodos de Cópia

16.21

Das duas Seções anteriores, depreende-se que um aparelho galvanométrico para medição absoluta de resistência só pode ser fabricado para a medição de *uma determinada resistência padrão*, o que também é suficiente porque, dada a comparabilidade das resistências de todos os corpos entre si, só é necessário o conhecimento exato de *uma* resistência do padrão por medida absoluta para obter um conhecimento indireto dos valores absolutos de resistência de todos os corpos e fazer todas as aplicações possíveis.

No entanto, as mesmas regras se aplicam à seleção e determinação de tal *resistência padrão* quanto à seleção e determinação de *unidades fundamentais*⁵⁸³ *de outros tipos de grandezas*: somente são adequados para o estabelecimento de unidades fundamentais aqueles tipos de grandezas cujas dimensões existentes possam ser preservadas inalteradas, movidas de um lugar para outro à vontade e reproduzidas por um método de cópia mais preciso. Sempre que essas condições puderem ser atendidas, o estabelecimento de tal *unidade fundamental* também deve parecer desejável devido à importância prática da simplificação das medições que podem ser obtidas dessa forma, que, ao mesmo tempo, ganham em refinamento e precisão. No entanto, quando essas condições não puderem ser atendidas, a determinação de uma *unidade* é necessária, mas ela não precisa ser uma *unidade fundamental*, podendo também ser uma *unidade derivada*, ou seja, uma *unidade absoluta que remonta às unidades fundamentais de outros tipos de grandezas*. Por exemplo, as velocidades estão entre os tipos de grandezas que não são adequadas para estabelecer uma unidade fundamental, porque uma velocidade não pode ser mantida inalterada, não pode ser deslocada arbitrariamente e não pode ser copiada exatamente. As linhas retas e as massas dos corpos, por outro lado, são particularmente adequadas para o estabelecimento de unidades fundamentais.

Se as *resistências galvânicas* são adequadas para a configuração de uma *unidade fundamental* em um determinado estalão ou padrão, depende apenas do fato de um resistor existente poder ser preservado inalterado, movido de um lugar para outro à vontade e reproduzido por um método de cópia mais preciso. Se uma resistência invariável for fixada em um determinado fio metálico (como em uma haste de comprimento invariável ou em um peso de massa invariável), é óbvio que a resistência existente no fio pode ser preservada inalterada juntamente com o fio e movida de um lugar para outro; portanto, resta apenas

⁵⁸³Em alemão: *Grundmaassen*. Essa expressão pode ser traduzida como unidades fundamentais, unidades de medida fundamentais, medidas fundamentais, unidades básicas, medições básicas, dimensões básicas, padrões básicos ou padrões fundamentais. Ver ainda a Nota de rodapé 513.

provar que ela também pode ser reproduzida por métodos de cópia mais refinados.

Se considerarmos que a coisa mais importante e essencial em uma *unidade fundamental*, ao lado de sua invariabilidade para todos os tempos e lugares, é seu uso geral, e se tivermos em mente as grandes dificuldades que essa introdução geral apresenta, pode parecer conveniente, por essa razão, limitar o número de tais *unidades fundamentais* o máximo possível e ampliar ainda mais o uso das *unidades derivadas*, ou seja, as *unidades absolutas* rastreadas até as unidades fundamentais de outros tipos de magnitudes; mas será facilmente reconhecido em um exame mais detalhado que, em vez de substituir as *unidades fundamentais* por *unidades absolutas*, é mais conveniente trazer as *unidades fundamentais para uma correspondência razoavelmente exata com as unidades absolutas* pelas quais elas poderiam ser substituídas, porque a *unidade absoluta* pode então representar a *unidade fundamental* em todos os lugares onde ela não está difundida.

Como pode ser visto no exemplo da unidade absoluta de resistência, a *unidade absoluta não permite a aplicação direta*, mas toda determinação de uma unidade absoluta é sempre *mediada* por certas leis da interdependência de diferentes tipos de grandezas consideradas simultaneamente em um objeto e, portanto, requer uma *combinação planejada de diferentes observações*, cuja execução causa maior esforço e trabalho, além de estabelecer limites mais estreitos para a precisão do que se os resultados fossem baseados diretamente em observações simples. Por outro lado, uma *unidade fundamental* de grandezas adequadas para esse fim é *diretamente aplicável*, combinada com maior simplicidade de medição e maior precisão dos resultados, sendo que deve ser particularmente enfatizado que a *liberdade na escolha de tal unidade fundamental* também permite que uma *unidade absoluta* realmente existente seja usada, *ou uma unidade decimal maior ou menor dela, ou pelo menos uma que se aproxime muito dela após o exame mais refinado, e assim preservar todas as vantagens associadas ao uso de unidades absolutas*, que as leis da dependência de diferentes tipos de grandezas consideradas simultaneamente em um objeto conferem umas às outras.

Por exemplo, a *unidade derivada* que usamos para as resistências é a *unidade absoluta* rastreada até as *unidades fundamentais de espaço, tempo e massa*, sendo que foram considerados como unidades fundamentais para esses últimos tipos de grandeza o *milímetro, segundo e miligrama*. Se nos atermos a essas últimas unidades fundamentais, a liberdade disponível na escolha de uma *unidade fundamental para resistências* pode muito bem ser usada para determinar uma resistência realmente existente que, após um exame minucioso, seja igual a uma *unidade decimal superior dessa medida absoluta* ou, pelo menos, chegue muito perto dela (como é o caso da unidade da Siemens, que é quase 10^{10} vezes maior do que essa unidade absoluta), como *unidade fundamental*, de modo que todas as vantagens associadas ao uso dessa *unidade absoluta* também seriam preservadas para o uso dessa unidade fundamental.

Mas deve ser possível tornar essa unidade fundamental realmente *universal ou, pelo menos, amplamente aplicável*. A única maneira de fazer isso, entretanto, é *reproduzir o padrão por cópia*, se houver um método disponível que permita que todas as cópias feitas de acordo com ele sejam consideradas *completamente idênticas* para todos os fins práticos. Não há dúvida, portanto, de que o estabelecimento de uma unidade fundamental para resistores galvânicos também é muito desejável, mas, acima de tudo, é necessário verificar se os *métodos de cópia dos resistores* cumprem o objetivo declarado. Esse exame se torna ainda mais necessário no que diz respeito à nossa investigação, pois o próprio circuito de fio do nosso aparelho galvanométrico não é adequado para servir como unidade de base, uma vez que não pode ser movido de um lugar para outro à vontade; esse circuito de fio deve, portanto, ser também uma *cópia da unidade fundamental*, que para todos os fins práticos pode ser consi-

derada completamente idêntica à unidade fundamental, de modo que todas as determinações obtidas para esse circuito também se apliquem à *unidade fundamental*.

16.22 Métodos de Cópia Sem Divisão de Corrente

A cópia é baseada no julgamento da igualdade ou desigualdade de duas quantidades. Diretamente da definição de resistência, surge agora um *primeiro* método para fazer um julgamento sobre a igualdade ou desigualdade de duas resistências, ou seja, de acordo com o seguinte princípio: *a resistência de dois condutores é igual se correntes iguais forem excitadas neles por forças eletromotrizes iguais*. Entretanto, a precisão do método baseado nesse princípio é limitada (1) pela precisão que pode ser obtida ao avaliar a igualdade de duas forças eletromotrizes que atuam em dois condutores diferentes; (2) pela precisão com que as intensidades de corrente em dois condutores diferentes podem ser observadas e comparadas. Um exame mais detalhado revela facilmente que isso estabelece limites muito mais estreitos para a comparação de resistências do que parece ser permitido ao copiar os padrões de unidade.

Um *segundo* método é o da *conexão* de acordo com o seguinte princípio: *se dois condutores forem sucessivamente conectados no mesmo circuito, no qual a mesma força eletromotriz sempre atua, a resistência dos dois condutores será igual se as intensidades de corrente forem iguais*. — Aqui, além da definição de resistência, é usada a lei de Ohm da soma das resistências dos condutores pelos quais passa a mesma corrente. — Mesmo de acordo com esse método, a precisão da comparação de duas resistências é limitada pela precisão obtida na observação das intensidades de corrente, que, mesmo com o uso dos galvanômetros mais precisos, geralmente não atende aos requisitos a serem feitos ao copiar os padrões de unidade, mesmo que seja suficiente para muitos fins práticos.

Por fim, o *terceiro* método a ser discutido em mais detalhes nas Seções a seguir é o da *divisão de corrente*, no qual dois casos podem ser distinguidos, a saber, o da divisão *simples* e o da divisão *dupla*. O método usado na *ponte ou balança* de Wheatstone baseia-se na *divisão dupla de corrente*, mas uma breve discussão sobre o método baseado na *divisão simples de corrente* deve preceder essa discussão.⁵⁸⁴

16.23 Método de Cópia com Divisão Simples de Corrente

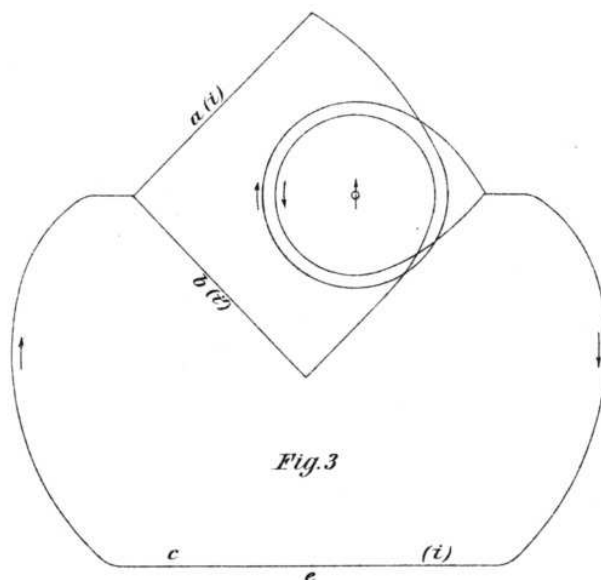
Para determinar a precisão alcançada pelo método de *divisão simples de corrente* ao comparar duas resistências entre si, é necessário voltar ao princípio desse método. Esse princípio é o seguinte: *se uma corrente se divide em duas correntes ramificadas e ambas as correntes ramificadas, cada uma por meio de um multiplicador pelo qual passa, agem na mesma agulha magnética, mas em direções opostas, então a resistência de dois condutores pelos quais essas correntes ramificadas passam será a mesma se a ação total observada na agulha magnética não sofrer nenhuma alteração devido à troca dos dois condutores*. — A ação total pode ser maior ou menor, ou até mesmo zero, o que deixa claro que a precisão obtida por esse

⁵⁸⁴Em alemão: *Wheatstone'schen Brücke oder Waage*. A chamada ponte de Wheatstone foi inventada por S. H. Christie (1784-1865) em 1833 e popularizada por C. Wheatstone (1802-1875) em 1843, [Chr33], [Whe43, pág. 325] com tradução para o francês em [Whe44b] e tradução para o alemão em [Whe44a]. Ver também [Eke01].

método na comparação de duas resistências é completamente independente da magnitude da ação total observada. — Além das leis mencionadas na Seção anterior, esse método também utiliza a lei de Ohm de *ramificação de corrente*.

16.24

O princípio estabelecido na Seção anterior pode ser facilmente comprovado da seguinte forma. Através do condutor c , Figura 3,⁵⁸⁵ passa uma corrente i produzida pela força eletromotriz e , que é dividida em duas correntes ramificadas i_1 e i' , das quais a primeira passa pelos condutores que têm as resistências a e α , e a segunda pelos condutores que têm as resistências b e β .



Sejam a e b as resistências que devem ser comparadas entre si, e é por isso que se providencia que os dois condutores que têm essas resistências possam ser trocados entre si. Os condutores com as resistências α e β formam multiplicadores para uma mesma agulha magnética, que é defletida pela corrente do ramo que passa pelo condutor α na direção oposta à que passa pelo condutor β . — Uma corrente no condutor α de intensidade = 1 desviará a agulha em uma deflexão = m ; uma corrente no condutor β de intensidade = 1 desviará a agulha em uma deflexão = $-n$. m e n podem, portanto, ser chamados de coeficientes de sensibilidade dos dois multiplicadores. — Finalmente, os dois condutores α e β se reúnem com o condutor c , fechando assim o circuito.

As próximas três equações resultam das leis de Ohm de divisão da corrente:

$$\frac{e}{i} = c + \frac{(a + \alpha)(b + \beta)}{a + \alpha + b + \beta} ,$$

$$i_1 + i' = i ,$$

$$i_1 : i' = (b + \beta) : (a + \alpha) ,$$

⁵⁸⁵Deveríamos ter $a(i_1)$ em vez de $a(i)$ na Figura 3.

além disso, existe a determinação da deflexão total da agulha pelas duas correntes dos ramos, que pode ser denotada por A , a saber:

$$A = mi_1 - ni' .$$

A partir dessas quatro equações vem que, se i , i_1 e i' são eliminadas:

$$A = \frac{m(b + \beta) - n(a + \alpha)}{c(a + \alpha + b + \beta) + (a + \alpha)(b + \beta)} \cdot e .$$

Se além disso denotarmos por A' à deflexão total da agulha após trocar a e b obteremos:

$$A' = \frac{m(a + \beta) - n(b + \alpha)}{c(a + \alpha + b + \beta) + (b + \alpha)(a + \beta)} \cdot e .$$

Disso segue que, caso seja encontrada a deflexão $A = A'$:

$$(b - a) \cdot [(m + n)(a + b + \alpha + \beta)c + m(a + \beta)(b + \beta) + n(a + \alpha)(b + \alpha)] = 0 .$$

No entanto, como o segundo fator entre colchetes consiste em uma soma de valores positivos e, portanto, não pode desaparecer, o primeiro fator deve ser colocado

$$b - a = 0$$

de onde se conclui que, se for encontrada a deflexão $A = A'$, as resistências a e b serão iguais, o que tinha de ser provado.

16.25

A precisão da comparação das duas resistências a e b entre si, de acordo com o método que acabamos de considerar, é totalmente independente da magnitude da ação total A observada, e A pode, portanto, ter um valor maior ou menor, ou ser zero; no entanto, realizar tal comparação é muito facilitado quando A é muito pequeno ou zero, o que significa que, para $a = b$, a proporção dos coeficientes de sensibilidade $m : n$ deve ser quase igual à proporção das resistências $a + \alpha : \alpha + \beta$ nas correntes de ramificação, o que pode ser melhor alcançado se ambos os multiplicadores forem feitos de fios completamente idênticos que são enrolados juntos de modo a formar enrolamentos completamente idênticos. As diferenças $m - n$ e $\beta - \alpha$, se não desaparecerem completamente, serão pelo menos muito pequenas. Se agora denotarmos o menor valor da diferença $A - A'$, que ainda pode ser observado com certeza, por Δ e o valor correspondente da diferença $b - a$ por x , então o valor de x/a deve ser desenvolvido, o que indica a menor fração até a qual a igualdade das resistências a e b pode ser garantida de acordo com esse método.

A partir dos valores de A e A' encontrados na Seção anterior, segue facilmente a seguinte equação:

$$\frac{\Delta}{ex} = \frac{A - A'}{e(b - a)}$$

$$= \frac{(m + n)[c(a + b + \alpha + \beta) + ab + \alpha\beta + \frac{1}{2}(a + b)(\alpha + \beta)] + \frac{1}{2}(a + b + 2\beta)(m - n)(\beta - \alpha) + n(\beta - \alpha)^2}{[c(a + b + \alpha + \beta) + ab + \alpha\beta + \frac{1}{2}(a + b)(\alpha + \beta)]^2 - \frac{1}{4}(b - a)^2(\beta - \alpha)^2} ,$$

para a qual, considerando que as diferenças $b - a$, $m - n$, $\beta - \alpha$ sempre são muito pequenas,

$$\frac{\Delta}{ex} = \frac{m + n}{c(a + b + \alpha + \beta) + ab + \alpha\beta + \frac{1}{2}(a + b)(\alpha + \beta)} ,$$

ou pode ser colocado ainda mais simplesmente

$$\frac{\Delta}{ex} = \frac{2m}{(a + \alpha)(a + \alpha + 2c)} ,$$

de onde é obtido

$$\frac{x}{a} = \frac{(a + \alpha)(a + \alpha + 2c)}{2mea} \Delta .$$

16.26

Uma vez determinada a precisão das comparações de resistência usando o método de divisão simples de corrente, é fácil especificar as regras para a construção apropriada do aparelho e os limites da precisão que podem ser alcançados. Em geral, é óbvio que as regras desenvolvidas na segunda Seção se aplicam à construção do galvanômetro e, em particular, ao multiplicador duplo necessário para esse fim, de acordo com o qual o espaço do multiplicador pode ser considerado como dado, ou seja, o *produto* do comprimento com a seção transversal dos fios do multiplicador. Como, de acordo com a lei de Ohm, a *razão* entre o comprimento e a seção transversal é proporcional à resistência α , n vezes o comprimento resulta em n^2 vezes o valor da resistência α . Com n vezes o comprimento, no entanto, o número de voltas do multiplicador e, portanto, também a sensibilidade m , aumenta n vezes. Dessa forma, m e α podem ser representados em suas dependências em relação a n pelas equações

$$m = nm_0 , \quad \alpha = n^2\alpha_0 .$$

Colocando esses valores de m e α nas equações da Seção anterior obtém-se

$$\frac{x}{a} = \frac{\Delta}{2m_0ea} \cdot \frac{a(2c + a) + 2(c + a)\alpha_0n^2 + \alpha_0^2n^4}{n} .$$

Percebe-se a partir disso que a precisão da comparação de resistências depende principalmente da escolha dos fios multiplicadores, pelos quais o valor de n é determinado, e que existe um valor de n e consequentemente de α para o qual essa precisão é maior ou a fração x/a é menor, ou seja,

$$n = \sqrt{\frac{a + c}{3\alpha_0} \left(2\sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{c^2}{(a + c)^2}} - 1 \right)} ,$$

$$\alpha = \frac{1}{3}(a + c) \left(2\sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{c^2}{(a + c)^2}} - 1 \right) .$$

Além disso, a precisão aumenta quanto menor se torna c/a , o que significa que ao mesmo tempo α e x/a se aproximam de certos valores limites, a saber:

$$\alpha = \frac{1}{3}a ,$$

$$\frac{x}{a} = \frac{8}{9} \cdot \frac{a}{me} \Delta .$$

Agora, $[3/4] \cdot me/a$ é o valor ao qual, para $\alpha = [1/3] \cdot a$, o valor de $me/[a + \alpha + c]$ se aproxima tanto mais quanto menor for c/a ; no entanto, $me/[a + \alpha + c]$ é a deflexão da agulha quando a corrente do ramo que passa pelos condutores b e β é removida, e seria fácil de medir se o comprimento da escala fosse suficiente para isso na alta sensibilidade m . Entretanto, a alta sensibilidade m pode ser compensada por uma pequena força eletromotriz e . Se, por exemplo, a deflexão $m\varepsilon/[a + \alpha + c] = 1000\Delta$ for encontrada para uma força eletromotriz $\varepsilon = e/100$ (se, por exemplo, uma pilha termomagnética for colocada no lugar de uma pilha de Grove),⁵⁸⁶ então, no caso limite $[3/4] \cdot me/a = 100\,000\Delta$, conseqüentemente $x/a = [8/9] \cdot [a/me] \cdot \Delta = 1/150\,000$ é a menor fração até a qual a igualdade das resistências a e b pode ser garantida.

Conclui-se que o método de cópia com divisão simples de corrente permite uma duplicação dos estalões ou padrões de resistência, que podem ser considerados completamente idênticos para todas as aplicações práticas.

16.27 Método de Cópia com Divisão Dupla de Corrente

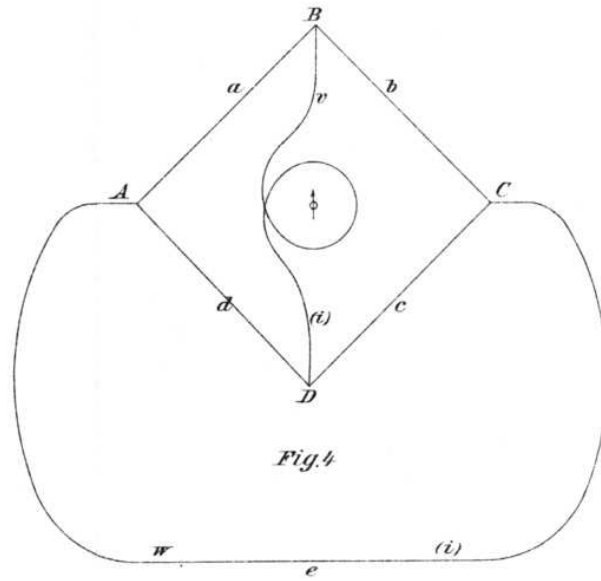
O mesmo que pode ser obtido pela divisão simples da corrente de acordo com a discussão anterior também pode ser conseguido pela divisão dupla da corrente, a saber, com a *ponte ou balança* de Wheatstone.⁵⁸⁷

A ponte de Wheatstone consiste em um condutor fechado, do qual quatro pontos, A, B, C, D da Figura 4, também estão conectados transversalmente.⁵⁸⁸

⁵⁸⁶Ver a Nota de rodapé 29 na página 20.

⁵⁸⁷Ver a Nota de rodapé 584.

⁵⁸⁸Pela discussão apresentada a seguir no texto, a corrente elétrica no condutor ligando os pontos B e D deveria estar representada por (i') em vez de (i) .



Denote as resistências AB, BC, CD, DA por a, b, c, d ; também por w à resistência do condutor que conecta o primeiro ponto A ao terceiro C , no qual a força eletromotriz e (uma pilha voltaica)⁵⁸⁹ atua e que, portanto, pode ser chamado de condutor indiviso;⁵⁹⁰ por v à resistência do condutor que conecta o segundo ponto B ao quarto D , que é chamada de *ponte* e forma o multiplicador de um galvanômetro; i denota a intensidade da corrente no condutor indiviso, i' denota a intensidade da corrente na ponte. — Se a ponte estivesse faltando, uma corrente no condutor indiviso de A a C formaria os dois ramos de corrente ABC e ADC e encontraria a resistência $w' = w + (a + b)(c + d)/[a + b + c + d]$ no total; se o condutor indiviso estivesse faltando, uma corrente na ponte de B a D formaria os dois ramos de corrente BAD e BCD e encontraria a resistência $v' = v + (a + d)(b + c)/[a + b + c + d]$ no total. — Finalmente, a resistência real que a corrente gerada por e encontra em todo o circuito é denotada por W .

Sabe-se que, na teoria da ponte de Wheatstone, a razão entre a intensidade da corrente na ponte i' e a intensidade da corrente indivisa i é determinada a partir das razões entre as resistências a, b, c, d e a resistência da ponte v , ou seja, pela equação

$$\frac{i'}{i} = \frac{ac - bd}{(a + d)(b + c) + (a + b + c + d)v} = \frac{ac - bd}{(a + b + c + d)v'}.$$

Disso resulta que, se a corrente na ponte i' desaparecer, $ac - bd = 0$ ou $a : b = d : c$. Se i' não desaparecer, seu valor e, conseqüentemente, o de $(ac - bd)$, deve ser, no mínimo, muito pequeno. Assumindo isso, adicionamos à equação especial para a ponte de Wheatstone a equação geral dada pela lei de Ohm, a saber

$$i = \frac{e}{W},$$

e desenvolvemos a resistência total W em uma série que progride de acordo com as potências de $(ac - bd)$, sendo que, no entanto, com o pequeno valor assumido de $(ac - bd)$, todos os termos que contêm uma potência maior do que o quadrado dessa quantidade podem ser considerados como desaparecendo. Assim, obtém-se

⁵⁸⁹Em alemão: *einer Säule*. Ver a Nota de rodapé 254 na página 154.

⁵⁹⁰Em alemão *ungetheilte Leiter*. Isto é, condutor indiviso, não separado ou que não está dividido.

$$W = w + \frac{(a+b)(c+d)}{a+b+c+d} - \frac{b(c+d) + c(a+b)}{d(b+c) + v(c+d)} \cdot \frac{1}{b} \left(\frac{ac-bd}{a+b+c+d} \right)^2 ,$$

onde $w + (a+b)(c+d)/[a+b+c+d] = w'$. Disso segue finalmente que

$$i' = \frac{ac-bd}{(a+b+c+d)v'} \cdot \frac{e}{W} = \frac{(ac-bd)e}{(a+b+c+d)v'w'} .$$

Se, como na Seção anterior, a deflexão da agulha produzida por uma unidade de intensidade de corrente na ponte for denominada m , então a deflexão produzida pela corrente i' é dada por

$$A = mi' = \frac{(ac-bd)me}{(a+b+c+d)v'w'} .$$

Se as duas resistências a e b tiverem que ser comparadas uma com a outra, defina sua diferença muito pequena $a-b = x$ e, além disso, $c-d = \delta$, que também tem apenas um valor pequeno para valores pequenos de A . Então obtemos

$$A = \frac{a\delta + cx}{2(a+c)} \cdot \frac{me}{v'w'} ,$$

e se a e b forem trocados, obtemos

$$A' = \frac{a\delta - cx}{2(a+c)} \cdot \frac{me}{v'w'} ;$$

como o fator $me/[a+b+c+d]w'$ permanece completamente inalterado por essa substituição, como pode ser visto ao colocar, no lugar de w' , seu seu valor $w + (a+b)(c+d)/[a+b+c+d]$; v' permanece inalterado pelo menos para pequenos valores de x e δ , pois então $v' = v + (a+d)(b+c)/[a+b+c+d] = v + (a+c)/2 - (\delta+x)/2$ se transforma em $v + (b+d)(a+c)/[a+b+c+d] = v + (a+c)/2 - (\delta-x)/2$; finalmente $(ac-bd) = a\delta + cx$ se transforma em $(bc-ad) = a\delta - cx$. Portanto,

$$A - A' = \frac{mec}{(a+c)v'w'} \cdot x ,$$

consequentemente, se $A - A' = \Delta$ denota o menor valor da diferença de deflexão que ainda pode ser observado com certeza, é obtida a menor fração até a qual a igualdade das resistências a e b pode ser garantida de acordo com essas observações, a saber

$$\frac{x}{a} = \frac{(a+c)v'w'}{mec} \cdot \Delta = \frac{(a+c+2v)(2ac+(a+c)w)}{2mec} \cdot \Delta .$$

Quanto menores forem as resistências da ponte v e do condutor indiviso w , menor será essa fração e, quanto menores forem v e w , mais ela se aproximará do valor de

$$\frac{x}{a} = \frac{a+c}{me} \cdot \Delta .$$

Agora $me/[a+c]$ é o valor ao qual $me/[a+c+v+w]$ se aproxima quanto menor for $v+w$; no entanto, $me/[a+c+v+w]$ é a deflexão da agulha quando as correntes do ramo que passam por b e d são eliminadas, e pode ser facilmente observada e medida, mesmo com a alta sensibilidade m do galvanômetro, se a força eletromotriz maior e usada nas observações

A e A' , como já foi dito na Seção anterior, for trocada por uma força eletromotriz menor, por exemplo, $\varepsilon = e/100$. Se a deflexão $m\varepsilon/[a + c + v + w]$ tiver uma magnitude mensurável, por exemplo, $= 1000\Delta$, então, no caso limite, $me/[a + c] = 100\,000\Delta$, consequentemente $x/a = 1/100\,000$ é a menor fração até a qual a igualdade das resistências a e b pode ser garantida.

Disso decorre que o método de cópia com divisão dupla de corrente permite um teste quase tão preciso da igualdade de duas resistências a e b quanto o método com divisão simples de corrente e, portanto, também permite a multiplicação de estalões ou padrões de resistência que podem ser considerados perfeitamente idênticos para todas as aplicações práticas; mas, nesse aspecto, o método de divisão dupla não pode, de forma alguma, ser preferido ao método de divisão única. — O método de divisão dupla tem um valor peculiar somente quando não se trata de testar a *igualdade*, mas de determinar a *razão* desconhecida de duas resistências $a : b$ que são muito diferentes uma da outra e que, quando a deflexão A desaparece, é então reconhecida como igual a uma razão de resistência conhecida $d : c$; a precisão do resultado, no entanto, depende do conhecimento exato da razão de resistência $d : c$, que deve ser fornecida.

V - Sobre os Princípios Gerais de Medição de Resistência

16.28

Os princípios da medição da resistência galvânica deveriam ser extraídos da natureza da resistência galvânica, que é uma *propriedade de corpos ponderáveis*, por exemplo, um fio de cobre, e, portanto, deveriam ser derivados da definição dada por essa propriedade. Essa definição foi estabelecida pela primeira vez com base na lei de Ohm, que determina a dependência da *intensidade da corrente* em um corpo ponderável em relação às *forças elétricas* que atuam sobre a eletricidade nele contida. De acordo com os princípios derivados dessa definição, o método para determinar a resistência de um determinado corpo (um fio de cobre) com maior precisão foi desenvolvido nas primeiras Seções deste tratado. Finalmente, na última Seção, foi discutido como as resistências de outros corpos poderiam ser comparadas com mais precisão com a resistência assim investigada.

Todas essas investigações foram vinculadas à primeira definição de resistência de condução, que se baseia na conhecida lei experimental de Ohm deduzida de medições relacionadas de forças eletromotrizes e intensidades de corrente, ou seja, não importa quão diferentes sejam as forças eletromotrizes e , assim como as intensidades de corrente i , enquanto o corpo ponderável permanecer o mesmo ao qual essas forças e correntes pertencem, o quociente e/i sempre terá o mesmo valor, enquanto assume valores diferentes para corpos diferentes, de acordo com isso o valor *constante* do quociente e/i para cada corpo é uma *propriedade do corpo* que pode servir para distingui-lo de outros corpos e é chamado de *resistência de condução*.

A *propriedade de um corpo ponderável* assim designada pelo nome de resistência deve ter suas *causas* na natureza peculiar do próprio corpo ponderável e, portanto, deve ser independente tanto das forças que agem sobre os fluidos elétricos contidos nele quanto dos movimentos em que esses fluidos são colocados; mas essas *causas*, que estão na natureza do próprio corpo ponderável, ainda não foram investigadas. Portanto, só conhecemos a

ação de sua resistência *pela experiência* e, a partir disso, só sabemos que, *dada uma força eletromotriz*, ela consiste em uma certa intensidade de corrente.

Mas se a resistência em si é uma propriedade inerente à natureza do corpo ponderável, então também podem existir *outras ações* que podem ser demonstradas pela experiência; por exemplo, pode ser que essa ação, que pode ser demonstrada pela experiência, esteja presente em qualquer corrente *dada* que passe pelo corpo, independentemente de sua origem ou das forças que a produzem. Essa ação realmente existente, que ocorre com toda corrente *dada* que passa por um corpo, é chamada de *trabalho elétrico*,⁵⁹¹ e a única questão é como essa ação pode ser observada e como pode ser comprovada sua dependência em relação à resistência de condução do corpo.

Uma corrente, como a experiência ensina, gera *calor* no fio condutor pelo qual passa, e o calor é, de acordo com a teoria mecânica do calor, uma *força viva*⁵⁹² equivalente ao *trabalho*. Assim, se o calor gerado por uma corrente puder ser considerado como *trabalho elétrico*, então esse trabalho elétrico pode ser medido, assim como a corrente que o gera. Por fim, Joule e Lenz basearam uma *lei experimental* nessas medições relacionadas da *intensidade das correntes* e do *calor* gerado por elas,⁵⁹³ da mesma forma que a lei de Ohm se baseia nas medições relacionadas das *forças eletromotrizes* e das *intensidades de corrente*, ou seja, a lei de que não importa quão diferentes sejam as intensidades de corrente i , e não importa quão diferentes sejam as produções de calor A , contanto que o corpo ponderável permaneça o mesmo ao qual essas correntes e essas gerações de calor pertencem, o quociente A/i^2 sempre tem o mesmo valor, o que também pode servir, portanto, como uma *propriedade do corpo ponderável*, para distingui-lo de outros corpos para os quais esse quociente tem outros valores.

Se essa *segunda* propriedade pudesse agora ser considerada idêntica à *primeira*, que foi

⁵⁹¹Em alemão: *Stromarbeit*. Essa expressão pode ser traduzida como trabalho elétrico, trabalho da corrente, trabalho da eletricidade ou trabalho da corrente elétrica.

⁵⁹²Em alemão: *lebendige Kraft*. A expressão em latim *vis viva* (plural *vires vivae*) é traduzida em português, inglês e alemão por, respectivamente, *força viva*, *living force* e *lebendige Kraft*. Ela foi cunhada por G. W. Leibniz (1646-1716). Originalmente a *vis viva* de um corpo de massa m deslocando-se com velocidade v em relação a um sistema de referência inercial era definida por mv^2 , isto é, o dobro da energia cinética como definida hoje em dia. Contudo, durante o século XIX muitos autores como Wilhelm Weber e Hermann von Helmholtz (1821-1894) definiram a *vis viva* como $mv^2/2$, isto é, com o mesmo valor da energia cinética atual. Em 1847 Helmholtz expressou-se como segue, [Hel47, pág. 9] com tradução para o inglês em [Hel53, pág. 119]:

Para haver uma melhor concordância com a maneira usual de medir a intensidade das forças, proponho denominar a grandeza $\frac{1}{2}mv^2$ como sendo a quantidade de *força viva*, por meio da qual ela fica idêntica à quantidade de trabalho.

Em 1872 ele fez uma definição análoga, [Hel72a, pág. 640 das *Obras* de Helmholtz] com tradução para o inglês em [Hel72b, pág. 533]:

Se denominarmos, como sempre foi feito até agora, a *força viva* ou a *energia atual* como sendo a soma das massas inerciais móveis multiplicadas cada uma pela metade do quadrado de sua velocidade, então, [...]

Weber também utilizou a expressão *força viva* como sendo dada por $mv^2/2$. Isso pode ser visto, por exemplo, em seu trabalho de 1871, [Web71, Nota de rodapé número 1, págs. 256-257 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web72, Nota de rodapé nas págs. 9-10] e [Web21d, Nota de rodapé 140, págs. 74-75].

⁵⁹³James Prescott Joule (1818 - 1889) e Heinrich Friedrich Emil Lenz (1804-1865). Ver [Jou41b]; [Jou41a] com tradução para o francês em [Jou42]; [Len43c], [Len43a], [Len43b], [Len44b] e [Len44a]. Ver também [MS20] e [Mar22].

chamada de *resistência* (a experiência realmente ensina a proporcionalidade de ambos os quocientes), isso daria origem a uma *segunda definição de resistência*, da qual surgiriam princípios completamente novos para a medição da resistência, totalmente independentes daqueles considerados anteriormente. O desenvolvimento de um método de medição de resistência com base nesses novos princípios teria primeiro de lidar com pesquisas relacionadas, *em primeiro lugar*, à precisão dos métodos de medição de calor a serem usados, *em segundo lugar*, à determinação da equivalência de calor com trabalho e, *em terceiro lugar*, ao teste da suposição de que todo o trabalho elétrico é convertido em calor. Entretanto, antes de entrar nesse novo e amplo campo de pesquisa, é necessário discutir mais detalhadamente o que pode ser feito independentemente da consideração do calor, com base apenas nas leis elétricas gerais conhecidas.

16.29 Trabalho Elétrico de Acordo com as Leis Elétricas

Só estamos falando de *trabalho* quando os pontos de aplicação de forças se movem. O trabalho A de tal ponto é o produto da componente da força que atua sobre ele, ao longo da direção de seu movimento, com a distância percorrida por ele. Entretanto, o trabalho pode ser considerado em dois sentidos, ou seja, significa o trabalho em si ou aquilo que é trabalhado. De acordo com a definição dada, A é trabalho no último sentido, enquanto o trabalho no primeiro sentido é expresso pelo quociente diferencial de A em relação ao tempo, ou seja, por dA/dt .

Com uma corrente galvânica i em um elemento condutor α , no entanto, todas as partículas dos fluidos elétricos contidos em α são pontos de aplicação das forças eletromotrizes, e esses pontos de aplicação se movem parcialmente para frente e parcialmente para trás na direção do elemento α .⁵⁹⁴ O trabalho A ou dA/dt de todos esses pontos de aplicação é o trabalho da corrente galvânica i no elemento condutor α . O fato de os pontos móveis de aplicação das forças, nesse caso, não terem massa ponderável, não tem importância para o trabalho em si, de acordo com a definição dada.

A quantidade de eletricidade *positiva* contida no elemento α é denotada por $+\alpha\varepsilon$, e a força que age sobre ela na direção α , que é proporcional a ela de acordo com a lei elétrica, é denotada por $+f$, onde f é o valor numérico que indica quantas vezes a força que fornece a unidade de velocidade à unidade ponderável de massa na unidade de tempo está contida nele. — A quantidade de eletricidade *negativa* contida no elemento α é denotada por $-\alpha\varepsilon$, e a força que atua sobre ela, dirigida para trás na direção α , é denotada por $-f$. — A velocidade com que essas massas elétricas se movem para frente e para trás na direção α deve ser indicada por $\pm u$.⁵⁹⁵ De acordo com a definição dada, o trabalho da eletricidade *positiva* no elemento α é então, durante o tempo t ,

$$A' = (+f) \cdot (+ut) = +fut ;$$

o trabalho da eletricidade *negativa* no elemento α durante o mesmo tempo,

⁵⁹⁴Isto é, de acordo com a concepção usual de uma corrente elétrica nessa época, as partículas positivas deslocariam-se em uma direção em relação ao corpo material do condutor, enquanto que as partículas negativas deslocariam-se na direção oposta.

⁵⁹⁵A velocidade aqui refere-se à velocidade das partículas elétricas em relação ao corpo material do condutor, isto é, a velocidade de deriva.

$$A'' = (-f) \cdot (-ut) = +fut ;$$

portanto, todo o trabalho da corrente galvânica no elemento α , durante o tempo t ,

$$A = 2fut .$$

Mas para o trabalho, tomado no sentido de trabalhar, obtém-se

$$\frac{dA}{dt} = 2fu .$$

A grandeza $2f$ é chamada de *força de separação absoluta*⁵⁹⁶ que atua sobre a eletricidade no elemento α , u a *velocidade de deriva absoluta*,⁵⁹⁷ sendo que nenhuma delas pode ser observada ou medida diretamente.

Em contrapartida, a chamada *força eletromotriz* e que atua sobre α e a *intensidade da corrente* i são observadas e medidas de acordo com as unidades absolutas determinadas anteriormente.

Se o trabalho elétrico realizado pela corrente for determinado em α , então as relações entre a força de separação $2f$ e a força eletromotriz e , e também entre a velocidade da arraste u e a intensidade da corrente i devem ser fornecidas, conforme já discutido na Seção 16.1. Isso se deve ao fato de que, conforme declarado lá (onde apenas f significava a força de separação absoluta denotada aqui por $2f$),

$$\frac{i}{u} = \frac{\varepsilon}{c} \sqrt{8} ,$$

$$\frac{e}{2f} = \frac{c}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{8}} ,$$

onde c é uma *velocidade constante* conhecida pelas leis fundamentais da ação elétrica, ou seja, $c = 439\,450 \cdot 10^6$ milímetros/segundo.⁵⁹⁸

Isso resulta em $2fu = ei$; conseqüentemente, a *resistência de acordo com a segunda definição*, nomeadamente o quociente do trabalho elétrico dA/dt dividido pelo quadrado da intensidade da corrente,

$$\frac{1}{i^2} \cdot \frac{dA}{dt} = \frac{2fu}{i^2} = \frac{e}{i} ,$$

é idêntica à *resistência de acordo com a primeira definição*, ou seja, o quociente da força eletromotriz e dividido pela intensidade da corrente i ,

$$\frac{e}{i} = w .$$

O *trabalho elétrico* da corrente em um condutor de corrente é, portanto, $dA/dt = wi^2$, em que i denota a intensidade da corrente e w a resistência do condutor de acordo com as unidades

⁵⁹⁶Em alemão: *absolute Scheidungskraft*. Ver a Nota de rodapé 58 na página 54.

⁵⁹⁷Em alemão: *die absolute Stromgeschwindigkeit*. A partir do contexto da discussão desse trabalho de Weber, essa “velocidade absoluta da corrente” é a velocidade das partículas elétricas em relação ao corpo material do condutor, isto é, sua velocidade de deriva em relação ao fio. Ver ainda a Nota de rodapé 102 na página 71.

⁵⁹⁸Ver a página 197. Ver também a discussão sobre a constante c de Weber no Capítulo 19.

absolutas determinadas anteriormente. Por outro lado, a *resistência de um condutor de corrente* pode ser definida em unidades absolutas como o *trabalho realizado pela unidade de corrente* no condutor. Se, portanto, o trabalho wi^2 realizado pela corrente e a intensidade da corrente i puderem ser observados independentemente um do outro de alguma forma e medidos de acordo com as unidades absolutas estabelecidas, a *resistência* de acordo com a unidade absoluta $w = wi^2/i^2$ poderá ser encontrada a partir dessas duas medições sem a necessidade de conhecer a *força eletromotriz* e pela qual a corrente foi produzida. Portanto, esses princípios fornecem um método essencialmente novo de medição absoluta de resistência.

Já foi mencionado como a observação e a medição do calor produzido por uma corrente em um condutor podem ser usadas para determinar o trabalho elétrico independentemente da intensidade da corrente; mas há outra maneira, em que não é necessário usar as premissas da teoria mecânica do calor, mas em que a lei elétrica fundamental é suficiente, de acordo com a qual o *trabalho* mensurável de *corpos ponderáveis* pode ser convertido em trabalho elétrico, de modo que o trabalho elétrico pode ser determinado pela medição do trabalho de corpos ponderáveis em movimento. Entretanto, antes de discutir mais detalhadamente esse método de medição do trabalho elétrico, deve-se fazer uma breve consideração sobre o *trabalho elétrico máximo*, que resulta diretamente da determinação do trabalho elétrico de acordo com as leis elétricas.

16.30 Trabalho Elétrico Máximo

Seja dada uma célula voltaica ou algum outro motor elétrico, que realiza um trabalho elétrico maior, às vezes menor, no condutor ao qual está conectada, dependendo da diferença [entre os condutores]; procura-se o condutor para o qual este trabalho elétrico é máximo.

Se denotarmos a resistência do condutor por w e a intensidade da corrente por i , então o trabalho elétrico nesse condutor é wi^2 de acordo com as leis elétricas, como foi mostrado na Seção anterior. No entanto, de acordo com as leis de Ohm, se e denota a força eletromotriz e w' a resistência do motor elétrico em questão, a intensidade da corrente é $i = e/(w' + w)$ e, portanto, $wi^2 = e^2w/(w' + w)^2$. O condutor para o qual o trabalho da corrente é máximo é então encontrado se, para um valor variável de w , for colocado

$$\frac{e^2w}{(w' + w)^2} = \text{máximo},$$

de onde segue

$$\frac{[(w' + w)^2e^2 - 2e^2w(w' + w)]}{[w' + w]^4} = 0,$$

isto é, $w = w'$. Em outras palavras, o trabalho elétrico no condutor é máximo quando a resistência do condutor é igual à resistência dada do motor elétrico; esse valor máximo em si, no entanto, é $e^2/4w'$, enquanto o trabalho elétrico total, no condutor e no motor elétrico considerados em conjunto, é $e^2/2w'$, ou seja, duas vezes maior. Se $w > w'$, o trabalho transferido para o condutor seria mais da metade do trabalho elétrico total, mas ainda seria menor, com o reduzido trabalho elétrico total, do que se $w = w'$.

Entretanto, o *máximo do trabalho elétrico total* ocorre quando nenhum condutor é usado no final do circuito e, conseqüentemente, nenhuma transferência de trabalho elétrico para esse condutor é possível, sendo que nesse caso o motor elétrico é fechado em si mesmo.

Esse valor máximo do trabalho elétrico total é $= e^2/w'$, ou seja, quatro vezes maior do que o trabalho elétrico que pode ser transferido para outros condutores. Isso está relacionado ao forte aquecimento das células fechadas,⁵⁹⁹ especialmente se essas células tiverem uma resistência muito baixa em relação à sua força eletromotriz, como é o caso das células de Grove, por exemplo.⁶⁰⁰

A propósito, é fácil ver que a lei estabelecida anteriormente para os galvanômetros, ou seja, que sua sensibilidade, para qualquer tamanho e forma de multiplicador, é sempre maior quando a resistência do fio multiplicador é igual à resistência do restante do circuito, também pode ser considerada como um caso único ou uma aplicação especial da lei mais geral encontrada para o trabalho elétrico máximo transmitido aos condutores.

16.31 Conversão do Trabalho dos Corpos Ponderáveis Móveis em Trabalho Elétrico Através da Interação Elétrica

Se um condutor fechado for movido contra um solenoide, ou seja, contra outro condutor fechado no qual uma determinada força eletromotriz e atua, a lei fundamental da ação elétrica resulta em forças eletromotrizes que movem os fluidos elétricos em seus condutores ponderáveis (forças de indução de Faraday)⁶⁰¹ e forças que movem os fluidos elétricos juntamente com seus condutores ponderáveis (forças eletrodinâmicas de Ampère).⁶⁰²

As *primeiras*, ou forças indutivas de Faraday, são

1. a força eletromotriz ε' que atua no *condutor fechado* de acordo com a lei de *indução Voltaica como resultado do movimento* do condutor fechado em relação ao solenoide;⁶⁰³
2. a força eletromotriz η' que atua no *condutor fechado* de acordo com a lei de *indução Voltaica como resultado da mudança na [intensidade de] corrente* no solenoide;
3. a força eletromotriz ε que atua no *solenoide* de acordo com a lei de *indução Voltaica como resultado do movimento* do condutor fechado em relação ao solenoide;
4. a força eletromotriz η que atua no *solenoide* de acordo com a lei de *indução Voltaica como resultado da alteração na [intensidade de] corrente* no condutor fechado.

As *últimas*, ou as forças eletrodinâmicas segundo Ampère, são as forças atrativas ou repulsivas exercidas por todos os elementos de corrente do solenoide sobre todos os elementos de corrente do condutor fechado.

De acordo com essa visão geral, tem-se, *em primeiro lugar*, o trabalho elétrico dA'/dt realizado pela corrente i' excitada pelas forças eletromotrizes $(\varepsilon' + \eta')$ no *condutor fechado*; *em segundo lugar*, o trabalho elétrico dA''/dt realizado pela corrente i'' excitada pelas forças eletromotrizes $(\varepsilon + \eta)$ no *solenoide*, *em terceiro lugar*, finalmente, o trabalho dA'''/dt realizado

⁵⁹⁹Isto é, nos circuitos fechados nos quais a bateria elétrica está em curto-circuito.

⁶⁰⁰Ver a Nota de rodapé 29 na página 20.

⁶⁰¹Ver a Nota de rodapé 189 na página 135.

⁶⁰²Ver a Nota de rodapé 90 na página 66.

⁶⁰³Ver a Nota de rodapé 341 na página 200.

pelas partículas *ponderáveis* em movimento do condutor fechado, sobre as quais atuam as forças atrativas e repulsivas exercidas pelos elementos de corrente do solenoide.

Se a resistência do *condutor fechado* for denotada por w' , então

$$\frac{dA'}{dt} = w' i'^2 = \frac{(\varepsilon' + \eta')^2}{w'} ;$$

se a resistência do *solenóide* for denotada por w e se e for a *força eletromotriz constante dada no solenoide*, e se $i = e/w$ for a intensidade da corrente excitada por essa força, então

$$\frac{dA''}{dt} = w(i + i'')^2 - wi^2 = \frac{(e + \varepsilon + \eta)^2 - e^2}{w} ;$$

finalmente, se a soma das componentes de todas as forças atrativas e repulsivas exercidas sobre uma partícula *ponderável* em movimento do condutor fechado por todos os elementos de corrente do solenoide, ao longo da direção do movimento, for denotada por f e a velocidade desse movimento por v , então

$$\frac{dA'''}{dt} = \sum f v .$$

Se os valores das forças eletromotrizes ε , η , ε' , η' , bem como as forças eletrodinâmicas f , que são conhecidas da lei fundamental elétrica geral, forem substituídos, será provado que

$$\int \left(\frac{dA'}{dt} + \frac{dA''}{dt} + \frac{dA'''}{dt} \right) dt = 0 ,$$

se a integração for estendida a todo o período de tempo, após o qual todas as partículas ponderáveis do condutor fechado retornam à sua posição anterior com velocidade inalterada.

Vamos nos limitar aqui a considerar o caso simples em que tanto o solenoide quanto o condutor fechado são *círculos* cujos raios podem ser denotados por r e r' . A distância entre os centros dos dois círculos é R e é tão grande que r e r' podem ser considerados como sendo insignificantes. A linha de conexão R é perpendicular ao plano solenoidal, e o condutor fechado gira em torno de seu diâmetro perpendicular a R com uma velocidade [angular] uniforme $d\alpha/dt = \gamma$, em que α denota o ângulo formado pela perpendicular ao plano do condutor fechado com R . Se definirmos então $\pi^2 r^2 r'^2 / R^3 = a$, podemos facilmente deduzir as seguintes expressões para as forças eletromotrizes a partir da lei fundamental da ação elétrica.⁶⁰⁴

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= -2a\gamma \frac{e + \varepsilon + \eta}{w} \cdot \sin \alpha , \\ \eta' &= -2a(1 - \cos \alpha) \frac{d\varepsilon + d\eta}{w dt} , \\ \varepsilon &= -2a\gamma \frac{\varepsilon' + \eta'}{w'} \cdot \frac{\sin \alpha}{1 + 3 \cos \alpha^2} , \\ \eta &= -2a\sqrt{\frac{1}{3}} \left(\frac{\pi}{3} - \arctan \left[\cos \alpha \cdot \sqrt{3} \right] \right) \frac{d\varepsilon' + d\eta'}{w' dt} . \end{aligned}$$

⁶⁰⁴A expressão $\cos \alpha^2$ deve ser entendida como $\cos^2 \alpha$.

Se agora desenvolvermos $(\varepsilon' + \eta')$ e $(\varepsilon + \eta)$ em séries de acordo com potências crescentes de a , obteremos os primeiros termos dessas séries, em relação aos quais todos os subsequentes desaparecem,⁶⁰⁵

$$\begin{aligned}\varepsilon' + \eta' &= -2a\gamma \frac{e}{w} \cdot \sin \alpha , \\ \varepsilon + \eta &= 4a^2\gamma^2 \frac{e}{ww'} \left(\frac{\sin \alpha^2}{1 + 3 \cos \alpha^2} + \sqrt{\frac{1}{3}} \left(\frac{\pi}{3} - \arctan [\cos \alpha \cdot \sqrt{3}] \right) \cos \alpha \right) ,\end{aligned}$$

e a partir disso, desenvolvido da mesma forma,

$$\begin{aligned}\frac{dA'}{dt} &= 4a^2\gamma^2 \cdot \frac{e^2}{w^2w'} \cdot \sin \alpha^2 , \\ \frac{dA''}{dt} &= 8a^2\gamma^2 \cdot \frac{e^2}{w^2w'} \cdot \left(\frac{\sin \alpha^2}{1 + 3 \cos \alpha^2} + \sqrt{\frac{1}{3}} \left(\frac{\pi}{3} - \arctan [\cos \alpha \cdot \sqrt{3}] \right) \cos \alpha \right) ,\end{aligned}$$

ou, como o coeficiente diferencial é

$$\frac{d [\sin \alpha \cdot \arctan (\cos \alpha \cdot \sqrt{3})]}{d\alpha} = \cos \alpha \cdot \arctan (\cos \alpha \cdot \sqrt{3}) - \frac{\sin \alpha^2 \cdot \sqrt{3}}{1 + 3 \cos \alpha^2} ,$$

temos

$$\frac{dA''}{dt} = 8a^2\gamma^2 \cdot \frac{e^2}{w^2w'} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \left(\frac{\pi}{3} \cos \alpha - \frac{d [\sin \alpha \arctan (\cos \alpha \cdot \sqrt{3})]}{d\alpha} \right) .$$

Por fim, se a distância de qualquer partícula ponderável do condutor fechado em relação ao seu eixo de rotação for denotada por ρ , o torque exercido pelo solenoide no condutor fechado será $D = \sum f\rho$, e a velocidade com que a partícula ponderável se move em sua órbita circular (cuja tangente coincide com a direção da força f) será $v = \rho\gamma$; consequentemente, com *velocidade angular constante* γ ,

$$\frac{dA'''}{dt} = \sum fv = \sum f\rho\gamma = \gamma \sum f\rho = \gamma D .$$

O torque D exercido pelo solenoide no condutor fechado é, entretanto, de acordo com a lei de Ampère

$$D = 2a\gamma \sin \alpha \cdot \frac{e + \varepsilon + \eta}{w} \cdot \frac{\varepsilon' + \eta'}{w'} ,$$

e se inserirmos os valores encontrados para $(\varepsilon + \eta)$ e $(\varepsilon' + \eta')$ e os desenvolvermos em potências de a , obteremos o primeiro termo [da série] em relação ao qual os outros desaparecem,

$$D = -4a^2\gamma \cdot \frac{e^2}{w^2w'} \cdot \sin \alpha^2 ,$$

consequentemente

⁶⁰⁵A expressão $\sin \alpha^2$ deve ser entendida como $\sin^2 \alpha$.

$$\frac{dA'''}{dt} = -4a^2\gamma^2 \cdot \frac{e^2}{w^2w'} \cdot \sin \alpha^2 = -\frac{dA'}{dt} .$$

Para dA''/dt , o valor integral $\int [dA''/dt] \cdot dt$ é obtido para o tempo de uma rotação completa do condutor fechado, ou seja, para o tempo após o qual todas as partículas ponderáveis retornam à sua posição anterior com velocidade inalterada, com uma velocidade angular constante $d\alpha/dt = \gamma$, [como sendo dado por:]

$$\int \frac{dA''}{dt} dt = \int 8a^2\gamma \cdot \frac{e^2}{w^2w'} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \left(\frac{\pi}{3} \cos \alpha - \frac{d [\sin \alpha \cdot \arctan (\cos \alpha \cdot \sqrt{3})]}{d\alpha} \right) d\alpha ,$$

que, considerado entre os limites α e $\alpha + 2\pi$, é = 0. Como $dA'/dt + dA'''/dt = 0$ e, portanto, $\int (dA'/dt + dA'''/dt) dt = 0$, isso resulta, entre os limites especificados, em

$$\int \left(\frac{dA'}{dt} + \frac{dA''}{dt} + \frac{dA'''}{dt} \right) dt = 0 ,$$

o que precisava ser comprovado.

A partir disso, em relação ao *trabalho das partículas ponderáveis* do condutor fechado, pode-se observar que a cada intervalo de tempo dt há uma perda de trabalho devido ao *amortecimento* causado pela indução,

$$\frac{dA'''}{dt} dt = -4a^2\gamma^2 \cdot \frac{e^2}{w^2w'} \cdot \sin \alpha^2 dt ,$$

que deve ser substituída por uma *força motriz*⁶⁰⁶ atuando no condutor fechado para que a velocidade angular γ permaneça inalterada.⁶⁰⁷ Por outro lado, no mesmo intervalo de tempo dt , há um ganho no *trabalho elétrico no condutor fechado*, a saber

$$\frac{dA'}{dt} dt = +4a^2\gamma^2 \cdot \frac{e^2}{w^2w'} \cdot \sin \alpha^2 dt$$

de mesmo valor, do que se conclui que uma conversão pura do *trabalho de corpos ponderáveis* em *trabalho elétrico* ocorreu por meio da mediação de interações elétricas.

Se, portanto, a observação indicar que a velocidade angular γ realmente permaneceu completamente inalterada, e se as *forças motrizes* fossem medidas, as quais teriam que agir sobre o condutor fechado em rotação para manter essa velocidade angular invariável, tanto com o solenoide *aberto* (em que é determinada a força motriz necessária para superar a resistência do ar e o atrito), quanto com o solenoide *fechado* (por meio do qual é determinada a força motriz necessária para superar o amortecimento elétrico juntamente com a força necessária para superar a resistência do ar e o atrito), a diferença entre as duas forças motrizes medidas, multiplicada pela velocidade angular γ , que também é fácil de medir, daria o valor de

$$-\frac{dA'''}{dt} = \frac{dA'}{dt} ,$$

⁶⁰⁶Em alemão: *Triebkraft*.

⁶⁰⁷Ou seja, a perda de trabalho deve ser substituída por algum ganho de energia devido a alguma outra fonte, para que a velocidade angular permaneça constante.

ou seja, o valor do *trabalho elétrico no condutor fechado* realizado pela corrente i' induzida nele na unidade de tempo.

Finalmente, se a medição da *intensidade da corrente* i' fosse combinada com essa medição do *trabalho elétrico* dA'/dt , o resultado seria a *resistência do condutor fechado*, de acordo com o valor absoluto,

$$w' = \frac{1}{i'^2} \cdot \frac{dA'}{dt} .$$

16.32 Determinação do Trabalho Elétrico Através da Medição de Calor, de Acordo com os Experimentos de Becquerel e Lenz

Se a resistência de um condutor tiver de ser determinada em unidade absoluta, não pelo método empregado anteriormente, medindo a *força eletromotriz* e a *intensidade da corrente*, mas pelo método apresentado por último, medindo o *trabalho elétrico* e a *intensidade da corrente*, geralmente há duas maneiras, como foi mostrado, de acordo com a diferença no método pelo qual o *trabalho elétrico* é medido. O *trabalho elétrico* pode ser medido, *em primeiro lugar*, medindo-se o *trabalho de mover corpos ponderáveis*, que é convertido em trabalho elétrico, conforme discutido na Seção anterior, e, *em segundo lugar*, medindo-se o *calor* no qual o trabalho elétrico é convertido.

O *primeiro método* foi de particular interesse porque se baseou apenas nas leis conhecidas pertencentes à teoria pura da eletricidade. A maneira como ele é realizado foi explicada na Seção anterior usando um exemplo simples, mas, na realidade, isso não levaria a nenhum resultado útil. Pelo menos as condições mais favoráveis para as observações exigidas por esse método teriam que ser discutidas com mais detalhes, mas isso não será abordado aqui, pois é fácil ignorar antecipadamente que, mesmo assim, sob as condições que sempre dependem da resistência do ar e do atrito dos corpos sólidos entre si, sob as quais todos os *corpos ponderáveis* que observamos se movem, a medição do trabalho realizado por eles ou da força motriz necessária para manter seu movimento não poderia ser realizada com precisão suficiente, mesmo sob as condições mais favoráveis.

O *último método*, no qual as leis da teoria mecânica do calor devem ser usadas, portanto, parece ser praticamente o único do qual se pode esperar determinações tão precisas do *trabalho elétrico* quanto seria necessário para determinar a resistência de condução a partir do *trabalho elétrico* e da *intensidade da corrente* com a mesma precisão que a partir da *força eletromotriz* e da *intensidade da corrente*. Portanto, é interessante dar uma olhada mais de perto no que foi alcançado dessa forma em tempos mais recentes por meio de vários experimentos realizados, especialmente por Becquerel e Lenz.

Edmond Becquerel em seu tratado: *Des lois du degagement de la chaleur pendant le passage des courants electriques à travers les corps solides et liquides — Leis de liberação de calor durante a passagem de correntes elétricas por corpos sólidos e líquidos* (Annales de Chimie et de Physique, 1843, Volume IX)⁶⁰⁸ afirma que, de acordo com seus experimentos, uma corrente que, se passasse pela água, produziria 3,383 centímetros cúbicos de gás oxí-hidrogênio⁶⁰⁹ por minuto, a uma temperatura de 0° e uma leitura de barômetro de 0,76

⁶⁰⁸Edmond Becquerel (1820-1891) foi um físico francês, ver [Bec43].

⁶⁰⁹Em alemão: *Knallgas*. Essa expressão pode ser traduzida como gás oxí-hidrogênio ou gás explosivo.

metros, produziria em um fio de platina de 44 centímetros de comprimento e pesando 0,422 gramas, tanto calor por minuto quanto 2,18523 gramas de água necessitam para aumentar sua temperatura em 1 grau.

Se adicionarmos a esses números a determinação feita por Joule,⁶¹⁰ de acordo com a teoria mecânica do calor, segundo a qual a quantidade de calor capaz de aquecer um quilograma de água de 0° a 1°, quando convertida em trabalho mecânico, fornece uma quantidade de trabalho de 423,55 quilogramas-metros, verifica-se que o calor produzido *em cada minuto* no fio de platina descrito pela corrente indicada, quando convertido em trabalho mecânico, fornece uma quantidade de trabalho de 2, 18523·0, 42355 quilogramas-metros, ou seja, o calor produzido *em cada segundo* fornece a 60ª parte dessa quantidade. A partir disso, de acordo com a *unidade de trabalho absoluta*, que reduzimos a milímetros, miligramas e segundos como as unidades fundamentais de comprimento, massa e tempo (de acordo com a qual a gravidade $g = 9811$ milímetros/segundo²), o *trabalho elétrico* resulta em

$$wi^2 = \frac{1}{60} \cdot 9811 \cdot 2,18523 \cdot 0,42355 \cdot 10^9 = 151\,340 \cdot 10^6 .$$

Além disso, no que diz respeito à *intensidade da corrente*, usamos a afirmação de que a intensidade de uma corrente que decompõe 1 miligrama de água em um segundo é $106\frac{2}{3}$ vezes maior do que a unidade absoluta de intensidade (consulte os *Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Gesellschaften der Wissenschaften*, Volume 3, página 224).^{611,612} Se calcularmos agora que 1 miligrama de água decomposta produz 1,8568 centímetros cúbicos de oxi-hidrogênio a 0° de temperatura e 0,76 metros de pressão barométrica, a intensidade da corrente descrita, que produz 3,383 centímetros cúbicos de oxi-hidrogênio *por minuto*, será em unidades absolutas,

$$i = \frac{1}{60} \cdot \frac{3,383}{1,8568} \cdot 106\frac{2}{3} = 3,2391 .$$

A partir dessas determinações emerge finalmente a *resistência em unidade absoluta do fio de platina descrito*:

$$w = \frac{wi^2}{i^2} = \frac{151\,340 \cdot 10^6}{3,2391^2} = 14\,425 \cdot 10^6 .$$

Essa resistência, multiplicada pela massa de um pedaço de fio de 1 milímetro de comprimento = $\frac{422}{440}$ e dividida pelo comprimento do fio expresso em milímetros = 440, fornece a resistência de um fio de platina de 1 milímetro de comprimento e 1 miligrama de massa de acordo com a lei de Ohm, ou seja, a *resistência específica da platina*

$$p = 31\,443\,000 .$$

Lenz, em seu tratado: *Ueber die Gesetze der Wärmeentwicklung durch den galvanischen Strom — Sobre as leis de produção de calor através da corrente galvânica* (*Annalen de Poggendorff*, 1843-44, Vols. 59 e 61)⁶¹³ fornece o tempo para aquecer 1 grama de água a 1° R⁶¹⁴

⁶¹⁰Ver a Nota de rodapé 593.

⁶¹¹[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. III, pág. 614.

⁶¹²[KW57, pág. 614 das *Obras de Weber*] com tradução para o inglês em [KW21]. Ver também [Web41c] e [Web42] com tradução para o inglês em [Web21j, pág. 199, Nota de rodapé 357].

⁶¹³Ver a Nota de rodapé 593.

⁶¹⁴Isto é, 1° Réaumur. A escala Réaumur é uma escala de temperatura proposta em 1730 pelo físico e inventor francês René-Antoine Ferchault de Réaumur (1683-1757).

através de um fio de resistência = 1 pelo qual passa uma corrente = 1 como $57\frac{1}{2}$ minutos (devido a um erro de impressão, como parece, são fornecidos $5\frac{3}{4}$ segundos), onde a *unidade de resistência* foi atribuída a um fio de cobre de 6,358 pés de comprimento e 0,0336 polegadas inglesas de diâmetro, a uma temperatura de 15°, e a *unidade de intensidade* foi atribuída a uma corrente cuja ação eletrolítica = 41,16 centímetros cúbicos de oxi-hidrogênio por hora, a 0° de temperatura e 760 milímetros de pressão barométrica.

De acordo com a teoria mecânica do calor, o calor gerado a cada segundo no fio de cobre descrito pela unidade de corrente assumida, se for convertido em trabalho mecânico, gera, de acordo com a determinação de Joule já mencionada, uma *quantidade de trabalho* de $= [5/4] \cdot [1/(60 \cdot 57,5)] \cdot 0,42355$ quilograma-metro, ou seja, de acordo com a *unidade absoluta de trabalho* (reduzida a milímetros, miligramas e segundos como unidades fundamentais de comprimento, massa e tempo), o *trabalho elétrico*

$$wi^2 = 9811 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{60 \cdot 57,5} \cdot 0,42355 \cdot 10^9 = 1506 \cdot 10^6 .$$

Além disso, para a *unidade de corrente assumida*, cuja ação eletrolítica por hora correspondia a 41,16 centímetros cúbicos de oxi-hidrogênio, o valor é encontrado após a redução à *unidade absoluta*

$$i = \frac{1}{3600} \cdot \frac{41,16}{1,8568} \cdot 106\frac{2}{3} = 0,65683 .$$

Por fim, a *resistência do fio de cobre descrita anteriormente resulta dessas determinações em unidades absolutas*

$$w = \frac{wi^2}{i^2} = \frac{1506 \cdot 10^6}{0,65683^2} = 3490 \cdot 10^6 .$$

Se a massa do fio de cobre descrito (de 6,358 pés ingleses = 1938 milímetros de comprimento) for calculada como sendo 9889 miligramas, assumindo a densidade do cobre = 8,921, então, de acordo com as leis de Ohm, multiplicando a resistência w encontrada pela massa de uma peça de 1 milímetro de comprimento, $= \frac{9889}{1938}$, e dividindo pelo comprimento do fio expresso em milímetros, = 1938, obtém-se a resistência de um fio de cobre de 1 milímetro de comprimento e 1 miligrama de massa, ou seja, a *resistência específica do cobre*

$$\varkappa = 9\,190\,000 .$$

Esse resultado, comparado com aquele deduzido dos experimentos de Becquerel, mostraria que a resistência específica do cobre seria cerca de $3\frac{1}{2}$ vezes menor do que a da platina, embora se saiba, por meio de inúmeras comparações diretas, que ela é ainda muito menor, ou seja, de acordo com os experimentos de Arndtsen, se os dados fornecidos para comprimentos iguais de fio *de seção transversal igual* forem reduzidos a comprimentos iguais de fio *de massa igual*, e a proporção de densidade do cobre em relação à platina for considerada 1 : 2,244, 15,22 vezes menor e, de acordo com os experimentos de Matthiessen, 15,93 vezes menor, ou seja, em média 15,575 vezes menor.⁶¹⁵ De acordo com isso, a resistência específica do cobre seria calculada

⁶¹⁵Adam Frederik Oluf Arndtsen (1829-1919) foi um físico norueguês treinado por Weber em Göttingen em 1857. Augustus Matthiessen (1831-1870) foi um químico e físico britânico. Ver também [RA11].

$$\kappa = \frac{p}{15,575} = 2\,018\,800$$

a partir dos experimentos de Becquerel, que se aproxima bastante da média dos valores encontrados até agora para diferentes tipos de cobre por outros meios, mas é excedida por $4\frac{1}{2}$ em magnitude pelo valor derivado dos experimentos de Lenz.

No entanto, o próprio Lenz faz as seguintes observações no trabalho indicado em relação à magnitude *absoluta* do resultado deduzido de seus experimentos:

Esse resultado é uma mera aproximação e pode servir apenas para estimativas muito aproximadas, pois nem a quantidade absoluta do espírito⁶¹⁶ nem sua capacidade de aquecimento foram determinadas com certeza. Meus experimentos atuais não tinham outro objetivo senão determinar a lei do aquecimento de fios metálicos; pretendendo fazer experimentos especiais para a determinação exata do valor absoluto desse aquecimento.

Portanto, é muito provável que, no cuidado tomado por Lenz em todos os aspectos desses experimentos, simplesmente porque sua atenção estava menos focada na determinação de valores *absolutos*, tenha ocorrido alguma confusão acidental na indicação dos valores dos coeficientes de redução, o que não tem influência sobre o único propósito de estabelecer as leis, e que é o culpado pelo grande desvio no valor *absoluto* encontrado anteriormente; pois um exame mais detalhado dos experimentos mostra evidentemente que a determinação da resistência de um corpo por esse método é bastante viável, o que também parece ser confirmado pela boa concordância entre o resultado deduzido dos experimentos de Becquerel e aqueles encontrados por outros meios; entretanto, para obter resultados totalmente confiáveis e precisos dessa forma, os *métodos de medição de calor* teriam que ser muito aprimorados e teriam que ser obtidas determinações mais precisas da *equivalência entre calor e trabalho* do que as disponíveis atualmente e, mesmo assim, a medição absoluta da resistência de um *fio condutor* usando esse método não alcançaria a precisão do resultado obtido pela medição da força eletromotriz e da intensidade da corrente.

No entanto, se os condutores galvânicos forem divididos em *condutores metálicos que não podem ser decompostos pela corrente* e *condutores úmidos que podem ser decompostos*, verifica-se que, no caso de condutores úmidos e decomponíveis, como a *água*, por exemplo, ocorre a relação oposta à dos fios condutores, ou seja, é quase impossível determinar a resistência de condutores úmidos *diretamente* medindo a força eletromotriz e a intensidade da corrente, além disso, mesmo uma determinação *indireta*, comparando a resistência desconhecida do condutor úmido com a resistência conhecida de um fio condutor, é muito difícil devido à chamada *polarização* da superfície metálica que toca o condutor úmido. É bem conhecido que, apesar de todo o esforço e cuidado, as condições de resistência dos condutores úmidos ainda são muito pouco compreendidas. Por essas razões, o *outro método de medição de resistência*, ou seja, por meio do trabalho elétrico medido (calor) e da intensidade da corrente medida, é da maior importância para esta pesquisa, pois, quando aplicado a *condutores úmidos*, apresenta vantagens tão grandes em relação ao primeiro, quanto o *primeiro* apresenta em relação ao segundo, quando aplicado a *fios condutores*. Essas vantagens se baseiam não apenas nos métodos de medição de calor mais perfeitos aplicáveis a condutores

⁶¹⁶Em alemão: *Spiritus*. Essa palavra pode ser traduzida como espírito, bebida espirituosa, álcool, combustível etc.

úmidos (água), mas, de preferência, na independência de toda a medição da consideração da *força eletromotriz*, que sempre deve ser considerada variável em todos os circuitos em que condutores úmidos são usados, porque as influências da polarização podem ser reduzidas, mas não completamente eliminadas. No entanto, a *força eletromotriz* não é capaz de ser determinada com precisão com essas mudanças irregulares.

Essa aplicação igualmente importante e interessante desse segundo método para a medição absoluta da resistência de *condutores úmidos e decomponíveis* deve ser reservada para uma discussão separada, pois não está intimamente relacionada ao assunto deste Tratado.

16.33 Sobre a Conversão de Trabalho Elétrico em Calor

O trabalho elétrico está vinculado ao movimento dos fluidos elétricos; o calor, de acordo com a teoria mecânica do calor, também está vinculado ao movimento de um corpo, que, no entanto, geralmente é diferenciado dos fluidos elétricos. Uma visão mais detalhada da maneira pela qual o trabalho elétrico é convertido em calor, portanto, requer, antes de tudo, que os movimentos dos fluidos elétricos sejam seguidos exatamente até o fim, com o intuito de conhecer as condições sob as quais ocorre a transição do movimento do fluido elétrico para o movimento de outro meio. A suposição ideal da superposição de várias substâncias contínua e uniformemente distribuídas no espaço do condutor, a saber, a substância ponderável do condutor, os dois fluidos elétricos e, além disso, a de um chamado meio térmico,⁶¹⁷ embora possa ser apropriada para muitos outros propósitos no caso das ações à distância, não parece ser permissível; em vez disso, é fácil ver a necessidade de assumir que a substância ponderável do condutor está concentrada em moléculas individuais cercadas por partículas elétricas que se movem de uma molécula para a outra no caso de uma corrente. A separação de uma partícula elétrica de uma molécula deve então, dependendo da magnitude diferente da força eletromotriz pela qual a corrente é produzida, às vezes ocorrer mais lentamente, às vezes mais rapidamente, sendo que disso depende o número de partículas elétricas que se separam da molécula em um determinado tempo. O trabalho realizado por cada partícula elétrica durante o movimento de separação, como resultado das forças exercidas sobre ela pela molécula, pode ou não depender da velocidade da separação; a mesma partícula sempre realizará a quantidade oposta de trabalho durante seu movimento de unificação com a molécula seguinte, de modo que essas duas quantidades de trabalho vão se compensar mutuamente. Entretanto, assim que a partícula elétrica for separada da primeira molécula, ela, impulsionada pela força eletromotriz f , passará pelo espaço intermediário α até a segunda molécula e, assim, realizará o trabalho $f\alpha$. A soma de todas essas quantidades de trabalho, $\sum f\alpha$, forma o trabalho total da corrente no condutor. Cada partícula elétrica, portanto, entra na região da molécula seguinte com uma força viva aumentada pelo valor equivalente a $f\alpha$ do que aquela que deixou a região da molécula anterior, de modo que o valor das forças vivas na região de todas as moléculas juntas deve ser aumentado em uma quantidade equivalente ao trabalho total da corrente. De acordo com a teoria mecânica do calor, no entanto, esse aumento das forças vivas em todas as moléculas juntas também é o calor produzido pela corrente no condutor, e a única questão é se ele é totalmente idêntico a isso, ou seja, se consiste no movimento contínuo das próprias partículas elétricas, ou se o movimento transmitido a cada molécula é transferido pelas partículas elétricas que o trouxeram para

⁶¹⁷Em alemão: *Wärmemediums*. Essa expressão pode ser traduzida como meio térmico ou meio de calor.

outras partículas do corpo, por exemplo, para as partículas de um meio específico situado na região da mesma molécula, e somente após essa transmissão ele surge como calor. Nesse caso, as leis de transmissão teriam de ser investigadas e uma explicação mais detalhada seria dada sobre por que a mesma força viva só surge como calor quando está ligada às partículas do meio térmico em vez de estar ligada às partículas elétricas.

É fácil ver que a suposição de tal transmissão da força viva transportada pelas partículas elétricas para as partículas de outro meio situado na região da molécula encontra dificuldades não desprezíveis, especialmente porque a continuidade do movimento das partículas elétricas na região de tal molécula ponderável teria que ser consistentemente negada. Se as partículas elétricas, que carregam consigo o trabalho da eletricidade, devem, ao entrar na região de uma molécula ponderável, ceder imediatamente o trabalho da eletricidade que trouxeram consigo, não apenas em parte, mas completamente, para outras partículas materiais (para as partículas do meio térmico), pela mesma razão, qualquer movimento transmitido às partículas elétricas na região de moléculas ponderáveis, independentemente de sua origem, deve ser imediatamente retirado delas novamente, de modo que nenhum *movimento persistente de partículas elétricas* na região de moléculas ponderáveis seria possível. Até mesmo a possibilidade de uma corrente elétrica em um corpo ponderável se tornaria duvidosa, pois uma partícula elétrica, por mais que pudesse ser impulsionada por forças eletromotrizes, não poderia entrar em um movimento maior se todo movimento criado fosse imediatamente transmitido por ela às partículas do meio térmico.

Fica claro a partir disso que a suposição da transferência de todo o trabalho elétrico para o meio térmico das moléculas ponderáveis está, acima de tudo, em total contradição com a suposição da existência de *correntes moleculares elétricas persistentes*, como foi apresentado pela primeira vez por Ampère.⁶¹⁸ Portanto, quem nega com Ampère a existência real de dois fluidos magnéticos e seja, portanto, obrigado a aceitar *correntes moleculares elétricas persistentes*, não deve admitir essa transmissão, e precisa admiti-la ainda menos, porque nada pode ser aduzido que seria ganho por tal transmissão. Pelo menos de acordo com a teoria mecânica do calor, é claro que em relação ao calor, em princípio, nada mais é levado em consideração *direta* senão a força viva presente nas moléculas, para a qual a natureza do seu portador material é indiferente. Apenas *indiretamente*, de acordo com a teoria mecânica do calor, a natureza do portador material da força viva que constitui a essência do calor poderia ser levada em consideração, ou seja, na medida em que as forças de interação das partículas desse portador, em parte entre si e em parte com outras partículas, e consequentemente as leis de transmissão ou propagação (as leis da radiação de calor, da comunicação de temperatura e da equalização de temperatura entre diferentes moléculas ponderáveis), seriam dependentes dela.

Mesmo que o *éter térmico*⁶¹⁹ no espaço vazio seja, pelo menos indiretamente, definido pelas leis de propagação de ondas atribuídas a ele, como acontece com o éter de luz, e se sua existência e distribuição, mesmo no interior dos corpos ponderáveis, nos espaços vazios entre as moléculas, não puderem ser abstraídas sem rejeitar toda a teoria ondulatória do calor radiante, não há outra relação entre as moléculas do corpo ponderável (com tudo o que se encontra em seu domínio e pertence a ele) e esse éter do que, *por um lado*, a excitação da onda no éter (a radiação de calor) e, *por outro lado*, a atenuação da onda (a absorção de calor) devem proceder das moléculas ponderáveis. Para isso, no entanto, um meio térmico especial é tão desnecessário nas moléculas quanto o ar precisa estar contido no metal do sino

⁶¹⁸Ver a Nota de rodapé 90 na página 66.

⁶¹⁹Em alemão: *Wärmeäther*. Essa expressão pode ser traduzida como éter térmico ou éter de calor.

que emite ondas sonoras através do meio de ar.

Todas essas considerações podem ser resumidas da seguinte forma. Uma vez que, de acordo com a teoria mecânica do calor, um aumento na temperatura das moléculas ponderáveis exige um aumento na força viva das moléculas, uma vez que esse aumento na força viva é dado pelas partículas elétricas, que formam a corrente, que entram na região das moléculas em uma velocidade maior e saem novamente em uma velocidade menor, como, além disso, *de acordo com a teoria das correntes elétricas moleculares persistentes*, esse aumento na força viva, enquanto as partículas estão na região da molécula, *persiste* sem diminuir, parece não haver nenhuma questão de *conversão* de trabalho elétrico em calor, mas o *trabalho elétrico* acumulado nas moléculas parece ter de ser considerado como o *calor* contido nas próprias moléculas.

É claro que as leis das relações resumidas sob os nomes de *radiação de calor* e *absorção de calor* entre a eletricidade em fluxo molecular constante ao redor das moléculas individuais e o éter térmico no espaço circundante ainda exigem uma justificativa mais detalhada com base na natureza de ambos os meios; mas essas leis também exigiriam tal justificativa se o chamado meio térmico fosse substituído pela eletricidade. Enquanto no último caso essa justificativa nem sequer foi tentada, no que diz respeito ao primeiro caso, a investigação astuta realizada por C. Neumann: *Explicare tentatur quomodo fiat ut lucis planum polarizationis per vires electricas vel magneticas declinetur*, Halis Saxonum, 1858,⁶²⁰ pode ser citada como uma primeira tentativa; pois parece razoável supor que o que Neumann diz sobre as relações entre as correntes moleculares elétricas persistentes e o éter luminífero também se aplicará de maneira semelhante às relações entre as correntes moleculares elétricas persistentes e o éter térmico.

De acordo com suas premissas, Neumann descobriu que nenhuma influência de correntes elétricas moleculares sobre *partículas de éter em repouso* poderia ocorrer; entretanto, deve-se observar que essas premissas, de acordo com o objetivo da investigação de Neumann, que se limitava à influência das correntes moleculares sobre os trens de ondas já existentes propagados entre as moléculas através do éter, referiam-se às ações das correntes moleculares a distâncias muito pequenas, mas ainda permitiam a admissão de uma concepção *ideal* das correntes moleculares, de acordo com a qual as mesmas são consideradas como uma *superposição de correntes opostas iguais de eletricidade positiva e negativa*, mas isso obviamente não é permitido quando se trata da excitação de novos trens de ondas pelas correntes moleculares elétricas, o que só pode ocorrer na *camada de éter imediatamente adjacente* às correntes moleculares. Para essa camada de éter, as partículas elétricas positivas e negativas que se movem em direções opostas não podem mais ser consideradas como coincidentes. Se imaginarmos, por exemplo, que o fluido negativo está firmemente conectado à molécula, e apenas o fluido positivo é concebido em fluxo molecular, ou vice-versa (uma concepção recomendada pelo fato de que [esse movimento] pode existir com a persistência das correntes moleculares sem forças eletromotrizes), fica claro que a diferença na posição e no comportamento dos dois fluidos elétricos não precisa mais ser levada em consideração, mesmo em distâncias muito pequenas (como considerado por Neumann), nas quais se baseia a admissibilidade dessa concepção *ideal* das correntes moleculares, mas que pode, no entanto, ser importante para a *camada de éter imediatamente adjacente*, especialmente se o fluido elétrico no fluxo molecular *não for distribuído contínua e uniformemente* ao redor da molécula.

Se, no entanto, houver realmente uma perturbação do equilíbrio na *camada de éter imediatamente vizinha* e, conseqüentemente, uma excitação das ondas de éter, é óbvio que isso se

⁶²⁰[Neu58], ver também [Neu63].

repete a cada revolução da eletricidade ao redor da molécula, ou seja, o *período da onda* deve corresponder ao *período de revolução das partículas elétricas* que se encontram em corrente molecular. No caso das *moléculas luminosas*,⁶²¹ no entanto, a duração dos trens de ondas emitidos por elas é conhecida com precisão a partir de experimentos ópticos; portanto, se a relação presumida entre as correntes moleculares elétricas e o éter luminífero, de acordo com a ideia de Neumann, fosse confirmada, seria possível obter informações mais detalhadas sobre o comportamento da eletricidade que forma as correntes moleculares a partir de experimentos ópticos. — De qualquer forma, a pesquisa de Neumann já foi tão bem-sucedida em seu primeiro desenvolvimento para a óptica, *na explicação da rotação do plano de polarização por forças galvânicas e magnéticas*, que se pode esperar que a busca e o desenvolvimento da teoria das correntes moleculares elétricas persistentes em sua relação com o éter luminífero ou calorífero e seu movimento ondulatório levem a muitas outras percepções sobre a conexão tão importante e ainda tão pouco pesquisada entre *eletricidade, calor e luz*.

⁶²¹Em alemão: *Bei leuchtenden Molekulen*. Essa expressão pode ser traduzida por moléculas luminosas, moléculas luminescentes, moléculas brilhantes ou moléculas que brilham.

Capítulo 17

[Weber, 1863] Sobre o Tratado “Medições Eletrodinâmicas, Relacionadas Especialmente às Oscilações Elétricas”

Wilhelm Weber^{622,623}

A tarefa de examinar mais detalhadamente as *forças* exercidas entre si por partículas elétricas ou que são exercidas sobre elas por outros corpos, que foi o principal assunto dos Tratados anteriores sobre *Medições Eletrodinâmicas*,⁶²⁴ relaciona-se a uma segunda tarefa, a saber, examinar cuidadosamente os *movimentos* realizados pelas partículas elétricas impulsionadas por todas essas forças e estabelecer as *leis de movimento da eletricidade* deduzidas das leis dessas forças; pois o conhecimento dessas forças serve acima de tudo para fornecer um conhecimento mais exato desses movimentos do que é possível por observação direta.

Essa segunda tarefa da eletrodinâmica ainda não foi trabalhada, e é legítimo perguntar por que motivo, até agora, quase não se tentou construir sobre a base dada pelo conhecimento das forças. Obviamente, o motivo é que a própria fundação ainda não foi considerada como completamente completa e segura. Quer dizer, pode ser questionado se todas as forças atuando sobre as massas elétricas já são de fato conhecidas ou se, além das forças elétricas conhecidas atuando à *distância*, não atuam simultaneamente também quaisquer *forças elétricas moleculares* desconhecidas, limitadas a regiões de influência extremamente pequenas, que deveriam ser investigadas antes que tentássemos desenvolver as leis de movimento das massas elétricas que dependem delas. Pode ser questionada até mesmo a admissibilidade da *lei de resistência dos condutores ponderáveis*, pelo menos se fosse aplicada ao desenvolvimento das leis para os movimentos *não uniformes* e que *variam rapidamente*; já que essa lei, formulada

⁶²²[Web63] com tradução para o inglês em [Web21o]. Esse artigo está relacionado a [Web64] com tradução para o inglês em [Web21a] e tradução para o português no Capítulo 18.

⁶²³As Notas de Heinrich Weber, o Editor do Volume 4 das *Obras* de Wilhelm Weber, são representadas por [Nota de Heinrich Weber:]; todas as outras Notas são de minha autoria.

⁶²⁴[Web46] com tradução parcial para o francês em [Web87] e traduções completas para o inglês em [Web07] e [Web21b]; [Web52c] com tradução para o inglês em [Web21c]; [Web52b] com tradução para o inglês em [Web21e] e tradução para o português no Capítulo 3; e [KW57] com tradução para o inglês em [KW21] e tradução para o português no Capítulo 8.

pela primeira vez por Ohm,⁶²⁵ só pode ser considerada como seguramente estabelecida para correntes *constantes*.

O único esforço para resolver essa tarefa de uma forma mais geral foi apresentado por Kirchhoff nos *Annalen* de Poggendorff, 1857, Vols. 100 e 102,⁶²⁶ contudo, como mencionado pelo próprio Kirchhoff, o tratamento foi restrito a fios condutores muito finos e com a suposição de uma validade mais geral da lei de Ohm do que já foi provado, isto é, também foi assumida sua validade para correntes não uniformes e que variam rapidamente. Além disso, o desenvolvimento das leis, até onde foi feito até o momento, não permite um teste mais detalhado pela experiência.

Em particular, as duas preocupações seguintes podem ser levantadas sobre o desenvolvimento em questão, nomeadamente, *em primeiro lugar*, que se os requisitos baseados na finura do fio condutor fossem cumpridos, mesmo que aproximadamente, o fio teria de ser muito mais fino do que todos os fios existentes ou aqueles que podem ser produzidos utilizando os meios existentes; *em segundo lugar*, que, mesmo à parte isto, a suposição feita sobre a validade mais geral da lei de Ohm não seria de modo algum compatível com tal finura do fio condutor; porque quanto mais fino o fio, mais desvios da lei de Ohm devem se tornar aparentes em fluxos não uniformes e em rápida mudança.

Portanto, tentamos estabelecer as leis de movimento da eletricidade em condutores *fechados* de maneira independente dessas suposições mais ou menos irrealizáveis e duvidosas e, tanto quanto necessário, desenvolver essas leis ao menos para o caso mais simples quando o condutor fechado é um *círculo*, para então testar a teoria por meio da experiência.

O resultado foi que, após cada perturbação do equilíbrio da eletricidade em um condutor fechado, ocorreram de fato *propagações* dos movimentos elétricos com *velocidades* determinadas que podem ser denominadas de *ondas elétricas*; mas essas *ondas elétricas* são fundamentalmente diferentes das *ondas no ar* e *no éter*, por meio das quais o som e a luz se propagam, o que é evidente, por exemplo, do fato de que sua velocidade é dependente do *comprimento da trajetória* (o comprimento do fio condutor fechado) que elas têm de atravessar, o que contradiz completamente as leis de propagação das outras ondas. Da mesma forma, o *comprimento de onda* de cada trem de ondas ao qual pertence uma certa *velocidade de propagação*, possui uma certa razão para o comprimento da trajetória. A saber, ele sempre representa uma *parte alíquota* de todo o comprimento do fio condutor fechado,⁶²⁷ como geralmente é assumido com aquelas ondas de ar que produzem vibrações estacionárias em tubos de órgãos quando [as ondas] se encontram.⁶²⁸ Contudo, as leis de decomposição desse tipos de trens de ondas que são válidas no ar não são aplicáveis para a eletricidade, já que aqui os trens de ondas com comprimentos de onda diferentes possuem *velocidades de propagação* diferentes.

Consequentemente, a questão sobre a *velocidade de propagação* do movimento elétrico em fios condutores não é fácil de responder e ainda mais de ser decidida por uma medição, como Wheatstone tentou realizar,⁶²⁹ como fica claro a partir das várias velocidades que têm de ser distinguidas por essas velocidades de propagação e, em particular, a velocidade de propagação de ondas mais longas que podem se aproximar da velocidade da luz ou podem até mesmo

⁶²⁵Ver a Nota de rodapé 191 na página 135.

⁶²⁶[Kir57b] com traduções para o inglês em [Kir57a] e [Kir21b], e tradução para o português no Capítulo 9; e [Kir57c], com traduções para o inglês em [GA94] e [Kir21a], e tradução para o português no Capítulo 13.

⁶²⁷Em alemão: *einen aliquoten Theil*. O adjetivo “alíquota” refere-se à parte contida no todo um número exato de vezes.

⁶²⁸Isto é, as vibrações estacionárias produzidas pela interferência das ondas.

⁶²⁹Ver a Nota de rodapé 215 na página 144.

ultrapassá-las em fios mais curtos, pode diminuir para zero especialmente em fios mais longos como aqueles utilizados por Wheatstone ou aqueles usados para os telégrafos. Além disso, onde a expressão da velocidade de propagação se torna imaginária, não se pode mais falar de propagação do movimento por ondas no sentido usual, mas apenas de uma aproximação assintótica do movimento a um certo equilíbrio, que é visto como puro *amortecimento* ou *absorção* e que, dada a importância que tem para fios condutores mais longos, especialmente para fios telegráficos, merece uma investigação mais aprofundada.

O caso no qual a expressão para a velocidade de propagação para trens de ondas maiores torna-se imaginário (onde para essa parte do movimento, como já observado por Thomson e Kirchhoff,⁶³⁰ podem valer leis similares àquelas para a condução térmica) merece atenção especial quando sempre permanece uma outra parte do movimento que produz trens de ondas menores para os quais a expressão da velocidade de propagação permanece real. Portanto, há de fato trens de ondas com certas velocidades de propagação em um tal fio após cada perturbação do equilíbrio, contudo, eles não constituem um movimento ondulatório puro, mas estão misturados com movimentos que estão sujeitos a outras leis, a saber, aquelas análogas à condução do calor.

Se considerarmos todas as relações que surgem de uma tal mistura de movimentos, cujas mudanças seguem leis completamente diferentes, é evidente que a *não simultaneidade das faíscas* observadas por Wheatstone em pontos de interrupção muito distantes em um longo fio condutor não permite absolutamente uma conclusão de um velocidade de propagação definida; que em geral o método de observação de Wheatstone, embora seja muito prático, não é de todo apropriado para nossos objetivos atuais, e que dificilmente será possível encontrar outros métodos para estabelecer *de forma puramente empírica* as leis de todas as mudanças no movimento da eletricidade num condutor após o equilíbrio ter sido perturbado. Em vez disso, o objetivo da observação parece limitar-se a *testar* as leis deduzidas do nosso conhecimento da eletricidade adquirido de outra forma, sendo que para isso é necessário colocar esta dedução antes das observações, ainda mais que as próprias leis derivadas e testadas devem servir como um *guia* para encontrar os métodos de observação mais apropriados para uso nos testes.

Tal teste, se é para ser exato, vai sempre exigir medições finamente ajustadas. Se considerarmos que as medições mais precisas na física lidam ou com *fenômenos de equilíbrio*, ou *movimentos constantes*, ou *movimentos periodicamente recorrentes* (oscilações), então é muito óbvio basear um método de teste das leis de movimento da eletricidade em condutores, excetuando as correntes constantes, na observação de *movimentos periodicamente recorrentes*, ou *oscilações*, da eletricidade em condutores, desde que seja possível encontrar meios para a execução precisa dessas observações.

No entanto, movimentos periodicamente recorrentes de eletricidade não podem ocorrer em um condutor por si só, mas apenas através de excitação repetida, e o método mais simples e útil para *produzi-los* é a rotação rápida de um pequeno ímã em um eixo de rotação perpendicular ao seu eixo magnético, bem como, para *observá-los*, as ações que produzem em eletrodinamômetros ligados [ao circuito]. Contudo, para obter um guia prático para tais observações, têm de ser desenvolvidas em primeiro lugar as leis de tais *oscilações elétricas*.

A partir desse desenvolvimento segue que, com o ímã em rotação contínua, a eletricidade em todas as partes do condutor fechado será colocada em oscilação contínua regular que é

⁶³⁰[Tho56b] e [Tho56a] com tradução para o português em [TBA18]; [Kir57b] com traduções para o inglês em [Kir57a] e [Kir21b], e tradução para o português no Capítulo 9; e [Kir57c], com traduções para o inglês em [GA94] e [Kir21a], e tradução para o português no Capítulo 13.

opostamente igual para eletricidade positiva e negativa. O período de uma oscilação é igual à duração de meia revolução do ímã. Contudo, também segue que as *amplitudes de oscilação* e as *fases da oscilação* da eletricidade em posições diferentes do condutor fechado têm de coincidir perfeitamente, não apenas quando as forças eletromotrizes exercidas simultaneamente pelo ímã girando são iguais em toda parte, mas que elas devem exibir diferenças quase imperceptíveis mesmo quando essas forças estão distribuídas bem aleatoriamente no circuito. Assim, em geral, as oscilações podem ser consideradas completamente iguais e simultâneas o que simplifica extremamente as observações das oscilações elétricas em circuitos fechados que, de acordo com a teoria, ainda deveria ser verdadeiro mesmo com circuitos muito longos.

Esse resultado notável foi testado, *em primeiro lugar*, ao realizar observações das oscilações sob condições que são favoráveis para a comparação da *amplitude* em várias posições de um longo circuito que mostraram que a deflexão do dinamômetro ligado que é proporcional ao quadrado da amplitude de oscilação, em dois pontos do circuito fechado separados por quase cinco milhas, na média de seis observações, não diferia uma da outra em 1/3 de uma divisão de escala considerando um tamanho de 846 divisões de escala, o que, tendo em conta os inevitáveis erros de observação, significa que não houve diferença perceptível na amplitude de oscilação.⁶³¹

Em segundo lugar, as oscilações foram observadas sob condições favoráveis para determinar as *diferenças de fase* em posições diferentes de um longo circuito. A partir disso, descobriu-se que a *diferença* entre duas deflexões observadas do dinamômetro, que deveria ser aproximadamente proporcional à diferença de fase em duas posições do circuito separadas por quase cinco milhas, foi, em média, a partir de seis observações, com um tamanho de deflexão de 844 divisões de escala, nem mesmo 3/5 de uma divisão de escala, o que, considerando os inevitáveis erros de observação, também significa que não foi detectada qualquer diferença de fase. — Nessas observações, o período de oscilação correspondia a 1/520 segundo, ou a 260 voltas por segundo do pequeno ímã.⁶³²

Da teoria confirmada por estes testes experimentais, segue-se que, em relação à propagação dos movimentos elétricos, não existe tal *velocidade* que teria a mesma importância e significado para esta propagação que as velocidades de propagação do som e da luz no ar e no éter luminífero exigem, cuja medição precisa é uma das tarefas mais importantes da física porque devem ser vistas como verdadeiras determinações fundamentais para o conhecimento mais preciso desses meios.

Mas se não existe tal *velocidade* que sirva de determinação fundamental nos movimentos propagados pelo meio elétrico, então surge a questão de saber se a teoria não oferece outro elemento adequado para uma determinação fundamental, que não é levado em consideração no caso de equilíbrio, e que tem significado semelhante para ter o conhecimento do meio e neste aspecto substituir a velocidade.

Segundo a teoria, tal elemento deveria apresentar-se em certos *desvios* da lei de Ohm, que ocorrem com o *afinamento dos fios condutores*⁶³³ em correntes muito variáveis e que mudam rapidamente. De acordo com a teoria, a validade da lei de Ohm, que já foi firmemente estabelecida pela experiência para correntes constantes, também deveria existir para corren-

⁶³¹Ou seja, considerando uma amplitude de oscilação típica de 846 divisões da escala, a diferença entre as amplitudes em dois pontos separados por quase cinco milhas era de apenas 1/3 de uma divisão da escala, uma diferença tão pequena que pode ser considerada desprezível.

⁶³²Ver a Nota de rodapé 24 na página 19.

⁶³³Em alemão: *Verfeinerung der Leitungsdrähte*. Essa expressão pode ser traduzida como afinamento ou refinamento dos fios condutores.

tes variáveis, mas apenas enquanto um certo *coeficiente*, $c^2/r\mathfrak{E}$, que depende da natureza do fluido elétrico e do fio condutor, puder ser considerado infinitamente pequeno. Sempre que esse coeficiente, como ocorre quando o fio condutor fica mais fino, ultrapassa um valor que não pode ser desprezado comparado com uma unidade, então certos *desvios* das manifestações das oscilações elétricas a partir das determinações deduzidas da lei de Ohm devem tornar-se mais pronunciados quão mais rapidamente oscilar a eletricidade. Se esses *desvios* puderem ser observados e medidos, eles levarão a um conhecimento desse *coeficiente* que, como ele depende da natureza do fluido elétrico e do fio condutor, é da maior importância para a ciência da eletricidade.

O *significado físico* desse coeficiente é aquele de uma razão do quadrado da conhecida velocidade c (que determina na lei fundamental da força elétrica a razão da parte estática para a parte dinâmica) dividida pela força que seria exercida pela quantidade total de eletricidade positiva contida em uma unidade de comprimento do fio condutor, assumida como concentrada em um ponto, [ao atuar] sobre *1 miligrama do fluido elétrico* na unidade de distância. Assim, essa força seria determinada se os *desvios* da lei de Ohm, ocasionados pela aceleração da oscilação e refinamento do fio condutor, puderem ser observados e medidos exatamente.

Por outro lado, essa força pode ser expressa como o produto $r\mathfrak{E}$ da quantidade de eletricidade positiva, $\mathfrak{E}$, contida em uma unidade de comprimento do condutor, expressa em unidades eletrostáticas, vezes o número r de unidades eletrostáticas contida em *1 miligrama do fluido elétrico*. De onde vem que, se $\mathfrak{E}$ e, portanto, r fossem conhecidos, qualquer quantidade de eletricidade determinada eletrostaticamente, assim como as massas de corpos ponderáveis, poderia ser expressa *em miligrama*.

Se, como mostrado em um Tratado anterior (ver os *Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften*, Vol. V, Seções 15 e 20),^{634,635} essa quantidade de eletricidade, $\mathfrak{E}$, pode ser determinada pelo menos para certos condutores, nomeadamente para eletrólitos como a água, as observações de vibrações elétricas abrem a *possibilidade* de determinar massas elétricas na mesma unidade que massas ponderáveis, embora a execução exija muito trabalho preparatório. Esse conhecimento da massa jamais poderia ser obtido por meio de observações *eletrostáticas*.

Contudo, a execução de uma tal determinação de massa constitui uma nova tarefa que tem de ser reservada para um Tratado especial, mesmo se o método já tiver sido completamente estabelecido. A situação é semelhante à das medições magnéticas, cuja viabilidade já havia sido comprovada em teoria por Poisson em termos absolutos,⁶³⁶ mas que não teria tido sucesso sem as investigações de Gauss, que levaram ao domínio de todos os detalhes.⁶³⁷

O mesmo se aplica a outras aplicações em que a teoria do movimento da eletricidade em condutores permite, por exemplo, uma determinação exata de todos os processos em telégrafos ou *máquinas* de Ruhmkorff,⁶³⁸ porque é óbvio que a teoria inicialmente desenvolvida apenas para condutores *circulares*, se também não deixa nada a desejar, não é suficiente

⁶³⁴[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, págs. 648 e 664.

⁶³⁵[KW57, Seções 15 e 20, págs. 648 e 664 das *Obras* de Weber] e [KW21, Seções 15 e 20, págs. 48 e 65]. Ver as Seções 8.15 e 8.20 dessa tradução em português do quarto Tratado principal de Weber sobre Medições Eletrodinâmicas.

⁶³⁶Ver a Nota de rodapé 89 na página 66.

⁶³⁷Ver a Nota de rodapé 94 na página 69 sobre o trabalho de Gauss da medição absoluta da força magnética terrestre.

⁶³⁸As bobinas de indução ou máquinas de Ruhmkorff receberam esse nome em homenagem a Heinrich Daniel Ruhmkorff (1803-1877), um fabricante de instrumentos alemão.

em relação aos telégrafos e às máquinas de Rumkorff, cujos condutores têm formatos completamente diferentes, e que muitas investigações ainda são necessárias para se alcançar o domínio de todos os detalhes, como é necessário para executar com êxito tais disposições.

Capítulo 18

[Weber, 1864, ME5] Medições Eletrodinâmicas, Quinta Memória, Relacionada Especialmente às Oscilações Elétricas

Wilhelm Weber^{639,640,641}

Introdução

A *primeira* tarefa desses Tratados sobre *Medições Eletrodinâmicas*⁶⁴² foi determinar exatamente e completamente as várias forças exercidas pelas massas elétricas. Foi estabelecida uma lei fundamental⁶⁴³ a partir da qual foram deduzidas, *em primeiro lugar*, as forças das interações eletrostáticas e suas leis descobertas por Coulomb,⁶⁴⁴ *em segundo lugar*, as forças eletrodinâmicas mútuas entre elementos de corrente e suas leis descobertas por Ampère,⁶⁴⁵ *em terceiro lugar*, as forças de indução descobertas por Faraday (indução voltaica)⁶⁴⁶ — incluindo uma corrente deslocando-se juntamente com seu portador e uma corrente variável em seu portador imóvel, e também aquilo que Neumann descobriu e observou pela primeira

⁶³⁹[Web64] com tradução para o inglês em [Web21a]. Prefácio em [Web63] com tradução para o inglês em [Web21o] e tradução para o português no Capítulo 17.

⁶⁴⁰As Notas de Wilhelm Weber são representadas por [Nota de Wilhelm Weber:]; as Notas de Heinrich Weber, o Editor do Volume 4 das *Obras* de Wilhelm Weber, são representadas por [Nota de Heinrich Weber:]; todas as outras Notas são de minha autoria.

⁶⁴¹Agradeço a Thomas Herb por compartilhar sua tradução parcial para o inglês das duas primeiras Seções desse trabalho.

⁶⁴²[Web46] com tradução para o francês em [Web87] e traduções completas para o inglês em [Web07] e [Web21b]; [Web52c] com tradução para o inglês em [Web21c]; [Web52b] com tradução para o inglês em [Web21e] e tradução para o português no Capítulo 3; e [KW57] com tradução para o inglês em [KW21] e tradução para o português no Capítulo 8.

⁶⁴³Weber está referindo-se à sua lei de força apresentada no Primeiro Tratado sobre *Medições Eletrodinâmicas*, [Web46] com tradução parcial para o francês em [Web87] e traduções completas para o inglês em [Web07] e [Web21b].

⁶⁴⁴Ver a Nota de rodapé 89 na página 66.

⁶⁴⁵Ver a Nota de rodapé 90 na página 66.

⁶⁴⁶Ver a Nota de rodapé 341 na página 200.

vez, [a saber, indução com] a passagem de uma corrente através de um contato deslizante — e suas leis.⁶⁴⁷

Além dessas várias forças de interação *puramente* elétrica, também foram consideradas forças exercidas pelo *magnetismo* sobre a eletricidade, a saber, as forças *eletromagnéticas* e as forças de *indução magnetoelétrica* devidas ao magnetismo deslocando-se em relação a massas elétricas — tanto quando o magnetismo é deslocado em conjunto com seu portador, como quando é deslocado apenas dentro de seu portador. — As leis para essas forças também podiam ser deduzidas começando com a lei elétrica fundamental estabelecida, se, de acordo com Ampère, os ímãs moleculares fossem substituídos por correntes elétricas moleculares. O mesmo vale para as forças *eletrodiamagnéticas*.

Finalmente, também foram consideradas as leis para as forças exercidas por *corpos ponderáveis* sobre as massas elétricas deslocando-se no interior deles, atuando sobre elas, e que são chamadas de forças de resistência galvânica dos corpos ponderáveis. Também foi feita uma tentativa de estabelecer uma lei fundamental mais geral para determinar essas forças com base na lei de Ohm, que foi comprovada para correntes constantes.⁶⁴⁸

A investigação dessas forças está intimamente relacionada com uma *segunda* tarefa da eletrodinâmica, a saber, a exploração dos *movimentos* das massas elétricas impelidas por todas essas forças e a exploração de suas leis em termos dessas forças atuando sobre as massas elétricas. Portanto, para determinar esses movimentos é mandatário um conhecimento exato e completo de todas as forças e sua exploração, sendo que a exploração dessas forças pode ser considerada como o meio, enquanto que o fim a ser alcançado dessa forma é a pesquisa desses movimentos.

Essa segunda tarefa, muito mais abrangente, da eletrodinâmica ainda não foi muito abordada, e pode-se perguntar, com razão, por que tão pouco foi feito para desenvolver ainda mais a base fornecida pelo conhecimento das forças nessa direção? Obviamente podemos hesitar em considerar essa fundação como estando estabelecida e completa de maneira segura. Pode ser questionado o conhecimento de todas as forças atuando sobre as massas elétricas, a saber, se além das forças puramente elétricas atuando em todas as distâncias, talvez também tenham de ser investigadas algumas *forças moleculares elétricas* limitadas a distâncias extremamente pequenas atuando em conjunto com elas, antes que tentemos desenvolver as leis de movimento dependendo delas. A admissibilidade da lei da resistência dos *condutores ponderáveis* para o desenvolvimento das leis dos movimentos elétricos que *mudam rapidamente* também poderia ser questionada, uma vez que esta lei só foi comprovada por Ohm para correntes *constantes*, mas a afirmação mais geral desta lei, que pode ser aplicada a todas as condições, só foi estabelecida tentativamente. — Para concluir, deve ser adicionado a isso que o conhecimento das *forças* não é o único requisito para completar a segunda tarefa sendo que, além disso, é necessário um conhecimento mais específico das *massas* sujeitas ao movimento, além de outros detalhes que ainda não são suficientemente conhecidos.

Apesar disso, Kirchhoff fez um esforço bem completo para completar a segunda tarefa, de fato de uma maneira tão compreensiva quanto era permitida pelas condições que dispunha, e publicou os resultados nos *Annalen* de Poggendorff, 1857, Vols. 100 e 102.⁶⁴⁹ Apesar das preocupações aqui mencionadas, esta primeira tentativa despertou, com razão, grande

⁶⁴⁷Franz Ernst Neumann (1798-1895). Ver [Neu48a] e [Neu49]. Ver também [Web49] com tradução para o inglês em [Web20] e a Seção VI de [Web52c] com tradução para o inglês em [Web21c].

⁶⁴⁸Ver a Nota de rodapé 191 na página 135.

⁶⁴⁹[Kir57b] com traduções para o inglês em [Kir57a] e [Kir21b], e tradução para o português no Capítulo 9; e [Kir57c], com traduções para o inglês em [GA94] e [Kir21a], e tradução para o português no Capítulo 13.

interesse; porque é claro que uma decisão sobre se, e em que medida, as preocupações mencionadas anteriormente são justificadas dificilmente pode ser alcançada de outra forma que não através da experiência. Kirchhoff de fato tentou estabelecer *uma teoria geral do movimento da eletricidade em um fio infinitamente fino*, indicando contudo que considerava como geralmente válidas alguns fatos conhecidos que ocorrem para correntes constantes, ou para aqueles cuja intensidade varia apenas lentamente. Seu procedimento será considerado mais detalhadamente na próxima Seção.

I - Leis do Movimento

18.1 Kirchhoff, *Sobre o Movimento da Eletricidade nos Condutores*

Sejam x, y, z as coordenadas retangulares de um ponto do condutor e u, v, w as *densidades de corrente* da corrente elétrica, decompostas de acordo com os três eixos de coordenadas, que estão presentes no tempo t nesse ponto do condutor. — Entendemos aqui a *densidade de corrente* como o produto da velocidade dos portadores de carga vezes a quantidade de eletricidade positiva por unidade de volume do condutor. Assumindo a lei de resistência de Ohm como sendo válida geralmente, isso significa o mesmo que o produto da *força eletromotriz* atuando no ponto (x, y, z) que está sendo considerado vezes a *condutividade específica*⁶⁵⁰ do condutor metálico. Portanto, se A denota a força eletromotriz no ponto (x, y, z) — isto é, a diferença das forças atuando em uma unidade de medida de eletricidade positiva e negativa no ponto (x, y, z) —, enquanto que α, β, γ são os ângulos entre essa força e os três eixos coordenados, e k é a condutividade específica do metal, temos:

$$u = A \cos \alpha \cdot k, \quad v = A \cos \beta \cdot k, \quad w = A \cos \gamma \cdot k,$$

onde são assumidas para as forças e condutividade as *unidades mecânicas*⁶⁵¹ sempre utilizadas por Kirchhoff.⁶⁵²

⁶⁵⁰Em alemão: *das spezifische Leitungsvermögen*.

⁶⁵¹Em alemão: *mechanischen Maasse*. Essa expressão pode ser traduzida como unidades mecânicas, medidas mecânicas ou unidades de medida mecânicas.

⁶⁵²[Nota de Wilhelm Weber:] Seja ξ, η, ζ o deslocamento de uma partícula elétrica no ponto (x, y, z) após o tempo t na direção das três coordenadas, portanto $d\xi/dt, d\eta/dt, d\zeta/dt$ representa a velocidade da eletricidade fluindo, decomposta de acordo com a direção dos três eixos de coordenadas. Logo, quando $\mathfrak{E}$ representa a quantidade de eletricidade positiva na unidade de volume do condutor temos, de acordo com a primeira relação:

$$u = \mathfrak{E} \frac{d\xi}{dt}, \quad v = \mathfrak{E} \frac{d\eta}{dt}, \quad w = \mathfrak{E} \frac{d\zeta}{dt}.$$

Porém, de acordo com a lei de Ohm para correntes constantes, a intensidade de corrente i em um condutor linear, caso seja constante, é proporcional (ou, em unidade mecânica, é igual) à soma de todas as forças eletromotrizes, isto é, $\int Adl$, ao longo do comprimento total l do condutor dividida pela resistência total, isto é, $\int dl/ks$, onde s é a seção reta e k a condutividade específica do metal, temos, portanto, $i = \int Adl / [\int dl/ks]$. Porém, nessa forma da lei de Ohm, a intensidade de corrente i através da seção reta s do fio condutor é entendida como o produto da velocidade da eletricidade que está fluindo, isto é, $d\sigma/dt$, e a quantidade $\mathfrak{E}$ de eletricidade positiva na unidade de volume do condutor. Logo, colocando

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} \cdot \cos \alpha, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} \cdot \cos \beta, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} \cdot \cos \gamma,$$

[obtemos]

$$\frac{\int Adl}{\int \frac{dl}{ks}} = \mathfrak{E} s \frac{d\sigma}{dt}.$$

Assumindo que a lei de Ohm vale em geral para cada elemento de comprimento no circuito, obtemos

$$\frac{Adl}{\frac{dl}{ks}} = Aks = \mathfrak{E} s \frac{d\sigma}{dt},$$

ou $Ak = \mathfrak{E}[d\sigma/dt]$, e a partir dessa [relação], ao decompor para os eixos coordenados, [obtemos:]

Contudo, a força eletromotriz, A , origina-se parcialmente da *eletricidade livre* distribuída em todo o circuito e parcialmente da *indução* que atua em todas as partes do circuito condutor devido à variação na intensidade de corrente. Para começar, excluimos quaisquer forças eletromotrizes *externas*, por exemplo, forças de indução magnetoelétricas. Todas as outras forças conhecidas atuando sobre as massas elétricas não contribuem para a *força eletromotriz* (caso sejam excluídas as forças resistivas, que podem ser levadas em consideração), como, por exemplo, as forças eletrodinâmicas descobertas por Ampère resultando da interação entre elementos de corrente, das quais é conhecido que a diferença entre as forças atuando sobre a eletricidade positiva e aquelas atuando sobre a eletricidade negativa é sempre nula, portanto, não resulta força *eletromotriz* delas.

As componentes da *primeira* parte da força eletromotriz, que surge da *eletricidade livre* distribuída no circuito condutor, são representadas pelo *dobro* dos valores negativos das diferenciais parciais de Ω , considerado como o valor da *função potencial da eletricidade livre* no ponto (x, y, z) , com relação aos três eixos coordenados, isto é, essas componentes são representadas por:⁶⁵³

$$-2\frac{d\Omega}{dx}, \quad -2\frac{d\Omega}{dy}, \quad -2\frac{d\Omega}{dz},$$

como é prontamente percebido levando em consideração que a força eletromotriz, isto é, a diferença das forças atuando sobre as eletricidades positiva e negativa, é o *dobro* da força atuando apenas sobre uma unidade da eletricidade *positiva*.

Para determinar as componentes da *segunda* parte da força eletromotriz que vem da *indução* causada por mudanças nas intensidades de corrente em todas as partes do circuito condutor, denotamos por x', y', z' às coordenadas de um segundo ponto no circuito, além disso, os valores de u, v, w nesse [segundo] ponto [são representados] por u', v', w' , sendo r a distância entre (x, y, z) e (x', y', z') .

A partir da lei fundamental da ação elétrica obtemos a força eletromotriz exercida pela eletricidade no volume $dx'dy'dz'$, deslocando-se *ao longo da direção do eixo x* com velocidade $d\xi'/dt$, lembrando que, de acordo com a Nota de rodapé anterior, $u' = \mathfrak{E}[d\xi'/dt]$, [atuando] no ponto (x, y, z) *ao longo do eixo x*, expressa em unidade *mecânica*, [é dada por:]

$$= -\frac{8}{c^2} \cdot \frac{dx'dy'dz'}{r^3} \cdot (x - x')^2 \cdot \frac{du'}{dt}.$$

Portanto, a força eletromotriz devida a um elemento de corrente de comprimento α com sua intensidade de corrente crescendo uniformemente por [um fator] i durante o tempo t que atua sobre um ponto à distância r é igual a (ver as *Medições Eletrodinâmicas*, Vol. 5 desses *Abhandlungen*, pág. 268, número 4)^{654,655}

$$A \cos \alpha \cdot k = \mathfrak{E} \frac{d\xi}{dt} = u, \quad A \cos \beta \cdot k = \mathfrak{E} \frac{d\eta}{dt} = v, \quad A \cos \gamma \cdot k = \mathfrak{E} \frac{d\zeta}{dt} = w.$$

⁶⁵³Atualmente essas derivadas parciais seriam escritas na seguinte forma:

$$-2\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \quad -2\frac{\partial\Omega}{\partial y}, \quad -2\frac{\partial\Omega}{\partial z}.$$

Nessa tradução estou mantendo a notação original de Weber.

⁶⁵⁴[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 655.

⁶⁵⁵[KW57, Seção 18, número 4, pág. 655 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [KW21, Seção 18, número 4, pág. 55]. Ver também o item (4) da página 200 na Seção 8.18 dessa tradução em

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{\alpha}{r} \cdot \frac{i}{t} \cdot \cos \vartheta \cos \vartheta' ,$$

ao longo da direção que faz um ângulo ϑ' com a extensão da linha r , se α faz um ângulo ϑ com r . Aqui, contudo, a intensidade de corrente i , como usualmente determinada por um galvanômetro, é para ser expressa em unidade *magnética* absoluta; que pode ser substituída pelo valor expresso em unidade *mecânica* case seja multiplicada por $2\sqrt{2}/c$. Por outro lado, em unidade *mecânica* a intensidade de corrente anterior é $= u'dy'dz'$. Colocando portanto $i = [2\sqrt{2}/c] \cdot u'dy'dz'$, obtém-se:

$$\frac{i}{t} = \frac{di}{dt} = \frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{du'}{dt} \cdot dy'dz' ,$$

e observando que no caso anterior $\cos \vartheta = \cos \vartheta' = (x - x')/r$ e $\alpha = dx'$, encontramos então a força eletromotriz que estamos procurando

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{dx'}{r} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{du'}{dt} \cdot dy'dz' \cdot \frac{(x - x')^2}{r^2} ,$$

que é igual ao valor dado anteriormente.

Considerando o movimento da eletricidade no elemento $dx'dy'dz'$ *ao longo do eixo y* ou *z* em vez de ao longo do eixo x , o valor de $\cos \vartheta$ é dado por $(y - y')/r$ ou por $(z - z')/r$ em vez de $(x - x')/r$, e dv'/dt ou dw'/dt no lugar de du'/dt , de onde vem que a força eletromotriz total exercida pelo elemento $dx'dy'dz'$ no ponto (x, y, z) *ao longo do eixo x* resulta igual a:

$$= -\frac{8}{c^2} \cdot \frac{dx'dy'dz'}{r^3} (x - x') \left(\frac{du'}{dt} (x - x') + \frac{dv'}{dt} (y - y') + \frac{dw'}{dt} (z - z') \right) .$$

Da mesma forma, colocando $(y - y')/r$ ou $(z - z')/r$ no lugar de $(x - x')/r$ para $\cos \vartheta'$, encontramos a força eletromotriz total exercida *ao longo do eixo y* ou *z* como sendo:

$$= -\frac{8}{c^2} \cdot \frac{dx'dy'dz'}{r^3} \cdot (y - y') \left(\frac{du'}{dt} (x - x') + \frac{dv'}{dt} (y - y') + \frac{dw'}{dt} (z - z') \right) ,$$

ou

$$= -\frac{8}{c^2} \cdot \frac{dx'dy'dz'}{r^3} \cdot (z - z') \left(\frac{du'}{dt} (x - x') + \frac{dv'}{dt} (y - y') + \frac{dw'}{dt} (z - z') \right) .$$

Colocando, por brevidade:

$$U = \int \int \int \frac{dx'dy'dz'}{r^3} (x - x') \left(u'(x - x') + v'(y - y') + w'(z - z') \right) , \quad (1)$$

$$V = \int \int \int \frac{dx'dy'dz'}{r^3} (y - y') \left(u'(x - x') + v'(y - y') + w'(z - z') \right) , \quad (2)$$

$$W = \int \int \int \frac{dx'dy'dz'}{r^3} (z - z') \left(u'(x - x') + v'(y - y') + w'(z - z') \right) , \quad (3)$$

obtemos as componentes da *segunda* parte da força eletromotriz que vem da *indução* devida às mudanças nas intensidades de corrente em todas as partes do circuito condutor, a saber:

$$= -\frac{8}{c^2} \cdot \frac{dU}{dt}, \quad = -\frac{8}{c^2} \cdot \frac{dV}{dt}, \quad = -\frac{8}{c^2} \cdot \frac{dW}{dt}.$$

Contudo, essas componentes da força eletromotriz *total* foram expressas como:

$$A \cos \alpha, \quad A \cos \beta, \quad A \cos \gamma,$$

obtemos assim:

$$A \cos \alpha = -2 \left(\frac{d\Omega}{dx} + \frac{4}{c^2} \cdot \frac{dU}{dt} \right),$$

$$A \cos \beta = -2 \left(\frac{d\Omega}{dy} + \frac{4}{c^2} \cdot \frac{dV}{dt} \right),$$

$$A \cos \gamma = -2 \left(\frac{d\Omega}{dz} + \frac{4}{c^2} \cdot \frac{dW}{dt} \right).$$

Finalmente, colocando esse valores nas equações anteriores para as densidades de corrente u, v, w no ponto (x, y, z) , obtemos as seguintes equações:

$$u = -2k \left(\frac{d\Omega}{dx} + \frac{4}{c^2} \cdot \frac{dU}{dt} \right), \quad (4)$$

$$v = -2k \left(\frac{d\Omega}{dy} + \frac{4}{c^2} \cdot \frac{dV}{dt} \right), \quad (5)$$

$$w = -2k \left(\frac{d\Omega}{dz} + \frac{4}{c^2} \cdot \frac{dW}{dt} \right), \quad (6)$$

Como um pré-requisito especial para determinar o valor de Ω da *função potencial* no ponto (x, y, z) devido à eletricidade *livre* total distribuída em todo o circuito, a densidade de eletricidade *livre* na parte interior do condutor onde ocorrem movimentos de corrente não deve ser igualada a zero, como ocorria para um condutor com eletricidade em repouso. Denotando por ε' à densidade [volumétrica] não nula da eletricidade *livre* no ponto (x', y', z') , caso esse ponto esteja *dentro* do condutor, e por e' , quando esse ponto está localizado no elemento de superfície dS' , denotando assim por e' à densidade [superficial] de eletricidade *livre* no *elemento de superfície* dS' , obtemos então o seguinte valor de Ω :

$$\Omega = \int \int \int \frac{dx' dy' dz'}{r} \cdot \varepsilon' + \int \int \frac{dS'}{r} \cdot e'. \quad (7)$$

Além disso, a distribuição de eletricidade livre *dentro* de todo o circuito condutor assim como *em sua superfície*, que é determinada pelos valores de ε' e e' , pode então mudar ao longo do tempo, mas essas mudanças dependem do movimento da eletricidade no circuito, portanto, têm de haver duas equações para representar os *coeficientes diferenciais parciais* de ε' e e' com relação ao tempo no que diz respeito às suas dependências com relação ao *movimento* da eletricidade.

A diferença entre a eletricidade positiva saindo do elemento $dx' dy' dz'$ ao longo dos eixos x, y, z durante o elemento de tempo dt e a eletricidade entrando nele é:

$$dx'dy'dz' \cdot \frac{du'}{dx'}dt, \quad dx'dy'dz' \cdot \frac{dv'}{dy'}dt, \quad dx'dy'dz' \cdot \frac{dw'}{dz'}dt .$$

A soma dessas diferenças fornece a *diminuição* da eletricidade livre $dx'dy'dz' \cdot \varepsilon'$ contida em $dx'dy'dz'$ durante o elemento de tempo dt que é produzida pelo movimento da eletricidade *positiva*. Contudo, há uma outra diminuição igual que resulta do *movimento oposto da eletricidade negativa* durante o mesmo elemento de tempo dt . Consequentemente, essa soma é igual à *metade da diminuição total* da eletricidade livre contida no elemento $dx'dy'dz'$ durante o elemento de tempo dt , isto é, a *metade* de $= -dx'dy'dz' \cdot [d\varepsilon'/dt] \cdot dt$. Temos, portanto

$$\frac{du'}{dx'} + \frac{dv'}{dy'} + \frac{dw'}{dz'} = -\frac{1}{2} \frac{d\varepsilon'}{dt} . \quad (8)$$

Finalmente, denotando por (N', x') , (N', y') , (N', z') aos ângulos entre a normal para dentro sobre o elemento de superfície dS' e os eixos x , y , z , a quantidade de eletricidade *positiva* que flui de volta para o interior do elemento de superfície dS' no elemento de tempo dt é

$$= \left(u' \cos(N', x') + v' \cos(N', y') + w' \cos(N', z') \right) dS' \cdot dt ,$$

e como uma quantidade igual de eletricidade *negativa* flui do interior para o elemento de superfície dS' durante o mesmo tempo, essa quantidade é igual à metade da *diminuição total de eletricidade* $e'dS'$ no elemento de superfície dS' no elemento de tempo dt , isto é, $= -\frac{1}{2}[de'/dt] \cdot dS'dt$. Temos, portanto:

$$u' \cos(N', x') + v' \cos(N', y') + w' \cos(N', z') = -\frac{1}{2} \frac{de'}{dt} . \quad (9)$$

Por mais geral que seja este desenvolvimento das equações do movimento da eletricidade em qualquer condutor dado por Kirchhoff, ele é baseado nas seguintes três suposições limitantes, a saber:

1. a suposição de que o valor da força eletromotriz em um ponto, como foi feito anteriormente, pode ser determinada simplesmente ao *dobrar a força exercida sobre a eletricidade positiva*, isto é, assumindo quantidades iguais de eletricidade positiva e negativa em todas as partes do condutor ou, mais precisamente, que isso significaria estritamente que as densidades ε' e e' da eletricidade livre no interior e na superfície do condutor seriam sempre e em todo lugar iguais a zero, o que não é o caso, ou que ao menos a eletricidade *livre* presente pode ser considerada como infinitamente pequena comparada com a quantidade de uma *mistura neutra* das duas eletricidades no mesmo ponto;
2. a suposição de que quantidades iguais de eletricidade positiva e negativa sempre passam por cada seção transversal simultaneamente em direções opostas, o que só pode ser assumido se qualquer movimento do fluido neutro puder ser adicionado em todos os lugares, porque esse movimento adicional do fluido neutro, se realmente existisse, não teria nenhuma influência sobre as *observações*;

3. a suposição de uma aplicação mais geral da lei Ohm, que, como se verá mais adiante, pode ser atribuída à suposição de que a *massa* do fluido elétrico em relação à *massa* de seu portador ponderável desaparece completamente em toda parte, o que, no entanto, é geralmente aceito.

18.2 Dedução da Expressão para a Força Eletromotriz Exercida pela Eletricidade Livre e pelos Movimentos Elétricos em um Pequeno Pedaco do Fio Condutor, Considerado como um Cilindro, sobre Qualquer Ponto da Seção Reta Central Desse Pedaco

A determinação mais precisa da força eletromotriz atuando em qualquer ponto da seção reta do fio condutor sugere dividir esse último em duas partes, a saber, a parte que vem do elemento do fio condutor que contém o ponto sob consideração, e a parte que vem de todos os outros elementos que estão a distâncias maiores, mensuráveis, em relação ao ponto que está sendo considerado.⁶⁵⁶

O elemento do fio condutor que contém o ponto que está sendo considerado será um cilindro cujo raio é muito pequeno comparado com seu comprimento. A distribuição da eletricidade livre, bem como os movimentos elétricos neste cilindro, são assumidos aqui, seguindo Kirchhoff, como *simétricos em relação ao eixo do cilindro*.

Em relação às coordenadas, seja x o eixo que coincide com o eixo do cilindro e coloque

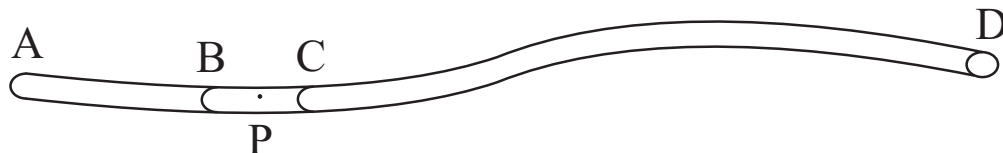
$$y = \rho \cos \varphi, \quad y' = \rho' \cos \varphi' ,$$

$$z = \rho \sin \varphi, \quad z' = \rho' \sin \varphi' .$$

Além disso, distinguindo as densidades de corrente paralela ao eixo do cilindro e perpendicular a ele, a última é *radial* em todo lugar com a suposição dos movimentos simétricos, isto é, em qualquer ponto sua direção coincide com o raio do cilindro através desse ponto. Portanto, denotando por σ a essa *densidade radial de corrente* no ponto (x, y, z) e por σ' no ponto (x', y', z') , vem que:

$$v = \sigma \cos \varphi, \quad v' = \sigma' \cos \varphi' ,$$

⁶⁵⁶Weber vai calcular a força eletromotriz no ponto P dentro do fio. Ele divide então todo o circuito AD mostrado nessa Nota de rodapé em duas partes.



A primeira parte, BC , contém todos os pontos próximos ao ponto P e será considerada no formato cilíndrico. O ponto P está localizado na seção reta do fio localizada no centro de BC . A segunda parte, composta pelos pedaços AB e CD , contém os pontos que estão a grandes distâncias do ponto P .

$$w = \sigma \sin \varphi, \quad w' = \sigma' \sin \varphi',$$

onde os valores de σ e σ' são independentes de φ e φ' .

Substituindo esses valores nas expressões de Ω e U na Seção anterior e assumindo α como o raio do cilindro obtemos:

$$\Omega = \int \int \int \frac{dx' \cdot \rho' d\rho' d\varphi'}{r} \cdot \varepsilon' + \alpha \int \int \frac{dx' d\varphi'}{r} \cdot e', \quad (1)$$

$$U = \int \int \int \frac{dx' \cdot \rho' d\rho' d\varphi'}{r^3} (x - x') \left(u'(x - x') + \sigma' (\rho \cos(\varphi - \varphi') - \rho') \right). \quad (2)$$

Além disso, essa substituição fornece

$$\frac{dv'}{dy'} = \frac{d \cdot \sigma' \cos \varphi'}{dy'},$$

onde σ' depende apenas da variável ρ' para um dado valor de x' . Portanto, colocando $\sigma' = f(\rho') = f\left(\sqrt{y'^2 + z'^2}\right)$, obtemos:

$$\frac{dv'}{dy'} = \frac{d}{dy'} \cdot \left(\frac{y' f\left(\sqrt{y'^2 + z'^2}\right)}{\sqrt{y'^2 + z'^2}} \right) = \frac{y'^2}{\rho'^2} \cdot \frac{d\sigma'}{d\rho'} + \frac{\rho'^2 - y'^2}{\rho'^3} \cdot \sigma'.$$

Obtemos da mesma forma:

$$\frac{dw'}{dz'} = \frac{z'^2}{\rho'^2} \cdot \frac{d\sigma'}{d\rho'} + \frac{\rho'^2 - z'^2}{\rho'^3} \cdot \sigma',$$

logo,

$$\frac{dv'}{dy'} + \frac{dw'}{dz'} = \frac{d\sigma'}{d\rho'} + \frac{\sigma'}{\rho'} = \frac{1}{\rho'} \cdot \frac{d \cdot \rho' \sigma'}{d\rho'}.$$

Adicionando du'/dx' e substituindo o valor respectivo para a soma $du'/dx' + dv'/dy' + dw'/dz'$ na Equação (8) da Seção anterior, obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{du'}{dx} + \frac{1}{\rho'} \cdot \frac{d \cdot \rho' \sigma'}{d\rho'} = -\frac{1}{2} \frac{d\varepsilon'}{dt}. \quad (3)$$

Finalmente encontramos os seguintes valores para os ângulos entre a normal ao elemento de superfície dS' apontando para dentro e as direções dos três eixos coordenados:

$$(N', x') = \frac{\pi}{2}, \quad (N', y') = \varphi' + \pi, \quad (N', z') = \varphi' + \frac{\pi}{2};$$

temos, portanto⁶⁵⁷

⁶⁵⁷A segunda e terceira equações que aparecem a seguir foram escritas no texto original como segue:

$$v' \cos(N', y') = -\sigma' \cos \varphi'^2,$$

$$w' \cos(N', z') = -\sigma' \sin \varphi'^2.$$

Para evitar confusão, estou substituindo nessa tradução as notações $\sin \varphi'^2$ e $\cos \varphi'^2$ utilizadas na época de Weber por seus formatos atuais, a saber, $\sin^2 \varphi'$ e $\cos^2 \varphi'$, respectivamente.

$$u' \cos(N', x') = 0 ,$$

$$v' \cos(N', y') = -\sigma' \cos^2 \varphi' ,$$

$$w' = \cos(N', z') = -\sigma' \sin^2 \varphi' .$$

Substituindo esses valores na Equação (9) da Seção anterior obtém-se então:

$$\sigma' = \frac{1}{2} \frac{de'}{dt} . \quad (4)$$

Colocando, por brevidade,

$$x' - x = \lambda, \quad \text{portanto} \quad dx' = d\lambda ,$$

$$\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi') = \beta^2, \quad \text{portanto} \quad r^2 = \beta^2 + \lambda^2 ,$$

então, de acordo com as Equações (1) e (2), temos:

$$\Omega = \int \int \rho' d\rho' d\varphi' \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\varepsilon' d\lambda}{\sqrt{\beta^2 + \lambda^2}} + \alpha \int d\varphi' \int_{-l/2}^{l/2} \frac{e' d\lambda}{\sqrt{\beta^2 + \lambda^2}} ,$$

$$U = \int \int \rho' d\rho' d\varphi' \int_{-l/2}^{l/2} \frac{u' \lambda^2 d\lambda}{(\beta^2 + \lambda^2)^{3/2}} \\ + \int \int \rho'^2 \left(1 - \frac{\rho}{\rho'} \cos(\varphi - \varphi') \right) d\rho' d\varphi' \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\sigma' \lambda d\lambda}{(\beta^2 + \lambda^2)^{3/2}} .$$

onde l denota o comprimento do cilindro e o ponto (x, y, z) está na seção reta que corta ao meio esse comprimento.⁶⁵⁸

Calculando na primeira equação as expansões em série de ε' e e' em potências de λ , a saber

$$e' = e + \frac{de}{dx} \cdot \lambda + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 e}{dx^2} \cdot \lambda^2 + \dots ,$$

$$\varepsilon' = \varepsilon'_0 + \frac{d\varepsilon'_0}{dx} \cdot \lambda + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 \varepsilon'_0}{dx^2} \cdot \lambda^2 + \dots .$$

onde ε'_0 , além do tempo, depende apenas da variável ρ' , então para valores muito pequenos de β^2/l^2 , o que segue necessariamente para pequenos valores de α/l já que β^2 nunca pode ser maior do que $4\alpha^2$, podemos colocar⁶⁵⁹

⁶⁵⁸Na Nota de rodapé 652 na página 350 da Seção 18.1, Weber havia denominado de l ao comprimento total do condutor fino e curvo. Ele agora está representando pela mesma letra o comprimento do pequeno cilindro BC representado na Nota de rodapé 656 na página 355. Isso traz um pouco de confusão aos seus resultados finais. Teria sido melhor e mais claro usar duas letras diferentes para esses comprimentos diferentes, assim como foi feito por Kirchhoff.

⁶⁵⁹O que Weber representa pelo símbolo “log” nas próximas equações deve ser entendido como o logaritmo natural na base $e = 2,718\dots$ representado hoje em dia como “ln”.

$$\int_{-l/2}^{l/2} \frac{d\lambda}{\sqrt{\beta^2 + \lambda^2}} = 2 \log \frac{l}{\beta} ,$$

$$\int_{-l/2}^{l/2} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\beta^2 + \lambda^2}} = 0 ,$$

$$\int_{-l/2}^{l/2} \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{\beta^2 + \lambda^2}} = \frac{l^2}{4} ,$$

portanto, para pequenos valores de l obtemos

$$\Omega = \int \int \rho' d\rho' d\varphi' \left(2\varepsilon'_0 \log \frac{l}{\beta} + \frac{1}{8} \frac{d^2 \varepsilon'_0}{dx^2} l^2 \right) + \alpha \int d\varphi' \left(2e \log \frac{l}{\beta} + \frac{1}{8} \frac{d^2 e}{dx^2} l^2 \right) .$$

A integração deve ser realizada de $\varphi' = 0$ até $\varphi' = 2\pi$ e de $\rho' = 0$ até $\rho' = \alpha$, obtemos, portanto:

$$\begin{aligned} \Omega = 2\pi \int_0^\alpha \rho' d\rho' \left(2\varepsilon'_0 \log l + \frac{1}{8} \frac{d^2 \varepsilon'_0}{dx^2} l^2 \right) + 2\pi\alpha \left(2e \log l + \frac{1}{8} \frac{d^2 e}{dx^2} l^2 \right) \\ - 2 \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \varepsilon'_0 \int_0^{2\pi} d\varphi' \cdot \log \beta - 2\alpha e \int_0^{2\pi} d\varphi' \cdot \log \beta . \end{aligned}$$

Considerando que

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \cdot \log \beta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi' \cdot \log \left(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi') \right)$$

é igual a $2\pi \log \rho'$ quando $\rho' > \rho$, ou então é igual a $2\pi \log \rho$ quando $\rho > \rho'$, obtemos então para a porção que se refere à *superfície* para a qual $\rho' = \alpha$:

$$-2\alpha e \int_0^{2\pi} d\varphi' \cdot \log \beta = -4\pi\alpha e \log \alpha .$$

A porção que se refere ao *interior* [do condutor] é decomposta em duas partes, a saber:

$$-2 \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \varepsilon'_0 \int_0^{2\pi} d\varphi' \cdot \log \beta = -4\pi \log \rho \int_0^\rho \rho' d\rho' \cdot \varepsilon'_0 - 4\pi \int_\rho^\alpha \rho' d\rho' \cdot \varepsilon'_0 \log \rho' ,$$

que, portanto, reduz-se a

$$-4\pi \log \alpha \cdot \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \varepsilon'_0 ,$$

no limite em que $\rho = \alpha$, e [reduz-se] a

$$-4\pi \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \varepsilon'_0 \log \rho' ,$$

no outro limite em que $\rho = 0$, expressões essas que diferem cada vez menos entre si quanto menor for [o valor de] α ,⁶⁶⁰ de tal forma que, com precisão suficiente para valores muito pequenos de α podemos colocar

$$2 \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \varepsilon'_0 \int_0^{2\pi} d\varphi' \cdot \log \beta = -4\pi \log \alpha \cdot \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \varepsilon'_0$$

para a parte que se refere ao interior; portanto:

$$\begin{aligned} \Omega = 2\pi \int_0^\alpha \rho' d\rho' \left(2\varepsilon'_0 \log l + \frac{1}{8} \frac{d^2 \varepsilon'_0}{dx^2} l^2 \right) + 2\pi \alpha \left(2e \log l + \frac{1}{8} \frac{d^2 e}{dx^2} l^2 \right) \\ - 4\pi \log \alpha \cdot \left(\alpha e + \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \varepsilon'_0 \right) , \end{aligned}$$

ou, de maneira mais concisa

$$\Omega = 4\pi \log \frac{l}{\alpha} \cdot \left(\alpha e + \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \varepsilon'_0 \right) + \frac{1}{4} \pi l^2 \cdot \left(\alpha \frac{d^2 e}{dx^2} + \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \frac{d^2 \varepsilon'_0}{dx^2} \right) .$$

Finalmente, colocando

$$2\pi \alpha e + 2\pi \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \varepsilon'_0 = E ,$$

isto é, denotando a quantidade de eletricidade *livre* contida no elemento dx do condutor, parcialmente em sua superfície, parcialmente no interior, por $E dx$,⁶⁶¹ diferenciando então duas vezes obtemos:

$$2\pi \alpha \cdot \frac{d^2 e}{dx^2} + 2\pi \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \frac{d^2 \varepsilon'_0}{dx^2} = \frac{d^2 E}{dx^2} ,$$

logo

$$\Omega = 2E \log \frac{l}{\alpha} + \frac{1}{8} \frac{d^2 E}{dx^2} \cdot l^2 . \quad (5)$$

Da mesma maneira, na equação anterior para U , os valores de u' e σ' podem ser desenvolvidos por meio de uma expansão em série em potências de λ , a saber:

⁶⁶⁰[Nota de Wilhelm Weber:] Com a suposição da distribuição simétrica da eletricidade livre no fio, ε'_0 se aproxima de uma *constante* para valores decrescentes de ρ' . Assim, para valores pequenos de α pode-se colocar ε'_0 igual a uma *constante* para todos os valores de $\rho' < \alpha$, com isso o valor encontrado para o primeiro limite transforma-se em:

$$-4\pi \varepsilon'_0 \log \alpha \int_0^\alpha \rho' d\rho' = -2\pi \alpha^2 \varepsilon'_0 \log \alpha ,$$

e o valor para o último limite [transforma-se] em:

$$-4\pi \varepsilon'_0 \int_0^\alpha \rho' d\rho' \log \rho' = -2\pi \alpha^2 \varepsilon'_0 \left(\log \alpha - \frac{1}{2} \right) ,$$

expressões essas que diferem cada vez menos entre si, quanto menor for α .

⁶⁶¹Dessa maneira a grandeza E significa a densidade linear de carga no fio, isto é, a quantidade de carga por unidade de comprimento.

$$u' = u'_0 + \frac{du'_0}{dx} \cdot \lambda + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 u'_0}{dx^2} \cdot \lambda^2 + \dots ,$$

$$\sigma' = \sigma'_0 + \frac{d\sigma'_0}{dx} \cdot \lambda + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 \sigma'_0}{dx^2} \cdot \lambda^2 + \dots ,$$

onde, além do tempo, u'_0 e σ'_0 dependem apenas da variável ρ' para um dado valor de x' .

Agora, para valores muito pequenos de β^2/l^2 correspondendo a valores muito pequenos de α^2/l^2 , podemos colocar

$$\begin{aligned} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\lambda d\lambda}{(\beta^2 + \lambda^2)^{3/2}} &= 0 , \\ \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\lambda^2 d\lambda}{(\beta^2 + \lambda^2)^{3/2}} &= 2 \left(\log \frac{l}{\beta} - 1 \right) = 2 \log \frac{l}{e\beta} , \\ \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\lambda^3 d\lambda}{(\beta^2 + \lambda^2)^{3/2}} &= 0 , \\ \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\lambda^4 d\lambda}{(\beta^2 + \lambda^2)^{3/2}} &= \frac{1}{4} l^2 , \end{aligned}$$

onde e é a base dos logaritmos naturais. Obtemos portanto a seguinte equação para U :

$$\begin{aligned} U &= \int \int \rho' d\rho' d\varphi' \cdot \left(2u'_0 \cdot \log \frac{l}{e\beta} + \frac{1}{8} \frac{d^2 u'_0}{dx^2} \cdot l^2 \right) \\ &+ \int \int \rho'^2 \left(1 - \frac{\rho}{\rho'} \cos(\varphi - \varphi') \right) d\rho' d\varphi' \left(2 \frac{d\sigma'_0}{dx} \log \frac{l}{e\beta} + \frac{1}{24} \frac{d^3 \sigma'_0}{dx^3} l^2 \right) . \end{aligned}$$

A última parte desse valor de U pode ser considerada muito pequena quando α é muito pequeno, já que a integração para ρ' tem de ser realizada de $\rho' = 0$ até $\rho' = \alpha$, portanto:

$$U = \int \int \rho' d\rho' d\varphi' \cdot \left(2u'_0 \log \frac{l}{e\beta} + \frac{1}{8} \frac{d^2 u'_0}{dx^2} l^2 \right) ,$$

onde a integração tem de ser realizada de $\varphi' = 0$ até $\varphi' = 2\pi$ e de $\rho' = 0$ até $\rho' = \alpha$, assim

$$U = 2\pi \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \left(2u'_0 \log \frac{l}{e} + \frac{1}{8} \frac{d^2 u'_0}{dx^2} \cdot l^2 \right) - 2 \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot u'_0 \int_0^{2\pi} d\varphi' \log \beta .$$

Como

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \cdot \log \beta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi' \cdot \log \left(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi') \right)$$

é igual a $2\pi \log \rho'$ para $\rho' > \rho$, ou então é igual a $2\pi \log \rho$ para $\rho > \rho'$, obtemos:

$$\begin{aligned} U &= 2\pi \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \left(2u'_0 \log \frac{l}{e} + \frac{1}{8} \frac{d^2 u'_0}{dx^2} l^2 \right) \\ &- 4\pi \log \rho \int_0^\rho \rho' d\rho' \cdot u'_0 - 4\pi \int_\rho^\alpha \rho' d\rho' \cdot u'_0 \log \rho' , \end{aligned}$$

para a qual podemos escrever

$$U = 4\pi \log \frac{l}{e\alpha} \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot u'_0 + \frac{1}{4}\pi l^2 \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \frac{d^2 u'_0}{dx^2} \\ + 4\pi \log \frac{\alpha}{\rho} \cdot \int_0^\rho \rho' d\rho' \cdot u'_0 + 4\pi \int_\rho^\alpha \rho' d\rho' \cdot u'_0 \log \frac{\alpha}{\rho'} .$$

Mas como, quando α é muito pequeno, as duas últimas partes deste valor de U podem ser vistas como nulas em comparação com a primeira parte, então pode ser colocado:

$$U = 4\pi \log \frac{l}{e\alpha} \cdot \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot u'_0 + \frac{1}{4}\pi l^2 \cdot \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \frac{d^2 u'_0}{dx^2} .$$

Finalmente, colocando

$$2\pi \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot u'_0 = i ,$$

isto é, denotando por idt à quantidade de electricidade positiva atravessando a seção reta do fio condutor durante o elemento de tempo dt , onde i expressa a intensidade de corrente em unidade mecânica, então diferenciando duas vezes obtém-se

$$2\pi \int_0^\alpha \rho' d\rho' \cdot \frac{d^2 u'_0}{dx^2} = \frac{d^2 i}{dx^2} ,$$

portanto

$$U = 2i \log \frac{l}{e\alpha} + \frac{1}{8} \frac{d^2 i}{dx^2} \cdot l^2 .$$

De acordo com isto, a força electromotriz que é exercida pela *electricidade livre* num pequeno pedaço de fio condutor, visto como um cilindro, em qualquer ponto da seção reta central deste pedaço, é determinada com mais detalhe a partir do valor de Ω [através de:]

$$-2 \frac{d\Omega}{dx} = -4 \frac{dE}{dx} \cdot \log \frac{l}{\alpha} - \frac{1}{4} \frac{d^3 E}{dx^3} \cdot l^2 ,$$

e da mesma maneira [é determinada] a força eletromotriz exercida pela *indução dos movimentos elétricos* no mesmo pedaço e [atuando] no mesmo ponto, a saber, a partir do valor de U [por meio de:]

$$-\frac{8}{c^2} \frac{dU}{dt} = -\frac{16}{c^2} \cdot \frac{di}{dt} \cdot \log \frac{l}{e\alpha} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{d^3 i}{dx^2 dt} \cdot l^2 .$$

Finalmente, assumindo um número muito grande para o valor de $\log[l/\alpha]$, assim como foi feito por Kirchhoff, podemos colocar

$$-2 \frac{d\Omega}{dx} = -4 \frac{dE}{dx} \cdot \log \frac{l}{\alpha} , \\ -\frac{8}{c^2} \frac{dU}{dt} = -\frac{16}{c^2} \cdot \frac{di}{dt} \cdot \log \frac{l}{e\alpha} ,$$

ou, quando 1 desaparece completamente comparado com $\log[l/\alpha]$,

$$-\frac{8}{c^2} \frac{dU}{dt} = -\frac{16}{c^2} \cdot \frac{di}{dt} \cdot \log \frac{l}{\alpha} .$$

18.3 Simplificação das Equações Gerais

Após uma determinação mais detalhada das forças eletromotrizes que atuam em um ponto (x, y, z) do fio condutor, que se devem em parte à eletricidade livre, em parte aos movimentos elétricos no pequeno pedaço do fio condutor, que pode ser considerado como um cilindro, ao qual pertence esse próprio ponto, Kirchhoff tentou simplificar as equações gerais estabelecidas na Seção 18.1 sob as seguintes condições, a saber:

1. que o raio do fio condutor, α , era tão pequeno comparado ao comprimento l do seu elemento, considerado como cilíndrico, que $\log[l/\alpha]$ representa um número muito grande como já havia sido assumido na Seção anterior para a simplificação da expressão das forças eletromotrizes;
2. que as forças eletromotrizes atuando em um ponto (x, y, z) em um tal fio condutor fino, forças essas que vêm da eletricidade livre e dos movimentos elétricos em todo o fio, com exceção de um único pedaço pequeno, que pode ser considerado como um cilindro, ponto esse que pertence à seção reta central, são infinitesimais em comparação com as forças eletromotrizes que atuam no mesmo ponto, que vêm da eletricidade livre e dos movimentos elétricos no pequeno pedaço que acabamos de descrever. Além disso, temos a suposição já usada também para o desenvolvimento das equações gerais na Seção 18.1, [a saber:]
3. que a lei de Ohm é válida separadamente para todos os elementos de corrente, mesmo se as intensidades de corrente nesses elementos são muito diferentes e variam rapidamente.

Se agora, de acordo com a *primeira* suposição, $\log[l/\alpha]$ for um número muito grande e se, de acordo com a *segunda* suposição, apenas são levadas em consideração as forças eletromotrizes determinadas mais precisamente na Seção precedente, comparadas com as quais são extremamente pequenas as outras [forças eletromotrizes] devidas às partes mais distantes do fio condutor, encontramos após a conclusão da Seção anterior a *expressão completa da força eletromotriz* ao longo do eixo do fio condutor, [a saber:]

$$-2 \left(\frac{d\Omega}{dx} + \frac{4}{c^2} \frac{dU}{dt} \right) = -4 \log \frac{l}{\alpha} \left(\frac{dE}{dx} + \frac{4}{c^2} \frac{di}{dt} \right) .$$

Se essa [fórmula] for agora a expressão da força eletromotriz total, ela fornece então, de acordo com a Seção 18.1, multiplicada pela condutividade específica k , de acordo com a *terceira* suposição, a densidade de corrente u ao longo da direção do fio condutor no ponto (x, y, z) , a saber

$$u = -4k \log \frac{l}{\alpha} \cdot \left(\frac{dE}{dx} + \frac{4}{c^2} \frac{di}{dt} \right) .$$

Considerando, finalmente, que a densidade de corrente no ponto (x, y, z) é independente de ρ e é, portanto, a mesma para todos os pontos da mesma seção reta do fio e que, portanto, multiplicada pela seção transversal $\pi\alpha^2$ do fio, fornece a intensidade de corrente i , então, multiplicando a equação anterior por $\pi\alpha^2$ obtém-se a seguinte equação deduzida das primeiras sete equações gerais da Seção 18.1:

$$i = -4\pi\alpha^2 k \log \frac{l}{\alpha} \cdot \left(\frac{dE}{dx} + \frac{4}{c^2} \frac{di}{dt} \right) .$$

Portanto, só sobram as duas últimas das equações gerais deduzidas na Seção 18.1, que foram reduzidas na Seção 18.2 a:

$$\frac{du}{dx} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d \cdot \rho \sigma}{d\rho} = -\frac{1}{2} \frac{d\varepsilon}{dt} ,$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{de}{dt} .$$

Multiplicando a primeira equação por $\rho d\rho d\varphi$ e integrando sobre toda a seção reta do fio condutor, e finalmente subtraindo a segunda equação multiplicada por $2\pi\alpha$, obtém-se:

$$\pi\alpha^2 \cdot \frac{du}{dx} = -\pi\alpha \cdot \frac{de}{dt} - \pi \int_0^\alpha \rho d\rho \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} .$$

Mas agora, de acordo com a Seção 18.2, temos para $\rho' = \rho$:

$$2\pi\alpha e + 2\pi \int_0^\alpha \rho d\rho \cdot \varepsilon = E ,$$

portanto,

$$2\pi\alpha \cdot \frac{de}{dt} + 2\pi \int_0^\alpha \rho d\rho \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{dE}{dt} ,$$

e assim, como $\pi\alpha^2 u = i$, de onde segue que $\pi\alpha^2 \cdot (du/dx) = di/dx$, as duas últimas equações da Seção 18.1 fornecem a seguinte [equação]:

$$\frac{di}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{dE}{dt} .$$

Com base nessa redução das nove equações gerais a duas [equações], a saber,

$$i = -4\pi\alpha^2 k \log \frac{l}{\alpha} \cdot \left(\frac{dE}{dx} + \frac{4}{c^2} \frac{di}{dt} \right) ,$$

$$\frac{di}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{dE}{dt} ,$$

podemos, eliminando i , deduzir finalmente a lei que permite determinar a distribuição da eletricidade livre, E , no circuito em qualquer momento, a saber⁶⁶²

⁶⁶²A próxima equação pode ser expressa em termos mais familiares utilizando o símbolo atual ∂ para representar as derivadas parciais, o símbolo atual “ln” para representar o logaritmo natural de base $e = 2,718...$ no lugar do símbolo “log” de Weber, e multiplicando todos os termos por $-2/c^2$. Após reorganizar os termos obtemos a seguinte equação para a densidade linear de carga $E(x, t)$ ao longo desse fio fino:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2/2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{8\pi\alpha^2 k \ln \frac{l}{\alpha}} \frac{\partial E}{\partial t} .$$

Weber e Kohlrausch haviam medido a constante c de Weber entre 1854 e 1856. Eles obtiveram $c = 4,39450 \times 10^8$ m/s, [KW57] com tradução para o inglês em [KW21], ver também a página 197 na Seção 8.17 dessa tradução em português. Portanto $c/\sqrt{2} = 3,1 \times 10^8$ m/s, ou seja, essa grandeza tem o mesmo valor que a conhecida velocidade da luz no vácuo, como mencionado por Kirchhoff em 1857, [Kir57b] com traduções para o inglês em [Kir57a] e [Kir21b], ver a página 232 no Capítulo 9 dessa tradução em português. Ver ainda a discussão sobre a constante c de Weber no Capítulo 19 desse livro. Portanto, a próxima equação apresentada por Weber é a equação do telégrafo moderna descrevendo a propagação de uma perturbação elétrica ao longo de um fio resistivo. Quando a resistência é desprezível, obtemos a equação de onda para

$$\frac{d^2 E}{dt^2} - \frac{c^2}{2} \frac{d^2 E}{dx^2} + \frac{c^2}{16\pi\alpha^2 k \log \frac{l}{\alpha}} \cdot \frac{dE}{dt} = 0 ,$$

ou podemos, ao eliminar E , deduzir a lei que permite determinar a intensidade de corrente i para qualquer ponto do circuito em qualquer momento, a saber:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} - \frac{c^2}{2} \frac{d^2 i}{dx^2} + \frac{c^2}{16\pi\alpha^2 k \log \frac{l}{\alpha}} \cdot \frac{di}{dt} = 0 .$$

A distribuição da eletricidade livre, bem como as intensidades de corrente em todas as partes do fio condutor, como pode ser facilmente visto, também surgiriam dos *movimentos* de todas as partículas elétricas no fio condutor se a lei destes últimos [movimentos] fosse conhecida. Por outro lado, esta última lei pode agora ser facilmente deduzida da lei de distribuição e intensidades de corrente que foi encontrada, por meio da qual é suficiente estabelecer o mesmo para os movimentos de todas as partículas elétricas *positivas* no fio condutor, porque os movimentos opostamente iguais de todas as partículas elétricas *negativas* resultam disso.

Seja s um ponto qualquer do fio condutor⁶⁶³ e $\mathfrak{E}ds$ a quantidade total de eletricidade positiva contida no elemento de comprimento ds do fio condutor e, além disso, seja σ o deslocamento de uma partícula dessa eletricidade positiva em relação ao ponto do seu equilíbrio inicial após [transcorrido] o tempo t , logo $d\sigma/dt$ será a velocidade dessa partícula no fio condutor e $d\sigma/ds$ a diluição da eletricidade positiva no ponto s do fio condutor ao final do tempo t , que sempre corresponde a uma diluição igualmente grande da eletricidade negativa; então a intensidade de corrente i no ponto s do fio condutor ao final do tempo t será igual ao produto $\mathfrak{E}d\sigma/dt$, e a densidade [linear] E da *eletricidade livre*, isto é, o excesso da eletricidade positiva sobre a eletricidade negativa no elemento ds ao final do tempo t , será igual ao dobro do produto negativo $\mathfrak{E}d\sigma/ds$, assim:

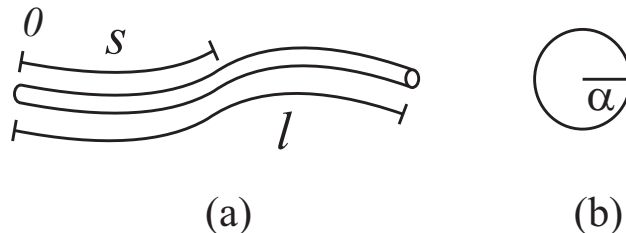
$$i = \mathfrak{E} \cdot \frac{d\sigma}{dt} ,$$

$$E = -2\mathfrak{E} \cdot \frac{d\sigma}{ds} .$$

um sinal deslocando-se com a velocidade da luz no vácuo, $v_L = c/\sqrt{2}$, a saber:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2/2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{v_L^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 .$$

⁶⁶³Na Seção 18.1 Weber considerou $s = \pi\alpha^2$ como a área transversal do fio curvo e fino com uma seção reta circular de raio α e comprimento total l . Ele agora vai considerar s como a posição de um ponto ao longo do eixo curvo desse fio fino medida a partir de uma dada origem 0, como representado na Figura dessa Nota de rodapé, a saber:



Contudo, substituindo esses valores nas equações anteriores obtemos as duas equações [seguintes:]

$$\frac{d^3\sigma}{dt^3} - \frac{c^2}{2} \frac{d^3\sigma}{ds^2 dt} + \frac{c^2}{16\pi\alpha^2 k \log \frac{l}{\alpha}} \cdot \frac{d^2\sigma}{dt^2} = 0 ,$$

$$\frac{d^3\sigma}{ds dt^2} - \frac{c^2}{2} \frac{d^3\sigma}{ds^3} + \frac{c^2}{16\pi\alpha^2 k \log \frac{l}{\alpha}} \cdot \frac{d^2\sigma}{ds dt} = 0 ,$$

portanto, levando em consideração que σ era igual a zero em todo o fio condutor no equilíbrio inicial da eletricidade, segue a lei de movimento de todas as partículas elétricas *positivas* no fio condutor, a saber:

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} - \frac{c^2}{2} \frac{d^2\sigma}{ds^2} + \frac{c^2}{16\pi\alpha^2 k \log \frac{l}{\alpha}} \cdot \frac{d\sigma}{dt} = 0 .$$

18.4 Exame das Condições Estabelecidas na Seção Anterior

Foram compilados no início da Seção anterior os pré-requisitos para a simplificação das equações, um dos quais já se baseava no desenvolvimento apresentado na Seção 18.1. No que diz respeito à primeira nova suposição adicionada para fins de simplificação, ou seja, a suposição de um fio condutor muito fino, ela parece tão óbvia que dificilmente precisa de um exame mais detalhado, mas, se for uma questão de simplificação, é evidente por si mesma. Porém, em uma inspeção mais detalhada, é fácil ver que essa finura do fio condutor é e tem de ser usada de tal forma que nunca ocorre de fato, de modo que toda a aplicabilidade prática das conclusões derivadas dela se torna duvidosa. Além disso, ainda temos a preocupação especial de saber se esse pré-requisito não pode entrar em conflito com o pré-requisito para o desenvolvimento da Seção 18.1 relacionado com a lei de Ohm, já que essa última [lei] precisa ser aparentemente limitada a fios condutores que são menos finos.

A saber, se não há objeção contra considerar a espessura do fio condutor como extremamente pequena comparada com seu comprimento total para condutores lineares, a consideração dessa espessura como desaparecendo comparada a um único elemento do fio condutor, ainda considerado como retilíneo, tem um alcance maior; e de um alcance ainda maior é a suposição do logaritmo da razão do comprimento de tal elemento pequeno para essa espessura como sendo um número grande, em relação ao qual o número 1 é considerado como desprezível, como foi feito naquele pré-requisito. Pois, considerando 20 como sendo tal número grande, demandaria um fio cujo menor pedaço, ainda considerado como retilíneo, teria de ser mais longo do que espesso por um fator acima de 200 milhões, o que não existe.

Contudo, mais importante é a outra objeção, ou seja, saber se a suposição de um tal fio condutor fino, caso existisse, entraria em conflito com o pré-requisito relacionado com a lei de Ohm. De qualquer forma, tem de ser questionado se o último pré-requisito é válido *geralmente e estritamente* ou se ele é *válido aproximadamente para fios menos finos* e, como pode ser facilmente visto, essa dúvida só pode ser sanada por meio de um *desenvolvimento das leis de movimento* independente desse próprio pré-requisito. Tentaremos apresentar tal desenvolvimento, ao menos até o ponto onde parece ser necessário para o teste da dúvida apontada, nos fixando preliminarmente ao primeiro pré-requisito, a saber, um fio tão fino que o logaritmo da razão do comprimento dos elementos, ainda considerados como retilíneos,

para suas espessuras é tão grande que podemos comparativamente desprezar o número 1. Esse desenvolvimento é baseado na seguinte consideração.

Se fossem realmente conhecidas todas as forças que atuam sobre as partículas elétricas no fio condutor e se todas essas forças fossem expressas exatamente em unidades mecânicas conhecidas, seria então auto evidente que um *desenvolvimento das leis de movimento* dessas partículas elétricas no fio condutor *seria possível de forma bem independente do pré-requisito da lei de Ohm*; pois a resultante de todas as forças atuando em qualquer partícula dividida pela aceleração dessa partícula tem de produzir, assim como ocorre com todos os corpos, sempre o mesmo quociente, o qual na mecânica é usualmente denominado de *massa da partícula*.

18.5 Dedução da Equação de Movimento Independente da Suposição da Lei de Ohm

Tentamos portanto enumerar todas as forças atuando sobre uma partícula elétrica no fio condutor e expressá-las em unidade mecânica, a saber:

1. aquelas forças elétricas, já determinadas por Kirchhoff, atuando a distâncias pequenas que, com a suposição da finura do fio, forneceram a força eletromotriz em unidade mecânica [dada por:]

$$= -4 \log \frac{l}{\alpha} \cdot \left(\frac{dE}{ds} + \frac{4}{c^2} \frac{di}{dt} \right)$$

para um ponto s do fio condutor. Essa força eletromotriz é a diferença entre as duas forças que atuam sobre uma unidade de medida elétrica positiva e negativa (como definida na eletrostática) caso estejam presentes nesse ponto. Como essas duas forças são iguais, com exceção de suas direções opostas, segue-se que metade dessa força eletromotriz, a saber,

$$= -2 \log \frac{l}{\alpha} \cdot \left(\frac{dE}{ds} + \frac{4}{c^2} \frac{di}{dt} \right) ,$$

é a força atuando sobre qualquer unidade de medida elétrica positiva no ponto s . Porém, o número de unidades de medida elétrica positiva contidas no elemento de comprimento ds do fio condutor foi denominado anteriormente por $\mathfrak{E}ds$ na Seção 18.3, onde foi observado que $\mathfrak{E}d\sigma/dt = i$ e $-2\mathfrak{E}d\sigma/ds = E$. Multiplicando a força anterior pelo número $\mathfrak{E}ds$ e substituindo os valores anteriores obtemos a força atuando sobre a eletricidade positiva no elemento ds expressa em unidades mecânicas, a saber,

$$= 4\mathfrak{E}^2 \log \frac{l}{\alpha} \cdot \left(\frac{d^2\sigma}{ds^2} - \frac{2}{c^2} \frac{d^2\sigma}{dt^2} \right) \cdot ds .$$

Além dessas forças determinadas anteriormente temos de adicionar:

2. as forças exercidas pelas partículas condutoras ponderáveis sobre a eletricidade positiva no elemento ds , que tentamos determinar da seguinte forma.

De acordo com a lei de Ohm, comprovada para correntes *constantes* como mostrado na Nota de rodapé da Seção 18.1,⁶⁶⁴ a força eletromotriz em um ponto do condutor $= u/k$, que é independente das partículas ponderáveis do fio condutor, ou $= i/[\pi\alpha^2k]$, já que $\pi\alpha^2u = i$ de acordo com a Seção 18.3. Contudo, a *constância* da corrente, isto é, a velocidade constante das partículas elétricas no fio condutor, prova que, exceto por essa força eletromotriz independente das partículas ponderáveis, tem de existir uma segunda força eletromotriz de valor igual e direção oposta que tem obviamente de se originar da ação das partículas condutoras ponderáveis [ao atuar] sobre a eletricidade no condutor, que portanto é dada por

$$= -\frac{i}{\pi\alpha^2k} .$$

A metade dessa força eletromotriz, a saber

$$= -\frac{i}{2\pi\alpha^2k} ,$$

é então, como fica claro da discussão anterior, a força que é exercida pelas partículas ponderáveis do condutor sobre cada unidade de medida elétrica positiva no ponto s que está sendo considerado. Portanto, multiplicando essa força pelo número $\mathfrak{E}ds$ de unidades de medida elétrica positiva contidas no elemento ds e substituindo também aqui como anteriormente $\mathfrak{E}d\sigma/dt$ por i , encontramos a força exercida sobre a eletricidade positiva contida no elemento ds expressa em unidade mecânica, a saber:

$$= -\frac{1}{2\pi\alpha^2k} \cdot \mathfrak{E}^2 \cdot \frac{d\sigma}{dt} \cdot ds .$$

Finalmente, se for observado que os casos de correntes *variáveis* diferem daqueles de correntes *constantes* apenas nas relações que têm sua causa em diferenças na interação das *partículas elétricas entre si*, das quais as forças devidas à interação das *partículas condutoras ponderáveis com as [partículas] elétricas* não dependem diretamente, parece justificado assumir que a lei apresentada para determinar estas últimas forças, se for válida em todos os casos de correntes *constantes*, é geralmente válida, mesmo nos casos de correntes *variáveis*.

Para levar em consideração todas as forças que atuam sobre a partícula elétrica considerada do fio condutor, finalmente resumimos

3. todas as forças atuando à distância, de onde quer que se originem, incluindo, nomeadamente, todas as forças decorrentes da interação da eletricidade com a eletricidade do ponto em consideração, com exceção daquelas contidas no próprio elemento ds no qual se situa o ponto considerado, forças que Kirchhoff supôs serem extremamente pequenas. Denotamos por S à força eletromotriz que se origina disso no ponto s em unidade mecânica, metade da qual multiplicada por $\mathfrak{E}ds$ fornece a força exercida sobre a eletricidade positiva no elemento ds , expressa em unidade mecânica,

$$= \frac{1}{2}\mathfrak{E}Sds .$$

⁶⁶⁴Ver a Nota de rodapé 652 na página 350.

Como todas essas forças estão expressas em unidades mecânicas, isto é, em partes daquela força que fornece à unidade de massa ponderável (a massa de um miligrama) a unidade de velocidade (um milímetro por segundo) durante a unidade de tempo (durante o tempo de um segundo), segue-se, de acordo com a lei de movimento válida para todos os corpos, que o quociente da soma de todas essas forças na mesma direção dividida pela aceleração, ou seja, pela velocidade que essa soma de forças forneceria à eletricidade positiva contida no elemento ds sobre o qual atua, durante a unidade de tempo, a saber,

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} ,$$

fornece a definição da *massa* da eletricidade positiva contida no elemento ds , expressa na unidade de massa (miligrama) estabelecida para todos os corpos.

Vale ressaltar que isso nos leva a um novo tipo de *determinação absoluta de uma quantidade de eletricidade*, sobre a qual pode ser feita a seguinte observação para comparar esse novo tipo de *determinação absoluta* com aquelas já conhecidas aqui para fins de aplicação à presente consideração.

Organizando os diferentes métodos de *determinações absolutas* de uma quantidade de eletricidade de acordo com a exatidão que eles permitem na prática, tem de ser colocada no topo as *determinações absolutas por métodos galvanométricos* por meio das quais a quantidade de eletricidade, presente como parte integrante do *fluido neutro*, transferida de um espaço para outro, é expressa em frações da quantidade de eletricidade que atravessa durante a unidade de tempo a seção reta do condutor com a *unidade de intensidade de corrente determinada galvanometricamente*. — Segue-se então as *determinações absolutas por meio de medidas eletrostáticas*, por meio das quais uma quantidade existente de eletricidade *livre* é obtida como parte daquela quantidade de eletricidade que exerce a unidade de força sobre a mesma quantidade [de eletricidade livre separada dela] por uma unidade de distância de acordo com a lei eletrostática. Essa determinação só é aplicada a quantidades *pequenas* de eletricidade ocorrendo *livremente* em comparação com as grandes quantidades de eletricidade [que existem] no fluido neutro determinadas galvanometricamente. — É particularmente importante conhecer a razão entre as *unidades de medida* subjacentes a estes dois métodos de determinação, que são obtidos por dupla medição de uma mesma quantidade de eletricidade, tanto por meios galvanométricos como eletrostáticos, isto é, a razão $155\,370 \cdot 10^6 : 1$ (ver o *Abhandlung* anterior, Vol. V, pág. 261).^{665,666} — Podemos adicionar agora, em relação a esses dois *métodos absolutos*, um *terceiro* método pelo qual uma quantidade existente de eletricidade é para ser expressa por sua *massa* em partes da unidade de massa (miligrama) determinada para todos os corpos; aqui, contudo, temos de observar que até o momento nenhuma quantidade existente de eletricidade foi expressa por esse método, já que ainda não foi descoberta uma maneira que levaria mesmo que aproximadamente a um tal conhecimento. Consequentemente, existe um total desconhecimento da relação entre as *unidades de medida* subjacentes a este método de determinação e os anteriores, porque não foi possível realizar uma medição dupla da mesma quantidade de eletricidade nestas diferentes formas. Se essa *razão* = $r : 1$ fosse conhecida, então a *massa* dessa quantidade de eletricidade expressa em *miligramas* como = $[1/r] \cdot \mathfrak{E}ds$ seria obtida a partir do número $\mathfrak{E}ds$ de unidades de medida eletrostática da eletricidade positiva contidas no elemento condutor ds .

⁶⁶⁵[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 649.

⁶⁶⁶[KW57, Seção 15, pág. 649 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [KW21, Seção 15, pág. 48]. Ver, em particular, a página 193 da Seção 8.15 da tradução em português desse trabalho.

Introduzindo essa expressão para a *massa* e igualando-a com o *quociente* anterior, obtemos a seguinte equação:

$$\frac{1}{\frac{d^2\sigma}{dt^2}} \cdot \left(4\mathfrak{E}^2 \log \frac{l}{\alpha} \cdot \left[\frac{d^2\sigma}{ds^2} - \frac{2}{c^2} \frac{d^2\sigma}{dt^2} \right] ds - \frac{1}{2\pi\alpha^2 k} \cdot \mathfrak{E}^2 \cdot \frac{d\sigma}{dt} ds + \frac{1}{2} \mathfrak{E} S ds \right) = \frac{1}{r} \mathfrak{E} ds ,$$

ou, arranjando e colocando

$$\frac{c^2}{8 \log \frac{l}{\alpha} \cdot r \mathfrak{E}} = \lambda ,$$

obtemos:

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} - \frac{c^2}{2(1+\lambda)} \cdot \frac{d^2\sigma}{ds^2} + \frac{c^2}{16\pi\alpha^2 k \log \frac{l}{\alpha} \cdot (1+\lambda)} \cdot \frac{d\sigma}{dt} = \frac{c^2}{16\mathfrak{E} \log \frac{l}{\alpha} \cdot (1+\lambda)} \cdot S .$$

18.6 Comparação dos Resultados

Nesta equação mais geral, pode-se ver que está incluída a equação de Kirchhoff desenvolvida anteriormente, a saber, sob as duas hipóteses de que $S = 0$ e $\lambda = 0$; pois temos então

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} - \frac{c^2}{2} \cdot \frac{d^2\sigma}{ds^2} + \frac{c^2}{16\pi\alpha^2 k \log \frac{l}{\alpha}} \cdot \frac{d\sigma}{dt} = 0 ,$$

em total concordância com a equação desenvolvida no final da Seção 18.3.

Pode ser observado aqui que a Nota de Poggendorff relativa ao artigo de Kirchhoff [publicada] nos *Annalen* de 1857, Vol. 100, pág. 351, refere-se a essa equação mais geral que acabou de ser deduzida e à sua concordância com a equação de Kirchhoff.^{667,668}

A suposição de que $S = 0$ contém não apenas a suposição feita anteriormente por Kirchhoff de que não atua uma força eletromotriz externa sobre a eletricidade no fio condutor, mas também especialmente a segunda suposição feita entre as três no início da terceira Seção,⁶⁶⁹ a saber, que todas as forças eletromotrizes que se originam da eletricidade livre e dos movimentos elétricos em todo o fio condutor, com exceção do pequeno pedaço considerado como cilíndrico com o ponto que está sendo considerado em seu centro, são extremamente pequenas comparadas com aquelas forças eletromotrizes atuando no mesmo ponto e se originando da eletricidade livre e dos movimentos elétricos nesse pequeno pedaço cilíndrico.

Por outro lado, a suposição de que $\lambda = 0$ concorda com a suposição de Kirchhoff sobre a validade geral da lei de Ohm. Contudo, pode parecer que $\lambda = c^2/[8r \cdot \mathfrak{E} \log(l/\alpha)]$ desaparece para $\log(l/\alpha) = \infty$, e que a suposição $\lambda = 0$ seria aproximadamente satisfeita pela suposição de Kirchhoff de que α desaparece comparado com l ; mas esse não é o caso, em vez disso

⁶⁶⁷[Nota de Heinrich Weber:] Essa Nota pode ser encontrada ao final desse artigo sob o número VI.

⁶⁶⁸Ver [Pog57], reimpresso em [Web94b, Artigo número VI, pág. 242 das *Obras* de Weber]. Tradução para o inglês em [Pog21] e tradução para o português no Capítulo 11. Ver ainda os Capítulos 12 e 19.

⁶⁶⁹Ver a Seção 18.3.

[temos] $\lambda = \infty$ quando α desaparece, como pode ser facilmente visto já que o número, $= \mathfrak{E}$, de unidades de medida elétrica positiva contidas na unidade de comprimento do fio condutor é proporcional ao quadrado do raio α , e, denotando por $\mathfrak{E}_0$ ao número constante de unidades de medida elétrica positiva contidas no *volume unitário do fio condutor*, é dado por:

$$\mathfrak{E} = \pi\alpha^2 \cdot \mathfrak{E}_0 ,$$

portanto segue que o produto

$$\mathfrak{E} \log \frac{l}{\alpha} = \pi\mathfrak{E}_0 \cdot \alpha^2 \log \frac{l}{\alpha}$$

desaparece junto com α e assim

$$\lambda = \frac{c^2}{8r \cdot \mathfrak{E} \log \frac{l}{\alpha}}$$

torna-se infinito.

Segue, portanto, que em fios condutores *mais grossos*, com valores maiores de α , a lei de Ohm pode de fato valer aproximadamente em geral como assumido por Kirchhoff, a saber, para um valor muito pequeno do quociente constante $c^2/[r\mathfrak{E}_0]$; e que, por outro lado, a lei de Ohm perderia essa validade mais geral para fios condutores *mais finos*, em particular se esse refinamento for levado tão longe de maneira a tornar $\log(l/\alpha)$ um número muito grande, o que significa que as preocupações expressas anteriormente sobre a incompatibilidade dos dois pressupostos listados em (1) e (3) no início da Seção 18.3 parecem ser bem fundamentadas.

Por outro lado, é óbvio que se, por meio da observação, pudessem ser demonstrados casos de fios condutores mais finos nos quais a lei de Ohm não tivesse essa validade mais geral, mas nos quais surgissem desvios mensuráveis a partir dos quais λ pudesse ser determinado, então seria obtido o conhecimento do quociente constante

$$\frac{c^2}{r\mathfrak{E}_0} = 8\pi\alpha^2 \log \frac{l}{\alpha} \cdot \lambda ,$$

e o conhecimento da razão $r : 1$, isto é, o número de unidades de medida eletrostática por milígrama, dependeria apenas da investigação do número de unidades de medida eletrostática, $\mathfrak{E}_0$, que estão contidas em 1 milímetro cúbico do condutor.

18.7 Desenvolvimento da Expressão da Força Eletromotriz Exercida sobre um Ponto de um Condutor Linear Fechado pela Eletricidade Livre e pelos Movimentos Elétricos em Todo o Condutor, com Exceção do Elemento que Contém o Ponto que está sendo Considerado

Se forem colocadas $= 0$ as forças que não podem ser determinadas que atuam remotamente em um ponto s do fio condutor, tanto aquelas que atuam a partir das partes mais distantes do próprio fio condutor, como aquelas que atuam a partir do exterior, então de acordo com

os desenvolvimentos das Seções anteriores, a equação diferencial parcial para o deslocamento σ da partícula elétrica positiva no ponto s será a seguinte:⁶⁷⁰

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} - a\frac{d^2\sigma}{ds^2} + b\frac{d\sigma}{dt} = 0 ,$$

na qual a única diferença foi que o significado dos coeficientes constantes a e b nessa equação de acordo com a Seção 18.3 era um pouco diferente daquele usado na Seção 18.6, uma diferença que possivelmente não precisa ser considerada, a saber, se a experiência puder mostrar que o quociente denotado por $c^2/[r\mathfrak{E}_0]$ na Seção anterior tiver um valor extremamente pequeno para todos os tipos de condutores.

Contudo, essa concordância não torna de forma alguma a equação anterior conveniente para determinar realmente os movimentos da eletricidade em um fio condutor; mesmo se existissem casos sem forças eletromotrizes externas atuando sobre a eletricidade no fio condutor, não haveria caso no qual também não haveriam forças eletromotrizes atuando a partir das partes mais distantes do próprio fio condutor, se tiver acontecido qualquer perturbação do equilíbrio da eletricidade. Assim, para chegar a uma equação que serviria de fato para determinar o movimento da eletricidade em um fio condutor, não é suficiente o desenvolvimento das forças eletromotrizes da Seção 18.2, que são exercidas pela eletricidade livre e pelos movimentos elétricos apenas pelo elemento ds contendo o ponto s , mas ainda faltam ser determinadas as forças eletromotrizes exercidas pela eletricidade livre e pelos movimentos elétricos em todas as partes remanescentes do fio condutor [e atuando] sobre o ponto s . Portanto, ainda precisam ser testadas em relação à influência dessas últimas forças as conclusões deduzidas da equação de Kirchhoff anterior.

Como as dimensões ds e ds' dos elementos que estão sendo considerados desaparecem comparadas com a distância entre eles, é suficiente de fato para o desenvolvimento dessas forças considerar apenas os valores totais das densidades [lineares] da eletricidade livre e das intensidades de corrente para toda a seção reta, E , E' , i , i' , respectivamente, que são apenas funções de s e t , ou [funções de] s' e t' . Contudo, ao contrário da Seção 18.2, é claro que essas funções não podem ser expandidas em série de acordo com o teorema de Taylor,⁶⁷¹ já que as mesmas [grandezas] podem ser dadas de forma arbitrária no momento inicial $t = 0$; em vez disso precisamos tentar representá-las em termos de séries de seno e cosseno.

Portanto, colocando para um fio condutor fechado de comprimento $2\pi a$

$$E' = \sum \left(a_n \sin \frac{ns'}{a} + b_n \cos \frac{ns'}{a} \right) ,$$

$$i' = \sum \left(c_n \sin \frac{ns'}{a} + d_n \cos \frac{ns'}{a} \right) ,$$

onde n assume todos os sucessivos números inteiros, e denotando por r à distância entre dois pontos s e s' , e por ϑ e ϑ' aos ângulos que ds e ds' formam com r , obtemos de acordo com a Seção 18.1:

$$\Omega = \int \frac{E' ds'}{r} = \int \frac{ds'}{r} \sum \left(a_n \sin \frac{ns'}{a} + b_n \cos \frac{ns'}{a} \right) ,$$

⁶⁷⁰Estou mantendo a notação de Weber para as derivadas parciais, ver a Nota de rodapé 653 na página 351.

⁶⁷¹Ver a Nota de rodapé 437 na página 253.

$$U = \int \frac{ds'}{r} \cos \vartheta \cos \vartheta' \cdot i' = \int \frac{ds'}{r} \cos \vartheta \cos \vartheta' \cdot \sum \left(c_n \sin \frac{ns'}{a} + \partial_n \cos \frac{ns'}{a} \right) .$$

Além disso, ainda temos a equação encontrada na Seção 18.3,

$$\frac{di'}{ds'} = -\frac{1}{2} \frac{dE'}{dt} ,$$

ou, expressa em termos de séries de senos e cossenos,

$$\frac{1}{a} \sum n \left(c_n \cos \frac{ns'}{a} - \partial_n \sin \frac{ns'}{a} \right) = -\frac{1}{2} \sum \left(\frac{da_n}{dt} \cdot \sin \frac{ns'}{a} + \frac{db_n}{dt} \cos \frac{ns'}{a} \right) .$$

Portanto, como essa equação é válida para todos os valores de s' , segue-se que:

$$c_n = -\frac{a}{2n} \cdot \frac{db_n}{dt} ,$$

$$\partial_n = +\frac{a}{2n} \cdot \frac{da_n}{dt} .$$

Com o objetivo agora de determinar a força eletromotriz atuando no ponto s do fio condutor fechado vindo das expressões obtidas para Ω e U , podemos colocar $s' - s = \sigma$, e substituir $s + \sigma$ no lugar de s' e $d\sigma$ no lugar de ds' nas expressões para Ω e U . Isso fornece então

$$\Omega = \sum \int \frac{d\sigma}{r} \left(a_n \sin \left(\frac{n\sigma}{a} + \frac{ns}{a} \right) + b_n \cos \left(\frac{n\sigma}{a} + \frac{ns}{a} \right) \right) ,$$

$$U = \sum \int \frac{d\sigma}{r} \cos \vartheta \cos \vartheta' \cdot \left(c_n \sin \left(\frac{n\sigma}{a} + \frac{ns}{a} \right) + \partial_n \cos \left(\frac{n\sigma}{a} + \frac{ns}{a} \right) \right) .$$

Expandindo a soma em termos de seno e cosseno obtém-se:

$$\begin{aligned} \Omega &= \sum \left(a_n \cos \frac{ns}{a} - b_n \sin \frac{ns}{a} \right) \cdot \int \frac{\sin \frac{n\sigma}{a} \cdot d\sigma}{r} \\ &+ \sum \left(a_n \sin \frac{ns}{a} + b_n \cos \frac{ns}{a} \right) \cdot \int \frac{\cos \frac{n\sigma}{a} \cdot d\sigma}{r} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U &= \sum \left(c_n \cos \frac{ns}{a} - \partial_n \sin \frac{ns}{a} \right) \cdot \int \frac{\cos \vartheta \cos \vartheta' \sin \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r} \\ &+ \sum \left(c_n \sin \frac{ns}{a} + \partial_n \cos \frac{ns}{a} \right) \cdot \int \frac{\cos \vartheta \cos \vartheta' \cos \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r} . \end{aligned}$$

Aqui r , $\cos \vartheta$ e $\cos \vartheta'$ são funções de σ que surgem da equação da curva do fio condutor.⁶⁷² Segue que para cada número n consecutivo as quatro integrais a serem obtidas entre os limites $\sigma = \frac{l}{2}$ até $\sigma = 2\pi a - \frac{l}{2}$ (onde l denota o comprimento do mesmo pedaço do fio condutor que aquele na Seção 18.2), [a saber:]

⁶⁷²Isto é, são funções da equação descrevendo o formato do fio condutor.

$$\int \frac{\sin \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r}, \quad \int \frac{\cos \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r}, \quad \int \frac{\cos \vartheta \cos \vartheta' \sin \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r}, \quad \int \frac{\cos \vartheta \cos \vartheta' \cos \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r}$$

são dadas e determinadas pela *forma do condutor*, cujos valores [das quatro integrais] podem ser denominados resumidamente por

$$N, \quad N', \quad M, \quad M'.$$

Temos então

$$\Omega = \sum \left((a_n N' - b_n N) \sin \frac{ns}{a} + (a_n N + b_n N') \cos \frac{ns}{a} \right),$$

$$U = \sum \left((c_n M' - \partial_n M) \sin \frac{ns}{a} + (c_n M + \partial_n M') \cos \frac{ns}{a} \right),$$

a partir das quais podem ser determinadas agora as forças eletromotrizes, a saber

$$-2 \frac{d\Omega}{ds} = -\frac{2}{a} \sum n \left((a_n N' - b_n N) \cos \frac{ns}{a} - (a_n N + b_n N') \sin \frac{ns}{a} \right),$$

$$-\frac{8}{c^2} \cdot \frac{dU}{dt} = -\frac{8}{c^2} \sum \left[\left(\frac{dc_n}{dt} \cdot M' - \frac{d\partial_n}{dt} \cdot M \right) \sin \frac{ns}{a} + \left(\frac{dc_n}{dt} \cdot M + \frac{d\partial_n}{dt} \cdot M' \right) \cos \frac{ns}{a} \right],$$

ou, substituindo os valores anteriores de c_n e ∂_n na última equação

$$-\frac{8}{c^2} \cdot \frac{dU}{dt} = +\frac{4a}{c^2} \sum \frac{1}{n} \left[\left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} \cdot M' + \frac{d^2 a_n}{dt^2} \cdot M \right) \sin \frac{ns}{a} + \left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} \cdot M - \frac{d^2 a_n}{dt^2} \cdot M' \right) \cos \frac{ns}{a} \right].$$

18.8 Equação de Movimento da Eletricidade em um Condutor Fechado

Para formular a equação de movimento da eletricidade em um condutor fechado de acordo com o método apresentado nas Seções 18.4 e 18.5, inicialmente têm de ser levadas em consideração todas as forças que atuam na eletricidade positiva em um elemento ds do fio condutor e [é necessário] expressar o valor dessas forças em unidades mecânicas.

1. As forças eletromotrizes que atuam *de perto* no ponto s do fio condutor foram encontradas no final da Seção 18.2:

$$-2 \frac{d\Omega}{ds} = -4 \frac{dE}{ds} \cdot \log \frac{l}{\alpha} - \frac{1}{4} \frac{d^3 E}{ds^3} \cdot l^2,$$

$$-\frac{8}{c^2} \frac{dU}{dt} = -\frac{16}{c^2} \frac{di}{dt} \cdot \log \frac{l}{e\alpha} - \frac{1}{c^2} \frac{d^3 i}{ds^2 dt} \cdot l^2 .$$

Mas aqui podemos substituir de acordo com a Seção anterior

$$E = \sum \left(a_n \sen \frac{ns}{a} + b_n \cos \frac{ns}{a} \right) ,$$

$$i = -\frac{a}{2} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{db_n}{dt} \cdot \sen \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cdot \cos \frac{ns}{a} \right) ,$$

portanto,

$$-2 \frac{d\Omega}{ds} = -\frac{4}{a} \sum \left(n \log \frac{l}{\alpha} - \frac{1}{16} \frac{n^3 l^2}{a^2} \right) \left(a_n \cos \frac{ns}{a} - b_n \sen \frac{ns}{a} \right) ,$$

$$-\frac{8}{c^2} \frac{dU}{dt} = \frac{8}{c^2} \sum \left(\frac{a}{n} \log \frac{l}{e\alpha} - \frac{1}{16} \frac{n l^2}{a} \right) \left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} \cdot \sen \frac{ns}{a} - \frac{d^2 a_n}{dt^2} \cdot \cos \frac{ns}{a} \right) .$$

2. Foram encontradas ao final da Seção anterior as forças eletromotrizes atuando à *distância* sobre o ponto s do fio condutor:

$$-2 \frac{d\Omega}{ds} = -\frac{2}{a} \sum n \left[(a_n N' - b_n N) \cos \frac{ns}{a} - (a_n N + b_n N') \sen \frac{ns}{a} \right] ,$$

$$\begin{aligned} -\frac{8}{c^2} \frac{dU}{dt} = & +\frac{4a}{c^2} \sum \frac{1}{n} \left[\left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} \cdot M' + \frac{d^2 a_n}{dt^2} \cdot M \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} \cdot M - \frac{d^2 a_n}{dt^2} \cdot M' \right) \cos \frac{ns}{a} \right] . \end{aligned}$$

Colocando assim

$$N' + 2 \log \frac{l}{\alpha} - \frac{1}{8} \frac{n^2 l^2}{a^2} = N'' ,$$

$$M' + 2 \log \frac{l}{e\alpha} - \frac{1}{8} \frac{n^2 l^2}{a^2} = M'' ,$$

as forças eletromotrizes atuando nas proximidades e à distância, consideradas em conjunto, são:

$$-2 \frac{d\Omega}{ds} = -\frac{2}{a} \sum n \left[(a_n N'' - b_n N) \cos \frac{ns}{a} - (a_n N + b_n N'') \sen \frac{ns}{a} \right] ,$$

$$\begin{aligned} -\frac{8}{c^2} \frac{dU}{dt} = & +\frac{4a}{c^2} \sum \frac{1}{n} \left[\left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} \cdot M'' + \frac{d^2 a_n}{dt^2} \cdot M \right) \sen \frac{ns}{a} \right. \\ & \left. + \left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} \cdot M - \frac{d^2 a_n}{dt^2} \cdot M'' \right) \cos \frac{ns}{a} \right] . \end{aligned}$$

Agora essas forças eletromotrizes são as diferenças daquelas forças que atuam sobre a unidade de medida elétrica positiva e negativa no ponto s . Contudo, como a força atuando sobre a unidade de medida positiva é igual àquela atuando sobre a unidade de medida negativa, exceto pela direção oposta, segue que metade dessas forças eletromotrizes estão atuando sobre cada unidade de medida positiva no ponto s . Porém, o número de unidades de medida positiva contidas no elemento de comprimento ds do fio condutor foi denominado por $\mathfrak{E}ds$ na Seção 18.3; multiplicando então metade das forças eletromotrizes anteriores por $\mathfrak{E}ds$, encontramos as forças que atuam sobre a eletricidade positiva no elemento ds , expressas em unidade mecânica,

$$= -\frac{\mathfrak{E}ds}{a} \sum n \left[(a_n N'' - b_n N) \cos \frac{ns}{a} - (a_n N + b_n N'') \sin \frac{ns}{a} \right] \\ + \frac{2a\mathfrak{E}ds}{c^2} \sum \frac{1}{n} \left[\left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} \cdot M'' + \frac{d^2 a_n}{dt^2} \cdot M \right) \sin \frac{ns}{a} \right. \\ \left. + \left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} \cdot M - \frac{d^2 a_n}{dt^2} \cdot M'' \right) \cos \frac{ns}{a} \right] .$$

3. A força resistiva que se origina das *partículas condutoras ponderáveis* atuando sobre a eletricidade positiva no elemento ds foi encontrada na Seção 18.5 e é dada por, expressa em unidade mecânica:

$$= -\frac{1}{2\pi\alpha^2 k} \cdot \mathfrak{E}^2 \cdot \frac{d\sigma}{dt} ds ,$$

em que

$$\frac{\mathfrak{E}d\sigma}{dt} = i = -\frac{a}{2} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{db_n}{dt} \cdot \sin \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cdot \cos \frac{ns}{a} \right) ,$$

o que fornece essa força como

$$= +\frac{a\mathfrak{E}ds}{4\pi\alpha^2 k} \cdot \sum \frac{1}{n} \left(\frac{db_n}{dt} \cdot \sin \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cdot \cos \frac{ns}{a} \right) .$$

Além disso finalmente temos

4. a força atuando *de fora* sobre a eletricidade positiva no elemento ds que, de acordo com a Seção 18.5 (3),⁶⁷³ fornece

$$= +\frac{1}{2}\mathfrak{E}Sds ,$$

na qual S denota aqui apenas a força eletromotriz externa atuando sobre o ponto s . Expandindo agora S em séries de seno e cosseno:

$$S = \sum \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) ,$$

então essa força é representada por

⁶⁷³Isto é, item 3 da Seção 18.5.

$$= +\frac{1}{2}\mathfrak{E}ds \cdot \sum \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) .$$

Como agora todas essas forças estão expressas em *unidade mecânica*, isto é, em partes daquela força que fornece a unidade de velocidade à unidade de massa ponderável (miligrama) durante a unidade de tempo (segundo),⁶⁷⁴ segue que, de acordo com a bem conhecida lei do movimento válida para todos os corpos, o quociente entre a soma de todas essas forças e a aceleração, $= d^2\sigma/dt^2$, fornecida à eletricidade positiva [contida] no elemento ds em que atuam, expressa a definição de *massa* dessa quantidade de eletricidade, onde a unidade de massa (miligrama) foi denominada por $[1/r]\mathfrak{E}ds$ miligrama na Seção 18.5. Multiplicando a equação assim obtida por $[1/\mathfrak{E}ds] \cdot [d^2\sigma/dt^2]$ e colocando

$$\mathfrak{E} \frac{d^2\sigma}{dt^2} = \frac{di}{dt} = -\frac{a}{2} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{d^2b_n}{dt^2} \sin \frac{ns}{a} - \frac{d^2a_n}{dt^2} \cdot \cos \frac{ns}{a} \right) ,$$

obtemos a equação desejada de movimento da eletricidade em um fio condutor fechado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{a} \sum n \left[(a_n N'' - b_n N) \cos \frac{ns}{a} - (a_n N + b_n N'') \sin \frac{ns}{a} \right] \\ & + \frac{2a}{c^2} \sum \frac{1}{n} \left[\left(\frac{d^2b_n}{dt^2} \cdot M'' + \frac{d^2a_n}{dt^2} \cdot M \right) \sin \frac{ns}{a} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{d^2b_n}{dt^2} \cdot M - \frac{d^2a_n}{dt^2} \cdot M'' \right) \cos \frac{ns}{a} \right] \\ & + \frac{a}{4\pi\alpha^2k} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{db_n}{dt} \sin \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cos \frac{ns}{a} \right) + \frac{1}{2} \sum \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) \\ & = -\frac{a}{2r\mathfrak{E}} \cdot \sum \frac{1}{n} \left(\frac{d^2b_n}{dt^2} \sin \frac{ns}{a} - \frac{d^2a_n}{dt^2} \cos \frac{ns}{a} \right) . \end{aligned}$$

Como N , N'' , M , M'' dependem apenas da equação do formato do condutor, elas podem ser apresentadas como sendo funções de s . No caso particular em que esse formato é um *círculo*, cada uma dessas grandezas tem o *mesmo valor* para todos os pontos s e então a equação anterior pode ser dividida em duas equações mais simples, a saber, colocando $c^2/[4M''r\mathfrak{E}] = \lambda$,

$$\begin{aligned} \frac{d^2a_n}{dt^2} + \frac{c^2}{8\pi\alpha^2kM''(1+\lambda)} \cdot \frac{da_n}{dt} + \frac{n^2c^2N''}{2a^2M''(1+\lambda)} \cdot a_n - \frac{nc^2}{4aM''(1+\lambda)} \cdot g_n \\ = \frac{M}{M''(1+\lambda)} \cdot \frac{d^2b_n}{dt^2} + \frac{n^2c^2N}{2a^2M''(1+\lambda)} \cdot b_n , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2b_n}{dt^2} + \frac{c^2}{8\pi\alpha^2kM''(1+\lambda)} \cdot \frac{db_n}{dt} + \frac{n^2c^2N''}{2a^2M''(1+\lambda)} \cdot b_n + \frac{nc^2}{4aM''(1+\lambda)} \cdot f_n \\ = -\frac{M}{M''(1+\lambda)} \cdot \frac{d^2a_n}{dt^2} - \frac{n^2c^2N}{2a^2M''(1+\lambda)} \cdot a_n . \end{aligned}$$

⁶⁷⁴Isto é, uma força constante que ao atuar sobre uma massa de 1 mg durante 1 segundo aumenta sua velocidade em 1 mm/s.

Dessa maneira o tratamento do caso de um *condutor de formato circular* é consideravelmente simplificado e merece ser considerado em particular. Em todos os outros casos N , N'' , M , M'' como funções de s teriam de ser além disso expandidas em séries de seno e cosseno, sendo que dessa maneira as equações perderiam consideravelmente sua simplicidade.

18.9 Equação para os Valores Médios das Forças Eletromotrizes e Intensidades de Corrente em Condutores Fechados de Formato Arbitrário

Ocorrem frequentemente considerações e aplicações de circuitos fechados que não necessitam o conhecimento das forças eletromotrizes e intensidades de corrente em pontos individuais do circuito, mas nas quais é suficiente o conhecimento de seus *valores médios* para o comprimento total do fio condutor. Portanto, antes de entrar no desenvolvimento especial das leis de movimento da eletricidade em um condutor *circular*, as leis que acabaram de ser obtidas serão aplicadas para deduzir delas a equação para os *valores médios* das forças eletromotrizes e intensidades de corrente em condutores fechados *de formato arbitrário*.

Essa equação é obtida quando os termos da equação encontrada na Seção anterior são multiplicados por ds e integrados de $s = 0$ até $s = 2\pi a$. Ela é consideravelmente simplificada já que, *em primeiro lugar*, de acordo com um teorema conhecido, o valor da integral das forças eletromotrizes que se originam da eletricidade livre no fio condutor é sempre igual a zero,⁶⁷⁵ e já que, *em segundo lugar*, o valor da integral das forças eletromotrizes externas pode usualmente ser considerado como dado. Obtemos portanto, *em primeiro lugar*,

$$\int_0^{2\pi a} \frac{ds}{a} \sum n \left((a_n N'' - b_n N) \cos \frac{ns}{a} - (a_n N + b_n N'') \sin \frac{ns}{a} \right) = 0 ,$$

em segundo lugar, denotando por S ao valor integral das forças eletromotrizes externas,

$$\int_0^{2\pi a} ds \sum \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) = S .$$

Além disso, se

$$i_n = -\frac{a}{2n} \left(\frac{db_n}{dt} \cdot \sin \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cdot \cos \frac{ns}{a} \right) ,$$

então $i = \sum i_n$; obtemos, portanto:

⁶⁷⁵ Isso é, na nomenclatura atual,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 ,$$

onde $\vec{E}$ representa o campo elétrico Coulombiano devido às cargas livres, C é um circuito fechado de formato arbitrário, e $d\vec{\ell}$ representa um elemento de comprimento infinitesimal do circuito fechado.

$$\begin{aligned}
& \int ds \cdot \frac{2a}{c^2} \sum \frac{1}{n} \left[\left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} M'' + \frac{d^2 a_n}{dt^2} M \right) \operatorname{sen} \frac{ns}{a} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} M - \frac{d^2 a_n}{dt^2} M'' \right) \cos \frac{ns}{a} \right] \\
& = -\frac{4}{c^2} \int ds \sum M'' \frac{di_n}{dt} - \frac{4a}{c^2} \sum \frac{1}{n} \int \frac{d^2 i_n}{ds dt} M ds .
\end{aligned}$$

Temos agora

$$\int \frac{d^2 i_n}{dt^2} M ds = M \frac{di_n}{dt} - \int \frac{di_n}{dt} \cdot \frac{dM}{ds} ds ;$$

portanto,

$$\int_0^{2\pi a} \frac{d^2 i_n}{ds dt} M ds = - \int_0^{2\pi a} \frac{di_n}{dt} \cdot \frac{dM}{ds} ds ,$$

após o que

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi a} ds \cdot \frac{2a}{c^2} \sum \frac{1}{n} \left[\left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} M'' + \frac{d^2 a_n}{dt^2} M \right) \operatorname{sen} \frac{ns}{a} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} M - \frac{d^2 a_n}{dt^2} M'' \right) \cos \frac{ns}{a} \right] \\
& = -\frac{4}{c^2} \int_0^{2\pi a} ds \sum M'' \frac{di_n}{dt} + \frac{4a}{c^2} \sum \frac{1}{n} \int_0^{2\pi a} \frac{di_n}{dt} \cdot \frac{dM}{ds} ds .
\end{aligned}$$

Acrescentando finalmente que

$$\begin{aligned}
& \int \frac{ads}{4\pi\alpha^2 k} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{db_n}{dt} \operatorname{sen} \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cos \frac{ns}{a} \right) = -\frac{1}{2\pi\alpha^2 k} \cdot \int ids , \\
& \int \frac{ads}{2r\mathfrak{E}} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} \operatorname{sen} \frac{ns}{a} - \frac{d^2 a_n}{dt^2} \cos \frac{ns}{a} \right) = -\frac{1}{r\mathfrak{E}} \cdot \int \frac{di}{dt} ds ,
\end{aligned}$$

obtemos a seguinte equação para os valores médios das forças eletromotrizes e intensidades de corrente, $\frac{1}{2\pi a} \cdot S$ e $\frac{1}{2\pi a} \cdot \int_0^{2\pi a} ids$, respectivamente:

$$\begin{aligned}
S & = \frac{1}{\pi\alpha^2 k} \cdot \int_0^{2\pi a} ids + \frac{8}{c^2} \int_0^{2\pi a} ds \sum M'' \frac{di_n}{dt} \\
& - \frac{8a}{c^2} \sum \frac{1}{n} \int_0^{2\pi a} \frac{di_n}{dt} \cdot \frac{dM}{ds} ds + \frac{2}{r\mathfrak{E}} \int_0^{2\pi a} \frac{di}{dt} ds .
\end{aligned}$$

Estes valores médios são obviamente particularmente importantes quando não há diferença no movimento elétrico nos vários elementos do fio condutor, ou quando há uma diferença tão pequena que pode ser completamente negligenciada. Assim, em todos esses casos i e di/dt são quantidades independentes de s , e podemos colocar $i = i_0$ e $di/dt = di_0/dt$, portanto $di_n/dt = 0$ para $n > 0$, a partir do que

$$S = \frac{2\pi a}{\pi \alpha^2 k} i_0 + \left(\frac{8}{c^2} \int_0^{2\pi a} M_0'' ds + \frac{4\pi a}{r \mathfrak{E}} \right) \frac{di_0}{dt} ,$$

onde $2\pi a/[\pi \alpha^2 k] = w$ é a resistência de todo o circuito. Colocando

$$\frac{8}{c^2} \int_0^{2\pi a} M_0'' ds + \frac{4\pi a}{r \mathfrak{E}} = p ,$$

e escrevendo i no lugar de i_0 , obtemos

$$S = wi + p \frac{di}{dt} ,$$

onde S , i e di/dt são apenas funções de t . Ao integrar obtemos

$$i = \frac{1}{p} e^{-wt/p} \cdot \int e^{wt/p} \cdot S dt .$$

18.10 Leis do Movimento da Eletricidade em um Fio Condutor Circular

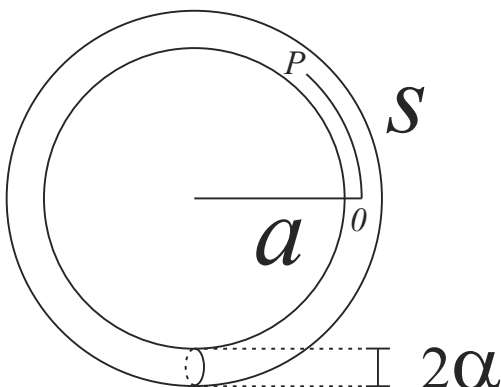
Quando é dado o formato de um condutor, [então] os valores de N , N' , M , M' , isto é, os valores das integrais definidas

$$\begin{aligned} \int_{l/2}^{2\pi a - l/2} \frac{\sin \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r} , \quad & \int_{l/2}^{2\pi a - l/2} \frac{\cos \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r} , \\ \int_{l/2}^{2\pi a - l/2} \frac{\cos \vartheta \cos \vartheta' \sin \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r} , \quad & \int_{l/2}^{2\pi a - l/2} \frac{\cos \vartheta \cos \vartheta' \cos \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r} , \end{aligned}$$

podem ser determinados para qualquer ponto s particular do condutor. Como exemplo considere um condutor com o formato de um círculo de raio $= a$.⁶⁷⁶

Com esse formato circular a distância r entre dois pontos s e s' será igual à corda do arco $(s' - s)/a = \sigma/a$; temos, portanto,

⁶⁷⁶Weber vai considerar um condutor no formato de um anel com raio maior a , raio menor α , sendo s o comprimento de arco de um ponto específico P medido a partir da origem fixa 0, como mostrado na Figura dessa Nota de rodapé:



$$r = 2a \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2a} .$$

Além disso, o ângulo ϑ entre o elemento ds e r é igual ao ângulo ϑ' entre o elemento ds' e r , e ambos são iguais ao ângulo entre a tangente ao círculo no ponto s e a corda do arco σ/a , isto é

$$\vartheta = \vartheta' = \frac{\sigma}{2a} .$$

Temos, portanto

$$N = \frac{1}{2a} \int_{l/2}^{2\pi a - l/2} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{\operatorname{sen} \frac{\sigma}{2a}} ,$$

$$N' = \frac{1}{2a} \int_{l/2}^{2\pi a - l/2} \frac{\cos \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{\operatorname{sen} \frac{\sigma}{2a}} ,$$

$$M = \frac{1}{2a} \int_{l/2}^{2\pi a - l/2} \frac{\left(\cos \frac{\sigma}{2a}\right)^2 \cdot \operatorname{sen} \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{\operatorname{sen} \frac{\sigma}{2a}} = N - \frac{1}{2a} \int_{l/2}^{2\pi a - l/2} \operatorname{sen} \frac{n\sigma}{a} \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2a} d\sigma ,$$

$$M' = \frac{1}{2a} \int_{l/2}^{2\pi a - l/2} \frac{\left(\cos \frac{\sigma}{2a}\right)^2 \cdot \cos \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{\operatorname{sen} \frac{\sigma}{2a}} = N' - \frac{1}{2a} \int_{l/2}^{2\pi a - l/2} \cos \frac{n\sigma}{a} \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2a} d\sigma .$$

Colocando agora $\sigma/2a = z$, portanto

$$N = \int_{l/(4a)}^{\pi - l/(4a)} \frac{\operatorname{sen} 2nz \cdot dz}{\operatorname{sen} z} ,$$

$$N' = \int_{l/(4a)}^{\pi - l/(4a)} \frac{\cos 2nz \cdot dz}{\operatorname{sen} z} ,$$

$$M = N - \int_{l/(4a)}^{\pi - l/(4a)} \operatorname{sen} 2nz \cdot \operatorname{sen} z dz ,$$

$$M' = N' - \int_{l/(4a)}^{\pi - l/(4a)} \cos 2nz \cdot \operatorname{sen} z dz ,$$

e considerando que

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{sen} 2nz \cdot dz}{\operatorname{sen} z} &= +2 \int \cos(2n-1)z \cdot dz + 2 \int \cos(2n-3)z \cdot dz \\ &\quad + \dots + 2 \int \cos z dz , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos 2nz \cdot dz}{\operatorname{sen} z} &= -2 \int \operatorname{sen}(2n-1)z \cdot dz - 2 \int \operatorname{sen}(2n-3)z \cdot dz \\ &\quad - \dots - 2 \int \operatorname{sen} z dz + \int \frac{dz}{\operatorname{sen} z} , \end{aligned}$$

encontramos então, ao tomar as integrais entre $z = l/(4a)$ e $z = \pi - [l/(4a)]$:

$$N = 0 ,$$

$$N' = -4 \left(\cos \frac{l}{4a} + \frac{1}{3} \cos \frac{3l}{4a} + \dots + \frac{1}{2n-1} \cos \frac{(2n-1)l}{4a} \right) - 2 \log \tan \frac{l}{8a} .$$

Além disso, como

$$\begin{aligned} \int \sin 2nz \cdot \sin z dz &= \frac{1}{2(2n-1)} \sin(2n-1)z - \frac{1}{2(2n+1)} \sin(2n+1)z , \\ \int \cos 2nz \cdot \sin z dz &= \frac{1}{2(2n-1)} \cos(2n-1)z - \frac{1}{2(2n+1)} \cos(2n+1)z , \end{aligned}$$

considerando também essas integrais entre os limites de $z = l/(4a)$ até $z = \pi - [l/(4a)]$, encontramos

$$M = 0 ,$$

$$M' = N' + \frac{1}{2n+1} \cos(2n+1) \frac{l}{4a} - \frac{1}{2n-1} \cos(2n-1) \frac{l}{4a} .$$

Portanto, segue finalmente, de acordo com a Seção 18.8:

$$\begin{aligned} N'' &= -4 \left(\cos \frac{l}{4a} + \frac{1}{3} \cos \frac{3l}{4a} + \dots + \frac{1}{2n-1} \cos(2n-1) \frac{l}{4a} \right) \\ &\quad - 2 \log \tan \frac{l}{8a} + 2 \log \frac{l}{\alpha} - \frac{1}{8} \frac{n^2 l^2}{a^2} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M'' &= -4 \left(\cos \frac{l}{4a} + \frac{1}{3} \cos \frac{3l}{4a} + \dots + \frac{1}{2n-1} \cos(2n-1) \frac{l}{4a} \right) \\ &\quad - 2 \log \tan \frac{l}{8a} + 2 \log \frac{l}{e\alpha} - \frac{1}{8} \frac{n^2 l^2}{a^2} \\ &\quad + \frac{1}{2n+1} \cos(2n+1) \frac{l}{4a} - \frac{1}{2n-1} \cos(2n-1) \frac{l}{4a} . \end{aligned}$$

Mas l denota aqui o comprimento do elemento condutor ds , considerado como sendo retilíneo, com o ponto que está sendo considerado em seu centro. Dentro de certos limites, esse comprimento é arbitrário, sendo que sua escolha só é limitada pelas grandezas α/l e l/a sendo consideradas como valores extremamente pequenos, o que tem de ser o caso se o condutor for considerado como *linear*. A diferença nos valores de l que são possíveis dentro desses limites não tem uma influência perceptível sobre os valores de N'' e M'' . Logo podemos colocar

$$l = \sqrt{a\alpha} ,$$

já que para todo condutor ser considerado como *linear*, esse valor tem de estar entre os limites especificados. Também fica claro que então $\tan(l/8a)$ pode ser substituído por $l/8a$. Colocando, por brevidade

$$\frac{n^2\alpha}{8a} = 2 \log \nu ,$$

[e]

$$\frac{n^2\alpha}{8a} + \frac{1}{2n-1} \cos \frac{2n-1}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} - \frac{1}{2n+1} \cos \frac{2n+1}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} = 2 \log \mu ,$$

obtem-se

$$N'' = -4 \left(\cos \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \frac{1}{3} \cos \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \dots + \frac{1}{2n-1} \cos \frac{2n-1}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} \right) + 2 \log \frac{8a}{\nu\alpha} ,$$

$$M'' = -4 \left(\cos \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \frac{1}{3} \cos \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \dots + \frac{1}{2n-1} \cos \frac{2n-1}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} \right) + 2 \log \frac{8a}{\mu e\alpha} .$$

Substituindo agora os valores de N , N'' , M , M'' encontrados para um condutor circular na equações obtidas ao final da Seção 18.8, obtemos as duas equações seguintes para os movimentos da eletricidade em um condutor circular:

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} + \frac{c^2}{8\pi\alpha^2 k M''(1+\lambda)} \cdot \frac{da_n}{dt} + \frac{n^2 c^2 N''}{2a^2 M''(1+\lambda)} \cdot a_n - \frac{nc^2}{4a M''(1+\lambda)} \cdot g_n = 0 ,$$

$$\frac{d^2 b_n}{dt^2} + \frac{c^2}{8\pi\alpha^2 k M''(1+\lambda)} \cdot \frac{db_n}{dt} + \frac{n^2 c^2 N''}{2a^2 M''(1+\lambda)} \cdot b_n + \frac{nc^2}{4a M''(1+\lambda)} \cdot f_n = 0 ,$$

nas quais N'' e M'' têm os valores que acabamos de fornecer.

18.11 Equilíbrio da Eletricidade em um Condutor Circular

Para o caso de equilíbrio da eletricidade temos em todos os pontos do condutor

$$i = 0 \quad \text{e} \quad \frac{di}{dt} = 0 .$$

Colocando o valor de i da Seção 18.8 (3)⁶⁷⁷ obtemos

$$-\frac{a}{2} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{db_n}{dt} \sin \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cos \frac{ns}{a} \right) = 0 ,$$

$$-\frac{a}{2} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{d^2 b_n}{dt^2} \sin \frac{ns}{a} - \frac{d^2 a_n}{dt^2} \cos \frac{ns}{a} \right) = 0 ,$$

segue, portanto,

⁶⁷⁷Isto é, do item 3 da Seção 18.8.

$$\frac{da_n}{dt} = 0, \quad \frac{db_n}{dt} = 0, \quad \frac{d^2a_n}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2b_n}{dt^2} = 0 ,$$

ao que deve ser adicionado que também para $n = 0$ temos de ter

$$\frac{1}{n} \frac{da_n}{dt} = \frac{1}{n} \frac{d^2a_n}{dt^2} = 0 .$$

As equações de movimento obtidas no final da Seção anterior transformam-se então nas seguintes *equações de equilíbrio*, a saber, quando $n > 0$,

$$\frac{nN''}{a} \cdot a_n - \frac{1}{2}g_n = 0 ,$$

$$\frac{nN''}{a} \cdot b_n + \frac{1}{2}f_n = 0 ,$$

onde ainda tem de ser incluído $g_0 = 0$. Portanto, segue como condição de equilíbrio para a eletricidade que a soma de todas as forças eletromotrizes externas atuando sobre o condutor circular precisa satisfazer a:

$$S = \int ds \sum \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) = 0 ,$$

em concordância completa com a conhecida lei de Ohm, de acordo com a qual a intensidade de corrente é proporcional à soma de todas essas forças [eletromotrizes] e, portanto, só pode ser nula juntamente com essa soma.

18.12 Correntes Constantes em um Condutor Circular

O movimento da eletricidade em um condutor é chamado de corrente *constante*⁶⁷⁸ se permanecer sempre o mesmo em todos os pontos do condutor. No caso de tal corrente constante temos para todos os pontos do condutor:

$$i = \text{constante},$$

portanto,

$$\frac{di}{dt} = -\frac{a}{2} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{d^2b_n}{dt^2} \sin \frac{ns}{a} - \frac{d^2a_n}{dt^2} \cos \frac{ns}{a} \right) = 0 ,$$

de onde vem que

$$\frac{d^2a_n}{dt^2} = 0 , \quad \frac{d^2b_n}{dt^2} = 0 ,$$

onde ainda tem de ser acrescentado que precisamos ter $[1/n][d^2a_n/dt^2] = 0$, também para $n = 0$.

As equações de movimento fornecidas ao final da Seção 18.10 transformam-se então nas seguintes equações de movimento para correntes *constantes*, a saber, quando $n > 0$:

⁶⁷⁸Em alemão: *eine beharrliche Strömung*. Essa expressão pode ser traduzida como uma corrente constante ou estacionária.

$$\frac{1}{4\pi\alpha^2k} \cdot \frac{da_n}{dt} + \frac{n^2N''}{a^2} \cdot a_n - \frac{n}{2a}g_n = 0 ,$$

$$\frac{1}{4\pi\alpha^2k} \cdot \frac{db_n}{dt} + \frac{n^2N''}{a^2} \cdot b_n + \frac{n}{2a}f_n = 0 ,$$

onde também vale $[1/n][da_n/dt] = \text{constante}$ para $n = 0$, portanto, tem de ser acrescentado $a_0 = \text{constante}$. Segue que para uma corrente *constante* a soma de todas as forças eletromotrizes externas atuando sobre o condutor circular tem de ser dada por

$$\begin{aligned} S &= \int ds \sum \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) \\ &= \frac{2}{a} \int ds \sum nN'' \left(a_n \cos \frac{ns}{a} - b_n \sin \frac{ns}{a} \right) \\ &\quad - \frac{a}{2\pi\alpha^2k} \int ds \sum \frac{1}{n} \left(\frac{db_n}{dt} \sin \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cos \frac{ns}{a} \right) ; \end{aligned}$$

logo, como

$$-\frac{a}{2} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{db_n}{dt} \sin \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cos \frac{ns}{a} \right) = i ,$$

e como

$$\int ds \sum nN'' \left(a_n \cos \frac{ns}{a} - b_n \sin \frac{ns}{a} \right) = 0 ,$$

como pode ser facilmente visto considerando que a_0 possui um valor constante e, portanto, $na_n = 0$ para $n = 0$, [temos finalmente:]

$$S = \frac{1}{\pi\alpha^2k} \cdot \int ids .$$

Agora $[1/(2\pi a)] \cdot \int ids = J$ é o *valor médio da intensidade de corrente em todo o condutor*, enquanto que $2\pi a/[\pi\alpha^2k] = w$ é a *resistência de todo o condutor*; assim $S = Jw$, isto é, a soma das forças eletromotrizes externas em todo o condutor precisa ser igual ao produto da resistência com a intensidade de corrente média de todo o condutor, em concordância completa com a lei de Ohm que fornece a força eletromotriz do circuito como o produto da resistência e corrente, o que é idêntico aos resultados anteriores quando se assume que não existem diferenças nas intensidades de corrente nos vários pontos do condutor. Isso não precisa acontecer de acordo com a teoria anterior; porém, se houverem intensidades de corrente nos vários pontos que diferem da corrente constante em qualquer ponto particular, então as forças eletromotrizes atuando de fora precisam mudar *proporcionalmente ao tempo*, um caso que não ocorre na realidade e que, por conseguinte, foi ignorado pela lei de Ohm baseada na experiência. É claro que se

$$i = -\frac{a}{2} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{db_n}{dt} \sin \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cos \frac{ns}{a} \right)$$

é para ter valores diferentes em diferentes partes do condutor, então da_n/dt ou db_n/dt precisa ter um valor não nulo = A para um valor não nulo de n , portanto segue que $a_n = At + B$

ou $b_n = At + B$. Substituindo em um caso $At + B$ no lugar de a_n na primeira das equações anteriores para a condição de correntes constantes, obtemos:

$$\frac{1}{4\pi\alpha^2k} \cdot A + \frac{n^2N''}{a^2}(At + B) - \frac{n}{2a}g_n = 0 ,$$

portanto, segue que g_n muda *proporcionalmente ao tempo*. Substituindo no outro caso $At + B$ no lugar de b_n na segunda equação condicional, segue de maneira similar que f_n muda *proporcionalmente ao tempo*. Portanto, nos dois casos a força eletromotriz

$$S_n = f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}$$

mudaria *proporcionalmente ao tempo*.

18.13 Leis de Movimento da Eletricidade Deixada por Conta Própria Após Qualquer Perturbação do Equilíbrio em um Condutor Circular

A teoria do movimento da eletricidade deixada por conta própria após uma perturbação arbitrária em um condutor inclui a importante ciência da *propagação*, em particular as [seguintes] questões: se a propagação do movimento em condutores pela eletricidade é mediada por *ondas*, assim como a propagação [da luz] no éter luminífero ou [a propagação do som] no ar, além disso, qual é a *velocidade* dessas ondas e, finalmente, quais *leis* são válidas para essa propagação de ondas. A perturbação original do equilíbrio pode ser limitada a uma pequena parte do condutor, e se, sem qualquer influência externa, perturbações *semelhantes* do equilíbrio ocorrerem *sucessivamente* por si mesmas em todas as outras partes do condutor, então esta transmissão é chamada de *propagação*, e a perturbação é chamada de *onda*.

Se a eletricidade no condutor for deixada por conta própria, *todas as forças externas* que atuam sobre a eletricidade no condutor têm de ser colocadas = 0. Portanto, obtemos para esse caso as equações de movimento colocando

$$f_n = 0 \quad \text{e} \quad g_n = 0 ,$$

nas equações ao final da Seção 18.10, [obtendo então] as seguintes [equações:]

$$\begin{aligned} \frac{d^2a_n}{dt^2} + \frac{c^2}{8\pi\alpha^2kM''(1+\lambda)} \cdot \frac{da_n}{dt} + \frac{n^2c^2N''}{2a^2M''(1+\lambda)} \cdot a_n &= 0 , \\ \frac{d^2b_n}{dt^2} + \frac{c^2}{8\pi\alpha^2kM''(1+\lambda)} \cdot \frac{db_n}{dt} + \frac{n^2c^2N''}{2a^2M''(1+\lambda)} \cdot b_n &= 0 . \end{aligned}$$

Colocando

$$\frac{c^2}{16\pi\alpha^2kM''(1+\lambda)} = \varepsilon ,$$

[e]

$$\frac{n^2c^2N''}{2a^2M''(1+\lambda)} = m^2 + \varepsilon^2 ,$$

obtemos então pela integração dessas duas equações:

$$a_n = Ae^{-\varepsilon t} \cdot \text{sen } m(t - A') ,$$

$$b_n = Be^{-\varepsilon t} \cdot \text{sen } m(t - B') ,$$

onde A, A', B, B' são constantes de integração, a serem determinadas a partir da perturbação inicial dada.

Se a distribuição original da eletricidade livre no condutor é dada pela seguinte equação, onde E_0 denota o valor da densidade [linear de carga] E para $t = 0$, a saber:

$$E_0 = \sum \left(a_n^0 \text{sen } \frac{ns}{a} + b_n^0 \cos \frac{ns}{a} \right) ,$$

e se as correntes originais em todas as partes do condutor, onde i_0 denota o valor da intensidade de corrente i para $t = 0$, [for dada] pela seguinte equação:

$$i_0 = -\frac{a}{2} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{db_n^0}{dt} \text{sen } \frac{ns}{a} - \frac{da_n^0}{dt} \cos \frac{ns}{a} \right) ,$$

onde $a_n^0, b_n^0, da_n^0/dt, db_n^0/dt$ têm valores conhecidos, então inserindo esses valores para $t = 0$ nas equações anteriores obtém-se

$$a_n^0 = -A \text{sen } mA' ,$$

$$b_n^0 = -B \text{sen } mB' ,$$

e, após diferenciar as equações anteriores,

$$\frac{da_n^0}{dt} = mA \cos mA' - \varepsilon a_n^0 ,$$

$$\frac{db_n^0}{dt} = mB \cos mB' - \varepsilon b_n^0 .$$

Essas quatro equações fornecem os seguintes valores das constantes de integração:

$$A = \sqrt{a_n^{0^2} + \frac{1}{m^2} \left(\varepsilon a_n^0 + \frac{da_n^0}{dt} \right)^2} ,$$

$$B = \sqrt{b_n^{0^2} + \frac{1}{m^2} \left(\varepsilon b_n^0 + \frac{db_n^0}{dt} \right)^2} ,$$

$$A' = -\frac{1}{m} \text{arcsen } \frac{a_n^0}{A} ,$$

$$B' = -\frac{1}{m} \text{arcsen } \frac{b_n^0}{B} .$$

Inserindo os dois últimos valores nas equações anteriores obtém-se

$$a_n = Ae^{-\varepsilon t} \text{sen } \left(mt + \text{arcsen } \frac{a_n^0}{A} \right) ,$$

$$b_n = B e^{-\varepsilon t} \operatorname{sen} \left(mt + \arcsen \frac{b_n^0}{B} \right) ,$$

e, portanto, a *lei de distribuição da eletricidade livre* no condutor [é dada por]:

$$E = \sum e^{-\varepsilon t} \cdot \left[A \operatorname{sen} \frac{ns}{a} \operatorname{sen} \left(mt + \arcsen \frac{a_n^0}{A} \right) + B \cos \frac{ns}{a} \operatorname{sen} \left(mt + \arcsen \frac{b_n^0}{B} \right) \right] ,$$

ou, desenvolvendo o seno da soma de dois arcos:

$$E = \sum e^{-\varepsilon t} \cdot \left(a_n^0 \operatorname{sen} \frac{ns}{a} \cos mt + \sqrt{B^2 - b_n^{02}} \cos \frac{ns}{a} \operatorname{sen} mt + b_n^0 \cos \frac{ns}{a} \cos mt + \sqrt{A^2 - a_n^{02}} \operatorname{sen} \frac{ns}{a} \operatorname{sen} mt \right) .$$

Colocando agora

$$a_n^0 = p + q , \quad b_n^0 = p' + q' ,$$

$$\sqrt{B^2 - b_n^{02}} = p - q , \quad \sqrt{A^2 - a_n^{02}} = p' - q' ,$$

o que determina p, q, p', q' , a saber,

$$p = \frac{1}{2} \left(a_n^0 + \frac{1}{m} \left(\varepsilon b_n^0 + \frac{db_n^0}{dt} \right) \right) ,$$

$$q = \frac{1}{2} \left(a_n^0 - \frac{1}{m} \left(\varepsilon b_n^0 + \frac{db_n^0}{dt} \right) \right) ,$$

$$p' = \frac{1}{2} \left(b_n^0 + \frac{1}{m} \left(\varepsilon a_n^0 + \frac{da_n^0}{dt} \right) \right) ,$$

$$q' = \frac{1}{2} \left(b_n^0 - \frac{1}{m} \left(\varepsilon a_n^0 + \frac{da_n^0}{dt} \right) \right) ,$$

obtem-se então

$$E = \sum e^{-\varepsilon t} \cdot \left(q \operatorname{sen} \left(\frac{ns}{a} - mt \right) + p' \cos \left(\frac{ns}{a} - mt \right) \right) + \sum e^{-\varepsilon t} \cdot \left(p \operatorname{sen} \left(\frac{ns}{a} + mt \right) + q' \cos \left(\frac{ns}{a} + mt \right) \right) ,$$

ou, alternativamente,

$$E = \sum \sqrt{p'^2 + q^2} \cdot e^{-\varepsilon t} \sin \left(\frac{ns}{a} - mt + \arctan \frac{p'}{q} \right) \\ + \sum \sqrt{p^2 + q'^2} \cdot e^{-\varepsilon t} \sin \left(\frac{ns}{a} + mt + \arctan \frac{q'}{p} \right) .$$

Encontramos de maneira similar a lei da *corrente da eletricidade* no condutor, a saber:

$$i = \sum \sqrt{P'^2 + Q^2} \cdot e^{-\varepsilon t} \sin \left(\frac{ns}{a} - mt + \arctan \frac{P'}{Q} \right) \\ + \sum \sqrt{P^2 + Q'^2} \cdot e^{-\varepsilon t} \sin \left(\frac{ns}{a} + mt + \arctan \frac{Q'}{P} \right) ,$$

onde P , Q , P' , Q' têm os seguintes valores:

$$P = -\frac{a}{4n} \left(\frac{db_n^0}{dt} + \frac{1}{m} \left((m^2 + \varepsilon^2) a_n^0 + \varepsilon \frac{da_n^0}{dt} \right) \right) , \\ Q = -\frac{a}{4n} \left(\frac{db_n^0}{dt} - \frac{1}{m} \left((m^2 + \varepsilon^2) a_n^0 + \varepsilon \frac{da_n^0}{dt} \right) \right) , \\ P' = +\frac{a}{4n} \left(\frac{da_n^0}{dt} + \frac{1}{m} \left((m^2 + \varepsilon^2) b_n^0 + \varepsilon \frac{db_n^0}{dt} \right) \right) , \\ Q' = +\frac{a}{4n} \left(\frac{da_n^0}{dt} - \frac{1}{m} \left((m^2 + \varepsilon^2) b_n^0 + \varepsilon \frac{db_n^0}{dt} \right) \right) .$$

18.14 Comparação com a Lei de Ohm

Já foi discutido na Seção 18.6 em que condições a lei de Ohm, formulada para correntes *constantes*, pode ser aplicada a correntes *variáveis*. Essa [aplicação] depende do valor de

$$\lambda = \frac{c^2}{8r\mathfrak{E} \log \frac{l}{\alpha}} .$$

Sempre que esta quantidade for levada em consideração e o seu valor não desaparecer, a lei de Ohm não terá aplicação alguma ou terá apenas uma aplicação aproximada. Essa grandeza λ foi considerada mais detalhadamente na Seção 18.8 com relação à influência das partes mais distantes do circuito que ainda não haviam sido consideradas na Seção 18.6, a saber,

$$\lambda = \frac{c^2}{4M''r\mathfrak{E}} ,$$

na qual o valor M'' colocado no lugar de $2 \log[l/\alpha]$ na Seção 18.6 foi definido exatamente e determinado para um condutor circular na Seção 18.10. O valor de λ , ou, já que o valor do fator $c^4/[4M'']$ pode ser considerado como conhecido, o valor do produto $r\mathfrak{E}$, adquire uma importância especial na teoria do movimento da eletricidade em condutores porque determina a aplicabilidade da lei de Ohm, sendo o motivo para isso facilmente percebido a partir do *significado físico* do produto $r\mathfrak{E}$.

Em particular, foi denominada por $\mathfrak{E}$ a quantidade de eletricidade positiva contida na unidade de comprimento do condutor, expressa na unidade de medida determinada pela lei eletrostática, e sua *massa em miligramas* foi colocada igual a $[1/r]\mathfrak{E}$. A partir da definição da unidade de medida estabelecida pela lei eletrostática (na qual é considerada como unidade de medida a quantidade de eletricidade que exerce sobre uma [quantidade de eletricidade] igual a unidade de força na unidade de distância de acordo com a lei eletrostática, isto é, uma força que produz a unidade de velocidade durante a unidade de tempo a uma massa de um miligrama), segue que r^2 é a força exercida por *um miligrama* de eletricidade positiva ou negativa sobre um miligrama igual de eletricidade na unidade de distância. Portanto, segue que o produto $r\mathfrak{E}$ significa a força que a *eletricidade positiva contida na unidade de comprimento do condutor*, caso concentrada em um ponto, exerceria sobre *um miligrama* de eletricidade positiva na unidade de distância.

Agora a influência dessa magnitude λ ou aquela do produto $r\mathfrak{E}$ será determinada mais detalhadamente com base no desenvolvimento das leis de movimento da eletricidade em um condutor fechado como dado na Seção 18.8 e seguintes. Para começar, a partir das Seções 18.11 e 18.12 segue que as leis de *equilíbrio* e de *correntes constantes* da eletricidade em condutores estão em concordância completa com a lei de Ohm já que as grandezas λ ou $r\mathfrak{E}$ não são levadas em consideração aqui, enquanto que a partir da Seção 18.13 segue que as leis de *propagação*, ou geralmente as leis de todas as *mudanças de movimento* efetivas após uma perturbação do equilíbrio, vão depender vitalmente acima de tudo dos valores de m e ε e, portanto, indiretamente de λ ou $r\mathfrak{E}$. Logo, segue que a magnitude λ ou o produto $r\mathfrak{E}$ (portanto, indiretamente a *massa* total da quantidade de eletricidade, em miligramas, contida no condutor caso fosse conhecida em *unidade eletrostática* a quantidade de eletricidade por unidade de comprimento de um condutor) só podem ser conhecidos por meio de observações que mostrem certos *desvios da lei de Ohm* nas *mudanças de movimento* da eletricidade em condutores após uma perturbação do equilíbrio.

É evidente a importância de uma *observação mais precisa das mudanças de movimento ou da propagação do movimento pela eletricidade nos condutores*. Caso essas observações permitissem detectar de fato qualquer desvio *da lei de Ohm*, esse resultado mostraria então o valor do produto $r\mathfrak{E}$, isto é, o número de unidades de medida eletrostática por *um miligrama* de eletricidade quando é conhecido o *número de unidades de medida eletrostática* contidas na unidade de comprimento do condutor.

Para começar, serão desenvolvidas mais detalhadamente as leis dos *movimentos das ondas elétricas* em condutores circulares de acordo com a Seção 18.13 a fim de verificar se delas pode ser derivada uma orientação específica para a *realização de tais observações*; então, se este não for o caso, deverá ser examinado qual é a razão para isso e se existem outros movimentos elétricos em condutores circulares que sejam mais adequados para isso do que o *movimento ondulatório*.

18.15 Movimentos das Ondas Elétricas em um Condutor Circular

Segue das leis desenvolvidas na Seção 18.13 que todos os movimentos da eletricidade deixada por conta própria em um condutor circular, após uma perturbação arbitrária do equilíbrio, formam uma série de *trens de ondas* propagando *para a frente* e uma série de *trens de ondas* propagando *para trás*, sendo que o *primeiro trem de ondas* consiste em duas ondas em cada

série, a saber, uma positiva e uma negativa, que juntas cobrem toda a periferia circular; o *segundo trem de ondas* de cada série consiste de quatro ondas alternadamente positiva e negativa que juntas preenchem todo o círculo; o *terceiro trem de ondas* consiste em seis ondas e assim por diante.

Se decompormos as somas pelas quais a densidade [linear] de eletricidade livre E e a intensidade de corrente i foram representadas na Seção 18.13 em seus termos e denotarmos esses termos de acordo com seu número de ordem n por E_n e i_n obteremos

$$\begin{aligned} E_1 &= \sqrt{p'^2 + q^2} \cdot e^{-\varepsilon t} \sin \left(\frac{s}{a} - mt + \arctan \frac{p'}{q} \right) \\ &\quad + \sqrt{p^2 + q'^2} \cdot e^{-\varepsilon t} \sin \left(\frac{s}{a} + mt + \arctan \frac{q'}{p} \right), \\ i_1 &= \sqrt{P'^2 + Q^2} \cdot e^{-\varepsilon t} \sin \left(\frac{s}{a} - mt + \arctan \frac{P'}{Q} \right) \\ &\quad + \sqrt{P^2 + Q'^2} \cdot e^{-\varepsilon t} \sin \left(\frac{s}{a} + mt + \arctan \frac{Q'}{P} \right), \end{aligned}$$

onde as primeiras partes, contendo o seno de um arco que varia proporcionalmente a $(s - amt)$, representam o *primeiro trem de ondas propagando para frente*, [e] as últimas partes contendo o seno de um arco que varia proporcionalmente a $(s + amt)$, [representam] o *primeiro trem de ondas propagando para trás*. Mas o primeiro trem de ondas propagando para frente consiste em uma *onda positiva*, que no instante $t = [1/m] \arctan[p'/q]$ vai de $s = 0$ até $s = \pi a$, onde a onda produz uma carga do condutor com eletricidade livre positiva, e [consiste] em uma *onda negativa*, que no mesmo instante vai de $s = \pi a$ até $s = 2\pi a$, onde a onda produz uma carga do condutor com eletricidade livre negativa. Mas as duas ondas juntas cobrem toda a periferia circular. O mesmo acontece para o primeiro trem de ondas propagando para trás, consistindo em uma *onda positiva* indo de $s = 0$ até $s = \pi a$ no instante $t = -[1/m] \arctan[q'/p]$, e em uma *onda negativa* indo de $s = \pi a$ até $s = 2\pi a$ no mesmo instante.

Temos além disso

$$\begin{aligned} E_2 &= \sqrt{p'^2 + q^2} \cdot e^{-\varepsilon t} \sin \left(\frac{2s}{a} - mt + \arctan \frac{p'}{q} \right) \\ &\quad + \sqrt{p^2 + q'^2} \cdot e^{-\varepsilon t} \sin \left(\frac{2s}{a} + mt + \arctan \frac{q'}{p} \right), \\ i_2 &= \sqrt{P'^2 + Q^2} \cdot e^{-\varepsilon t} \sin \left(\frac{2s}{a} - mt + \arctan \frac{P'}{Q} \right) \\ &\quad + \sqrt{P^2 + Q'^2} \cdot e^{-\varepsilon t} \sin \left(\frac{2s}{a} + mt + \arctan \frac{Q'}{P} \right), \end{aligned}$$

onde as primeiras partes, contendo o seno de um arco variando proporcionalmente a $(s - amt/2)$, representam o *segundo trem de ondas propagando para frente*, [e] as últimas partes,

contendo o seno de um arco variando proporcionalmente a $(s+amt/2)$, representam o *segundo trem de ondas propagando para trás*. Esse trem de ondas propagando para frente consiste em quatro ondas das quais, no instante $t = [1/m] \arctan[p'/q]$, a primeira [onda] positiva vai de $s = 0$ até $s = \pi a/2$, a segunda negativa vai de $s = \pi a/2$ até $s = \pi a$, a terceira positiva vai de $s = \pi a$ até $s = 3\pi a/2$, e a quarta negativa vai de $s = 3\pi a/2$ até $s = 2\pi a$. A mesma coisa acontece para as quatro ondas do trem de ondas propagando para trás no instante $t = -[1/m] \arctan[q'/p]$.

De maneira similar o terceiro trem de ondas das duas séries resulta de E_3 e i_3 , e assim por diante.

As *intensidades* dos vários trens de ondas, que são proporcionais a i^2 de acordo com as regras da teoria ondulatória, diminuem enquanto se propagam, de fato por um fator de

$$1 : e^{-2\varepsilon t} ,$$

durante o tempo t . Como o valor de ε muda de acordo com o valor de n , essa diminuição varia de acordo com o número de ordem n do trem de ondas; pois tínhamos

$$\varepsilon = \frac{c^2}{16\pi\alpha^2 k M''(1+\lambda)} ,$$

$$\lambda = \frac{c^2}{4M'' r \mathfrak{E}} ,$$

onde, de acordo com a Seção 18.10,

$$M'' = -4 \left(\cos \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \frac{1}{3} \cos \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \dots + \frac{1}{2n-1} \cos \frac{2n-1}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} \right)$$

$$+ 2 \log \frac{8a}{e\alpha} - \frac{1}{8} \frac{n^2 \alpha}{a} + \frac{1}{2n+1} \cos \frac{2n+1}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} - \frac{1}{2n-1} \cos \frac{2n-1}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} ,$$

portanto, se α/a for muito pequeno,

$$\text{para } n = 1, \quad M'' = 2 \log \frac{8a}{\alpha} - 6,666\dots ,$$

$$\text{para } n = 2, \quad M'' = 2 \log \frac{8a}{\alpha} - 7,466\dots$$

e assim por diante.

Denotando por $w' = 1/[\pi\alpha^2 k]$ à resistência da unidade de comprimento do condutor, e colocando $\lambda = 0$, isto é, nos restringindo àqueles casos em que se aplica a lei de Ohm, obtemos uma diminuição da intensidade na unidade de tempo na proporção

$$= 1 : e^{-\frac{w' c^2}{16 \log \frac{8a}{\alpha} - 53,33\dots}}$$

para o primeiro trem de ondas com $n = 1$, [e na proporção]

$$= 1 : e^{-\frac{w' c^2}{16 \log \frac{8a}{\alpha} - 59,733\dots}}$$

para o segundo trem de ondas com $n = 2$, e assim por diante.

Vemos, portanto, que a diminuição é mais rápida quanto maior for a resistência por unidade de comprimento do condutor, quanto mais espesso for o condutor comparado com seu comprimento, e quanto maior for o número de ordem n do trem de ondas, isto é, quanto mais curtas forem as ondas.

18.16 Velocidade de Propagação dos Trens de Ondas em um Condutor Circular

Como mostrado anteriormente, segue da Seção 18.13 que após cada perturbação do equilíbrio os movimentos da eletricidade em um condutor circular podem ser divididos em trens de ondas cuja propagação é determinada por leis simples, como é o caso para muitos outros corpos. No entanto, com alguns corpos, como, por exemplo, o ar em um tubo circular, há também o fato de que esses trens de onda não são alterados pela propagação, ou seja, não há diminuição na intensidade e, além disso, todos os trens de onda são propagados *na mesma velocidade*, daí se conclui que todos os trens de onda que viajam para frente ou para trás se *combinam* para formar um único trem de onda, que também se propaga inalterado e na mesma velocidade que os trens de onda individuais que o compõem. Contudo, tal trem de ondas combinado consiste de *ondas combinadas* que podem diferir amplamente em tamanho, formato e intensidade. Tais *ondas combinadas*, permanecendo coerentes devido à mesma velocidade de todos os seus constituintes, possuem um significado físico particular como *objetos de observação* e são denominadas *ondas no sentido mais restrito*.

Neste sentido mais *restrito*, as ondas elétricas não ocorreriam em um condutor circular em que o equilíbrio elétrico tenha sido perturbado, simplesmente por causa das diferentes diminuições de intensidade dos vários trens de ondas elementares, mas ainda menos se os diferentes trens de ondas elementares também tivessem *velocidades de propagação diferentes*.

Nos casos em que existem ondas no sentido mais restrito, a *velocidade de propagação* é de fundamental importância para o conhecimento do *meio de propagação*, logo essa questão ligada à *eletricidade* despertou um interesse particular e, portanto, serão considerados mais detalhadamente os resultados relacionados da Seção 18.13.

As *velocidades de propagação* dos vários trens de ondas elementares, a partir das fórmulas desenvolvidas na Seção 18.13, foram encontradas iguais ao aumento ou diminuição que s precisa sofrer se, quando t aumenta de 1 [unidade] nos valores de E_n e i_n , os valores dos arcos sob os senos devem permanecer inalterados, isto é,

$$= \frac{ma}{n} ,$$

ou, inserindo o valor de m da Seção 18.13, [a saber,]

$$m = \sqrt{\frac{n^2 c^2 N''}{2a^2 M''(1 + \lambda)} - \left(\frac{c^2}{16\pi\alpha^2 k M''(1 + \lambda)} \right)^2} ,$$

[obtemos]

$$= \frac{c}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{N''}{M''(1 + \lambda)} - \frac{a^2 c^2 w'^2}{128 n^2 M''^2 (1 + \lambda)^2}} ,$$

onde foi colocado como anteriormente $w' = 1/[\pi\alpha^2k]$. Nos restringindo aos casos onde podemos colocar $\lambda = 0$, isto é, nos quais se aplica a lei de Ohm, então a expressão para essa velocidade de propagação reduz-se a:

$$= \frac{c}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{N''}{M''} - \frac{a^2 c^2 w'^2}{128 n^2 M''^2}},$$

onde os valores de N'' e M'' são determinados da seguinte maneira:

$$N'' = 2 \log \frac{8a}{\alpha} - 4 \left(\cos \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \frac{1}{3} \cos \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \dots + \frac{1}{2n-1} \cos \frac{2n-1}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} \right) - \frac{n^2 \alpha}{8a},$$

$$M'' = 2 \log \frac{8a}{\alpha} - 4 \left(\cos \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \frac{1}{3} \cos \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \dots + \frac{1}{2n-1} \cos \frac{2n-1}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} \right) - \frac{n^2 \alpha}{8a} - 2 - \frac{1}{2n-1} \cos \frac{2n-1}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \frac{1}{2n+1} \cos \frac{2n+1}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{a}}.$$

Segue assim que a velocidade de propagação é diferente para vários trens de ondas de acordo com seus diferentes números de ordem n . Permanece apenas a questão de saber se, sob certas condições, as diferenças das várias velocidades de propagação não seriam tão pequenas quanto a considerá-las como desaparecendo aproximadamente,⁶⁷⁹ e qual seria então o limite a ser aproximado por todas essas velocidades de propagação.

Dos valores fornecidos, conclui-se que, desde que o número de ordem n não ultrapasse aqueles valores para os quais $n^2 \alpha / a$ pode ser considerado como desprezível comparado com 1, podemos colocar

$$\frac{N''}{M''} = 1 + \frac{8n^2}{(4n^2 - 1)M''}.$$

Para grandes valores de M'' , para os quais a fração $8n^2/(4n^2 - 1)M''$ desaparece comparada com 1, e para pequenos valores da resistência de todo o condutor, para os quais a fração $a^2 c^2 w'^2 / [128 n^2 M''^2]$ desaparece comparada com 1,⁶⁸⁰ então $c/\sqrt{2}$ é o limite desejado, do qual todas as velocidades de propagação se aproximam, e para o valor dado⁶⁸¹ $c = 439\,450 \cdot 10^6$ milímetros/segundo, esse valor limite é igual a

$$\frac{c}{\sqrt{2}} = 310\,740 \cdot 10^6 \frac{\text{milímetros}}{\text{segundo}},$$

isto é, uma velocidade de 41 950 milhas por segundo.

⁶⁷⁹Ou seja, em quais condições as velocidades dos vários trens de ondas seriam as mesmas.

⁶⁸⁰[Nota de Wilhelm Weber:] A fração $a^2 c^2 w'^2 / [128 n^2 M''^2]$ pode ser considerada como desaparecendo comparada com 1 quando, para grandes valores de M'' , aquela velocidade expressando a resistência de todo o condutor em *unidade magnética absoluta de resistência*, isto é, $[\pi c/4] a c w'$, é muito pequena comparada com a velocidade c .

⁶⁸¹Ver [KW57, Seção 17, pág. 652 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [KW21, Seção 17, pág. 52]. Ver também a página 197 na Seção 8.17 dessa tradução em português.

Kirchhoff já havia encontrado esta velocidade para a propagação das ondas elétricas e observou que ela é:⁶⁸²

independente da seção transversal e da condutividade do fio, bem como da densidade da eletricidade; seu valor é de 41950 milhas em um segundo, ou seja, quase igual à velocidade da luz no espaço vazio.

Se essa estreita correspondência entre a velocidade de propagação das ondas elétricas e a da luz pudesse ser considerada uma indicação de uma conexão interna entre as duas doutrinas, isso seria do maior interesse, dada a grande importância da pesquisa sobre essa conexão. É claro, no entanto, que o verdadeiro significado dessa velocidade, em relação à eletricidade, deve ser levado em consideração, o que não parece ser de tal natureza que possa gerar grandes expectativas.

Pois a aproximação da verdadeira velocidade de propagação desse valor limite que coincide com a velocidade da luz pressupõe, como acabou de ser demonstrado, um fio condutor não apenas muito fino comparado ao seu comprimento, mas também que esse fio condutor longo e fino teria uma resistência muito pequena. É óbvio que as maiores aproximações desse valor limite ocorrerão apenas raramente, e os maiores desvios serão muito frequentes. A maneira mais fácil de obter uma visão geral disso é por meio de exemplos.

Escolhemos como exemplos três fios de cobre circulares com raios respectivos⁶⁸³

$$a = 1000 , \quad 1\,000\,000 , \quad 1\,000\,000 \text{ milímetros},$$

e seções retas respectivas

$$\pi\alpha^2 = 1 , \quad 1 , \quad \frac{1}{10} \text{ milímetros quadrados}.$$

As resistências desses fios, como encontrado por medições [expressas] em *unidade magnética absoluta de resistência*, podem ser colocadas em números redondos iguais a

$$W = \frac{2\pi a}{\pi\alpha^2} \cdot 2 \cdot 10^6 ,$$

(ver os *Abhandlungen der Königl. Gesellschaften der Wissenschaften zu Göttingen*, Vol. 5, Seção 9).^{684,685} Porém, de acordo com a conhecida relação entre as unidades magnética e mecânica de resistência, temos $W = \pi c^2 a w' / 4$, ou $a^2 c^2 w'^2 / 128 = W^2 / [8\pi^2 c^2]$, de onde⁶⁸⁶

$$\frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{N''}{M''} - \frac{a^2 c^2 w'^2}{128 n^2 M''^2}} = \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{N''}{M''} - \frac{W^2}{8\pi^2 c^2 n^2 M''^2}} = \frac{c'}{\sqrt{2}} .$$

A seguinte Tabela é calculada com base nisso:

⁶⁸²[Kir57b, págs. 209-210] com traduções para o inglês em [Kir57a, pág. 406] e [Kir21b, pág. 214]. Ver a página 232 no Capítulo 9 dessa tradução em português. Ver ainda a discussão sobre a constante c de Weber no Capítulo 19.

⁶⁸³Ver a Nota de rodapé 676 na página 379 para o significado das grandezas a e α .

⁶⁸⁴[Nota de Heinrich Weber:] *Obras de Wilhelm Weber*, Vol. II, pág. 319.

⁶⁸⁵[Web53e, Seção 9, págs. 315-319 das *Obras de Weber*]. Ver também [Web53a] e [Web53c].

⁶⁸⁶Weber define a grandeza c' pela equação que segue imediatamente a essa Nota de rodapé.

n	Primeiro fio $a = 1000$ $\pi\alpha^2 = 1$ $W = 4 \cdot 10^9 \cdot \pi$	Segundo fio $a = 1\,000\,000$ $\pi\alpha^2 = 1$ $W = 4 \cdot 10^{12} \cdot \pi$	Terceiro fio $a = 1\,000\,000$ $\pi\alpha^2 = 1/10$ $W = 4 \cdot 10^{13} \cdot \pi$
1	$N'' = 15,119$ $M'' = 12,452$ $N''/M'' = 1,214$ $\frac{W^2}{8\pi^2 c^2 n^2 M''^2} = \frac{1}{14\,970\,000}$ $c'^2/c^2 = 1,214$	$= 28,935$ $= 25,268$ $= 1,145$ $= 0,0166$ $= 1,128$	$= 31,605$ $= 28,938$ $= 1,092$ $= 1,2364$ $= -0,0443$
2	$N'' = 13,786$ $M'' = 11,652$ $N''/M'' = 1,183$ $\frac{W^2}{8\pi^2 c^2 n^2 M''^2} = \frac{1}{52\,450\,000}$ $c'^2/c^2 = 1,183$	$= 27,601$ $= 25,468$ $= 1,084$ $= 0,00408$ $= 1,080$	$= 31,062$ $= 28,928$ $= 1,074$ $= 0,3093$ $= 0,7644$
3	$N'' = 12,986$ $M'' = 10,929$ $N''/M'' = 1,188$ $\frac{W^2}{8\pi^2 c^2 n^2 M''^2} = \frac{1}{103\,800\,000}$ $c'^2/c^2 = 1,188$	$= 26,801$ $= 24,747$ $= 1,083$ $= 0,00192$ $= 1,081$	$= 30,262$ $= 28,205$ $= 1,073$ $= 0,1446$ $= 0,9283$
4	$N'' = 12,414$ $M'' = 10,383$ $N''/M'' = 1,196$ $\frac{W^2}{8\pi^2 c^2 n^2 M''^2} = \frac{1}{166\,200\,000}$ $c'^2/c^2 = 1,197$	$= 26,230$ $= 24,198$ $= 1,084$ $= 0,00113$ $= 1,083$	$= 29,690$ $= 27,659$ $= 1,073$ $= 0,0846$ $= 0,9889$
5	$N'' = 11,970$ $M'' = 9,950$ $N''/M'' = 1,203$ $\frac{W^2}{8\pi^2 c^2 n^2 M''^2} = \frac{1}{239\,000\,000}$ $c'^2/c^2 = 1,203$	$= 25,785$ $= 23,765$ $= 1,085$ $= 0,00075$ $= 1,084$	$= 29,246$ $= 27,226$ $= 1,074$ $= 0,0559$ $= 1,0183$

Os valores de c'^2/c^2 na Tabela anterior, que fornecem os quadrados das velocidades de propagação $c'/\sqrt{2}$ em partes do quadrado do valor limite $c/\sqrt{2}$, já apontam diferenças essenciais entre os primeiros cinco trens de ondas aos quais está restrita a Tabela; para o terceiro fio c'^2/c^2 tem até mesmo um valor *negativo* para $n = 1$; logo aqui a expressão para a velocidade de propagação do primeiro trem de ondas torna-se *imaginário* e, portanto, as leis das mudanças do movimento nesse fio após uma perturbação do equilíbrio não podem de forma alguma ser interpretadas em termos de trens de ondas que se propagam, mas elas necessitam de uma forma diferente que represente as mudanças do movimento como uma mera aproximação ao estado de equilíbrio, que pode ser denominado de *absorção*, e que merece atenção particular devido à sua importância especial para fios condutores longos e finos com grande resistência, a saber, fios telegráficos.

18.17 Amortecimento dos Movimentos Elétricos em um Condutor Circular

Na Seção 18.13, na integração das duas equações diferenciais parciais para o movimento da eletricidade deixada por conta própria em um condutor circular, a saber, as equações

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{da_n}{dt} + (m^2 + \varepsilon^2)a_n = 0 ,$$

$$\frac{d^2 b_n}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{db_n}{dt} + (m^2 + \varepsilon^2)b_n = 0 ,$$

foi assumido para as duas expressões estabelecidas para a_n e b_n , [a saber,]

$$a_n = Ae^{-\varepsilon t} \text{sen } m(t - A') ,$$

$$b_n = Be^{-\varepsilon t} \text{sen } m(t - B') ,$$

que m teria um valor real, mas nem sempre esse é o caso. Afinal de contas, colocando $1/[\pi\alpha^2 k] = w'$, tínhamos

$$m = \frac{n}{a} \cdot \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{N''}{M''(1+\lambda)} - \frac{a^2 c^2 w'^2}{128n^2 M''^2 (1+\lambda)^2}} ,$$

ou seja, essa suposição também pode ser formulada de tal forma que

$$\frac{a^2 c^2 w'^2}{128n^2 M''^2 (1+\lambda)^2} < \frac{N''}{M''(1+\lambda)} ,$$

deve valer, ou, caso $\lambda = 0$,

$$\frac{a^2 c^2 w'^2}{128n^2 M''^2} < \frac{N''}{M''} .$$

Por outro lado, o exemplo desse terceiro fio na Seção anterior mostra que com fios condutores longos e finos também pode ocorrer o caso no qual

$$\frac{a^2 c^2 w'^2}{128n^2 M''^2} > \frac{N''}{M''} ,$$

portanto, fica claro que a integração das equações diferenciais anteriores sob a forma dada torna-se ilusória e deve, portanto, ser procurada sob uma forma diferente.

Portanto, colocando com esse propósito

$$m = \frac{n}{a} \cdot \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a^2 c^2 w'^2}{128n^2 M''^2 (1+\lambda)^2} - \frac{N''}{M''(1+\lambda)}} ,$$

então as duas equações diferenciais ficam na seguinte forma, a saber,

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{da_n}{dt} + (\varepsilon^2 - m^2)a_n = 0 ,$$

$$\frac{d^2 b_n}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{db_n}{dt} + (\varepsilon^2 - m^2)b_n = 0 ,$$

a partir das quais obtemos por integração

$$a_n = Ae^{-\varepsilon t} \cdot \left(e^{m(t-A')} - e^{-m(t-A')} \right) ,$$

$$b_n = Be^{-\varepsilon t} \cdot \left(e^{m(t-B')} - e^{-m(t-B')} \right) .$$

As constantes de integração A, A', B, B' serão determinadas aqui da mesma maneira que na Seção 18.13 a partir dos valores de $a_n^0, b_n^0, da_n^0/dt, db_n^0/dt$ dados para $t = 0$, através dos quais são expressas a distribuição original da eletricidade livre no condutor e as correntes originais. Obtemos assim

$$Ae^{-mA'} = \frac{1}{2m} \left((\varepsilon + m)a_n^0 + \frac{da_n^0}{dt} \right) ,$$

$$Ae^{+mA'} = \frac{1}{2m} \left((\varepsilon - m)a_n^0 + \frac{da_n^0}{dt} \right) ,$$

$$Be^{-mB'} = \frac{1}{2m} \left((\varepsilon + m)b_n^0 + \frac{db_n^0}{dt} \right) ,$$

$$Be^{+mB'} = \frac{1}{2m} \left((\varepsilon - m)b_n^0 + \frac{db_n^0}{dt} \right) .$$

Substituindo esses valores, obtemos as duas equações seguintes:

$$a_n = \frac{1}{2m} \left[\left((\varepsilon + m)a_n^0 + \frac{da_n^0}{dt} \right) e^{-(\varepsilon-m)t} - \left((\varepsilon - m)a_n^0 + \frac{da_n^0}{dt} \right) e^{-(\varepsilon+m)t} \right] ,$$

$$b_n = \frac{1}{2m} \left[\left((\varepsilon + m)b_n^0 + \frac{db_n^0}{dt} \right) e^{-(\varepsilon-m)t} - \left((\varepsilon - m)b_n^0 + \frac{db_n^0}{dt} \right) e^{-(\varepsilon+m)t} \right] .$$

Finalmente, inserindo esses valores de a_n e b_n nas equações

$$E = \sum \left(a_n \sin \frac{ns}{a} + b_n \cos \frac{ns}{a} \right) ,$$

$$i = -\frac{a}{2} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{db_n}{dt} \sin \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cos \frac{ns}{a} \right) ,$$

encontramos as leis da distribuição da eletricidade livre e das correntes no condutor circular para os casos considerados aqui.

Tal caso ocorre com todo condutor circular, a saber, quando a dada distribuição original da eletricidade livre e das correntes é tal que o valor de b_n^0 ou $[1/n] \cdot [da_n^0/dt]$ não é nulo para $n = 0$ e, portanto, esse caso foi excluído da consideração na Seção 18.15, onde só foram discutidos aqueles valores de E_n e i_n que são válidos para $n = 1, 2, 3 \dots$. Caso, de fato, $n = 0$, fica então claro que vale

$$\frac{a^2 c^2 w'^2}{128 n^2 M''^2 (1 + \lambda)^2} > \frac{N''}{M'' (1 + \lambda)}$$

e, conseqüentemente, temos de colocar

$$m = \frac{1}{a} \cdot \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a^2 c^2 w'^2}{128 M''^2 (1 + \lambda)^2}} .$$

Porém, tínhamos

$$\varepsilon = \frac{c^2 w'}{16 M'' (1 + \lambda)} ,$$

segue, portanto, que para $n = 0$, temos de colocar

$$m = \varepsilon .$$

Substituindo agora esse valor de m nas equações anteriores de a_n e b_n , obtém-se

$$a_0 = a_0^0 + \frac{1}{2\varepsilon} \frac{da_0^0}{dt} - \frac{1}{2\varepsilon} \frac{da_0^0}{dt} \cdot e^{-2\varepsilon t} ,$$

$$b_0 = b_0^0 + \frac{1}{2\varepsilon} \frac{db_0^0}{dt} - \frac{1}{2\varepsilon} \frac{db_0^0}{dt} \cdot e^{-2\varepsilon t} ,$$

logo, por diferenciação

$$\frac{da_0}{dt} = \frac{da_0^0}{dt} \cdot e^{-2\varepsilon t} ,$$

$$\frac{db_0}{dt} = \frac{db_0^0}{dt} \cdot e^{-2\varepsilon t} .$$

Inserindo agora esses valores nas equações

$$E_n = a_n \operatorname{sen} \frac{ns}{a} + b_n \cos \frac{ns}{a} ,$$

$$i_n = -\frac{a}{2n} \left(\frac{db_n}{dt} \operatorname{sen} \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cos \frac{ns}{a} \right) ,$$

para $n = 0$, encontramos

$$E_0 = b_0^0 + \frac{1}{2\varepsilon} \frac{db_0^0}{dt} (1 - e^{-2\varepsilon t}) ,$$

$$i_0 = -\frac{s}{2} \frac{db_0^0}{dt} e^{-2\varepsilon t} + \frac{a}{2} \left(\frac{1}{n} \frac{da_n}{dt} \right)_0 ,$$

onde

$$\left(\frac{1}{n} \frac{da_n}{dt} \right)_0$$

denota o valor de $([1/n] \cdot [da_n/dt])$ para $n = 0$; portanto, como

$$\left(\frac{1}{n} \frac{da_n}{dt} \right)_0 = \left(\frac{1}{n} \frac{da_n^0}{dt} \right)_0 \cdot e^{-2\varepsilon t} ,$$

e como os coeficientes de $\sin(ns/a)$ e $\cos(ns/a)$ têm de sempre possuir valores finitos na equação

$$i_n = -\frac{a}{2n} \left(\frac{db_n}{dt} \sin \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cos \frac{ns}{a} \right) ,$$

sendo que para $n = 0$ devemos ter

$$\frac{da_0}{dt} = 0 , \quad \text{e} \quad \frac{db_0}{dt} = 0 ,$$

[portanto,]

$$E_0 = b_0^0 ,$$

$$i_0 = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{n} \frac{da_n^0}{dt} \right)_0 \cdot e^{-2\epsilon t} .$$

Logo segue que, caso um condutor circular esteja carregado homogeneamente no início com eletricidade livre ao longo de todo o seu comprimento, de tal forma que cada unidade de comprimento contenha a mesma quantidade de eletricidade livre $= b_0^0$, então essa carga não muda com o tempo t , o que é evidente por si só. Porém, além disso, se houver originalmente a mesma corrente em todas as partes desse condutor, segue que essa corrente não desaparece no instante após a eletricidade ter sido deixada por si só, mas diminui gradualmente seguindo a lei de uma série geométrica na medida em que t aumenta aritmeticamente. Se aqui também a necessidade de um desaparecimento gradual fica claro a priori, não pode ser facilmente visto a priori quão rapidamente isso deve acontecer e quais diferenças devem ocorrer nessa velocidade entre condutores diferentes.

Para muitas questões práticas é de interesse determinar — se uma corrente de uma certa intensidade i está presente em um condutor fechado no momento em que a eletricidade no condutor é deixada inteiramente por conta própria, porque nenhuma força eletromotriz atua de fora sobre ela, como é o caso, por exemplo, quando um ímã indutor movendo-se contra o condutor é subitamente inibido em seu movimento por um impacto, — quão grande será a quantidade positiva ou negativa de eletricidade que passará por cada seção transversal do condutor a partir do momento especificado; e também determinar quanto tempo deve decorrer desde esse mesmo instante, até que a intensidade da corrente diminua do valor i para $i/2$.

Se for dada $i = (a/2)([1/n] \cdot [da_n^0/dt])_0$ para esse instante $t = 0$, então a intensidade de corrente após o tempo t [será obtida por:]

$$= i \cdot e^{-2\epsilon t} ,$$

a qual, expressa em unidade mecânica, denota a quantidade de eletricidade positiva que atravessaria a seção reta do condutor na unidade de tempo para essa intensidade de corrente. Portanto, a quantidade de eletricidade positiva atravessando a seção reta do condutor durante o elemento de tempo dt é igual a

$$= i \cdot e^{-2\epsilon t} dt ,$$

e o valor integral disso, considerado de $t = 0$ até $t = \infty$, fornece a quantidade total de eletricidade positiva que tem de atravessar qualquer seção reta do condutor após o momento considerado, a saber,

$$i \int_0^{\infty} e^{-2\varepsilon t} dt = \frac{1}{2\varepsilon} \cdot i .$$

A quantidade de eletricidade negativa atravessando a seção reta na direção oposta é igualmente grande.

Além disso, a seguinte equação fornece o tempo t durante o qual a intensidade de corrente decai para a metade de seu valor:

$$e^{-2\varepsilon t} = \frac{1}{2} ,$$

portanto,

$$t = \frac{1}{2\varepsilon} \log \text{nat } 2 .$$

Tínhamos, $\varepsilon = c^2 w' / [16 M'' (1 + \lambda)]$, onde, para $n = 0$, temos de colocar $M'' = 2 \log(8a/\alpha)$. Portanto, colocando $\lambda = 0$, aquela quantidade de eletricidade atravessando a seção reta do condutor é igual a

$$\frac{1}{2\varepsilon} \cdot i = \frac{16}{c^2 w'} \cdot \log \frac{8a}{\alpha} \cdot i = \frac{2}{W'} \log \frac{8a}{\alpha} \cdot i ,$$

quando $W' = [c^2/8] \cdot w'$ denota a resistência da unidade de comprimento do condutor em unidade magnética.

O tempo durante o qual a intensidade de corrente decai para metade de seu valor é então, expresso em segundos:

$$\frac{1}{2\varepsilon} \cdot \log 2 = \frac{16}{c^2 w'} \cdot \log \frac{8a}{\alpha} \cdot \log 2 = \frac{2}{W'} \cdot \log \frac{8a}{\alpha} \cdot \log 2 .$$

Obtemos portanto os seguintes valores para os fios exemplificados na Seção 18.16:

	Primeiro fio	Segundo fio	Terceiro fio
$\frac{1}{2\varepsilon}$	$\frac{1}{104\,607}$	$\frac{1}{60\,726}$	$\frac{1}{567\,581}$
$\frac{\log 2}{2\varepsilon}$	$\frac{1}{150\,916}$	$\frac{1}{87\,609}$	$\frac{1}{818\,846}$.

Por menor que seja a fração $1/2\varepsilon$ que a quantidade positiva de eletricidade transportada pela corrente que está desaparecendo através da seção transversal do condutor forma em relação àquela que passaria pela seção transversal com a intensidade original da corrente na unidade de tempo, essa quantidade de eletricidade poderia, no entanto, produzir uma *carga* muito forte no condutor se fosse usada para esse fim. Se, por exemplo, a intensidade de corrente presente originalmente fosse igual à unidade de medida magnética (que decompõe 1 miligrama de água durante $106\frac{2}{3}$ segundos),⁶⁸⁷ então a quantidade de eletricidade positiva atravessando a seção reta do condutor com essa corrente na unidade de tempo chegaria a

⁶⁸⁷Ver a Nota de rodapé 232 na página 148.

$155\,370 \cdot 10^6$ *unidades de medida eletrostática* e, enquanto a corrente desaparece no primeiro fio, ainda seriam transportados $[155\,370/104\,607] \cdot 10^6$, isto é, quase $1\frac{1}{2}$ milhões de *unidades de medida eletrostática* de eletricidade positiva através de qualquer seção reta do condutor, isto é, quase a 24^a parte da carga mais fraca, ou a 33^a parte da [carga] mais potente da pequena *garrafa de Leiden* que foi utilizada para a experiência descrita no Vol. 5 dos *Abhandlung* anteriores, onde essas cargas foram determinadas mais detalhadamente na pág. 254. ^{688,689}

É facilmente visto que um desaparecimento similar da corrente fluindo em um condutor fechado ocorre no instante em que o circuito de uma corrente galvânica é interrompido e que a quantidade de eletricidade positiva sendo transportada então através da seção reta central pela corrente que está decaindo contribui de fato para o *carregamento* da primeira metade do condutor e, da mesma maneira, a quantidade de eletricidade negativa transportada na direção oposta através da mesma seção reta contribui para o carregamento da segunda metade do condutor, e que as cargas opostas produzem a *faísca de interrupção* no local onde o circuito foi interrompido, sendo interessante saber *as quantidades de eletricidade* descarregadas pela *faísca de interrupção*.

Da mesma maneira fica clara a importância de desenvolver ainda mais as leis de decaimento da corrente para a determinação das forças indutivas assim exercidas sobre outros condutores, especialmente para a teoria das *máquinas indutivas de Rühmkorff* e outras máquinas similares para as quais isso constitui uma base. ⁶⁹⁰

18.18 Relação com a Condução de Calor

Para valores crescentes de t nos quais eventualmente e^{-2mt} vai desaparecer em comparação com 1, as duas equações encontradas para a_n e b_n na Seção anterior, a saber,

$$a_n = \frac{1}{2m} \left[\left((\varepsilon + m)a_n^0 + \frac{da_n^0}{dt} \right) e^{-(\varepsilon-m)t} - \left((\varepsilon - m)a_n^0 + \frac{da_n^0}{dt} \right) e^{-(\varepsilon+m)t} \right],$$

$$b_n = \frac{1}{2m} \left[\left((\varepsilon + m)b_n^0 + \frac{db_n^0}{dt} \right) e^{-(\varepsilon-m)t} - \left((\varepsilon - m)b_n^0 + \frac{db_n^0}{dt} \right) e^{-(\varepsilon+m)t} \right],$$

são transformadas nas [seguintes] equações mais simples:

$$a_n = \frac{1}{2m} \left((\varepsilon + m)a_n^0 + \frac{da_n^0}{dt} \right) e^{-(\varepsilon-m)t},$$

$$b_n = \frac{1}{2m} \left((\varepsilon + m)b_n^0 + \frac{db_n^0}{dt} \right) e^{-(\varepsilon-m)t},$$

e ao inserir esses valores de a_n e b_n nas equações

$$E = \sum \left(a_n \sin \frac{ns}{a} + b_n \cos \frac{ns}{a} \right),$$

$$i = -\frac{a}{2} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{db_n}{dt} \sin \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cos \frac{ns}{a} \right),$$

⁶⁸⁸[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 641.

⁶⁸⁹[KW57, Seção 12, pág. 641 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [KW21, Seção 12, págs. 36-40]. Ver a página 187 da Seção 8.12 dessa tradução em português.

⁶⁹⁰Ver a Nota de rodapé 638 na página 345.

obtemos as seguintes leis de distribuição da eletricidade livre e das correntes no condutor circular:

$$E = \sum \frac{1}{2m} \left[\left((\varepsilon + m)a_n^0 + \frac{da_n^0}{dt} \right) \operatorname{sen} \frac{ns}{a} + \left((\varepsilon + m)b_n^0 + \frac{db_n^0}{dt} \right) \cos \frac{ns}{a} \right] e^{-(\varepsilon - m)t} ,$$

$$i = \frac{a}{4} \sum \frac{\varepsilon - m}{mn} \left[\left((\varepsilon + m)b_n^0 + \frac{db_n^0}{dt} \right) \operatorname{sen} \frac{ns}{a} - \left((\varepsilon + m)a_n^0 + \frac{da_n^0}{dt} \right) \cos \frac{ns}{a} \right] e^{-(\varepsilon - m)t} .$$

Aqui é facilmente visto que em todos os casos nos quais $\varepsilon - m/[n^2] = \beta$ for um coeficiente independente de n obteremos:

$$i = -\frac{a^2 b}{2} \cdot \frac{dE}{ds} ,$$

$$\frac{di}{ds} = -\frac{1}{2} \frac{dE}{dt} ,$$

portanto segue que, ao eliminar i :

$$\frac{dE}{dt} = a^2 \beta \frac{d^2 E}{ds^2} ,$$

uma equação que tem o mesmo formato que a equação para a condução do calor em corpos sólidos.

Porém na Seção anterior havíamos colocado

$$m = \frac{n}{a} \cdot \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a^2 c^2 w'^2}{128 n^2 M''^2 (1 + \lambda)^2} - \frac{N''}{M'' (1 + \lambda)}} ,$$

na qual $c^2 w' / [16 M'' (1 + \lambda)] = \varepsilon$, assim

$$m = \varepsilon \sqrt{1 - \frac{128 N'' M'' (1 + \lambda)}{a^2 c^2 w'^2} \cdot n^2} .$$

Agora em todos os casos nos quais os valores de $n^2/[a^2 c^2 w'^2]$ e α/a são muito pequenos, podemos colocar no lugar disso:

$$m = \varepsilon \left(1 - \frac{256 \left(\log \frac{8a}{\alpha} \right)^2 \cdot (1 + \lambda)}{a^2 c^2 w'^2} \cdot n^2 \right) ,$$

de onde $\varepsilon - m = [8/a^2 w'] n^2 \log(8a/\alpha)$, logo

$$\beta = \frac{8}{a^2 w'} \cdot \log \frac{8a}{\alpha}$$

é um coeficiente independente de n .

Portanto, para as mudanças no movimento da eletricidade nos casos que acabaram de ser descritos, isso fornece leis similares àquelas para a condução do calor nos sólidos como já foi demonstrado por Thomson e Kirchhoff.⁶⁹¹ Entretanto, vale ressaltar que mesmo que a expressão da velocidade de propagação se torne imaginária para os trens de ondas maiores, ou seja, para valores menores de n , e portanto outras leis se apliquem a essa parte do movimento, que mais ou menos se aproximam das leis de condução de calor em corpos sólidos, outra parte do movimento sempre permanece, que fornece trens de ondas menores, para os quais se aplicam valores maiores de n , para os quais a expressão da velocidade de propagação permanece real e assim as leis desenvolvidas na Seção 18.13 permanecem válidas. Portanto, após uma perturbação do equilíbrio existem sempre *trens de ondas* em um tal condutor propagando-se a certas *velocidades*, contudo, não existe um *movimento ondulatório puro*, estando ele misturado com outros movimentos que são governados por leis similares àquelas quando é conduzido o calor.

Considerando agora todas as condições resultando de tal mistura de movimentos sujeitos a leis bem diferentes, torna-se imediatamente claro que a observação de Wheatstone⁶⁹² sobre a *não sincronicidade das faíscas* em dois lugares muito distantes entre si nos quais o longo fio condutor é interrompido não permite de maneira alguma concluir uma velocidade de propagação definida, e que a maneira de observação de Wheatstone, não importando quão significativa ela possa ser e quão valiosos possam ser seus resultados para outros contextos, mesmo se eles pudessem realmente ser garantidos exatamente, ainda assim não seria apropriada diretamente para o propósito que está sendo discutido aqui, assim como não será geralmente possível descobrir tais métodos de observação por meio dos quais as leis de todas as mudanças nos movimentos da eletricidade em um condutor após a perturbação do equilíbrio possam ser estabelecidas *puramente pela experiência*. Portanto, o objetivo das *observações* será aqui limitado a *testar* as leis deduzidas até o momento a partir de nosso conhecimento prévio sobre a eletricidade. Foi necessário, portanto, como se tentou nas Seções anteriores, considerar a dedução das leis antes das observações a serem realizadas para o teste dessas leis, ainda mais porque as leis assim formuladas têm de ser utilizadas como um *guia* na busca das *maneiras mais convenientes de observação* a serem aplicadas para o teste.

18.19 Oscilações da Eletricidade em um Condutor Circular

No que diz respeito às *maneiras mais apropriadas de observação* para testar as leis dos movimentos elétricos, fica automaticamente claro a partir das leis desenvolvidas até o momento, considerando a *velocidade* extremamente alta da maioria dos *trens de ondas elétricos* que ocorrem em bons condutores de acordo com essas leis e o rápido *amortecimento* desses trens de ondas resultando das mesmas leis, que dificilmente seria possível realizar *observações e medições precisas para testar diretamente essas leis*, dados os limites estabelecidos pelas ferramentas sensoriais para todas as observações. Uma realização exata de medições sempre demanda um certo gasto de tempo que é apropriado para tais fenômenos não persistentes. Portanto, considerando que as medições mais precisas da física são aquelas que lidam com *fenômenos de equilíbrio*, ou *movimentos uniformes*, ou *movimentos recorrendo periodicamente*, como por exemplo as oscilações de um pêndulo, isso sugere então basear um

⁶⁹¹Ver a Nota de rodapé 630 na página 343.

⁶⁹²Ver a Nota de rodapé 215 na página 144.

método de teste também para essas leis em observações do movimento da eletricidade em condutores, com exceção das *correntes constantes*, em *fenômenos ocorrendo periodicamente*, supondo que serão encontrados métodos para a realização precisa de tais observações.

No entanto, movimentos periodicamente recorrentes de eletricidade não podem existir em um condutor por si só, mas apenas sob a excitação contínua de forças eletromotrizes externas, e o método mais simples e útil para observações e medições mais precisas é a rotação rápida de um pequeno ímã em torno de um eixo de rotação perpendicular ao seu eixo magnético. Mas, a fim de obter um guia para dispositivos adequados para observações precisas dos movimentos ou oscilações periodicamente recorrentes da eletricidade assim produzidas em um condutor, deveria primeiro ser feita uma tentativa de desenvolver as leis de tais oscilações elétricas em um condutor circular a partir das equações diferenciais parciais apresentadas na Seção 18.10.

18.20 Oscilações Devidas à Indução [Ocasionada] por um Ímã Girando

A força eletromotriz exercida pela rotação rápida de um pequeno ímã nas proximidades do condutor circular [atuando] sobre qualquer ponto s do condutor *em um certo instante de tempo* pode ser representada, se a denota o raio [do condutor], por

$$\sum \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) ,$$

onde f_n e g_n dependem apenas do número de ordem n . Contudo, devido à rotação uniforme do ímã, todas essas forças atuando em pontos s diferentes do condutor estão sujeitas a uma mudança periódica regular e, de fato, com um arranjo conveniente, elas são proporcionais ao seno de um ângulo crescendo uniformemente com o tempo. Para um *instante arbitrário*, todas essas forças podem ser representadas ao final do tempo t por

$$\sin \mu t \cdot \sum \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) .$$

Inserindo $f_n \sin \mu t$ e $g_n \sin \mu t$ nas duas equações diferenciais parciais ao final da Seção 18.10 no lugar de f_n e g_n que denotavam lá funções arbitrárias do tempo, onde agora f_n e g_n possuem valores independentes do tempo, obtemos as seguintes duas equações diferenciais parciais⁶⁹³

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} + \frac{c^2}{8\pi\alpha^2 k M''(1+\lambda)} \cdot \frac{da_n}{dt} + \frac{n^2 c^2 N''}{2a^2 M''(1+\lambda)} \cdot a_n - \frac{nc^2}{4a M''(1+\lambda)} \cdot g_n \sin \mu t = 0 ,$$

$$\frac{d^2 b_n}{dt^2} + \frac{c^2}{8\pi\alpha^2 k M''(1+\lambda)} \cdot \frac{db_n}{dt} + \frac{n^2 c^2 N''}{2a^2 M''(1+\lambda)} \cdot b_n + \frac{nc^2}{4a M''(1+\lambda)} \cdot f_n \sin \mu t = 0 .$$

Vemos agora facilmente que, colocando

$$a_n = p \sin (\mu t + \rho) ,$$

⁶⁹³As próximas equações são equações diferenciais ordinárias.

$$b_n = q \operatorname{sen}(\mu t + \rho) ,$$

[então] p , q e ρ podem ser determinados de tal forma que os valores de a_n e b_n assim obtidos satisfaçam às duas equações diferenciais parciais. Se inserirmos nas equações fornecidas os valores anteriores de a_n e b_n , e os valores derivados deles, a saber,

$$\frac{da_n}{dt} = p\mu \cos(\mu t + \rho) ,$$

$$\frac{db_n}{dt} = q\mu \cos(\mu t + \rho) ,$$

$$\frac{d^2a_n}{dt^2} = -p\mu^2 \operatorname{sen}(\mu t + \rho) ,$$

$$\frac{d^2b_n}{dt^2} = -q\mu^2 \operatorname{sen}(\mu t + \rho) ,$$

e se colocarmos por brevidade $1/[\pi\alpha^2k] = w'$, e se, de acordo com a lei de Ohm, $\lambda = 0$, ou se colocarmos M'' no lugar de $M''(1 + \lambda)$, obteremos

$$-p\mu^2 \operatorname{sen}(\mu t + \rho) + \frac{p\mu c^2 w'}{8M''} \cos(\mu t + \rho) + \frac{pn^2 c^2 N''}{2a^2 M''} \cdot \operatorname{sen}(\mu t + \rho) - \frac{c^2 n}{4aM''} \cdot g_n \operatorname{sen} \mu t = 0 ,$$

$$-q\mu^2 \operatorname{sen}(\mu t + \rho) + \frac{q\mu c^2 w'}{8M''} \cos(\mu t + \rho) + \frac{qn^2 c^2 N''}{2a^2 M''} \cdot \operatorname{sen}(\mu t + \rho) + \frac{c^2 n}{4aM''} \cdot f_n \operatorname{sen} \mu t = 0 .$$

Desenvolvendo o seno e cosseno da soma em termos do seno e cosseno das partes, obteremos

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\mu c^2 w'}{8M''} \cdot p \operatorname{sen} \rho + \left(\mu^2 - \frac{n^2 c^2 N''}{2a^2 M''} \right) \cdot p \cos \rho + \frac{c^2 n}{4aM''} \cdot g_n \right) \operatorname{sen} \mu t \\ & + \left(\left(\mu^2 - \frac{n^2 c^2 N''}{2a^2 M''} \right) \cdot p \operatorname{sen} \rho - \frac{\mu c^2 w'}{8M''} \cdot p \cos \rho \right) \cos \mu t = 0 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\mu c^2 w'}{8M''} \cdot q \operatorname{sen} \rho + \left(\mu^2 - \frac{n^2 c^2 N''}{2a^2 M''} \right) \cdot q \cos \rho - \frac{c^2 n}{4aM''} \cdot f_n \right) \operatorname{sen} \mu t \\ & + \left(\left(\mu^2 - \frac{n^2 c^2 N''}{2a^2 M''} \right) \cdot q \operatorname{sen} \rho - \frac{\mu c^2 w'}{8M''} \cdot q \cos \rho \right) \cos \mu t = 0 . \end{aligned}$$

Se essas equações devem ser válidas para qualquer valor de t , obtemos então para $\cos \mu t = 0$ as duas equações

$$\frac{\mu c^2 w'}{8M''} \cdot p \operatorname{sen} \rho + \left(\mu^2 - \frac{n^2 c^2 N''}{2a^2 M''} \right) \cdot p \cos \rho + \frac{c^2 n}{4aM''} \cdot g_n = 0 ,$$

$$\frac{\mu c^2 w'}{8M''} \cdot q \operatorname{sen} \rho + \left(\mu^2 - \frac{n^2 c^2 N''}{2a^2 M''} \right) \cdot q \cos \rho - \frac{c^2 n}{4aM''} \cdot f_n = 0 ,$$

e para $\sin \mu t = 0$ [obtemos] ainda a terceira equação, a saber,

$$\left(\mu^2 - \frac{n^2 c^2 N''}{2a^2 M''} \right) \sin \rho - \frac{\mu c^2 w'}{8M''} \cdot \cos \rho = 0 ,$$

para as quais p , q e ρ devem ser determinados de tal forma que as duas equações diferenciais parciais sejam satisfeitas pelos valores de a_n e b_n assim determinados. Obtemos de fato

$$\begin{aligned} \rho &= \arctan \frac{\mu a^2 c^2 w'}{4(2\mu^2 a^2 M'' - n^2 c^2 N'')} , \\ p &= -\frac{ac^2 n}{2(2\mu^2 a^2 M'' - n^2 c^2 N'')} \cdot g_n \cos \rho \\ &= -\frac{2ac^2 n}{\sqrt{16(2\mu^2 a^2 M'' - n^2 c^2 N'')^2 + \mu^2 a^4 c^4 w'^2}} \cdot g_n , \\ q &= +\frac{ac^2 n}{2(2\mu^2 a^2 M'' - n^2 c^2 N'')} \cdot f_n \cos \rho \\ &= +\frac{2ac^2 n}{\sqrt{16(2\mu^2 a^2 M'' - n^2 c^2 N'')^2 + \mu^2 a^4 c^4 w'^2}} \cdot f_n . \end{aligned}$$

Se aos valores particulares de a_n e b_n assim determinados, que satisfazem às equações diferenciais parciais, forem adicionados os valores encontrados na Seção 18.13 para a_n e b_n , para o caso em que $f_n = 0$ e $g_n = 0$, as duas somas darão os valores integrais completos de a_n e b_n , a saber

$$\begin{aligned} a_n &= p \sin(\mu t + \rho) + A e^{-\varepsilon t} \cdot \sin \left(mt + \arcsen \frac{a_n^0}{A} \right) , \\ b_n &= q \sin(\mu t + \rho) + B e^{-\varepsilon t} \cdot \sin \left(mt + \arcsen \frac{b_n^0}{B} \right) , \end{aligned}$$

nas quais A e B assim como ε e m possuem o significado dado na Seção 18.13. Caso m tenha um valor imaginário, então os valores de a_n e b_n desenvolvidos na Seção 18.17 substituirão os termos adicionados. Mas fica claro que os termos adicionados diminuem para valores crescentes de t e que eles, como mostrado na Seção 18.17, podem ser considerados como já tendo desaparecido após ter passado uma porção muito pequena de um segundo, assim a partir desse instante o movimento da eletricidade no condutor circular torna-se uniforme e periodicamente recorrente, cuja produção era o objetivo do método descrito com o ímã giratório.

Omitindo os termos que desaparecem com o tempo e inserindo esses valores de a_n e b_n nas equações

$$\begin{aligned} E &= \sum \left(a_n \sin \frac{ns}{a} + b_n \cos \frac{ns}{a} \right) , \\ i &= -\frac{a}{2} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{db_n}{dt} \sin \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cos \frac{ns}{a} \right) , \end{aligned}$$

obtemos as seguintes leis de distribuição da eletricidade livre e das correntes no condutor circular para a oscilação elétrica contínua e regular:

$$E = \sum \operatorname{sen}(\mu t + \rho) \left(p \operatorname{sen} \frac{ns}{a} + q \cos \frac{ns}{a} \right) ,$$

$$i = -\frac{a\mu}{2} \sum \frac{1}{n} \cos(\mu t + \rho) \left(q \operatorname{sen} \frac{ns}{a} - p \cos \frac{ns}{a} \right) ,$$

onde p , q e ρ possuem os valores anteriores. Contudo, a partir desses valores obtemos

$$p = -\frac{2n}{\mu a w'} \operatorname{sen} \rho \cdot g_n ,$$

$$q = +\frac{2n}{\mu a w'} \operatorname{sen} \rho \cdot f_n .$$

Substituindo esses valores de p e q nas duas equações, obtemos

$$E = \frac{2}{\mu a w'} \sum n \operatorname{sen} \rho \operatorname{sen}(\mu t + \rho) \left(f_n \cos \frac{ns}{a} - g_n \operatorname{sen} \frac{ns}{a} \right) ,$$

$$i = -\frac{1}{w'} \sum \operatorname{sen} \rho \cos(\mu t + \rho) \left(f_n \operatorname{sen} \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) ,$$

ou, desenvolvendo $\operatorname{sen}(\mu t + \rho)$ e $\cos(\mu t + \rho)$ ⁶⁹⁴

$$E = \frac{2}{\mu a w'} \operatorname{sen} \mu \cdot \sum n \operatorname{sen} \rho \cos \rho \left(f_n \cos \frac{ns}{a} - g_n \operatorname{sen} \frac{ns}{a} \right)$$

$$+ \frac{2}{\mu a w'} \cos \mu t \cdot \sum n \operatorname{sen}^2 \rho \left(f_n \cos \frac{ns}{a} - g_n \operatorname{sen} \frac{ns}{a} \right) ,$$

$$i = \frac{1}{w'} \operatorname{sen} \mu t \cdot \sum \operatorname{sen}^2 \rho \left(f_n \operatorname{sen} \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right)$$

$$- \frac{1}{w'} \cos \mu t \cdot \sum \operatorname{sen} \rho \cos \rho \left(f_n \operatorname{sen} \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) .$$

Finalmente, colocando aqui

$$\frac{\sum \operatorname{sen}^2 \rho \left(f_n \operatorname{sen} \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right)}{\sum \operatorname{sen} \rho \cos \rho \left(f_n \operatorname{sen} \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right)} = \tan \gamma ,$$

$$\frac{\sum n \operatorname{sen}^2 \rho \left(f_n \cos \frac{ns}{a} - g_n \operatorname{sen} \frac{ns}{a} \right)}{\sum n \operatorname{sen} \rho \cos \rho \left(f_n \cos \frac{ns}{a} - g_n \operatorname{sen} \frac{ns}{a} \right)} = \tan \gamma' ,$$

$$\left(\sum \operatorname{sen}^2 \rho \left(f_n \operatorname{sen} \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) \right)^2$$

$$+ \left(\sum \operatorname{sen} \rho \cos \rho \left(f_n \operatorname{sen} \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) \right)^2 = k^2 ,$$

⁶⁹⁴Substituí nas próximas equações a notação de Weber $\operatorname{sen}^2 \rho$ por $\operatorname{sen}^2 \rho$.

$$\left(\sum n \sin^2 \rho \left(f_n \cos \frac{ns}{a} - g_n \sin \frac{ns}{a} \right) \right)^2 + \left(\sum n \sin \rho \cos \rho \left(f_n \cos \frac{ns}{a} - g_n \sin \frac{ns}{a} \right) \right)^2 = k'^2 ,$$

obtemos

$$E = \frac{2}{\mu a w'} \cdot k' \sin(\mu t + \gamma') ,$$

$$i = -\frac{1}{w'} \cdot k' \cos(\mu t + \gamma) .$$

Porém, colocando

$$\sum \sin^2 \rho \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) = f ,$$

$$\sum \sin \rho \cos \rho \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) = g ,$$

$$\frac{df}{ds} = f' ,$$

$$\frac{dg}{ds} = g' ,$$

obtemos

$$E = \frac{2}{\mu w'} \sqrt{f'^2 + g'^2} \cdot \sin \left(\mu t + \arctan \frac{f'}{g'} \right) ,$$

$$i = -\frac{1}{w'} \sqrt{f'^2 + g'^2} \cdot \cos \left(\mu t + \arctan \frac{f'}{g'} \right) ,$$

logo é fácil deduzir a equação

$$\frac{di}{ds} = -\frac{1}{2} \frac{dE}{dt} .$$

18.21 Igualdade das Fases e Amplitudes das Oscilações Elétricas em Condutores Circulares

Considerando que a força eletromotriz exercida sobre *todo* o fio condutor pelo ímã giratório é representada por

$$\sin \mu t \cdot \int ds \cdot \sum \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) ,$$

e que g_0 tem de ter um valor finito específico se essa força total é diferente de zero, então o valor encontrado para i pode ser representado mais claramente se, nos valores dados de $\tan \gamma$ e k^2 , os primeiros termos da série, a saber, os termos correspondendo ao número de ordem $n = 0$, são separados da seguinte maneira, denotando por ρ_0 ao valor de ρ para $n = 0$:

$$\tan \gamma = \frac{g_0 \sin^2 \rho_0 + \sum_1^\infty \sin^2 \rho \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right)}{g_0 \sin \rho_0 \cos \rho_0 + \sum_1^\infty \sin \rho \cos \rho \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right)} ,$$

$$\begin{aligned} k^2 = & g_0^2 \sin^2 \rho_0 + 2g_0 \sin \rho_0 \cos \rho_0 \cdot \sum_1^\infty \sin \rho \cos \rho \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) \\ & + 2g_0 \sin^2 \rho_0 \cdot \sum_1^\infty \sin^2 \rho \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) \\ & + \left(\sum_1^\infty \sin \rho \cos \rho \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) \right)^2 \\ & + \left(\sum_1^\infty \sin^2 \rho \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) \right)^2 . \end{aligned}$$

Como tínhamos nesse caso

$$\begin{aligned} \sin \rho &= \frac{\mu a^2 c^2 w'}{\sqrt{16(2\mu^2 a^2 M'' - n^2 c^2 N'')^2 + \mu^2 a^4 c^4 w'^2}} , \\ \cos \rho &= \frac{4(2\mu^2 a^2 M'' - n^2 c^2 N'')}{\sqrt{16(2\mu^2 a^2 M'' - n^2 c^2 N'')^2 + \mu^2 a^4 c^4 w'^2}} , \end{aligned}$$

denotando por M_0'' ao valor de M'' para $n = 0$, obtemos os valores de $\sin \rho_0$ e $\cos \rho_0$ [como dados por:]

$$\begin{aligned} \sin \rho_0 &= \frac{c^2 w'}{\sqrt{64\mu^2 M_0''^2 + c^4 w'^2}} , \\ \cos \rho_0 &= \frac{8\mu M_0''}{\sqrt{64\mu^2 M_0''^2 + c^4 w'^2}} . \end{aligned}$$

Considerando além disso que as razões $\mu a^2 w'/N''$ e $\mu a/c$ também são frações muito pequenas para condutores muito longos e finos e para as maiores velocidades de rotação possíveis do pequeno ímã, fica claro que podemos colocar com aproximação suficiente para todos os valores $n > 0$

$$\sin \rho = \frac{\mu a^2 w'}{4n^2 N''} ,$$

$$\cos \rho = 1 .$$

Disso fica evidente que, como $\mu a^2 w'/N''$ já é uma fração muito pequena, $\sin \rho = \mu a^2 w'/[4n^2 N'']$ pode ser considerado ainda mais evanescente, quanto maior for o número de ordem n . Portanto, também para condutores muito longos e finos e para uma rotação muito rápida do pequeno ímã podemos aproximadamente assumir

$$\gamma = \rho_0 \quad \text{e} \quad k = g_0 \sin \rho_0 ,$$

encontramos, portanto,

$$i = -\frac{g_0}{w'} \operatorname{sen} \rho_0 \cos(\mu t + \rho_0) .$$

Como g_0/w' e ρ_0 possuem valores independentes de s , segue que as oscilações elétricas em todas as partes de um condutor circular têm ao mesmo tempo a mesma *fase* e a mesma *amplitude*, mesmo se as forças eletromotrizes exercidas pelo pequeno ímã estão distribuídas de maneira muito desigual ao longo das diferentes partes do condutor.

A partir da igualdade das fases e amplitudes de oscilação em todas as partes do condutor circular, segue que a intensidade de corrente em qualquer ponto é igual à intensidade média de corrente em todo o condutor. Porém, já deduzimos na Seção 18.9 a lei do valor médio das intensidades de corrente em condutores fechados em função do valor médio das forças eletromotrizes, onde, denotando por $[1/2\pi a] \cdot S$ ao valor médio da força eletromotriz externa e denotando

$$\frac{8}{c^2} \int M_0'' ds + \frac{4\pi a}{r\mathfrak{E}} = p ,$$

$$\frac{2\pi a}{\pi\alpha^2 k} = w = 2\pi a w' ,$$

obtivemos o resultado

$$i = \frac{1}{p} e^{-wt/p} \cdot \int e^{wt/p} \cdot S dt .$$

Aplicando agora essa lei a nosso caso no qual as oscilações em um condutor são produzidas por um ímã girando e onde a média das forças eletromotrizes exercidas pelo ímã giratório sobre o condutor era igual a

$$\frac{1}{2\pi a} \cdot S = g_0 \operatorname{sen} \mu t ,$$

obtemos

$$\begin{aligned} i &= \frac{2\pi a g_0}{p} e^{-wt/p} \cdot \int e^{wt/p} \cdot \operatorname{sen} \mu t \cdot dt = \frac{2\pi a g_0}{p} \cdot \frac{\frac{w}{p} \operatorname{sen} \mu t - \mu \cos \mu t}{\frac{w^2}{p^2} + \mu^2} \\ &= -\frac{2\pi a g_0}{\mu p \sqrt{\left(\frac{w}{\mu p}\right)^2 + 1}} \cdot \cos \left(\mu t + \arctan \frac{w}{\mu p} \right) . \end{aligned}$$

Como agora

$$p = \frac{8}{c^2} \cdot \int M_0'' ds + \frac{4\pi a}{r\mathfrak{E}} = \frac{8}{c^2} \cdot \int M_0'' (1 + \lambda) ds ,$$

e

$$w = 2\pi a w' ,$$

obtemos, colocando por simplicidade M_0'' no lugar de $M_0''(1 + \lambda)$ assim como na Seção 18.20,

$$\frac{w}{\mu p} = \frac{\pi a c^2 w'}{4\mu \int M_0'' ds} = \tan \rho_0 ,$$

$$\frac{w}{\mu p \sqrt{\left(\frac{w}{\mu p}\right)^2 + 1}} = \frac{2\pi a w'}{\mu p \sqrt{\left(\frac{w}{\mu p}\right)^2 + 1}} = \sin \rho_0 ,$$

consequentemente, concordando com os resultados encontrados anteriormente para condutores *circulares*,

$$i = -\frac{g_0 \sin \rho_0}{w'} \cdot \cos(\mu t + \rho_0) .$$

Como a lei anterior para as médias das intensidades de corrente em condutores fechados dependendo das médias das forças eletromotrizes na Seção 18.9 foi encontrada como não estando restrita apenas a condutores *circulares*, mas também como sendo independente da consideração sobre o formato do condutor fechado, isso fornece que a lei, deduzida para o caso no qual são dadas as forças eletromotrizes que se originam de um ímã giratório, também vale para condutores de formato arbitrário.

O resultado atual de que as *fases* e *amplitudes* das oscilações elétricas em condutores circulares são iguais em todo lugar é baseada na suposição de que as razões $\mu a^2 w' / N''$ e $\mu a / c$ são frações muito pequenas. Como agora essas frações aumentam com o comprimento e a finura do condutor e com a velocidade rotacional do ímã, é interessante calcular de fato os valores para alguns exemplos de condutores longos e finos em altas velocidades angulares do pequeno ímã. Escolhendo os três fios condutores já exemplificados na Seção 18.16, obtemos os valores apresentados na seguinte Tabela.

	Primeiro fio	Segundo fio	Terceiro fio
a	1000	1 000 000	1 000 000
w'	$\frac{1}{120\,697 \cdot 10^{12}}$	$\frac{1}{120\,697 \cdot 10^{12}}$	$\frac{1}{12\,070 \cdot 10^{12}}$
N'' (para $n = 1$)	15, 119	28, 935	31, 237
$100 \frac{a^2 w'}{N''}$	$\frac{1}{18\,248 \cdot 10^6}$	$\frac{1}{34\,939}$	$\frac{1}{3770}$
$100 \frac{a}{c}$	$\frac{1}{4\,394\,500}$	$\frac{1}{4394}$	$\frac{1}{4394}$

As duas últimas linhas dessa Tabela contêm os valores das duas razões para os três fios exemplificados se $\mu = 100$, isto é, com 15,965 voltas do ímã por segundo. Vemos que em todos esses casos os valores desses quocientes são frações muito pequenas, vendo também que, quando esses valores são 10 vezes maiores com 159,65 voltas por segundo e 100 vezes maiores com 1596,5 voltas por segundo, podem ocorrer de fato casos nos quais esses quocientes se tornem frações de magnitude considerável e onde, portanto, pode não mais valer a lei da igualdade das *fases* e *amplitudes* do condutor circular.

18.22 Distribuição da Eletricidade Livre em um Condutor Circular Durante a Oscilação Elétrica

A lei da distribuição da eletricidade livre em um condutor circular durante a oscilação elétrica está contida na expressão para a densidade [linear], E , encontrada na Seção 18.20, a saber

$$E = \frac{2}{\mu a w'} \cdot k' \sin(\mu t + \gamma') ,$$

onde o coeficiente k' foi determinado pela equação

$$k'^2 = \left(\sum n \sin^2 \rho \left(f_n \cos \frac{ns}{a} - g_n \sin \frac{ns}{a} \right) \right)^2 + \left(\sum n \sin \rho \cos \rho \left(f_n \cos \frac{ns}{a} - g_n \sin \frac{ns}{a} \right) \right)^2 .$$

Vemos, portanto, que também a quantidade de carga com eletricidade livre em cada ponto do condutor circular muda proporcionalmente ao seno de um arco que aumenta proporcionalmente com t , mas que a carga máxima $= 2k'/[\mu a w']$ que acontece quando o seno $= 1$, é diferente em pontos diferentes do condutor e que, de fato, a mudança de elemento para elemento é máxima aproximadamente naqueles pontos nos quais a força eletromotriz exercida pelo ímã giratório mais se desvia de sua média; nos locais onde essa força eletromotriz é igual a sua média, também a carga é aproximadamente constante, de fato, ela é igual a zero. Portanto, não haveria eletricidade livre em qualquer lugar de todo o condutor caso o ímã giratório atuasse igualmente em todos os pontos dele, onde está sendo suposto que o condutor circular não tem carga de eletricidade livre que seja independente do ímã giratório.

Como $\sin \rho$ e $\cos \rho$ mantêm valores finitos para $n = 0$ de acordo com a Seção anterior, fica claro que o valor anterior de k'^2 pode ser escrito como

$$k'^2 = \left(\sum_1^{\infty} \sin^2 \rho \left(f_n \cos \frac{ns}{a} - g_n \sin \frac{ns}{a} \right) \right)^2 + \left(\sum_1^{\infty} n \sin \rho \cos \rho \left(f_n \cos \frac{ns}{a} - g_n \sin \frac{ns}{a} \right) \right)^2 .$$

Além do mais, colocando

$$\sin \rho = \frac{\mu a^2 w'}{4n^2 N''} ,$$

$$\cos \rho = 1 ,$$

baseado nas suposições da Seção anterior, e supondo que o valor de $\sin \rho$ seja muito pequeno, a primeira parte de k'^2 , contendo na soma o fator $\sin^2 \rho$, pode ser desprezada comparada com o segundo termo, obtemos assim:

$$k' = \frac{\mu a^2 w'}{4} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n N''} \left(f_n \cos \frac{ns}{a} - g_n \sin \frac{ns}{a} \right) .$$

Isso gera agora

$$\frac{dk'}{ds} = -\frac{\mu aw'}{4} \sum_1^{\infty} \frac{1}{N''} \left(f_n \operatorname{sen} \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) .$$

Se, finalmente, $\log[8a/\alpha]$ for um número muito grande e se, além disso, a série

$$\sum \left(f_n \operatorname{sen} \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right)$$

convergir tão rapidamente que todos os termos da série possam ser desprezados para $n > \nu$, enquanto que

$$2 \left[1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2\nu - 1} \right] + \frac{\nu^2 \alpha}{8a}$$

desaparece em comparação com $\log[8a/\alpha]$, poderemos então colocar $N'' = 2 \log[8a/\alpha]$ e

$$\frac{dk'}{ds} = -\frac{\mu aw'}{8 \log \frac{8a}{\alpha}} \left(\sum_0^{\nu} \left(f_n \operatorname{sen} \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) - g_0 \right) .$$

Agora o fator

$$\sum_0^{\nu} \left(f_n \operatorname{sen} \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) - g_0$$

é igual à diferença entre a força eletromotriz exercida no ponto s pelo ímã giratório e sua média ao longo de todo o comprimento do condutor; portanto, dk'/ds ou a variação de k' com relação à variação de s , é proporcional a essa diferença.

Como se pode facilmente ver, a intensidade dessas cargas determina o desencadeamento de faíscas elétricas⁶⁹⁵ e o grau de *isolamento* do condutor necessário para evitar tal desencadeamento, assunto que requer uma discussão mais detalhada, mas apenas quando se trata de condutores que formam não apenas um simples círculo, mas um sistema de voltas espirais muito próximas,⁶⁹⁶ um caso que foi excluído da consideração feita aqui.

18.23 Guia para as Observações

Falta usar os resultados do desenvolvimento anterior como um guia das *observações* por meio das quais esses resultados serão comparados com a experiência. Um tal guia é particularmente necessário se não há analogias de outros fenômenos de movimento que possam ser usadas para esse fim e, pelo que foi dito anteriormente, segue que tais analogias estão faltando em muitos aspectos.

Na ausência de analogias com outros fenômenos de movimento já conhecidos e investigados, a questão principal é identificar *objetos de observação* que sejam particularmente importantes e adequados para *uma determinação mais precisa por meio das observações*. Além disso, é necessário um melhor conhecimento das *condições* com as quais podem ser obtidas as determinações mais exatas através desses objetos de observação. Está agora claro

⁶⁹⁵Em alemão: *Das Ueberspringen elektrischer Funken*. Essa expressão pode ser traduzida como o desencadeamento de faíscas elétricas, a descarga das faíscas elétricas, o salto ou produção das faíscas elétricas.

⁶⁹⁶Esse sistema forma então uma bobina ou solenoide.

que a discussão mais detalhada destas *condições* é mais apropriadamente combinada com a discussão dos *meios* de sua representação real e com a *execução das próprias observações*, que juntos constituirão o tema da próxima Seção deste Tratado. Portanto, ao final dessa Seção serão indicados apenas brevemente os *objetos de observação* que, de acordo com o desenvolvimento anterior, parecem ser particularmente *importantes e adequados para uma determinação mais detalhada por meio das observações*.

A *velocidade de propagação* que é tão importante para outros fenômenos de movimento, não está incluída aqui face ao que já foi assinalado na Seção 18.18, mas apresentam-se vários outros objetos de observação.

De acordo com as leis desenvolvidas, existem essencialmente *três* tópicos que são particularmente apropriados como objetos de observação para testar as leis formuladas, a saber, *em primeiro lugar*, a comparação das fases e amplitudes das oscilações da eletricidade em vários locais de um longo condutor fechado no qual um ímã giratório atua indutivamente; *em segundo lugar*, a lei de dependência da amplitude de oscilação em relação à velocidade angular do ímã; finalmente, *em terceiro lugar*, um outro tópico importante sugere as observações da *dependência da amplitude de oscilação* produzida por um ímã giratório em um condutor fechado em relação ao *formato* desse fio.

A *igualdade da fase de oscilação e da amplitude de oscilação* que, de acordo com as leis formuladas, deve ocorrer em todas as partes mesmo em um circuito fechado muito longo e com uma alta velocidade de rotação [do ímã], é um tópico tanto mais apropriado para ser testado pela experiência, quanto mais inesperado parecer esse resultado. Pois sem um desenvolvimento mais preciso das condições seria esperado em um circuito muito longo, onde todos os movimentos começam em um local e estão sujeitos a um amortecimento muito forte ou absorção enquanto se propagam, que todos os movimentos chegariam muito fracos nas partes mais distantes do circuito, mesmo se as oscilações fossem continuamente excitadas. Como, além disso, a propagação ocorre nas duas direções a partir do local de excitação, pode-se esperar que a alternância de oscilações positivas e negativas devido ao encontro de lados opostos seja *amplificada* em alguns lugares e *cancelada* em outros, como no caso dos fenômenos de interferência. Finalmente, mesmo que oscilações completamente sincronizadas em todas as partes do circuito fossem *possíveis* como resultado de tal encontro, ainda seria de esperar que este *possível* caso estivesse ligado a condições especiais, por exemplo, a certas velocidades angulares, mas não que tais oscilações síncronas sempre se formariam em todas as partes do circuito, *para quaisquer velocidades angulares*. Portanto, o resultado apresentado é altamente inesperado no que diz respeito a todas analogias oferecidas pela propagação do movimento em outros casos conhecidos e, portanto, é especialmente adequado para um teste experimental dos resultados da teoria baseada em nosso conhecimento existente até o momento sobre a eletricidade.

Além disso, a *dependência da amplitude de oscilação em relação à velocidade angular* do ímã é apropriada de uma perspectiva diferente, a saber, um *teste quantitativo* da lei formulada com base em observações e medições que são organizadas em um sequência de velocidades crescentes de rotação.

Finalmente, se além disso formos bem sucedidos em obter determinações mais detalhadas da *dependência da amplitude de oscilação em relação ao formato do circuito* por meio de observações e medições exatas, obteríamos não apenas um novo teste das leis formuladas, mas também um suplemento essencial de nosso conhecimento da própria eletricidade da qual essas leis foram deduzidas. A partir de nosso conhecimento existente até o momento, tem de ser atribuída uma *massa* à eletricidade considerada como um corpo, e essa massa

exerce uma *força* em outra massa similar; o que ainda está faltando é o conhecimento da *razão* dessa massa para essa força. Agora o conhecimento dessa razão também não foi necessário enquanto lidamos com *fenômenos de equilíbrio* ou com *movimentos constantes*, nos quais era suficiente conhecer as *forças*; aqui as diferentes quantidades de eletricidade podiam ser distinguidas de acordo com a intensidade das *forças* que elas exercem sobre a *mesma* quantidade de eletricidade na unidade de distância, em vez de [serem distinguidas] por suas *massas*, e essa última quantidade de eletricidade podia ser determinada por meio da *força* que ela exerce sobre um quantidade *idêntica* de eletricidade na unidade de distância. De fato, tal quantidade específica de eletricidade assim determinada foi denominada de *unidade de medida eletrostática*. Contudo, se não lidamos apenas com um *equilíbrio* ou apenas com a *manutenção de um movimento já existente* mas se, ao contrário, uma quantidade de eletricidade deve receber um *novo movimento* que antes não existia, então não é suficiente apenas o conhecimento das forças, sendo também necessário o conhecimento da *massa* da eletricidade a ser colocada em movimento, ou a *razão* entre essa massa e a força que ela exerce sobre a unidade de medida eletrostática na unidade de distância, isto é, o conhecimento do *número de unidades de medida eletrostática contido na unidade de massa* (miligrama) *de eletricidade*. Esse número foi denominado anteriormente⁶⁹⁷ por r e, portanto, a *massa* de cada quantidade específica de eletricidade $\mathfrak{E}$, determinada em *unidade eletrostática*, é assim encontrada igual a $[1/r] \cdot \mathfrak{E}$. Agora, se qualquer *força* f atua nessa *massa*, é claro que a *razão* dessa força em relação à massa $[1/r] \cdot \mathfrak{E}$ sobre a qual atua, fornece, na unidade de tempo, a *velocidade* de movimento fornecida pela força a essa massa, $= fr/\mathfrak{E}$.⁶⁹⁸

Agora nosso conhecimento das quantidades existentes de eletricidade em *unidades de medida eletrostática* é de fato limitado às quantidades de eletricidade *livre* contidas nos corpos obtidas pelas observações e não inclui as quantidades de eletricidade contidas no fluido *neutro*. Da mesma forma, nosso conhecimento das forças, f , está limitado àquelas [forças] atuando sobre as quantidades de eletricidade *livre*, enquanto que as observações fornecem apenas o conhecimento do coeficiente, f' , denominado pelo nome de *força eletromotriz*, que tem de ser multiplicado pelo desconhecido *número de unidades de medida eletrostática contidas no fluido neutro*, $\mathfrak{E}$, para obter $f = f' \cdot \mathfrak{E}$. Por outro lado, em toda a eletrodinâmica não investigamos a própria *velocidade*, mas apenas a *densidade de corrente* e suas modificações, isto é, o produto do *número de unidades de medida eletrostática*, $\mathfrak{E}$, contidas na eletricidade que está fluindo, e essa *velocidade* $rf/\mathfrak{E}$, isto é, $rf = f' \cdot r\mathfrak{E}$, onde a *força eletromotriz*, f' , já é conhecida e, portanto, só falta ser determinado o produto $r\mathfrak{E}$.

Se, portanto, em concordância com o desenvolvimento anterior da determinação das *densidades de corrente* e suas modificações, não precisamos do próprio conhecimento do número de unidades de medida eletrostática, r , contidos na unidade de massa (miligrama), mas necessitamos apenas o conhecimento do produto $r\mathfrak{E}$, fica claro que, por outro lado, a *partir da observação das densidades de corrente* e de suas modificações, também só pode ser obtido o conhecimento do produto $r\mathfrak{E}$; porém, a importância de conhecer esse produto $r\mathfrak{E}$ também é óbvia, sendo a tentativa de conhecê-lo por meio de observações detalhadas e exatas da *dependência da amplitude de oscilação em relação ao formato do circuito* a maneira mais apropriada para isso, de acordo com a orientação dada pelas leis deduzidas.

Para isso, porém, é necessário ter o conhecimento mais preciso das *condições* sob as quais podem ser obtidas determinações seguras sobre esta dependência, cuja discussão, como já foi observado, será combinada com a discussão dos meios de representação real na próxima

⁶⁹⁷Ver a página 368 na Seção 18.5.

⁶⁹⁸Isto é, $fr/\mathfrak{E}$ representa a aceleração adquirida por essa massa $[1/r] \cdot \mathfrak{E}$ devida à ação da força f .

Seção deste Tratado.

II - Observações das Oscilações

18.24 Método de Observação

De acordo com o guia para as observações apresentado na Seção anterior, serão observadas e medidas em condutores fechados principalmente as *diferenças de fase e de amplitude das oscilações elétricas*. Porém, os *galvanômetros* não podem ser usados para essas observações e medições, assim como podem ser usados para observar e medir as *intensidades de correntes constantes*. Pois se, em vez de uma corrente constante, está presente uma *oscilação elétrica* no *multiplicador* de um galvanômetro,⁶⁹⁹ a agulha do galvanômetro não pode permanecer em repouso e em equilíbrio, mas precisa realizar da mesma maneira oscilações que tornam-se mais fracas quanto menor for a fração do período da oscilação elétrica comparado com o período de oscilação da agulha do magnetômetro; entretanto, se essas oscilações fossem infinitesimalmente pequenas, a agulha do galvanômetro se comportaria exatamente da mesma forma como se não houvesse nenhuma oscilação elétrica no multiplicador; ela permaneceria na mesma posição de equilíbrio sem nenhuma deflexão, de modo que nada poderia ser determinado sobre a presença de uma oscilação elétrica no multiplicador a partir da observação do galvanômetro. Portanto, a observação de *oscilações elétricas* e, em particular, a medição de suas diferenças de amplitude e fase exige que o condutor fechado no qual ocorrem as oscilações não forme apenas um multiplicador, como no caso de um galvanômetro, mas também um solenoide suspenso como uma balança de torção que, junto com o *multiplicador*, forme um *eletrodinamômetro*, cuja construção já foi descrita no Primeiro Tratado sobre *Medições Eletrodinâmicas* (*Abhandlung bei Begründung der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften*, Leipzig, 1846),^{700,701} e seu uso para a observação de *oscilações elétricas* já foi geralmente discutido e explicado por meio de um exemplo.

Em particular, será considerado mais atentamente aqui o método para determinar as *diferenças de fase e de amplitude das oscilações elétricas* em condutores fechados a partir das observações por meio de um dinamômetro, onde pode ser assumido para simplificar que o multiplicador constituído pelo condutor no qual ocorrem as oscilações elétricas é formado por um anel vertical que tem um diâmetro bem grande, similar àquele de um galvanômetro tangente,⁷⁰² no centro do qual está suspenso o *solenóide*, que está concentrado no menor espaço possível e é formado pelo mesmo condutor, que ocupa o lugar da *agulha* [magnética] giratória no galvanômetro.

Há uma diferença fundamental entre essa *agulha* [magnetizada] e o *solenóide* formado pelo condutor no qual ocorre a oscilação, [a saber,] que a *agulha* possui um *momento magnético constante* na qual atua a corrente constante no multiplicador, enquanto que o *solenóide* possui um *momento galvânico* que, de acordo com a lei de Ampère, de fato seria completamente *equivalente* ao momento magnético da agulha, o qual, contudo, não seria constante para uma *oscilação elétrica* no solenoide, mas que varia com a fase da oscilação elétrica. Além disso, não é uma corrente constante do multiplicador que atua sobre esse *momento galvânico variável* do solenoide, mas sim a *oscilação elétrica* existente no multiplicador, cuja ação sobre o solenoide também é *variável* com a fase da oscilação.

⁶⁹⁹Ver a Nota de rodapé 44 na página 33.

⁷⁰⁰[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, págs. 35 e 123.

⁷⁰¹[Web46, Seções 1 e 16, págs. 35 e 123 das *Obras* de Weber] com tradução parcial para o francês em [Web87] e traduções completas para o inglês em [Web07] e [Web21b].

⁷⁰²Ver a Nota de rodapé 36 na página 27.

Sejam a e n o raio médio e o número de enrolamentos, respectivamente, do *multiplicador* e, da mesma forma, a' e n' para o *solenóide*, além disso, sejam i e i' as intensidades de corrente no multiplicador e solenóide, respectivamente, expressas em *unidade magnética absoluta* como usada na galvanometria, portanto $[c/\sqrt{8}] \cdot i dt$ e $[c/\sqrt{8}] \cdot i' dt$ representam a quantidade de eletricidade positiva atravessando as seções retas dos condutores durante o elemento de tempo dt ; então $n\pi a^2 i$ e $n'\pi a'^2 i'$ representam os *momentos galvânicos* do multiplicador e do solenóide. O dobro do produto desses dois momentos galvânicos dividido pela terceira potência da distância a entre o solenóide concentrado em seu centro e o anel do multiplicador fornece a *força diretriz*⁷⁰³ exercida sobre o solenóide pelo multiplicador que, multiplicado pelo seno do ângulo formado entre o eixo do solenóide e o eixo do multiplicador, ou, equivalentemente, multiplicado pelo cosseno do ângulo de deflexão φ entre o eixo do solenóide e o plano do anel multiplicador, fornece o *torque*⁷⁰⁴ exercido pelo multiplicador sobre o solenóide, a saber,

$$= 2 \frac{n\pi a^2 i \cdot n'\pi a'^2 i'}{a^3} \cdot \cos \varphi .$$

Tendo em vista a perfeita analogia que ocorre aqui entre a teoria do *eletrodinamômetro* e a do *galvanômetro*, não é necessária nenhuma discussão adicional sobre este ponto mas, ao considerar o uso do instrumento, podemos passar imediatamente para o caso quando no fio condutor, que inclui o multiplicador e solenóide, ocorrem *oscilações elétricas*, onde assim as *intensidades de corrente* i e i' variam com o seno de um ângulo, que aumenta proporcionalmente ao tempo t .

Se nesse caso i e i' representam as intensidades máximas de corrente correspondendo aos valores máximos do seno, então as intensidades de corrente podem ser representadas por $i \sin(\mu t + \gamma)$ e $i' \sin(\mu t + \gamma')$ para qualquer instante ao final do tempo t . Se $\mathfrak{E}$ denotar a quantidade de eletricidade positiva contida na unidade de comprimento do condutor, a distância de uma partícula oscilante no multiplicador ou solenóide em relação à sua posição de equilíbrio durante essa oscilação para esse instante será representada por $[i/\mu\mathfrak{E}] \cos(\mu t + \gamma)$ e $[i'/\mu\mathfrak{E}] \cos(\mu t + \gamma')$, onde $i/[\mu\mathfrak{E}]$ e $i'/[\mu\mathfrak{E}]$ são as *amplitudes de oscilação* a serem determinadas aqui. — Porém, assim como no caso das correntes renunciamos ao conhecimento da própria velocidade de deriva,⁷⁰⁵ e nos contentamos com o produto dessa velocidade de deriva com o fator desconhecido $\mathfrak{E}$, de maneira similar nos contentamos aqui com a determinação do produto dessa amplitude de oscilação com esse mesmo fator $\mathfrak{E}$, já que as observações só vão nos permitir expressar esse produto em *unidades absolutas*.

Nesse caso, com essas novas especificações das intensidades de corrente, obtemos agora o torque exercido pelo multiplicador sobre o solenóide:

$$= 2 \frac{n\pi a^2 i \cdot n'\pi a'^2 i'}{a^3} \sin(\mu t + \gamma) \sin(\mu t + \gamma') \cdot \cos \varphi ,$$

onde i e i' possuem valores constantes independentes do tempo t .

Sob a influência desse torque cuja magnitude muda incessantemente com o tempo t , o solenóide móvel claramente não pode permanecer em repouso; portanto, surge a questão

⁷⁰³Ver a Nota de rodapé 122 na página 87.

⁷⁰⁴Ver a Nota de rodapé 30 na página 23.

⁷⁰⁵Em alemão: *Stromgeschwindigkeit*. Weber está se referindo aqui à velocidade das partículas eletrizadas em relação à matéria ou corpo material do condutor, isto é, em relação ao fio. Ver a Nota de rodapé 102 na página 71.

de saber quais tipos de *observações* podem ser feitas com esse movimento incessante do solenoide e o que pode ser determinado a partir dessas observações. Para responder a essa questão, *temos de desenvolver as leis de movimento do solenoide sob a influência de tal torque variável.*

Para simplificar esse desenvolvimento, inicialmente nos limitamos ao caso em que as *intensidades de corrente no multiplicador e solenoide são sempre as mesmas*, logo podemos colocar

$$i = i' \quad \text{e} \quad \gamma = \gamma' = 0 .$$

Nesse caso, o torque variável atuando sobre o solenoide é

$$= 2 \frac{\pi^2 n n' a'^2}{a} \cdot i^2 (\sin \mu t)^2 \cos \varphi ,$$

que pode ser escrito como

$$= \frac{\pi^2 n n' a'^2}{a} \cdot i^2 (1 - \cos 2\mu t) \cos \varphi .$$

Contudo, a partir da construção do *eletrodinômetro*, sabemos que o solenoide é apoiado de uma maneira *bifilar*, portanto, dado o comprimento e a distância entre os dois fios de suspensão e o peso do solenoide carregado por eles, haverá uma *força diretriz estática* para o solenoide que pode ser facilmente determinada e que será denominada por S . Se agora essa suspensão bifilar do solenoide for regulada de *maneira normal*, de tal forma que o torque resultando da *força diretriz estática* seja igual a zero quando o eixo do solenoide é paralelo ao plano do anel do multiplicador, ou quando o *ângulo de deflexão* $\varphi = 0$, obteremos então o *torque estático* atuando sobre o solenoide para qualquer valor do ângulo φ como sendo dado por:

$$= -S \sin \varphi .$$

Adicionando esse torque *estático* ao torque *eletrodinâmico* anterior, a soma dos dois torques atuando sobre o solenoide, dividida pelo momento de inércia K do solenoide, fornece a aceleração angular do solenoide, $d^2\varphi/dt^2$, ao final do tempo t , portanto, segue a *equação de movimento do solenoide*, a saber,

$$\frac{\pi^2 n n' a'^2}{a} \cdot i^2 (1 - \cos 2\mu t) \cos \varphi - S \sin \varphi = K \frac{d^2\varphi}{dt^2} .$$

Colocando aqui

$$\varphi = v + \alpha ,$$

onde assumimos o valor *constante* para v determinado pela seguinte equação:

$$\tan v = \frac{\pi^2 n n' a'^2}{aS} \cdot i^2 ,$$

portanto, $d^2\varphi/dt^2 = d^2\alpha/dt^2$, de tal forma que obtemos

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{S}{K} [(1 + (1 - \cos 2\mu t) \tan^2 v) \cos v \sin \alpha + \cos 2\mu t \cdot \sin v \cos \alpha] = 0 .$$

Com a suposição de que v e α possuem valores pequenos (o que, como regra, é possível já que o solenoide equipado com um espelho, é para ser observado da mesma maneira que uma agulha magnética, onde a deflexão do solenoide sempre vai permanecer dentro de pequenos limites fornecidos pelo comprimento da escala), podemos escrever

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{S}{K}(\alpha \sec v + \cos 2\mu t \cdot \sin v) = 0 ,$$

obtemos portanto por integração:

$$\alpha = \frac{\sin v}{4\mu^2 \frac{K}{S} - \sec v} \cdot \cos 2\mu t + A \sin(t - B) \sqrt{\frac{S \sec v}{K}} ,$$

sendo A e B as duas constantes de integração. Denotando agora por τ ao período de oscilação do solenoide,⁷⁰⁶ que corresponde à força diretriz S e ao momento de inércia K , e por ϑ ao período de oscilação da eletricidade no fio condutor, obtemos:

$$\frac{K}{S} = \frac{\tau^2}{\pi^2} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{\pi}{\vartheta} ;$$

consequentemente

$$\alpha = \frac{\sin v}{4\frac{\tau^2}{\vartheta^2} - \sec v} \cdot \cos \frac{2\pi}{\vartheta} t + A \sin \frac{\pi}{\tau} (t - B) \sqrt{\sec v} ,$$

ou, para o suposto pequeno valor de v e colocando $A = 0$ (isto é, independentemente daquela oscilação que o solenoide faria se estivesse apenas sob a influência da força diretriz estática S e da [força diretriz] eletrodinâmica $nn'\pi^2 a'^2 i^2/a$, uma vez que essa oscilação pode ser facilmente atenuada por agentes de amortecimento conhecidos durante as observações), segue que

$$\alpha = \frac{\vartheta^2}{4\tau^2 - \vartheta^2} \cdot v \cos \frac{2\pi}{\vartheta} t .$$

Como exemplo, tomemos o caso que ocorrerá nas seguintes observações, onde, expresso em segundos

$$\tau = 15 , \quad \vartheta = \frac{1}{520} ,$$

onde, portanto,

$$\alpha = \frac{1}{243 \cdot 10^6} \cdot v \cos \frac{2\pi}{\vartheta} t ,$$

isso significa que α desaparece completamente comparado com v . O mesmo acontece para todas as observações a serem tratadas aqui.

Quando α desaparece, a *deflexão constante v do solenoide* pode agora ser observada diretamente com a maior precisão e encontramos

$$i = \frac{1}{\pi a'} \sqrt{\frac{aS \tan v}{nn'}} ,$$

portanto, a oscilação elétrica no condutor fechado é determinada completamente se o período de oscilação, ϑ , for conhecido ao contar as revoluções do ímã giratório, a saber,

⁷⁰⁶Em alemão: *Die Schwingungsdauer des Solenoids*. Ver também a Nota de rodapé 24 na página 19.

$$i \operatorname{sen} \frac{\pi}{\vartheta} t = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{\vartheta} t}{\pi a'} \cdot \sqrt{\frac{aS \tan v}{nn'}} .$$

Caso, em vez da oscilação elétrica, houvesse uma *corrente constante* de intensidade $i\sqrt{\frac{1}{2}}$, então o torque exercido pelo multiplicador sobre o solenoide seria dado por

$$= \frac{\pi^2 nn' a'^2}{a} i^2 \cos \varphi ,$$

e esse torque, juntamente com o torque estático, $-S \operatorname{sen} \varphi$, tem de ser $= 0$ no equilíbrio, logo, a *deflexão φ do solenoide para o caso de equilíbrio* seria dada por:

$$\varphi = v .$$

Portanto, o resultado da consideração anterior pode ser expresso como:

Caso o período de oscilação da eletricidade no condutor fechado seja uma fração muito pequena do período estático de oscilação do solenoide, o solenoide vai se comportar como se houvesse uma corrente constante no condutor cuja intensidade estará para a intensidade máxima, i , das correntes devidas à oscilação elétrica assim como $1 : \sqrt{2}$.

Há então uma deflexão do solenoide que pode ser observada similarmente como se houvesse uma *corrente constante* no condutor fechado e se, a partir dessa deflexão observada (de acordo com a mesma lei dos galvanômetros) for calculada a intensidade da *corrente constante* que a causaria, então essa intensidade precisa apenas ser multiplicada por $\sqrt{2}$ para obter a *intensidade máxima, i* , das correntes ocorrendo na oscilação elétrica, ou multiplicada por $c/[2\mu\mathfrak{E}]$ para obter a *amplitude* da oscilação elétrica no condutor fechado, de onde, contudo, como já observado, $\mathfrak{E}$ precisa ser deixado indefinido como um coeficiente desconhecido e onde apenas $ci/[2\mu]$ pode ser expresso em *unidades absolutas de medida*. Dessa maneira é resolvido o problema de como *observar e determinar com um eletrodinamômetro a oscilação elétrica ocasionada em um condutor fechado por um ímã girando com uma velocidade conhecida*.

Contudo, a solução do problema foi limitada aqui ao caso no qual o multiplicador e solenoide pertencem a partes adjacentes do condutor fechado onde não há diferença perceptível na amplitude de oscilação e na fase de oscilação da eletricidade. Caso o multiplicador e solenoide pertencessem a duas partes do condutor fechado nas quais o período de oscilação da eletricidade fosse de fato o mesmo, mas onde os máximos de corrente i e i' , assim como as fases de oscilação λ e λ' , tivessem de ser distinguidas; então o ponto inicial do tempo t pode sempre ser escolhido de tal forma que a média aritmética $(\lambda + \lambda')/2$ das duas fases de oscilação seja igual a zero. As intensidades de corrente associadas à oscilação elétrica nessas duas partes do condutor fechado podem então ser representadas por

$$i \operatorname{sen} \frac{\pi}{\vartheta} (t + \lambda) \quad \text{e} \quad i' \operatorname{sen} \frac{\pi}{\vartheta} (t - \lambda) .$$

Observamos então, *em primeiro lugar*, a deflexão do solenoide, v , quando o multiplicador e o solenoide pertencem à primeira parte do condutor fechado. De acordo com as regras estabelecidas, a intensidade máxima, i , das correntes da oscilação elétrica nessa parte pode ser determinada a partir dessa observação, a saber,

$$i = \frac{1}{\pi a'} \sqrt{\frac{aS \tan v}{nn'}} .$$

Em segundo lugar, observamos a deflexão do solenoide, v' , quando o multiplicador e o solenoide pertencem à outra parte do condutor fechado e encontramos a intensidade máxima, i' , das correntes da oscilação elétrica existentes nessa parte [como sendo dada por:]

$$i' = \frac{1}{\pi a'} \sqrt{\frac{aS \tan v'}{nn'}} .$$

Finalmente, *em terceiro lugar*, observamos a deflexão do solenoide, v'' , quando o multiplicador pertence à primeira parte e o solenoide à última parte do condutor fechado. Então, a partir dessa terceira observação, também pode ser determinada a *diferença das fases de oscilação*, 2λ , nas duas partes do condutor fechado. De acordo com os detalhes anteriores temos então a *equação de movimento do solenoide*, a saber:

$$2 \frac{\pi^2 nn' a'^2}{a} \cdot ii' \sin(\mu t + \lambda) \sin(\mu t - \lambda) \cdot \cos \varphi - S \sin \varphi = K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} ,$$

para a qual, como vale

$$\sin(\mu t + \lambda) \sin(\mu t - \lambda) = \sin^2 \mu t - \sin^2 \lambda = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\mu t - 2 \sin^2 \lambda) ,$$

podemos escrever:

$$\frac{\pi^2 nn' a'^2}{a} \cdot ii' (1 - \cos 2\mu t - 2 \sin^2 \lambda) \cos \varphi - S \sin \varphi = K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} .$$

Seja

$$\varphi = u + \alpha ,$$

onde consideramos

$$\tan u = \frac{\pi^2 nn' a'^2}{aS} \cdot ii' .$$

Como temos após isso que $d^2 \varphi / dt^2 = d^2 \alpha / dt^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{S}{K} \left[(1 + (1 - \cos 2\mu t - 2 \sin^2 \lambda) \tan^2 u) \cos u \sin \alpha \right. \\ \left. + (\cos 2\mu t + 2 \sin^2 \lambda) \sin u \cos \alpha \right] = 0 . \end{aligned}$$

Com a suposição de que u e α têm pequenos valores, obtemos

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{S}{K} \left[(1 - 2 \sin^2 \lambda \sin^2 u) \frac{\alpha}{\cos u} + (\cos 2\mu t + 2 \sin^2 \lambda) \sin u \right] = 0 ,$$

ou, quando

$$\beta = (1 - 2 \sin^2 \lambda \sin^2 u) \alpha ,$$

e

$$S' = (1 - 2 \operatorname{sen}^2 \lambda \operatorname{sen}^2 u) S ,$$

[obtemos:]

$$\frac{d^2 \beta}{dt^2} + \frac{S'}{K} [\sec u \cdot \beta + (\cos 2\mu t + 2 \operatorname{sen}^2 \lambda) \operatorname{sen} u] = 0 .$$

Ao integrar obtemos disso:

$$\beta = \frac{\operatorname{sen} u}{4\mu^2 \frac{K}{S'} - \sec u} \cdot \cos 2\mu t - \operatorname{sen} 2u \operatorname{sen}^2 \lambda + A \operatorname{sen} (t - B) \sqrt{\frac{S' \sec u}{K}} ,$$

$$\alpha = \frac{S \operatorname{sen} u}{4\mu^2 K - S' \sec u} \cdot \cos 2\mu t - \frac{\operatorname{sen} 2u \cdot \operatorname{sen}^2 \lambda}{1 - 2 \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^2 \lambda} + A' \operatorname{sen} (t - B) \sqrt{\frac{S' \sec u}{K}} .$$

Se, como no caso anterior, a primeira e a última parte de α desaparecerem durante oscilações rápidas da eletricidade e após a estabilização do solenoide, então será obtido o valor constante da deflexão φ , denotado por v'' , ou seja

$$v'' = u - \frac{\operatorname{sen} 2u \cdot \operatorname{sen}^2 \lambda}{1 - 2 \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^2 \lambda} ,$$

obteremos, portanto,

$$\operatorname{sen}^2 \lambda = \frac{u - v''}{2 \operatorname{sen} u (\cos u + [u - v''] \operatorname{sen} u)} .$$

Como u já é conhecido a partir dos valores de i e i' determinados pelas observações anteriores por meio da equação

$$\tan u = \frac{\pi^2 n n' a'^2}{a} \cdot i i' ,$$

resolvemos o problema de terminar a diferença de fase 2λ das oscilações elétricas em dois locais diferentes do circuito fechado a partir da deflexão observada v'' .

18.25 Os Comutadores

Para alcançar o objetivo de uma comparação exata das *amplitudes e fases de oscilação* em dois locais de um condutor fechado, caso elas fossem apenas ligeiramente diferentes, a execução das observações descritas de acordo com o método descrito na Seção anterior demandaria uma exatidão e precisão muito detalhadas, dificilmente alcançáveis caso fossem executadas *separadamente e independentemente*. No entanto, a realização desse objetivo pode ser muito facilitada pelo fato de que essas observações são feitas *simultaneamente, em pares*, no mesmo condutor fechado, com a mesma rotação do ímã. Para esse objetivo, são necessários *dois eletrodinômetros construídos tão igualmente quanto possível*, com seus multiplicadores e solenoides fazendo parte do mesmo circuito fechado. A condição mais essencial que deve ser atendida por dois desses *eletrodinômetros* pertencentes ao mesmo circuito, se for necessário fazer um sistema de observações exatamente correspondentes com

eles, é que o *período de oscilação* dos solenoides suspensos de maneira bifilar, coincida exatamente, o que é mais facilmente alcançado se, na construção dos eletrodinamômetros, houver um meio de ajustar arbitrariamente a distância entre os fios de suspensão em um ou em ambos os solenoides, conforme necessário, de modo que o período de oscilação de um solenoide possa ser ajustado exatamente de acordo com o [período de oscilação] do outro. Caso os dois solenoides estejam em *repouso completo* antes de ser iniciada uma série de observações, então pode ser realizada uma série mais expandida de observações de tal forma que todas as *elongações observadas* dos dois solenoides colocados em movimento pelas oscilações elétricas no circuito sejam válidas aos pares para *instantes iguais*.

A concordância completa dos dois eletrodinamômetros é muito menos importante em outros aspectos do que no período de oscilação. Afinal de contas, é facilmente visto que se os dois eletrodinamômetros no circuito fechado são colocados em série muito próximos entre si, de tal forma que ambos pertençam à mesma parte do circuito na qual não existem diferenças perceptíveis das amplitudes e fases de oscilação, através de observações simultâneas e correspondentes em ambos os instrumentos, que podem ser continuadas por um longo tempo com o mesmo período de oscilação dos solenoides, uma comparação muito precisa de ambos os instrumentos pode ser obtida, após a qual todas as observações feitas com um instrumento podem ser reduzidas exatamente de forma que forneçam os mesmos resultados que teriam sido obtidos se este instrumento fosse totalmente igual ao outro.

Assumindo isso, os dois eletrodinamômetros, ajustados exatamente entre si, podem ser aplicados a dois locais bem distantes de um mesmo condutor e então, ao observar simultaneamente os dois instrumentos com uma oscilação elétrica no condutor, pode ser obtida uma comparação muito mais precisa das *amplitudes de oscilação* em dois locais do circuito do que seria possível caso um único eletrodinamômetro fosse aplicado e observado em dois locais em instantes diferentes, por meio do qual teria de ser assumido que a rotação do ímã fosse idêntica nos dois instantes, uma suposição que nunca pode ser realizada na prática e que pode ser completamente eliminada com essas observações correspondentes sincronizadas.

Além disso, após compará-los mutuamente entre si de forma precisa, os dois eletrodinamômetros também podem servir para colocar o *solenóide* de um eletrodinamômetro em uma outra parte distante do condutor fechado, enquanto que o *multiplicador* do mesmo instrumento permanece em seu local original, e então realizar observações correspondentes simultâneas por meio desse eletrodinamômetro e do outro, fixo em seu lugar, por meio das quais pode ser percebida qualquer *diferença de fase* da oscilação elétrica mesmo que seja muito pequena em dois locais muito distantes do condutor fechado, sem que seja necessário supor uma rotação idêntica do ímã em instantes diferentes.

Finalmente, é agora da maior importância para a exatidão e confiabilidade dos resultados obtidos dessas observações que as diferentes séries de observações, a saber, *em primeiro lugar*, aquelas para a comparação dos instrumentos e, *em segundo lugar*, aquelas para a comparação das amplitudes e fases de oscilação, sejam realizadas alternadamente em sucessão direta e repetida enquanto o ímã é girado continuamente de uma maneira bem uniforme, enquanto é necessário ser capaz de substituir o eletrodinamômetro inteiro ou uma de suas partes, por exemplo, o solenoide, *momentaneamente* entre duas observações, o que é facilmente realizado por meio de *comutadores* projetados adequadamente.

Esses *comutadores*, conforme utilizados nos experimentos a seguir, consistem em um número de células duplas, ou seja, células conectadas condutivamente em pares, às quais são conduzidas as extremidades das diversas partes do fio condutor que devem ser conectadas umas às outras. Essas células duplas podem então ser conectadas novamente aos pares entre

si, a saber, combinadas em conjunto de duas maneiras diferentes, ao distinguir a célula frontal da célula traseira. Um desses métodos de combinação aos pares das células duplas pode ser obtido de fato por meio de um sistema fixo de fios de conexão que são imersos simultaneamente em todas as células frontais; o outro método de combinação aos pares das células duplas pode ser obtido por um outro sistema de fios de conexão que são imersos simultaneamente em todas as células traseiras. E esses dois sistemas diferentes de fios de conexão podem se comportar como dois braços de uma alavanca, de modo que, quando um sistema entra, o outro sai, e vice-versa. Fica imediatamente claro que por meio de um tal comutador com *seis células duplas* uma parte do fio condutor pode ser desconectada de sua conexão com as duas outras partes do fio condutor, conectando assim as duas últimas partes entre si, e finalmente as duas partes conectadas até o momento podem ser desconectadas e a parte previamente desconectada pode ser inserida entre elas. Tudo isto é feito através de uma *mudança* momentânea, nomeadamente girando uma alavanca, em que um sistema de fios de ligação é imerso nas células frontais, enquanto o outro sistema é puxado para fora das células traseiras, ou vice-versa. — Além disso, são necessários comutadores com *quatro células duplas*, não durante as observações, mas antes. Antes de iniciar as observações, deve-se amortecer os solenoides dos dois eletrodinômetros, o que requer, *em primeiro lugar*, uma corrente que passa pelo multiplicador e pelo solenoide do dinamômetro a ser amortecido, e *em segundo lugar*, um comutador com quatro células duplas, duas das quais estão conectadas às extremidades do fio do multiplicador, [enquanto] as outras duas estão conectadas às extremidades do fio do solenoide. Por meio desse comutador o multiplicador pode ser conectado à vontade seja *em paralelo* ou *de maneira cruzada*. Com um tipo de conexão a corrente através do multiplicador exerce um torque *positivo* sobre o solenoide conduzindo a mesma corrente, com o outro tipo [de conexão exerce] um torque *negativo*, e o solenoide é amortecido se o primeiro tipo de conexão for estabelecido durante a *oscilação reversa* e o último [tipo] durante a *oscilação para frente*. Como o efeito de uma corrente que está presente simultaneamente no multiplicador e solenoide é completamente independente da *direção* da corrente, a *corrente alternada induzida no circuito pelo ímã giratório* pode ser utilizada no lugar de uma corrente constante, pelo que se torna possível permitir que este amortecimento dos dinamômetros, após o início da rotação do ímã, *preceda imediatamente as observações*.

Se agora todas essas operações, a saber, o amortecimento do dinamômetro e então todas as observações necessárias em locais diferentes do circuito para a comparação das amplitudes e fases da oscilação, enquanto o ímã gira continuamente, forem executadas sucessivamente sem interrupção, isso vai necessitar de cinco comutadores no total que têm de estar conectados com as várias partes do circuito de uma maneira sistemática a ser explicada mais detalhadamente [logo a seguir].

Para uma visão mais fácil, *em primeiro lugar*, os cinco comutadores e, *em segundo lugar*, as várias partes do circuito que serão ligadas aos comutadores devem ser designadas e distinguidas com precisão. A Figura 1, página 426,⁷⁰⁷ servirá então como uma visão geral de todo o arranjo e de todas as conexões em detalhes.

⁷⁰⁷Página 196 do Volume 4 das *Obras* de Weber, correspondente à página 426 dessa tradução.

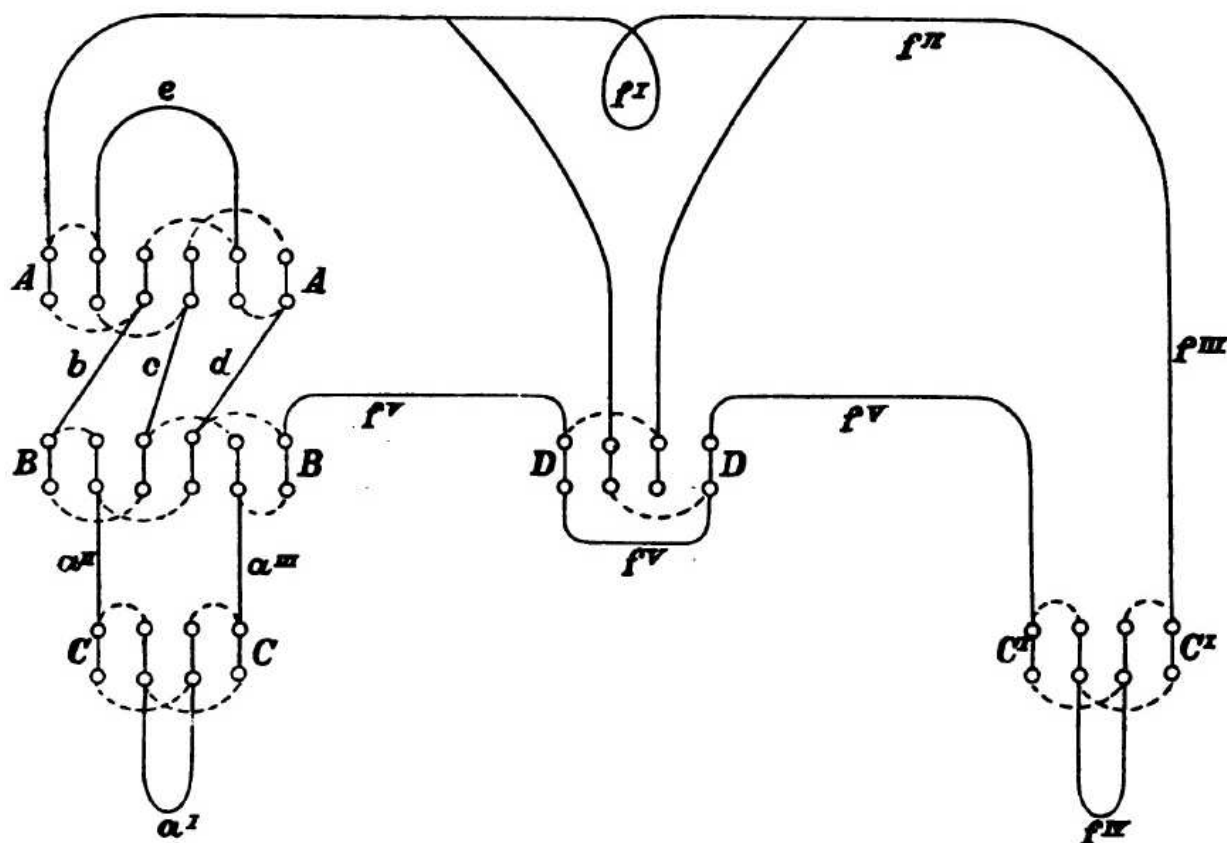


Fig. 1.

O primeiro comutador, denominado por A, é necessário para colocar um dos *eletrodinamômetros* (multiplicador e solenoide juntos) alternadamente em dois locais diferentes do fio condutor, ou para colocar o *solenoide* desse eletrodinamômetro em dois locais diferentes do fio condutor enquanto o multiplicador respectivo permanece em seu local. Isso necessita um comutador com seis células duplas, duas das quais são necessárias para as duas extremidades do eletrodinamômetro ou solenoide a ser movido, duas para as duas extremidades do fio condutor em um ponto de conexão e, finalmente, duas para as duas extremidades do fio condutor no outro ponto de conexão.

O segundo comutador, denominado por B, é necessário como um *comutador auxiliar*, cujo ajuste determina se o *multiplicador junto com o solenoide*, ou se o *solenoide* de um eletrodinamômetro sozinho, é movido alternadamente para dois pontos diferentes do fio condutor, alterando o comutador A, sendo que também é necessário incluir um comutador com seis células duplas.

O terceiro e quarto comutadores, a saber, C e C', respectivamente, são utilizados para amortecer os solenoides antes de começar as observações. Isso requer comutadores com quatro células duplas, duas das quais para as duas extremidades do fio do solenoide e duas para as [extremidades] do multiplicador associado incluindo o restante fio condutor, do qual, no entanto, deve ser retirada a parte pertencente ao outro eletrodinamômetro, de tal forma que o solenoide em repouso não seja perturbado enquanto o outro é amortecido.

Finalmente, o quinto comutador, denominado por D, é necessário para estabelecer a conexão entre os dinamômetros com os comutadores C e C', respectivamente, uma vez com um solenoide, outra vez com o outro [solenoide]. Para esse fim é necessário um comutador com quatro células duplas, duas das quais para as extremidades do fio condutor no ponto de

ligação do comutador, as outras duas para dois fios de conexão através dos quais a corrente pode ser passada para o fio condutor contornando um ou outro eletrodinamômetro.

As seguintes partes do *fio condutor fechado* precisam ser distinguidas, as quais podem ser conectadas de várias maneiras por meio dos comutadores.

O *primeiro fio*, denominado por a , é o *fio do multiplicador do primeiro dinamômetro* cujas extremidades levam a duas células duplas do comutador C , além de *dois curtos fios de conexão* das duas outras células duplas desse comutador [levando] a duas células duplas do comutador B . Essas várias partes do fio a , que sempre permanecem conectadas da mesma maneira durante as observações, serão distinguidas pelos símbolos a^I , a^{II} , a^{III} .

O *segundo fio*, denominado por b , é o *fio do solenoide do primeiro dinamômetro*, cujas extremidades são conectadas a uma célula dupla do comutador B e a uma célula dupla do comutador A .

O *terceiro* e *quarto* fios, denominados por c e d , são *dois curtos fios de conexão* das duas células duplas do comutador B [levando] a duas células duplas do comutador A , cuja resistência pode ser considerada como sendo extremamente pequena.

O *quinto fio*, denominado por e , é um entre dois pedaços muito longos de fio que são necessários durante as observações para desconectar os dois dinamômetros entre si ou para remover o solenoide do primeiro dinamômetro de seu multiplicador ao conectar as duas extremidades do fio de um dinamômetro com aquelas do outro, ou as duas extremidades do fio do multiplicador e as extremidades do fio do solenoide por um longo pedaço de fio. As duas extremidades do longo pedaço de fio, e , são conectadas a duas células duplas do comutador A .

O *sexto fio*, denominado por f , é todo o restante do fio condutor e contém o *anel indutor* do ímã giratório, além disso o *segundo longo pedaço de fio que acabou de ser mencionado*, então o *fio do segundo dinamômetro*, do solenoide assim como do multiplicador, e, finalmente, um *fio de conexão levando de volta ao primeiro fio*. Essas várias partes do fio f , que sempre permanecem conectadas da mesma forma durante as observações, serão distinguidas pelos símbolos f^I , f^{II} , f^{III} , f^{IV} , f^V . O comutador C' é ligado entre o fio f^{III} do solenoide e o fio f^{IV} do multiplicador do segundo dinamômetro, mas não é usado durante as observações. Existe também um ponto de conexão para o comutador D no fio de conexão f^V , que permanece fechado porque este comutador não é necessário durante as observações.

A Figura 1 foi feita para apresentar uma melhor ilustração onde as várias células duplas dos comutadores A , B , C , C' , D são representadas pelo símbolo



enquanto que uma das duas maneiras de conexão é indicada por arcos tracejados na parte superior, a outra por arcos tracejados na parte inferior.

Os comutadores C e C' , que mantêm o ajuste *superior*, e D , sendo excluídos do circuito por meio de um fio conectando a primeira e última célula após o solenoide ser amortecido, não são utilizados para deslocar o *primeiro dinamômetro*, consistindo no multiplicador a^I e no solenoide b , de um ponto de comutação para outro durante as observações, mas o deslocamento é efetuado simplesmente por uma mudança no ajuste do comutador A após as conexões, esquematizadas por meio dos arcos tracejados *na parte superior*, serem estabelecidas por meio do comutador B . Pois, com o ajuste do comutador A , esquematizado por meio dos arcos tracejados *na parte superior*, e com o ajuste mostrado do comutador B , completa-se um circuito fechado, onde os fios designados seguem um ao outro na seguinte ordem:

$abef dca;$

já com o ajuste do comutador A , esquematizado por meio dos arcos tracejados *na parte inferior*, completa-se um circuito fechado com a seguinte sequência de fios:

$abfdeca.$

Se dividirmos f em suas partes f^I , f^{II} , f^{III} , f^{IV} , f^V , e representarmos todo o circuito por meio dos quatro lados de um retângulo com seus lados maiores simbolizando os longos fios de conexão, denominados por e e f^{II} , então a Figura 2 vai esquematizar o *primeiro* caso e a Figura 3 o *último* caso.

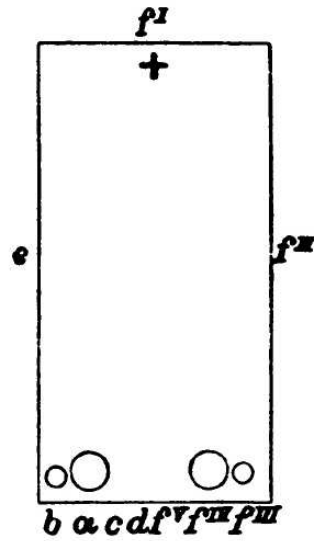


Fig. 2.

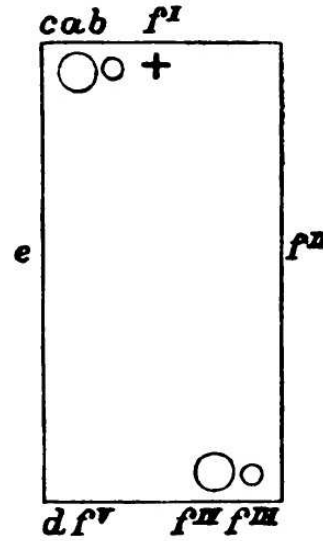


Fig. 3.

Além disso, o lugar do indutor f^I com o ímã giratório foi marcado com [o símbolo] $+$, os dois lugares dos multiplicadores a e f^{IV} com círculos grandes, e os dois lugares dos solenoides b e f^{III} com círculos pequenos. O indutor f^I com o ímã giratório está sempre no lado superior do retângulo, o dinamômetro $f^{III} f^{IV}$ está sempre no lado oposto inferior. O lugar do outro dinamômetro ab é alternado e, no *primeiro* caso, está situado no lado inferior ao lado do primeiro dinamômetro $f^{III} f^{IV}$ oposto ao indutor f^I , no *último* caso, no lado superior ao lado do indutor f^I oposto ao dinamômetro $f^{III} f^{IV}$. Ao mudar o comutador A , o dinamômetro ab é ligado ou em um ponto do circuito muito distante do indutor f^I , ou em um ponto muito próximo dele, como foi necessário para a *primeira série de observações*.

Da mesma forma, os comutadores C , C' e D não são usados para deslocar o *solenóide* b do primeiro dinamômetro de um lugar de conexão para outro, mas o deslocamento é realizado por uma mudança simples no ajuste do comutador A após terem sido estabelecidas as conexões, simbolizadas pelos arcos tracejados *na parte inferior*, por meio do comutador B . Pois, com o ajuste do comutador A , esquematizado por meio dos arcos tracejados *na parte superior*, completa-se um circuito fechado no qual os fios designados seguem um ao outro na seguinte ordem:

$adcbe fa;$

já com o ajuste do comutador A , esquematizado por meio dos arcos tracejados *na parte inferior*, completa-se um circuito fechado com a seguinte sequência de fios:

$$adecbf a.$$

O *primeiro* caso é representado pela Figura 4, o *último* caso pela Figura 5.

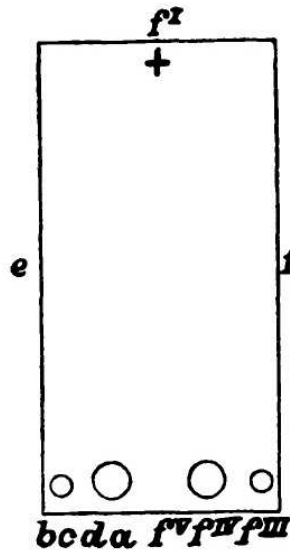


Fig. 4.

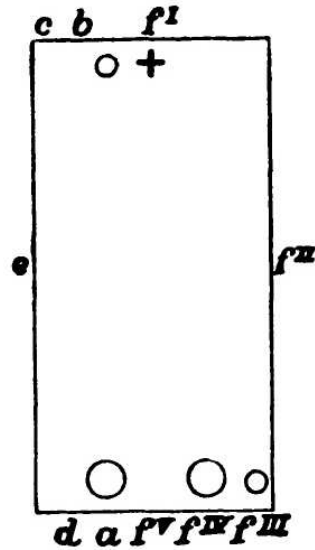


Fig. 5.

Vemos que os lugares do indutor f^I do dinamômetro $f^{III} f^{IV}$ e também do multiplicador a sempre permanecem inalterados e que apenas o lugar do solenoide b muda, o qual no *primeiro* caso está situado no lado inferior do retângulo ao lado do multiplicador a oposto ao indutor f^I , e no *último* caso ele está situado no lado superior do retângulo ao lado do indutor f^I oposto ao multiplicador a . O solenoide b é portanto ligado pela mudança do comutador A , às vezes em um ponto do circuito que está muito distante do multiplicador a , e às vezes em um ponto muito próximo dele, como era necessário para a *segunda série de observações*.

Para amortecer os solenoides antes de começar as observações, é removido o pedaço de fio f^V conectando a primeira e a quarta célula dupla do comutador D . Então, para amortecer o solenoide do *primeiro* dinamômetro b , é fornecido ao comutador D o ajuste indicado pelo arco tracejado na parte superior, por meio do qual são excluídos o fio f^{II} , juntamente com o segundo dinamômetro $f^{III} f^{IV}$, e onde, dependendo do ajuste do comutador C , é completado um circuito com a seguinte sequência de fios:

$$\begin{aligned} \text{com o ajuste superior de } C: & \quad a^I a^{II} b e f^I f^V a^{III} a^I, \\ \text{com o ajuste inferior de } C: & \quad a^I a^{III} c d f^V f^I e b a^{II} a^I, \end{aligned}$$

onde o ajuste superior foi assumido para os comutadores A e B . Vemos, portanto, que com a direção dada da corrente através do multiplicador a^I , a direção da corrente através do solenoide b com o ajuste *superior* de C é dada por $a^{II} b e$, enquanto que é dada por $e b a^{II}$ com o ajuste *inferior*, e é, portanto, oposta ao primeiro [caso], sendo que por meio disso nos dois casos torques iguais opostos são exercidos sobre o solenoide b , um dos quais pode sempre ser utilizado para *amortecer* o movimento do solenoide.

Para amortecer o solenoide do *segundo* dinamômetro f^{III} , é fornecido ao comutador D

o ajuste *inferior* simbolizado por um arco tracejado, por meio do qual são excluídos os fios $eba^{II}a^Ia^{III}$, aos quais pertence o primeiro dinamômetro, e onde, dependendo do ajuste do comutador C^I , é completado um circuito com a seguinte sequência de fios:

$$\begin{array}{ll} \text{com o ajuste } superior \text{ de } C^I: & f^{IV} f^V f^I f^{II} f^{III} f^I, \\ \text{com o ajuste } inferior \text{ de } C^I: & f^{IV} f^{III} f^{II} f^I f^V f^{IV}. \end{array}$$

Vemos que, dada a direção da corrente através do multiplicador f^{IV} , a direção da corrente através do solenoide f^{III} com o ajuste *superior* de C^I é dada por $f^{II} f^{III} f^{IV}$, enquanto que pelo ajuste *inferior*, ela é dada por $f^{IV} f^{III} f^{II}$, sendo, portanto, oposta [ao primeiro caso], onde nos dois casos são exercidos torques opostos sobre o solenoide f^{III} , um dos quais pode sempre ser utilizado para *amortecer* o movimento do solenoide.

Após amortecer os dois solenoides, o comutador D é aberto e o removido pedaço de fio f^V é inserido novamente para conectar a primeira e última células.

18.26 Os Longos Fios Condutores

Para o deslocamento do *solenoide* de um eletrodinamômetro ou para o deslocamento de *tudo o eletrodinamômetro* (solenoide e multiplicador) de um ponto de conexão do circuito fechado para outro, é uma questão de grande importância para as observações que os dois fios de conexão ligando os dois pontos de conexão entre si tenham comprimento quase igual e muito grande. Portanto, foram mencionadas explicitamente na Seção anterior duas partes do circuito fechado servindo a esse propósito, a saber, os fios e e f^{II} . No circuito usado nas próximas experiências cada um desses dois fios tinha um comprimento de 36 600 metros ou quase 5 milhas.

Considerando o grande comprimento de todo o circuito contendo esse dois longos fios, fica imediatamente claro que é praticamente impossível dar a eles o formato exato de um círculo como foi assumido por simplificação na Seção anterior ao desenvolver as leis. Porém, mesmo independente desse grande comprimento a ser associado com o condutor fechado, até mesmo o formato simples de um círculo não podia ser dado a um circuito que precisa conter um *anel indutor* para o ímã giratório e *dois dinamômetros* para as observações, já que têm de ser utilizados pedaços do fio condutor cujo formato e posição são determinados pelas regras válidas para a construção desses instrumentos.

Obviamente esse desvio prático inevitável do condutor fechado em relação à forma de um círculo tem uma influência nas oscilações elétricas no condutor causadas pelo ímã giratório e, portanto, a lei da dependência da amplitude das oscilações elétricas em relação à velocidade angular do ímã é essencialmente modificada. Se, contudo, não for uma questão de observações pelas quais a amplitude é determinada e medida exatamente, mas apenas daquelas [observações] para comparar as amplitudes em dois locais diferentes do condutor (ou para determinar apenas a diferença de fase nos dois lugares), serão então de menor importância os desvios em relação ao formato circular. Pois se, de acordo com as leis desenvolvidas na Seção anterior, não houver realmente nenhuma diferença perceptível na amplitude e na fase da oscilação em dois pontos de um *condutor circular* que estejam distantes um do outro, mesmo em velocidades angulares muito altas, parece não haver razão para supor que tal diferença seja causada por um mero desvio do condutor em relação à forma circular. Por outro lado, se as observações mostrarem que em um condutor fechado, que tenha *qualquer forma completamente diferente do formato circular*, não há diferenças perceptíveis nas amplitudes

e fases de oscilação, será ainda mais permissível considerar esse resultado como geral, [em particular,] também para diferenças nas amplitudes e fases de oscilação sendo imperceptíveis para um formato perfeitamente circular.

É de importância especial para esses dois fios de 5 milhas formando parte de um condutor fechado, se não forem utilizados fios telegráficos, mas se esses longos fios forem colocados em vez disso em um laboratório fechado onde são feitas as observações, como é necessário para controlar completamente todas as condições externas essenciais das observações, que esses longos fios sejam enrolados em *bobinas*⁷⁰⁸ para economizar espaço. Mas agora está claro que quando as correntes elétricas surgem repentinamente e desaparecem repentinamente novamente, como nas oscilações elétricas causadas pela rápida rotação de um ímã, todas as voltas do fio condutor enrolado em uma bobina devem exercer mutuamente forças eletromotrizes de acordo com as leis de *indução voltaica*⁷⁰⁹ que se somam produzindo uma grande *força de amortecimento*, reduzindo essencialmente dessa maneira a amplitude das oscilações elétricas de tal forma que as mesmas não poderiam mais ser observadas em velocidades angulares mais altas do ímã, mesmo com os melhores dinamômetros. Portanto, para realizar as observações é extremamente importante encontrar um método para enrolar os longos fios em *bobinas* de tal maneira que seja evitada uma *indução mútua entre os enrolamentos do fio*.

Essa finalidade pode ser alcançada da maneira mais simples e perfeita, se os fios estiverem bem trançados,⁷¹⁰ dobrando previamente as duas *metades* de cada peça a ser enrolada em *uma bobina* e unindo-as para formar um *fio duplo*. A melhor maneira de unir as duas metades, que já estão cobertas e isoladas uma da outra por essa cobertura dupla, é *cobri-las novamente com seda ou algodão*. Então, conectadas em *uma das extremidades*, as duas metades formam um condutor através do qual uma corrente entrando pela outra extremidade aberta e atravessando uma das metades do fio é levada de volta à outra extremidade atravessando a outra metade do fio *praticamente na mesma trajetória*. A extremidade na qual as duas metades do fio estão conectadas uma à outra é então presa à bobina destinada ao enrolamento e, em seguida, todo o *fio duplo é enrolado nessa bobina*, de modo que a extremidade na qual as duas metades do fio permaneceram desconectadas fique livremente na parte superior e todo o fio duplo com essas extremidades desconectadas das duas metades do fio possa ser conectado ao restante do circuito.

Dessa maneira todos os elementos de corrente pertencendo a um tal fio duplo são ordenados *aos pares*, de tal forma que apenas elementos de corrente igualmente opostas são vizinhos próximos. É claro que, mesmo com as mais rápidas variações de intensidade, tais pares de elementos de corrente não podem exercer uma força eletromotriz em qualquer outro elemento mais distante do condutor e que, portanto, esse fio duplo, de qualquer forma que ele seja enrolado ao trançá-lo na bobina, não está sujeito a qualquer força de amortecimento como consequência desses enrolamentos que, de outra maneira, as oscilações elétricas teriam sofrido pelo ímã giratório, como teria ocorrido caso o fio tivesse sido simplesmente enrolado de forma unidirecional ao longo de todo o seu comprimento.

Sem esse método as rápidas oscilações elétricas em tal longo circuito condutor seriam infinitamente fracas, mas não devido à grande resistência do circuito, mas sim devido à influência mútua entre todos os enrolamentos, tornando praticamente impossível a observação delas.

⁷⁰⁸Em alemão: *Rollen*. Essa palavra pode ser traduzida como bobinas, rolos ou carretéis. Ver ainda a Nota de rodapé 387 na página 225.

⁷⁰⁹Ver a Nota de rodapé 341 na página 200.

⁷¹⁰Em alemão: *Wenn die Drähte gut umspinnen sind*. Um fio trançado significa aqui seda ou algodão trançado ao redor do fio condutor para fins de isolamento.

Não há necessidade de observar que o mesmo método também pode encontrar aplicação útil em outros casos onde existam circunstâncias semelhantes e sob os quais o mesmo método alcançará resultados similares.

Isso é válido, em particular, para *telégrafos elétricos* de longa distância, onde com o propósito de [enviar] sinais telegráficos, correntes elétricas em um circuito muito longo surgem e desaparecem muito rapidamente. O fato é que as forças de atenuação exercidas pela eletricidade nos elementos individuais do fio, e sofridas especialmente sob a influência de um condutor envolvente, criam grandes obstáculos devido a atrasos na sinalização, o que se teme que possa frustrar a expansão das linhas telegráficas submarinas, em particular, por exemplo, da Europa para a América, além das dificuldades técnicas associadas à instalação e à manutenção delas. Dessa maneira entram em cena não apenas as forças exercidas mutuamente entre as eletricidades nos vários elementos de fio, mas também aquelas forças exercidas pela eletricidade sobre *condutores vizinhos* e que ela sofre deles, e até mesmo as forças exercidas pelo *magnetismo da Terra* e por sua variabilidade sobre a eletricidade nos vários elementos do fio. Todos os impedimentos que surgem disso para o rápido processamento de sinais no caso de uma grande extensão do circuito podem ser totalmente ou quase totalmente evitadas ao utilizar o método anterior, sempre colocando dois elementos de fio muito próximos de tal forma que a corrente e carga elétrica sejam praticamente *iguais mas opostas*. Portanto, é claro que, como uma regra para a ampliação da linha telegráfica, um cabo tenha de ser projetado de forma a ter um fio com corrente passando em uma direção muito próximo de um segundo fio levando a corrente de volta onde, portanto, o retorno da corrente pela Terra tem de ser abandonado. Que o isolamento entre fios muito próximos não causa dificuldades parece ser mostrado pelo exemplo de nosso circuito onde os dois fios enrolados bem próximos por meio de um trançamento comum estão isolados entre si apenas ao cobrir cada fio individual com seda antes de integração entre eles. A espessura da camada isolante era menor do que 1/10 de milímetro e, ainda assim, o isolamento podia ser considerado perfeito para correntes tão fortes que o comprimento da escala mal era suficiente para a observação das deflexões do dinamômetro causadas por elas, como será visto nas observações que serão descritas mais adiante.

18.27 Observações para Comparar a Amplitude das Oscilações Elétricas em Dois Lugares Diferentes de um Longo Circuito Fechado

De acordo com o arranjo discutido nas Seções anteriores, foram realizadas agora quatro séries de observações, todas em um único dia, 28 de setembro de 1860, *alternadamente* para comparar a *amplitude* e para determinar a *diferença de fase* em dois lugares distantes do longo circuito fechado anterior enquanto eram excitadas nele oscilações elétricas produzidas por um ímã girando rapidamente. Contudo, embora não tenham sido realizadas em sucessão imediata, as duas séries de observações para comparar a *amplitude* serão *ambas* consideradas *conjuntamente* nessa Seção, da mesma forma que as *duas* séries de observações para determinar a *diferença de fase* [serão consideradas em conjunto] na próxima Seção.

As observações correspondentes nos dois eletrodinômetros foram feitas pelo Sr. Schering e por mim, enquanto que o Sr. Klinkerfues e o Sr. H. Weber realizaram a rotação

uniforme do ímã na bobina indutora e determinaram sua velocidade.⁷¹¹ Essa velocidade foi mantida tão próxima quanto possível de 260 voltas por segundo, das quais ocorreram apenas pequenos desvios, que se refletiram em pequenas flutuações nas deflexões dos solenoides de ambos os dinamômetros.

O *período de oscilação dos solenoides* de ambos os dinamômetros foi regulado de forma a ser o mesmo e quase exatamente 15 segundos. Contudo, ao fazer isso a sensibilidade dos dois instrumentos era muito diferente ao usar de fato bobinas iguais para os dois solenoides, mas tendo espessuras de fio diferentes e, portanto, números diferentes de enrolamentos. O dinamômetro *mais sensível*, aquele com o solenoide tendo um número maior de enrolamentos, foi usado para aquelas observações por meio das quais a amplitude de oscilação foi determinada alternadamente em dois locais diferentes do circuito condutor, enquanto que o dinamômetro *menos sensível* serviu para as observações correspondentes, a fim de levar em conta a influência de pequenas flutuações na velocidade angular, para o que deveria permanecer sempre estacionário em um determinado ponto do fio condutor.

Primeira Série

De acordo com o arranjo descrito na Seção 18.24, a primeira série de observações foi efetuada para comparar a *intensidade* ou amplitude de oscilação das oscilações elétricas em dois locais diferentes do longo circuito fechado.

Todas as *observações* são expressas em divisões de uma escala milimétrica, cuja imagem foi observada com um telescópio em um espelho plano acoplado ao solenoide a uma distância de 2100 divisões dele, da maneira usual para magnetômetros.⁷¹² Para poder utilizar toda a extensão da escala para observações, uma vez que o solenoide só era desviado para um mesmo lado da sua posição de repouso,⁷¹³ o telescópio de leitura e as suas escalas foram colocados em frente aos espelhos de tal forma de forma que a posição de repouso dos solenoides quando o ímã estivesse parado ou com um circuito aberto, não correspondia, como sempre, ao centro da escala acima do telescópio, mas a um ponto próximo ao início da escala.

Durante toda a série de observações o *ímã* foi mantido em *rotação* uniforme contínua. Entre os conjuntos de observação individuais, diferenciados por números, o *comutador A* descrito na Seção 18.25 foi comutado; ou seja, na primeira vez que esteve aberto anteriormente, foi fechado e, depois disso, as configurações *superior* e *inferior* foram simplesmente trocadas. O *comutador B* estava continuamente fechado na *configuração superior*, assim como os dois *comutadores* de quatro células *C* e *C'*, que tinham sido usados para amortecer os solenoides antes do início das observações, enquanto o comutador *D* de 4 células foi aberto e completamente eliminado do circuito ao reinserir o fio que ligava a primeira e a quarta células, que tinha sido removido durante o amortecimento dos dois solenoides.

Antes de começar as observações os solenoides dos dois dinamômetros, como explicado na Seção 18.25, foram amortecidos tanto quanto possível. — Como a configuração dos três comutadores *B*, *C*, *C'* foi mantida fixa durante toda a série de observações, é suficiente anotar nos cabeçalhos dos vários conjuntos dessa série de observações se o circuito estava aberto ou fechado e, nesse último caso, se foi utilizada a *configuração superior* ou *inferior* do comutador *A* de acordo com o esquema da Seção 18.25. — Com o *circuito fechado*,

⁷¹¹Ernst Christian Julius Schering (1824-1897), matemático alemão; Ernst Friedrich Wilhelm Klinkerfues (1827-1884), astrônomo e meteorologista alemão; e Heinrich Weber (1839-1928), físico alemão e sobrinho de Wilhelm Weber, filho de seu irmão Ernst Heinrich Weber (1795-1878).

⁷¹²Ver a Nota de rodapé 22 na página 18.

⁷¹³Em alemão: *Ruhelage*. Essa expressão pode ser traduzida como posição ou estado de repouso.

quando os solenoides estavam em maior movimento, foram escolhidas as *segundas médias* dos alongamentos observados um após o outro para determinar a *posição de repouso*.⁷¹⁴

Configuração Superior do Comutador B							
Conjunto número 1, circuito aberto.				Conjunto número 2, circuito fechado. Configuração superior do comutador A.			
Dinamômetro Número 1		Dinamômetro Número 2		Dinamômetro Número 1		Dinamômetro Número 2	
Elongações observadas	Posição de repouso	Elongações observadas	Posição de repouso	Elongações observadas	Posição de repouso	Elongações observadas	Posição de repouso
52,9	34,55	+ 11,4	−0,30	901,7		638,2	
16,2		−12,0	854,7	876,55		606,8	
	34,40		−0,40				
52,6	34,60	+ 11,2	−0,35	895,1	877,93	633,7	622,35
16,6		−11,9		866,8		880,82	
	34,55		−0,45				
52,5	34,70	+11,0	−0,20	894,6	882,70	634,0	625,83
16,9		−11,4		874,8			
Média 34,56		Média −0,34		Média 879,50		Média 623,52	
Conjunto número 3, circuito fechado. Configuração inferior do comutador A.				Conjunto número 4, circuito fechado. Configuração superior do comutador A.			
843,1	872,35	596,2	617,95	811,4	880,90	574,2	624,65
908,8		644,9		941,8		668,5	
828,7	870,45	585,8	616,60	828,6	890,82	587,4	631,87
915,6	873,72	649,9	619,10	964,3	887,95	684,2	629,68
835,0	879,35	590,8	623,20	794,6	872,93	562,9	619,13
931,8		661,3		838,2		666,5	
Média 873,97		Média 619,21		Média 883,15		Média 626,33	
Conjunto número 5, circuito fechado. Configuração inferior do comutador A.				Conjunto número 6, circuito fechado. Configura superior do comutador A.			
796,7	885,60	564,7	628,20	748,3	877,80	531,5	622,93
978,0		694,1		1007,5		714,5	
789,7	887,47	559,9	629,45	747,9	879,30	531,2	623,97
992,5	884,35	704,1	627,15	1013,9	880,67	719,0	624,97
762,7	876,35	540,5	621,37	747,0	876,65	530,7	622,13
987,5		700,4		998,7		708,1	
Média 883,44		Média 626,55		Média 878,61		Média 623,50	
Conjunto número 7, circuito fechado. Configuração inferior do comutador A.							
Dinamômetro Número 1				Dinamômetro Número 2			
Elongações observadas		Posição de repouso		Elongações observadas		Posição de repouso	
742,8		880,28		527,6		624,38	
1011,1				716,2			
756,1		883,47		537,5		626,77	
1010,6		882,45		715,9		626,00	
752,5		879,43		534,7		623,80	
1002,1				709,9			
Média 881,41				Média 625,24			

Se compararmos as deflexões correspondentes dos dois dinamômetros observados simultaneamente, o que se obtém ao subtrair o estado de repouso observado com circuito *aberto*

⁷¹⁴Em alemão: *Ruhestands*. Essa expressão pode ser traduzida como posição ou estado de repouso.

(conjunto número 1) daquele observado com circuito *fechado*, e nos restringirmos dessa maneira ao primeiro daqueles casos, conjuntos números 2, 4, 6, onde os dois dinamômetros foram colocados simetricamente e bem próximos, e separados de cada lado do indutor do ímã giratório por meio dos longos fios condutores, portanto, onde a amplitude de oscilação e a fase deveriam sempre ser iguais nos dois dinamômetros; obteremos a *razão de suas sensibilidades* a partir da razão das deflexões observadas pelos dois dinamômetros. Portanto, obtemos a sensibilidade do *primeiro* dinamômetro expressa em partes daquela [sensibilidade] do *segundo* dinamômetro:

a partir dos conjuntos número 1 e 2: $844,94/623,86 = 1,3544$,
a partir dos conjuntos número 1 e 4: $848,59/626,67 = 1,3541$,
a partir dos conjuntos número 1 e 6: $844,05/623,84 = 1,3530$,

portanto, a média da *razão entre a sensibilidade do dinamômetro número 1 e a do dinamômetro número 2* é

$$1,3538 : 1 .$$

Após essa comparação das sensibilidades dos dois dinamômetros entre si, as deflexões observadas de um dinamômetro ligado alternadamente em dois locais diferentes do circuito podem ser reduzidas ao utilizar as deflexões observadas do outro dinamômetro, que é sempre mantido fixo no mesmo lugar do circuito, como se as deflexões tivessem sido observadas *simultaneamente* em dois lugares do circuito *por meio de dinamômetros idênticos*. A saber, a partir das deflexões correspondentes do dinamômetro auxiliar é agora possível calcular as deflexões do dinamômetro principal como teria sido observado se o dinamômetro principal tivesse ficado em seu lugar original, para o qual aplica-se a comparação de sua sensibilidade com a do outro dinamômetro, e esta *deflexão calculada para a primeira posição* do dinamômetro principal no circuito pode então ser comparada com a *deflexão realmente observada na segunda posição* do dinamômetro principal.

Isto é, se a razão obtida de 1,3538 for multiplicada pelas deflexões observadas do dinamômetro auxiliar no 3º, 5º e 7º conjuntos, após subtrair o estado de repouso encontrado no conjunto número 1,

619,55, 626,89, 625,58 ,

obteremos as deflexões que teriam sido observadas no dinamômetro principal se esse último tivesse mantido seu lugar no circuito como foi o caso no 2º, 4º e 6º conjuntos.

A próxima Tabela contém os valores das *deflexões calculadas na segunda* coluna; a *terceira* coluna contém as *deflexões de fato observadas na posição II do dinamômetro principal* para as quais eram válidas essas *deflexões calculadas do dinamômetro principal na posição I*; finalmente, a *quarta* coluna lista as diferenças entre ambas.

Conjunto	Deflexão calculada para a posição I	Deflexão observada para a posição II	Diferença
3.	838,75	839,41	+0,66
5.	848,69	848,88	+0,19
7.	846,92	846,85	−0,07
Média	844,78	845,05	+0,26

Essas deflexões, observadas em unidades da escala, divididas pela distância de 2100 unidades da escala entre o espelho e a escala, fornecem agora as tangentes do dobro dos ângulos designados por v e v' na Seção 18.24. Temos, portanto, para a posição I:

$$\tan v = \tan \frac{1}{2} \arctan \frac{844,78}{2100} = 0,193\,601 ,$$

e para a posição II:

$$\tan v' = \tan \frac{1}{2} \arctan \frac{845,05}{2100} = 0,193\,656 .$$

Agora, de acordo com a Seção 18.24, os quadrados das intensidades i e i' , ou *os quadrados das amplitudes das oscilações elétricas* nas duas posições comparadas I e II, para onde o dinamômetro principal foi deslocado através do ajuste superior e inferior do comutador A , se comportam como

$$i^2 : i'^2 = \tan v : \tan v' ;$$

obtemos, portanto,

$$i' = 1,000\,142 \cdot i .$$

Contudo, a posição I no circuito está afastada quase 5 milhas do indutor no qual se encontra o ímã giratório, enquanto que a posição II é muito próxima do indutor. Parece que isso significa de fato que a amplitude das oscilações elétricas produzidas pelo ímã giratório em todo o circuito são um pouco mais fracas a uma grande distância do indutor onde começou a excitação, a saber, na posição denominada por I, do que muito próximo do indutor, na posição II. Porém a diferença encontrada é extremamente pequena, de tal forma que não pode ser estabelecida com segurança até mesmo por meio das observações mais exatas, ela é de fato menor do que 1/7000 da amplitude de oscilação total correspondendo à deflexão completa do dinamômetro. Essas observações mostram de fato que nas duas posições do circuito à distância mútua de quase 5 milhas *praticamente não pode ser detectada uma diferença das amplitudes das oscilações elétricas* até mesmo pelas observações mais exatas.

No que diz respeito à *exatidão das observações*, é de fato claro que sua determinação mais precisa ainda não pode ser obtida de tão poucas repetições como nessa primeira série de observações; contudo, como nenhum desvio da média ultrapassa 0,40 parte da escala, podemos considerar como confiável essa média obtida de todas as 3 observações, o que corresponde a uma parte em 845 da amplitude de oscilação total. — Tal precisão nas medições de intensidade das *oscilações elétricas* excede a precisão que foi alcançada anteriormente nas medições de intensidade de quase todas as outras oscilações. Na *acústica* e na *óptica* a intensidade do som e da luz depende da amplitude de oscilação e é conhecido o quão distante as medições de intensidade do som e da luz estão dessa precisão. Apenas as observações da amplitude de oscilação de uma agulha magnética por meio de uma balança de torção com suspensão unifilar ou bifilar pelo método de Gauss permite uma precisão igual ou, sob condições favoráveis, uma precisão um pouco maior.⁷¹⁵ — É relevante observar que a mesma precisão por meio do mesmo indutor e dos mesmos dinamômetros que serviram para a produção e observação das oscilações elétricas, sendo que ocorreram 520 delas em cada segundo, teriam sido facilmente obtidas da mesma maneira em um circuito com quase 10 milhas de comprimento se

⁷¹⁵Ver [Web38a] com traduções para o inglês em [Web41a], [Web66a] e [Web21g]; e [Web94a].

a frequência das oscilações elétricas tivessem aumentado a mais do que 1000 por segundo e o comprimento do circuito a mais do que 30 milhas sem ter de reforçar o fio do circuito alongado; pois a oscilação elétrica e sua ação foram enfraquecidas deliberadamente durante as experiências anteriores; a saber, *em primeiro lugar*, ao excluir metade do indutor sobre o qual atuou o ímã giratório; *em segundo lugar*, aumentando a força diretriz estática dos solenoides dos dois dinamômetros; de outra maneira o comprimento da escala não teria sido suficiente para realizar as observações. As ações observadas teriam sido igualmente fortes em um circuito muito mais longo ao utilizar todo o indutor e diminuindo a força diretriz estática dos solenoides, sendo que por esse meio a duração de suas oscilações teria sido aumentada de 15 para 20 segundos.

Para eliminar qualquer dúvida de que essa precisão foi apenas aparente e que a coincidência das observações repetidas apenas 3 vezes na série anterior de observações foi apenas accidental, foi realizada finalmente uma *segunda série* de observações por meio do mesmo arranjo experimental nesse mesmo dia, sendo os resultados compilados da mesma maneira para comparação com a série anterior na próxima Tabela.

Segunda Série

As observações que precederam a primeira série também são válidas para a segunda série.

Configuração Superior do Comutador B							
Conjunto número 1, circuito aberto.				Conjunto número 2, circuito fechado. Configuração superior do comutador A.			
Dinamômetro Número 1		Dinamômetro Número 2		Dinamômetro Número 1		Dinamômetro Número 2	
Elongações observadas	Posição de repouso	Elongações observadas	Posição de repouso	Elongações observadas	Posição de repouso	Elongações observadas	Posição de repouso
30,3	32,35	−8, 5	−1, 65	858,7	879,00	615,7	623,83
34,4		+5, 2	−1, 55	904,2		636,1	
30,3	32,35	−8, 3	−1, 65	848,9	879,68	607,4	624,47
34,1	32,20	+5, 0		916,7	880,52	647,0	625,15
30,3	32,20	−8, 0	−1, 50	839,8	876,00	599,2	621,90
34,2	32,25	−1, 55		907,7		642,2	
Média 32,27		Média −1, 58		Média 878,80		Média 623,84	
Conjunto número 3, circuito fechado. Configuração inferior do comutador A.				Conjunto número 4, circuito fechado. Configuração superior do comutador A.			
837,0	880,60	596,0	624,70	792,5	881,38	554,0	623,30
918,8		649,0		964,0		683,1	
847,8		604,8		805,0		573,0	
927,9		656,1		964,9		683,2	
823,2		586,0		788,0		561,5	
945,7		669,4		976,5		690,8	
Média 881,97		Média 625,87		Média 881,54		Média 625,21	
Conjunto número 5, circuito fechado. Configuração inferior do comutador A.				Conjunto número 6, circuito fechado. Configuração superior do comutador A.			
794,0	875,90	566,4	621,10	783,2	877,62	559,9	623,15
962,4		678,5		961,1		679,0	
784,8		561,0		805,1		574,7	
974,9		687,2		930,8		657,3	
785,1		560,4		809,7		579,1	
952,3		672,1		939,9		663,2	
Média 876,73		Média 621,75		Média 873,69		Média 620,34	
Conjunto número 7, circuito fechado. Configuração inferior do comutador A.							
Dinamômetro Número 1				Dinamômetro Número 2			
Elongações observadas		Posição de repouso		Elongações observadas		Posição de repouso	
783,5		878,25		560,8		623,13	
969,6				682,9			
790,3				565,9			
976,7				688,0			
785,4				562,4			
981,0				691,0			
Média 881,09				Média 625,21			

Para a razão da sensibilidade do primeiro dinamômetro, expressa em partes [da sensibilidade] do segundo [dinamômetro], os seguintes valores são obtidos a partir das observações desta segunda série:

- a partir dos conjuntos número 1 e 2: $846,53/625,42 = 1,3535$,
- a partir dos conjuntos número 1 e 4: $849,27/626,79 = 1,3549$,
- a partir dos conjuntos número 1 e 6: $841,42/621,92 = 1,3529$,

portanto, em média, a razão entre a sensibilidade do primeiro dinamômetro e a do segundo é:

$$1,3538 : 1 .$$

Se Multiplicarmos agora por essa razão 1,3538 as deflexões observadas do segundo dinamômetro que ficou sempre fixo em sua posição no circuito durante todas as observações, ou seja, as deflexões resultando da diferença entre as posições de repouso com circuito aberto no conjunto número 1 e com circuito fechado nos conjuntos números 3, 5 e 7:

$$627,45, \quad 623,33, \quad 626,79 ,$$

os produtos

$$849,45, \quad 843,86, \quad 848,55 ,$$

forneirão os valores das deflexões que teriam sido observadas no primeiro dinamômetro se esse último tivesse mantido sua posição como nos conjuntos números 2, 4 e 6, enquanto que as deflexões das posições de repouso nos conjuntos números 3, 5 e 7 corresponderão à posição modificada do dinamômetro. A próxima Tabela lista as deflexões a partir da posição inicial juntamente com as deflexões correspondentes do primeiro dinamômetro na posição modificada.

Conjunto	Deflexão calculada para a posição I	Deflexão observada para a posição II	Diferença
3.	849,45	849,70	+0,25
5.	843,86	844,46	+0,60
7.	848,55	848,82	+0,27
Média	847,29	847,66	+0,37

Obtemos a partir disso, assim como ocorreu com a primeira série de observações, a comparação da amplitude de oscilação ou da intensidade de corrente na posição I e II, [respectivamente]. Para a posição I:

$$\tan v = \tan \frac{1}{2} \arctan \frac{847,29}{2100} = 0,194134 ,$$

e para a posição II:

$$\tan v' = \tan \frac{1}{2} \arctan \frac{847,66}{2100} = 0,194212 ,$$

portanto, como de acordo com a Seção 18.24 [temos]

$$i^2 : i'^2 = \tan v : \tan v' ,$$

segue que

$$i' = 1,000201 \cdot i .$$

Assim a diferença entre a amplitude de oscilação nas duas posições, uma das quais estava afastada quase 5 milhas do indutor do ímã giratório enquanto que a outra estava próxima do indutor, corresponde apenas a 1/5000 da amplitude total de oscilação correspondendo à

deflexão completa do dinamômetro. Fica claro que também essa diferença é muito pequena para ser afirmada com segurança mesmo para as observações mais exatas e, portanto, essa segunda série também vai confirmar que *praticamente não há diferença das amplitudes das oscilações elétricas que possa ser estabelecida com segurança mesmo para duas posições que estejam afastadas por quase 5 milhas.*

18.28 Observações para Determinar a Diferença de Fase das Oscilações Elétricas em Dois Lugares Diferentes de um Longo Circuito Fechado

Baseado em um arranjo experimental igual ao descrito para as duas séries de observações anteriores, foi realizada uma *terceira* série de observações, contudo, não para comparar as amplitudes de oscilação, mas para determinar a *diferença de fase* das oscilações elétricas em dois locais diferentes de um longo circuito. Com essa finalidade, assim como no caso das séries de observações anteriores, foi fechado o comutador *A* descrito na Seção 18.25, se estivesse previamente aberto, entre os vários conjuntos de observação distinguidos por um número, ou ele foi aberto caso estivesse fechado anteriormente, ou seja, foi trocada entre si a configuração *superior* e *inferior*. Por outro lado, o comutador *B* foi mantido fechado, mas na *configuração inferior* (em vez de ser mantido na configura superior como antes). Finalmente, os *dois comutadores C e C'*, equipados cada um com quatro células, utilizados para amortecer os solenoides antes do início das observações, foram novamente mantidos fechados e colocados exatamente como antes durante as observações. Após amortecer os solenoides, o comutador *D* foi aberto antes de começar as observações e excluído completamente do circuito por meio de um fio conectando sua primeira e última célula.

Terceira Série

Configuração Inferior do Comutador B							
Conjunto número 1, circuito aberto.				Conjunto número 2, circuito fechado. Configuração superior do comutador A.			
Dinamômetro Número 1		Dinamômetro Número 2		Dinamômetro Número 1		Dinamômetro Número 2	
Elongações observadas	Posição de repouso	Elongações observadas	Posição de repouso	Elongações observadas	Posição de repouso	Elongações observadas	Posição de repouso
33,9		−3,5		849,5		995,0	
	35,95		−3,70				
38,0		−3,9		917,7	883,25	263,1	626,67
	35,95		−3,65				
33,9		−3,4		848,1	889,37	985,5	630,87
	35,95		−3,20				
38,0		−3,0		943,6	889,15	289,4	629,60
	35,95		−3,40				
33,9		−3,8		821,3	875,85	954,1	619,50
	36,00		−3,45				
38,1		−3,1		917,2		280,4	
Média 35,96		Média −3,48		Média 884,41		Média 626,66	
Conjunto número 3, circuito fechado. Configuração inferior do comutador A.				Conjunto número 4, circuito fechado. Configuração superior do comutador A.			
812,8		940,0		943,2		363,1	
956,7	882,55	317,6	625,27	809,5	875,45	873,8	619,30
804,0	876,10	925,9	620,57	939,6	873,17	366,5	617,70
939,7	873,35	312,9	618,70	804,0	875,20	864,0	618,62
810,0	878,10	923,1	622,32	953,2	880,35	380,0	622,13
952,7		330,2		811,0		864,5	
Média 877,52		Média 621,72		Média 876,04		Média 619,44	
Conjunto número 5, circuito fechado. Configuração inferior do comutador A.				Conjunto número 6, circuito fechado. Configuração superior do comutador A.			
925,7		366,2		919,8		369,0	
836,3	881,82	879,8	625,35	845,1	886,12	881,2	627,52
929,0	877,45	375,6	622,35	934,5	885,68	378,7	627,53
815,5	875,10	858,4	618,15	828,6	880,35	871,5	624,62
940,4	879,10	380,2	621,40	929,7	878,32	376,8	622,53
820,1		866,8		825,3		865,0	
Média 878,37		Média 621,81		Média 882,62		Média 625,55	
Conjunto número 7, circuito fechado. Configuração inferior do comutador A.							
Dinamômetro Número 1				Dinamômetro Número 2			
Elongações observadas		Posição de repouso		Elongações observadas		Posição de repouso	
898,0				367,5			
850,5		875,77		870,9		619,52	
904,1		872,63		368,8		619,13	
831,8		870,10		868,0		618,45	
912,7		868,52		369,0		615,77	
816,9				857,1			
Média 871,76				Média 618,22			

Para a razão da sensibilidade do primeiro dinamômetro, expressa em partes da [sensibilidade] do segundo [dinamômetro], as observações dessa terceira série fornecem os seguintes valores:

a partir dos conjuntos número 1 e 2: $848,45/630,14 = 1,3464$,
a partir dos conjuntos número 1 e 4: $840,08/622,92 = 1,3486$,

a partir dos conjuntos número 1 e 6: $846,66/629,03 = 1,3460$,

portanto, em média, a razão entre a sensibilidade do primeiro dinamômetro e a do segundo é:

$$1,3740 : 1 .$$

Se multiplicarmos agora por essa razão 1,3740 as deflexões observadas do segundo dinamômetro que foi mantido em sua posição no circuito durante todas as observações, a saber, as deflexões resultando das diferenças das posições de repouso com circuito aberto no conjunto número 1 e com circuito fechado nos conjuntos número 3, 5 e 7:

$$625,20, \quad 625,29, \quad 621,70 ,$$

os produtos

$$842,15, \quad 842,26, \quad 837,44 ,$$

forneirão os valores das deflexões que teriam sido observadas no primeiro dinamômetro se o solenoide tivesse mantido sua posição durante as observações dos conjuntos número 2, 4 e 6, enquanto que as deflexões obtidas das posições de repouso dos conjuntos número 3, 5 e 7 corresponderão à posição modificada do solenoide no circuito. A próxima Tabela lista as deflexões do primeiro solenoide correspondentes à posição original e alterada do solenoide.

Conjunto	Deflexão calculada para a posição I do solenoide	Deflexão observada para a posição II do solenoide	Diferença
3.	842,15	841,56	-0,59
5.	842,26	842,41	+0,15
7.	837,44	835,80	-1,64
Média	840,62	839,92	-0,70

Também essa série de observações foi repetida novamente para testar a exatidão atribuída a essas observações e apresentamos imediatamente essa *quarta* série de observações.

Quarta Série

Configuração Inferior do Comutador B							
Conjunto número 1, circuito aberto.				Conjunto número 2, circuito fechado. Configuração superior do comutador A.			
Dinamômetro Número 1		Dinamômetro Número 2		Dinamômetro Número 1		Dinamômetro Número 2	
Elongações observadas	Posição de repouso	Elongações observadas	Posição de repouso	Elongações observadas	Posição de repouso	Elongações observadas	Posição de repouso
44,8	36,50 36,35 36,20 36,25 36,35	+4,3	−1,25	840,9	879,82 880,80 882,23 884,05	592,2	621,70 622,37 623,40 624,70
28,2		−6,8	−1,25	917,6		650,3	
44,5		+4,3	−1,15	843,2		594,0	
27,9		−6,6	−1,20	919,2		651,2	
44,6		+4,2	−1,30	847,3		597,2	
28,1		−6,8		922,4		653,2	
Média 36,33		Média −1,23		Média 881,72		Média 623,04	
Conjunto número 3, circuito fechado. Configuração inferior do comutador A.				Conjunto número 4, circuito fechado. Configuração superior do comutador A.			
794,5	882,67 882,95 885,48 887,97	559,9	623,90 624,00 625,82 627,70	772,9	886,77 883,15 882,50 882,25	543,9	626,20 623,57 623,15 623,00
970,1		687,4		1005,7		712,1	
796,0		560,9		762,8		536,7	
969,7		686,8		1001,3		708,8	
806,5		568,8		764,6		538,3	
969,2		686,4		998,5		706,6	
Média 884,77		Média 625,36		Média 883,67		Média 623,98	
Conjunto número 5, circuito fechado. Configuração inferior do comutador A.				Conjunto número 6, circuito fechado. Configuração superior do comutador A.			
744,1	883,92 883,75 885,80 883,37 879,68	524,2	624,45 624,32 625,80 624,15 621,60	988,3	883,07 879,20 878,93 884,37	698,9	623,95 621,00 620,75 624,72
1023,3		724,3		779,0		550,1	
745,0		525,0		986,0		696,7	
1021,7		723,0		765,8		540,5	
754,8		532,2		998,1		705,3	
1002,2		709,2		775,5		547,8	
795,5	535,8						
Média 883,30		Média 624,06		Média 881,39		Média 622,61	
Conjunto número 7, circuito fechado. Configuração inferior do comutador A.							
Dinamômetro Número 1				Dinamômetro Número 2			
Elongações observadas		Posição de repouso		Elongações observadas		Posição de repouso	
960,0		884,25 882,20 876,15 875,35		678,2		625,37 623,75 619,38 618,87	
805,4				570,5			
966,2				682,3			
791,0				559,9			
956,4				675,4			
797,6				564,8			
Média 879,49				Média 621,84			

A partir das observações dessa quarta série obtemos os seguintes valores para a sensibilidade do primeiro dinamômetro em partes da [sensibilidade] do segundo dinamômetro:

- a partir dos conjuntos número 1 e 2: $845,39/624,27 = 1,3542$,
- a partir dos conjuntos número 1 e 4: $847,34/625,21 = 1,3553$,
- a partir dos conjuntos número 1 e 6: $845,06/623,84 = 1,3546$,

portanto, em média, a razão entre a sensibilidade do primeiro dinamômetro e a do segundo é:

$$1,3547 : 1 .$$

Se multiplicarmos agora por essa razão 1,3547 as deflexões observadas do segundo dinamômetro que foi mantido em sua posição no circuito durante todas as observações, a saber, as deflexões resultando das diferenças das posições de repouso com circuito aberto no conjunto número 1 e com circuito fechado nos conjuntos número 3, 5 e 7:

$$626,59, \quad 625,29, \quad 623,07 ,$$

os produtos

$$848,84, \quad 847,10, \quad 844,10 ,$$

forneçam os valores das deflexões que teriam sido observadas no primeiro dinamômetro se o solenoide tivesse mantido sua posição durante as observações dos conjuntos número 2, 4 e 6, enquanto que as deflexões obtidas das posições de repouso dos conjuntos número 3, 5 e 7 corresponderão à posição modificada do solenoide no circuito. A próxima Tabela lista as deflexões do solenoide na posição original e as deflexões correspondentes da posição modificada.

Conjunto	Deflexão calculada para a posição I do solenoide	Deflexão observada para a posição II do solenoide	Diferença
3.	848,84	848,44	-0,40
5.	847,10	846,97	-0,13
7.	844,10	843,16	-0,94
Média	846,68	846,19	-0,49

Comparando essas médias encontradas na *quarta* série de observações com aquelas obtidas na *terceira* série de observações, a razão das deflexões em ambos os locais é tão consistente que, para todas as considerações posteriores, é obviamente suficiente tomar em consideração as médias de ambas as séries, a saber, para a deflexão do solenoide na posição I:

$$843,65 ,$$

e na posição II:

$$843,055 .$$

Isso fornece agora os seguintes valores para a determinação da diferença das fases de oscilação na posição I e II de acordo com a Seção 18.24:

$$u = \frac{1}{2} \arctan \frac{843,65}{2100} = 10^{\circ}56'37,0'' ,$$

$$v'' = \frac{1}{2} \arctan \frac{843,055}{2100} = 10^{\circ}56'11,7'' .$$

Esta última afirmação exigiria uma pequena correção se, seguindo o resultado da Seção anterior, a amplitude de oscilação nos dois locais I e II não fosse considerada igual, mas se

fosse levada em consideração a pequena diferença que surge, independentemente do fato de não poder ser garantida de forma alguma. Nesse caso, teríamos de colocar $v'' = 10^{\circ}56'13,2''$. Aqui, contudo, nos manteremos com a primeira afirmação, já que não há motivo para assumir tal desigualdade da amplitude de oscilação que, na prática, não pode ser demonstrada com segurança.

Isso fornece finalmente a determinação da diferença de fase 2λ nas duas posições I e II de acordo com a Seção 18.24

$$\sin^2 \lambda = \frac{u - v''}{2 \sin u (\cos u + [u - v''] \sin u)} = 0,000329 ,$$

portanto

$$2\lambda = 2^{\circ}4'43'' ,$$

que corresponde a aproximadamente $1/87$ do período de oscilação.

Também essa determinação da *diferença de fase* é baseada em uma diferença tão pequena nas deflexões observadas, que totalizam apenas $3/5$ de uma divisão da escala, que *não pode mais ser considerada como tendo sido estabelecida com certeza com base na experiência, assim como a pequena diferença na amplitude de oscilação na Seção anterior.*

18.29 Resultado do Teste

As observações descritas nas Seções 18.27 e 18.28 servem para testar as leis desenvolvidas na Seção anterior no que diz respeito ao comportamento das *amplitudes de oscilação* e *fases de oscilação* nas várias posições de um condutor fechado, e dessa maneira a identidade das amplitudes e fases foi estabelecida mesmo para oscilações muito rápidas em um fio condutor fechado muito longo. O método usado para essas observações, [a saber,] de observações correspondentes simultâneas por meio de dois dinamômetros exatamente iguais em seus períodos de oscilação, permitiu dessa maneira uma exatidão muito alta, e esse teste poderia ser ampliado ainda mais se estivesse disponível o meio para uma rotação ainda mais rápida do ímã e para a produção de circuitos ainda mais longos. Contudo, parece que uma tal ampliação do teste não seria suficiente para justificar o esforço e o gasto a ser investido, e sua expansão até 520 oscilações em 1 segundo e até um comprimento do circuito de 10 milhas já seria suficiente. Mesmo se as amplitudes e fases das oscilações elétricas em condutores fechados não fossem geralmente iguais em toda parte, é claro que ainda assim suas diferenças devem tornar-se menores, quanto *mais longo* for o *período de oscilação* dependendo da velocidade angular, e quanto *mais curto* fosse o *fio condutor*, de tal forma que finalmente essas diferenças devem tornar-se imperceptíveis com período de oscilação aumentado e com a diminuição do comprimento do fio condutor. Portanto, o teste planejado só pode alcançar seu objetivo se ele fosse expandido consideravelmente além dos limites dentro dos quais teria de ocorrer de qualquer maneira uma tal compensação, e surge portanto a questão de saber se um comprimento do condutor de 10 milhas e um período de oscilação de $1/520$ de um segundo serviria para esse propósito.

Imagine um *trem de ondas simples* partindo de um ponto do circuito e observe-o durante a *primeira revolução*. Seja o período da onda de $1/520$ de um segundo e a velocidade de propagação igual às usuais $c\sqrt{\frac{1}{2}} = 41\,950$ milhas [por segundo]. Nessa situação, caso fosse realizável, uma *diminuição da amplitude* da oscilação elétrica ocorreria na medida em

que aumenta a distância do ponto inicial do trem de ondas juntamente com o aumento da *diferença de fase* com a mesma distância para qualquer instante, sendo que ambos são fáceis de determinar.

De fato, para um tal *trem de ondas simples* o deslocamento σ de uma partícula elétrica pode ser representado pela seguinte equação:

$$\sigma = Ae^{-\varepsilon t} \cdot \text{sen } 520\pi \left(t - \frac{s}{c}\sqrt{2} \right) ,$$

onde, de acordo com a Seção 18.15, podemos colocar aproximadamente

$$\varepsilon = \frac{c^2}{16\pi\alpha^2 k M''} ,$$

e

$$M'' = 2 \log \frac{8a}{\alpha} .$$

Como agora além disso, de acordo com a Seção 18.16,

$$\frac{1}{\pi\alpha^2 k} = w' = \frac{16 \cdot 10^6}{\pi\alpha^2 \cdot c^2} ,$$

portanto

$$\varepsilon = \frac{10^6}{2\pi\alpha^2 \log \frac{8a}{\alpha}} ,$$

e como para o nosso circuito $2\pi a = 76 \cdot 10^6$ milímetros e $\alpha = 1/8$ milímetro, obtemos:

$$\varepsilon = 477\,000 .$$

A distância de $s = 30 \cdot 10^6$ milímetros (aproximadamente 5 milhas) corresponde agora a uma duração de

$$t = \frac{s}{c} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{8177} \text{ segundo},$$

portanto, a razão das amplitudes no ponto inicial e a uma distância de 5 milhas [é igual a]:

$$1 : e^{-\varepsilon t} = 1 : e^{-54,7} = 573 \cdot 10^{21} : 1 ,$$

portanto, a *amplitude* tornou-se tão pequena em uma distância de 5 milhas que ela desaparece completamente comparada com aquela [amplitude] do trem de ondas em seu ponto inicial.

Em um dado instante a *diferença de fase* no ponto inicial do trem de ondas e a uma distância $= s$ desse ponto é representada por

$$520 \frac{\pi s}{c} \cdot \sqrt{2} ,$$

sendo assim igual a $0,0636 \cdot \pi = 10^\circ 27'$ para $s = 38 \cdot 10^6$, uma diferença de fase que não pode de forma alguma ser considerada imperceptível tendo em vista a exatidão permitida pelas observações de acordo com a Seção anterior.

De acordo com este resumo, retirado da consideração das ondas elementares, os experimentos descritos nas Seções anteriores podem ser considerados suficientes para testar as leis

estabelecidas na Seção anterior em relação às razões das amplitudes e fases das oscilações elétricas em condutores fechados.

Finalmente, deve-se notar que a igualdade da amplitude de oscilação encontrada em vários pontos do fio condutor fechado, que estão distantes entre si, também pode servir como prova de que este fio, revestido de seda, pode ser considerado suficientemente isolado para correntes elétricas como as produzidas pelo ímã giratório; porque no caso de isolamento incompleto, as correntes nas partes do circuito mais distantes do indutor teriam que ser mais fracas do que naquelas mais próximas do indutor.

18.30 Observações da Dependência da Amplitude de Oscilação em Relação à Velocidade Angular do Ímã

Após ter confirmado a *identidade das amplitudes de oscilação e fases de oscilação* para o circuito mais longo e a maior velocidade angular do ímã possíveis com os meios disponíveis, portanto é claro que essa identidade vale ainda mais para circuitos mais curtos e menores velocidades angulares, essencialmente só falta testar a lei da *dependência da amplitude de oscilação em relação à velocidade angular do ímã* para o circuito que está sendo considerado para o *teste quantitativo* das leis desenvolvidas na Seção anterior.

A partir da identidade das amplitudes de oscilação e fases de oscilação em todas as partes de um circuito fechado, segue por si só que a identidade da corrente em qualquer ponto é sempre igual à *média* da intensidade de corrente em todo o condutor. Agora a lei para as *médias das intensidades de corrente* em condutores fechados dependendo dos *valores médios das forças eletromotrizes* foi desenvolvida na Seção 18.9, independente da consideração do formato do condutor fechado, portanto na Seção 18.21 foi determinada mais precisamente a lei dessa dependência para o caso quando esse *valor médio das forças eletromotrizes* muda proporcionalmente ao seno que aumenta proporcionalmente ao tempo, o que acontece quando as forças eletromotrizes são produzidas pela *rotação de um pequeno ímã*. Portanto colocando a *força eletromotriz média* igual a $g_0 \sin \mu t$, isso forneceu a seguinte lei para a *intensidade média de corrente*

$$i = -\frac{g_0}{w'} \cdot \sin \rho_0 \cos(\mu t + \rho_0) ,$$

onde w' denotava a resistência da unidade de comprimento do condutor e onde tínhamos

$$\rho_0 = \frac{\pi a c^2 w'}{4\mu \int M_0'' ds} .$$

Porém, de acordo com essa lei, com um ímã de intensidade e posição dadas e um dado circuito, para o qual têm valores definidos a resistência w' e o coeficiente $\int M_0'' ds$ dependendo do formato do circuito, assim como o fator g_0 dependendo da intensidade do ímã e de sua posição no circuito fechado, a intensidade de corrente i ainda depende apenas da maior ou menor *velocidade angular* determinada por μ , em que $\mu/[2\pi]$ designa o número de revoluções por unidade de tempo.

Contudo, além da lei da *dependência da intensidade de corrente em relação à velocidade angular do ímã*, também a dependência do *valor absoluto da intensidade de corrente* i em relação aos *valores absolutos das constantes* w' , $\int M_0'' ds$ e g_0 poderia ser sujeita a um teste

adicional; porém, no que diz respeito à dependência em relação a w' e g_0 , a mesma já foi testada para valores de μ que desaparecem, onde $\rho_0 = \pi/2$ e, portanto obtém-se

$$i = \frac{g_0}{w'} ,$$

que constitui a bem conhecida lei de Ohm baseada firmemente na experiência; mas no que diz respeito à dependência em relação a $\int M_0'' ds$, esse teste seria fácil de ser realizado tão logo existissem métodos analíticos disponíveis para determinar a constante $\int M_0'' ds$ a partir do formato do condutor fechado. Não é suficiente o conhecimento desse valor para um condutor *circular*, já que observações necessitando um *indutor* e dois *dinamômetros* não podem ser realizadas utilizando um condutor circular.

Contudo, a realização do *teste quantitativo* solicitado requer um conhecimento exato dos instrumentos por meio dos quais são feitas as observações, em particular, um conhecimento exato dos *dinamômetros* que estão sendo usados. Desde que esteja disponível um instrumento prático para regular a posição mútua do *multiplicador* e do *solenóide* de cada dinamômetro e o *período de oscilação do solenóide*, isso é acima de tudo uma questão de *posicionamento* prático e então de *teste do instrumento*. O *posicionamento* do instrumento é para ser realizado de tal forma que o eixo do *solenóide* seja *horizontal e paralelo ao meridiano magnético*; o eixo do *multiplicador* contendo o *solenóide* será *igualmente horizontal e perpendicular ao eixo do solenóide*. O centro do multiplicador deve coincidir com o centro do solenóide. Se isso for feito aproximadamente guiado por marcações externas, falta ser discutido como poderíamos testar por *observações* realizadas com o mesmo instrumento, caso as condições sejam realizadas exatamente, ou quão grandes os *desvios remanescentes* ainda são, assim como quais experiências são necessárias para determinar também aqueles *elementos do instrumento*, cujo conhecimento é necessário para *determinações quantitativas exatas* por meio de observações realizadas com eles.

18.31 Teste do Dinamômetro

Para fins desse teste do dinamômetro, deixamos a corrente de uma pilha voltaica *constante* atravessar igualmente o multiplicador de um *galvanômetro tangente*, que serve para determinar a intensidade da corrente, e o *solenóide*, ora *para frente*, ora *para trás*, e através do *multiplicador*, enquanto o mesmo está conectado com o solenóide, ora em paralelo, ora transversalmente, o que é facilmente realizado por um *comutador*, a cujas células duplas são conduzidas as extremidades dos fios do solenóide e do multiplicador. Em todos esses quatro casos é observada da maneira usual a *deflexão* do solenóide em relação a sua posição original de equilíbrio. Essas observações servem para determinar

1. o desvio, μ , do eixo do solenóide em relação ao meridiano magnético na posição original de equilíbrio,
2. o desvio, δ , do ângulo entre o eixo do solenóide e o eixo do multiplicador em relação a um ângulo reto,
3. a razão, ε , entre a força diretriz, exercida pelo magnetismo terrestre sobre o solenóide com dada intensidade de corrente, e a força diretriz estática do solenóide,
4. a razão, $\varkappa$, entre a força diretriz, exercida pelo multiplicador sobre o solenóide, dada a intensidade de corrente em ambos, e a força diretriz estática do solenóide.

A observação fornece a *deflexão* do solenoide em relação a sua posição de equilíbrio original em unidades da escala, e dividindo esse número de unidades da escala pelo dobro da distância, R , entre o espelho e a escala em unidades da escala, obtemos para deflexões menores a mesma [deflexão] expressa em *valores de arco*, a qual denotamos por a, b, c, d para os quatro casos discutidos. Obtemos então

$$\begin{aligned}\varkappa &= \frac{1}{2} \left(\frac{c+b}{c-b} + \frac{d+a}{d-a} \right) , \\ \varepsilon &= \frac{da - cb - (db - ca)\varkappa}{d + c - b - a} , \\ \delta &= \frac{1}{2\varepsilon} \left(\frac{c+b}{c-b} - \frac{d+a}{d-a} \right) , \\ \mu &= \frac{1}{\varkappa} \left(\varepsilon - (1 + \varkappa - \delta\varepsilon)a \right) .\end{aligned}$$

Como prova precisamos apenas determinar os torques *estático*, *geomagnético* e *eletrodinâmico* atuando sobre o solenoide, cuja soma é para ser colocada igual a zero para o equilíbrio na deflexão observada.

Seja s a força diretriz *estática*, então o torque *estático*, na deflexão φ , a partir do equilíbrio estático que existia antes de uma corrente atravessar o circuito, é dado por

$$= -s \sin \varphi .$$

Além disso, seja i a *intensidade de corrente*, positiva caso o solenoide conduzindo a corrente seja equivalente a um ímã apontando para o Norte com seu polo Norte, seja mi a força diretriz *geomagnética*, com m sendo o produto da componente horizontal do magnetismo terrestre e a área envolvida pelo fio do solenoide; e finalmente seja μ , como já mencionado, o ângulo entre o eixo do solenoide e o meridiano magnético no equilíbrio estático; então o torque *geomagnético* será igual a

$$= -mi \sin (\varphi + \mu) ,$$

ou, quando μ é muito pequeno,

$$= -mi (\sin \varphi + \mu \cos \varphi) .$$

Finalmente, seja $(\pi/2 + \delta)$ o ângulo entre o eixo do multiplicador apontando para Leste e o eixo do solenoide apontando para o Norte; além disso, seja ei^2 a força diretriz eletrodinâmica exercida pelo multiplicador sobre o solenoide, com e positivo quando o multiplicador e o solenoide estão conectados de tal maneira que o multiplicador atuando à distância com i positiva é equivalente a um ímã com seu polo Sul apontando para Oeste; então o torque *eletrodinâmico* é igual a

$$= ei^2 \cos(\varphi - \delta) ,$$

ou, caso δ seja muito pequeno,

$$= ei^2 (\cos \varphi + \delta \sin \varphi) .$$

Agora a condição de equilíbrio para o solenoide com a deflexão φ observada requer que a soma dos três torques seja igual a zero, isto é,

$$-s \sin \varphi - mi(\sin \varphi + \mu \cos \varphi) + ei^2(\cos \varphi + \delta \sin \varphi) = 0 .$$

Dividindo essa equação por $-s \cos \varphi$ e observando que $\tan \varphi$ pode ser substituída pelo *valor do arco da deflexão observada*, isto é, por a no primeiro dos quatro casos considerados, obtemos a seguinte equação:

$$a + \frac{mi}{s}(a + \mu) - \frac{ei^2}{s}(1 + \delta a) = 0 .$$

Neste *primeiro* caso, a corrente foi *para frente* através do fio do solenoide e o solenoide estava conectado em *paralelo* com o multiplicador. No *segundo* caso, com a corrente também indo *para frente* através do fio do solenoide mas com o solenoide conectado de maneira cruzada com o multiplicador, a intensidade de corrente i permanece positiva, mas e muda de sinal, enquanto que o valor do arco da deflexão b observada nesse caso tem de substituir $\tan \varphi$, portanto

$$b + \frac{mi}{s}(b + \mu) + \frac{ei^2}{s}(1 + \delta b) = 0 .$$

No *terceiro* caso, onde a corrente através do fio do solenoide foi *inversa*, mas o solenoide foi conectado em *paralelo* com o multiplicador, como no primeiro caso, i muda de sinal e e é positivo como no primeiro caso, enquanto o valor do arco da deflexão c observada nesse caso deve substituir $\tan \varphi$, portanto

$$c - \frac{mi}{s}(c + \mu) - \frac{ei^2}{s}(1 + \delta c) = 0 .$$

Finalmente, no *quarto* caso com a corrente *invertida* através do solenoide como no terceiro caso, e com o solenoide conectado de maneira *cruzada* com o multiplicador, como no segundo caso, i é negativa como no terceiro caso, e é negativo como no segundo caso, enquanto que o valor do arco da deflexão d observada nesse caso tem de substituir $\tan \varphi$, portanto

$$d - \frac{mi}{s}(d + \mu) + \frac{ei^2}{s}(1 + \delta d) = 0 .$$

Substituindo $\varkappa$ por mi/s e ε por ei^2/s obtemos os dados valores de $\varkappa$, ε , δ e μ a partir dessas quatro equações.

Vamos exemplificar com o dinamômetro usado para os próximos experimentos para o qual as observações forneceram em termos de unidades da escala:

$$\begin{aligned} 2Ra &= +440,01 , \\ 2Rb &= -443,81 , \\ 2Rc &= +448,26 , \\ 2Rd &= -450,68 . \end{aligned}$$

Tínhamos aqui $2R = 5075$ unidades da escala. Segue agora disso que

$$\begin{aligned}
\kappa &= 0,008\,484\,, \\
\varepsilon &= 0,088\,0\,, \\
\delta &= -0,039\,7\,, \\
\mu &= +0,032\,3\,.
\end{aligned}$$

Os valores de κ e ε , que podem ser facilmente rastreados aos valores normais válidos para a unidade de intensidade de corrente após i ter sido medido com um galvanômetro tangente, fornecem os *elementos para a intensidade do solenoide e para a sensibilidade do dinamômetro*. Por outro lado, os outros dois valores, δ e μ , referem-se ao *arranjo experimental* e indicam os desvios desse arranjo sob as condições definidas para ele. De fato, isso fornece que, em vez do ângulo reto, o eixo do solenoide faz o ângulo

$$\frac{\pi}{2} + \delta = 87^{\circ}43'31''$$

com o eixo do multiplicador e que o eixo do solenoide, em vez de coincidir com o meridiano magnético no equilíbrio *estático*, é desviado para Leste em relação a ele pelo ângulo

$$\mu = 1^{\circ}51'.$$

Vemos disso que, com o instrumento estando equipado em graduações finas, são fáceis de corrigir os erros do arranjo experimental. — Mesmo que esses pequenos erros permaneçam sem correção, as observações feitas com esse instrumento ainda podem ser refinadas e podem ser calculados aqueles valores que teriam sido obtidos para um arranjo experimental exato.

Para fins dos testes de oscilação a seguir, devido à rápida mudança no sinal de i , o último desvio marcado como μ não é considerado, mas apenas o desvio marcado como δ , e para um desvio x' observado em divisões da escala, chegamos facilmente ao valor corrigido x , a saber,

$$x = x' - \frac{\delta x'^2}{2R} = x' + \frac{x'^2}{127\,780}.$$

As observações apresentadas nas próximas Seções marcaram o início de um trabalho conjunto realizado por mim e R. Kohlrausch que foi interrompido pela doença e falecimento de meu querido amigo.⁷¹⁶ Os dispositivos utilizados para a rotação uniformemente rápida do ímã e para medir essa velocidade foram realizados por ele juntamente com as observações relevantes.

18.32 Primeira Série

A próxima série de observações foi realizada conjuntamente por R. Kohlrausch e por mim em 12 de abril de 1857. Ela lida com a *dependência da amplitude de oscilação em relação à velocidade angular do ímã* e foi feita usando quatro circuitos diferentes, mas sempre utilizando o mesmo *dinamômetro* e a mesma *bobina indutora*, essa última consistindo em um pedaço de

⁷¹⁶Rudolf Hermann Arndt Kohlrausch (1809-1858) colaborou com Weber na medição de sua constante fundamental, c. Ver [Web55b] com tradução para o inglês em [Web21f]; [WK56] com traduções para o inglês em [WK03] e [WK21] e com tradução para o português em [WK08]; [KW57] com tradução para o inglês em [KW21]; ver também [WK68]. Ver ainda os Capítulos 6, 7, 8 e 19.

um fio de cobre muito fino, com um comprimento aproximado de 1500 metros e tendo uma resistência de $23 \cdot 10^{12}$ em unidades absolutas, que foi a parte constante dos quatro circuitos. Além disso, usamos

no primeiro circuito *A* um pedaço com 2800 metros de comprimento com uma resistência $= 8,79 \cdot 10^{12}$,

no segundo circuito *B* um pedaço com 5600 metros de comprimento com uma resistência $= 18 \cdot 10^{12}$,

no terceiro circuito *C* um pedaço com 8000 metros de comprimento com uma resistência $= 27 \cdot 10^{12}$,

no quarto circuito *D* um pedaço com 10800 metros de comprimento com uma resistência $= 35 \cdot 10^{12}$.

A escala estava em uma posição fixa a uma distância de 2537,5 unidades da escala do pequeno espelho plano fixo no solenoide e fazia um ângulo reto com a perpendicular do espelho no equilíbrio estático do solenoide, e o plano vertical da perpendicular do espelho a cortava na 800^a divisão da escala. O telescópio montado atrás da escala podia ser deslocado de tal forma que, no equilíbrio estático do solenoide, podia ser observada ora a 800^a divisão da escala, ora uma marcação mais alta ou mais baixa, para permitir observar a deflexão do solenoide também quando ela ultrapassasse metade do comprimento da escala.

Circuito	Número de oscilação m	Posição do equilíbrio estático	Posição defletida	Deflexão em divisões da escala y	x'	x
<i>A</i>	288,80	361,69	1475,85	+1114, 16	+1111, 84	+1121, 51
	217,80	362,52	1242,34	+879, 82	+879, 80	+885, 86
	141,77	363,13	892,45	+529, 32	+526, 91	+529, 08
	106,46	363,13	710,41	+347, 28	+343, 61	+344, 53
	289,88	363,13	1480,61	+1117, 48	+1115, 01	+1124, 74
	170,26	1210,44	857,52	-352, 92	-349, 96	-349, 00
	140,46	1210,44	681,63	-528, 81	-527, 08	-524, 90
	215,10	1210,44	328,91	-881, 53	-881, 42	-875, 34
	281,68	1210,44	97,05	-1113, 39	-1109, 88	-1100, 24
<i>B</i>	106,76	800,15	630,73	-169, 42	-169, 23	-169, 01
	142,74	800,15	561,78	-238, 37	-237, 84	-237, 40
	216,80	800,15	463,11	-337, 04	-335, 55	-334, 67
	290,26	800,15	410,90	-389, 25	-386, 95	-385, 78
	106,84	800,24	969,02	+168, 78	+168, 59	+168, 81
	144,15	800,24	1040,27	+240, 03	+239, 49	+239, 94
	217,90	800,24	1136,55	+336, 31	+334, 84	+335, 72
	288,04	800,24	1185,91	+385, 67	+383, 44	+384, 59
<i>C</i>	107,12	800,24	897,67	+97, 43	+97, 39	+97, 46
	144,32	800,24	931,32	+131, 08	+131, 00	+131, 13
	214,80	800,24	988,77	+170, 89	+170, 69	+170, 92
	289,62	800,24	988,77	+188, 53	+188, 26	+188, 54
	108,60	800,24	701,11	-99, 13	-99, 09	-99, 01
	143,68	800,24	669,66	-130, 58	-130, 50	-130, 37
	219,78	800,24	628,57	-171, 67	-171, 47	-171, 24
	286,90	800,24	611,76	-188, 48	-188, 21	-187, 94
<i>D</i>	108,42	800,58	731,93	-68, 65	-68, 63	-68, 59
	144,44	800,58	711,98	-88, 60	-88, 57	-88, 51
	217,68	800,58	689,18	-111, 40	-111, 35	-111, 25
	289,56	800,58	679,54	-121, 04	-120, 97	-120, 86
	430,80	800,58	675,17	-125, 41	-125, 33	-125, 21
	433,06	801,30	926,27	+124, 97	+124, 89	+125, 01
	109,06	801,30	869,69	+68, 39	+68, 37	+68, 41
	143,50	801,30	888,91	+87, 61	+87, 58	+87, 64
	217,12	801,30	912,31	+111, 01	+110, 96	+111, 06
	286,92	801,30	922,00	+120, 70	+120, 63	+120, 74

Os valores de x' na penúltima coluna são calculados usando as deflexões y listadas na coluna anterior por meio da fórmula $x' = y - y^3/5075^2$, obtemos portanto $x' = 2R \tan \varphi$ com precisão suficiente quando a deflexão observada é $y = R \tan 2\varphi$. Apenas para as observações no circuito *A*, onde o telescópio foi deslocado, as deflexões listadas na terceira coluna da direita não fornecem diretamente os valores de $R \tan 2\varphi$, mas esses últimos valores precisam ser calculados como segue. Separando o valor da deflexão y' dada nesta coluna em duas partes, a saber, na parte y'' que alcança da divisão da escala observada para o equilíbrio estático até a 800ª divisão da escala, e na parte y''' indo da 800ª divisão da escala até a divisão observada para a deflexão, obtemos

$$y = R \tan 2\varphi = \frac{y'}{1 - \frac{y''y'''}{R^2}} ,$$

de onde é facilmente calculado o valor de $x' = 2R \tan \varphi$ para $R = 2537,5$.

Agora os valores de x' calculados dessa maneira têm finalmente de ser corrigidos como indicado no final da Seção anterior, de onde são calculados os valores de $x = x' + x'^2/127780$ listados na última coluna.

18.33 Cálculos das Observações

As observações descritas servem para testar a lei desenvolvida na Seção anterior ligada à dependência da amplitude de oscilação com a velocidade angular do ímã. De acordo com a Seção 18.24, a amplitude de oscilação é expressa por $i/[\mu\mathfrak{E}]$, onde i denota a intensidade máxima das correntes elétricas que ocorrem durante a oscilação elétrica. Além disso, como agora de acordo com a Seção 18.30 a intensidade de corrente em cada instante da oscilação é dada pelo valor

$$-\frac{g_0}{w'} \sin \rho_0 \cos(\mu t + \rho_0) ,$$

portanto a intensidade máxima das correntes que ocorrem durante a oscilação elétrica é dada por

$$i = \frac{g_0}{w'} \sin \rho_0 ,$$

onde tínhamos

$$\tan \rho_0 = \frac{\pi a c^2 w'}{4\mu \int M_0'' ds} ,$$

então, de acordo com a Seção 18.24, obtemos a seguinte expressão para a *amplitude de oscilação*:

$$\frac{i}{\mu\mathfrak{E}} = \frac{\pi a c^2 g_0}{\mu\mathfrak{E} \sqrt{16\mu^2 (\int M_0'' ds)^2 + \pi^2 a^2 c^4 w'^2}} .$$

Além disso, de acordo com a Seção 18.24 as observações fornecem

$$i = \frac{1}{\pi a'} \cdot \sqrt{\frac{aS \tan v}{nn'}} ,$$

onde v denota a deflexão observada do solenoide, portanto, a amplitude de oscilação é igual a

$$\frac{i}{\mu\mathfrak{E}} = \frac{1}{\pi a' \mu\mathfrak{E}} \cdot \sqrt{\frac{aS \tan v}{nn'}} = \frac{\pi a c^2 g_0}{\mu\mathfrak{E} \sqrt{16\mu^2 (\int M_0'' ds)^2 + \pi^2 a^2 c^4 w'^2}} .$$

Isso fornece para o teste observacional das leis obtidas o valor denominado por $\pm x = 2R \tan v$ na última coluna da Tabela de observação na Seção anterior como dado por

$$\pm x = \frac{\pi^4 a a'^2 n n' c^4 g_0^2}{16 \mu^2 (\int M_0'' ds)^2 + \pi^2 a^2 c^4 w'^2} \cdot \frac{2R}{S} .$$

Mas agora μ/π é o número de oscilação⁷¹⁷ denominado por m na Tabela e g_0 é proporcional à velocidade angular de acordo com as leis de indução magnética, ou $g_0 = m g'_0$, onde g'_0 denota o valor de g_0 para o número de oscilação $m = 1$; temos, portanto,

$$\pm x = \frac{\pi^2 a a'^2 n n' c^4 g_0'^2 m^2}{16 (\int M_0'' ds)^2 \cdot m^2 + a^2 c^4 w'^2} \cdot \frac{2R}{S} ,$$

ou, colocando

$$C = \frac{\pi^2 a'^2 n n' g_0'^2}{a w'^2} \cdot \frac{2R}{S} ,$$

[e]

$$P = \frac{16 (\int M_0'' ds)^2}{a^2 c^4 w'^2} ,$$

[obtemos]

$$C - Px - \frac{x}{m^2} = 0 ,$$

onde C e P possuem valores constantes para todas as observações que foram feitas por meio do mesmo circuito, do mesmo ímã giratório e com o mesmo dinamômetro. Aqui o valor de x , cujo sinal é ignorado, deve ser sempre considerado *positivo*.

Portanto, as observações listadas na Tabela da Seção anterior fornecem as seguintes equações para a determinação das constantes C e P para o circuito A:

$$C - 1121,51P - \frac{1121,51}{288,80^2} = 0 ,$$

$$C - 885,86P - \frac{885,86}{217,80^2} = 0 ,$$

$$C - 529,08P - \frac{529,08}{141,77^2} = 0 ,$$

$$C - 344,53P - \frac{344,53}{106,46^2} = 0 ,$$

$$C - 1124,74P - \frac{1124,74}{289,88^2} = 0 ,$$

$$C - 349,00P - \frac{349,00}{107,26^2} = 0 ,$$

$$C - 524,90P - \frac{524,90}{140,46^2} = 0 ,$$

⁷¹⁷Em alemão: *Schwingunszahl*. Na página 447 da Seção 18.30 Weber havia designado por $\mu/(2\pi)$ ao número de revoluções por unidade de tempo.

$$C - 875,34P - \frac{875,34}{215,10^2} = 0 ,$$

$$C - 1100,24P - \frac{1100,24}{281,68^2} = 0 ,$$

de onde obtemos os valores mais prováveis de C e P , a saber:

$$C = 0,037978 , \quad P = 0,000021865 .$$

Calculando de maneira semelhante os valores de C e P para os circuitos B , C , e D , obtemos os resultados listados na próxima Tabela.

Circuito	C	P
A	0,037978	0,000021865
B	0,022795	0,000047050
C	0,015174	0,000068093
D	0,011869	0,000087274

Finalmente, calculando agora os valores de x a partir dos valores dados de m obtemos, em ordem progressiva dos valores de m , a seguinte comparação entre os valores calculados de x e aqueles encontrados pela observação:

A				B			
m	Valor observado de x	Valor calculado de x	Diferença	m	Valor observado de x	Valor calculado de x	Diferença
106,46	344,53	344,96	-0,43	106,76	169,01	169,12	-0,11
107,26	349,00	349,11	-0,11	106,84	168,81	169,28	-0,47
140,46	524,91	523,48	+1,43	142,74	237,40	237,13	+0,27
141,77	529,08	530,29	-1,21	144,15	239,94	239,51	+0,43
215,10	875,34	873,50	+1,84	216,80	334,67	333,63	+1,04
217,80	885,86	884,34	+1,52	217,90	335,72	334,68	+1,04
281,68	1100,24	1101,83	-1,59	288,04	384,59	385,69	-1,10
288,80	1121,51	1121,81	-0,30	290,26	385,78	386,89	-1,11
289,88	1124,74	1124,77	-0,03				
C				D			
107,12	97,46	97,74	-0,28	108,42	68,59	68,87	-0,28
108,60	99,01	99,25	-0,24	109,06	68,41	69,27	-0,86
143,68	130,37	130,21	+0,16	143,50	87,64	87,38	+0,26
144,32	131,13	130,69	+0,44	144,44	88,51	87,79	+0,72
214,80	170,92	169,04	+1,88	217,12	111,06	109,41	+1,65
219,78	171,24	170,89	+0,35	217,68	111,25	109,52	+1,73
286,90	187,94	189,10	-1,16	286,92	120,74	119,38	+1,36
289,62	188,54	189,64	-1,10	289,56	120,86	119,69	+1,17
				430,80	125,21	128,09	-2,88
				433,06	125,01	128,17	-3,16

Esse primeiro teste pode ser ligado a outro teste. De fato, de acordo com a lei estabelecida as duas constantes C e P devem ser inversamente proporcionais à resistência média da unidade de comprimento do fio condutor, w' ; contudo, as outras grandezas da qual dependem os valores dessas constantes de acordo com as fórmulas apresentadas:

$$C = \frac{\pi^2 a'^2 n n' g_0'^2}{a w'^2} \cdot \frac{2R}{S} ,$$

[e]

$$P = \frac{16(\int M_0'' ds)^2}{a^2 c^4 w'^2} ,$$

não são iguais para todos os quatro circuitos aos quais se referem as observações descritas na Seção anterior, mas a grandeza g_0' da qual depende a constante C , e a grandeza $\int M_0'' ds$ da qual depende a constante P , possuem um valor especial para cada circuito. Designando agora o comprimento total do fio condutor por l , que também possui valores diferentes para os quatro circuitos, e observando que $g_0' \sin \mu t$ no tempo t denota a força eletromotriz *média* exercida pelo ímã giratório na velocidade para a qual $m = 1$ [ao atuar] *sobre qualquer unidade de comprimento do fio condutor total*; então $lg_0' \sin \mu t$ no tempo t vai denotar a força eletromotriz exercida pelo ímã giratório na velocidade para a qual $m = 1$ *sobre todo o fio condutor*. Como agora a indução pelo ímã giratório atuou apenas sobre o fio indutor comum a todos os quatro circuitos, segue que lg_0' terá o mesmo valor para todos os quatro circuitos; portanto, a fórmula

$$C = \frac{\pi^2 a'^2 n n' g_0'^2}{a w'^2} \cdot \frac{2R}{S} = \frac{\pi^2 a'^2 n n' (lg_0')^2}{a} \cdot \frac{2R}{S} \cdot \frac{1}{(lw')^2} ,$$

fornece que os valores da constante C precisam ser inversamente proporcionais aos quadrados das resistências desses quatro circuitos; pois lw' designa a resistência de todo o circuito, assim como w' era a resistência média da unidade de comprimento.

Para examinar a lei elaborada também a esse respeito, é necessário acrescentar às observações consideradas os valores das resistências desses quatro circuitos citados no início da Seção anterior, das quais se deve notar, porém, que sua determinação não foi considerada como o objetivo principal das observações da época, mas sem pretensão de uma precisão particular (baseou-se em parte em uma simples comparação de acordo com os comprimentos dos fios), deveria servir apenas como uma breve descrição para distinguir os quatro circuitos entre si. Contudo, também usamos essas determinações para um teste da lei estabelecida pois elas, assim como todas as observações apresentadas, haviam sido determinadas muitos anos atrás sem relação com as leis desenvolvidas aqui.

Contudo, como mencionado no início da Seção anterior, de acordo com essa determinação as resistências dos quatro circuitos comportam-se aproximadamente na seguinte proporção

$$31,79 : 41 : 50 : 58 ,$$

enquanto que, de acordo com a lei estabelecida, dividindo o número 6,2158 por $\sqrt{C}$, as mesmas proporções são obtidas como

$$31,89 : 41,17 : 50,46 : 57,06 ,$$

que concorda muito bem com os resultados experimentais anteriores.

18.34 Segunda Série

A seguinte série de observações, realizadas conjuntamente por Kohlrausch e por mim em 18 e 22 de abril de 1857, é essencialmente uma repetição da anterior, mas com a diferença de que na série anterior todo o fio condutor sempre consistia em bobinas simplesmente enroladas de fio, enquanto na série seguinte, embora o circuito *A* fosse o mesmo, foi formado um circuito diferente pela inserção de um *fio duplo E* no circuito *A*. Esse *fio duplo E* era composto de dois fios de cobre muito finos trançados por seda e, portanto, isolados, mas fixados em conjunto por meio de um outro trançamento para reduzir o amortecimento das oscilações elétricas causado pela indução mútua de acordo com o disposto na Seção 18.26, que deve ser testado aqui. — Esse amortecimento foi reduzido ainda mais pelo fato de que o fio duplo *E*, em vez de ser enrolado em uma bobina, foi esticado em um suporte especial para que todos os enrolamentos ficassem a pelo menos 20 milímetros de distância.

De acordo com a Seção 18.32, o circuito *A* tinha um comprimento de uns 4300 metros com uma resistência, em unidade absoluta, igual a $3179 \cdot 10^{10}$. O fio duplo *E* tinha um comprimento de 1412 metros (portanto o fio simples tinha 2824 metros de comprimento) e uma resistência igual a $4292 \cdot 10^{10}$.

O arranjo da escala e do telescópio de leitura era idêntico àquele que foi mencionado na Seção 18.32 para a série anterior de observações. — Foram realizadas para cada circuito duas séries de observações, a primeira em 18 de abril e a segunda em 22 de abril.

Circuito	Número de oscilação m	Posição do equilíbrio estático	Posição defletida	Deflexão em divisões da escala y	x'	x
$A + E$	107,22	801,98	728,42	-73,56	-73,54	-73,50
	139,66	801,98	681,37	-120,61	-120,54	-120,40
	214,10	801,98	542,95	-259,03	-258,36	-257,84
	279,44	801,98	402,21	-399,77	-397,29	-396,06
	108,02	801,98	876,36	+74,38	+74,36	+74,40
	141,82	801,98	926,06	+124,08	+124,01	+124,13
	213,76	801,98	1059,59	+257,61	+256,95	+257,47
	282,80	801,98	1206,57	+404,59	+402,03	+403,29
A	280,58	389,64	1468,13	+1078,49	+1075,80	+1084,86
	214,12	425,42	1281,09	+855,67	+855,32	+861,05
	142,58	425,42	954,80	+529,38	+528,38	+530,56
	141,66	425,42	948,80	+523,38	+522,36	+524,50
	103,36	425,42	762,90	+337,48	+335,26	+336,14
	283,60	1193,13	86,44	-1106,69	-1102,50	-1092,99
	215,16	1193,13	323,28	-869,85	-869,06	-863,15
	139,82	1193,13	676,38	-516,75	-515,29	-513,21
	110,53	1193,13	827,49	-365,64	-363,10	-362,07
$A + E$	106,10	801,52	730,24	-71,28	-71,26	-71,22
	142,88	801,52	676,72	-124,80	-124,73	-124,61
	214,80	801,52	543,31	-258,21	-257,55	-257,03
	279,92	801,52	404,02	-397,50	-395,05	-393,83
	107,43	801,43	873,91	+72,48	+72,46	+72,50
	141,94	801,43	924,38	+122,95	+122,88	+123,00
	215,64	801,43	1060,12	+258,69	+258,03	+258,55
	279,30	801,43	1194,00	+392,57	+390,22	+391,41
A	282,02	384,83	1465,47	+1080,64	+1077,20	+1086,28
	217,17	385,13	1249,53	+864,40	+864,14	+869,98
	139,59	385,13	893,92	+508,79	+506,73	+508,74
	107,15	385,13	728,92	+343,79	+340,65	+341,56
	281,96	1202,32	106,96	-1095,36	-1090,85	-1081,54
	217,14	1202,30	329,47	-872,83	-872,43	-866,48
	144,32	1202,30	664,30	-538,00	-536,49	-534,24
	139,56	1202,30	690,03	-512,27	-510,54	-508,50
	106,64	1202,30	860,67	-341,63	-340,30	-339,39

O cálculo dos valores de x nessa Tabela é o mesmo que foi discutido para a Tabela anterior.

Podemos calcular a partir dos valores correspondentes de m e x dessa Tabela os valores mais prováveis das constantes C e P para os circuitos A e $A + E$ da mesma maneira que na Seção 18.33 a partir dos valores da Seção 18.32 para os circuitos A , B , C , D . Dessa maneira foram obtidos os resultados listados na próxima Tabela.

Circuito	C	P
$A + E$	0,006 672	0,000 004 041
A	0,037 63	0,000 021 96
$A + E$	0,006 610	0,000 004 083
A	0,037 14	0,000 021 63

Finalmente, calculando os valores de x a partir dos valores dados de m , obtemos, em ordem sucessiva dos valores de m , a seguinte comparação dos valores calculados de x e os valores encontrados pela observação.

$A + E$				A			
m	Valor observado de x	Valor calculado de x	Diferença	m	Valor observado de x	Valor calculado de x	Diferença
107,22	73,50	73,29	+0,21	103,36	336,14	335,82	+0,32
108,02	74,40	74,34	+0,06	110,53	362,07	362,41	-0,34
139,66	120,40	120,63	-0,23	139,82	513,21	514,68	-1,47
141,82	124,13	124,10	+0,03	141,66	524,50	524,09	+0,41
213,76	257,47	257,34	+0,13	142,58	530,56	528,81	+1,75
214,10	257,84	258,04	-0,20	214,12	861,05	859,37	+1,68
279,44	396,06	396,02	+0,04	215,16	863,15	863,68	-0,53
282,80	403,29	402,55	+0,74	280,58	1084,86	1085,42	-0,56
				283,60	1092,99	1093,170	-0,71
$A + E$				A			
106,10	72,22	71,14	+0,08	106,64	339,39	338,98	+0,41
107,43	72,50	72,85	-0,35	107,15	341,56	341,58	-0,02
141,94	123,00	123,04	-0,04	139,56	508,50	508,97	-0,47
142,88	124,61	124,56	+0,05	139,59	508,74	509,12	-0,38
214,80	257,03	256,62	+0,41	144,32	534,24	533,30	+0,94
215,64	258,55	258,32	+0,23	217,14	866,48	866,96	-0,48
279,30	391,41	391,07	+0,34	217,17	869,98	867,08	+2,90
279,92	393,83	392,37	+1,46	281,96	1081,54	1085,70	-4,16
				282,02	1086,28	1085,85	+0,43

Finalmente, como indicado no início dessa Seção, as resistências observadas dos circuitos $A + E$ e A entre si estão aproximadamente na razão de

$$7471 : 3179 ,$$

enquanto que essa razão, de acordo com a lei apresentada na Seção anterior, que se aplica aqui da mesma forma, a saber, que os valores da constante C para os dois circuitos devem ser inversamente proporcionais aos quadrados das resistências desses circuitos, é obtida dividindo 611,75 por $\sqrt{C}$, [ou seja, é encontrada] como

$$7507 : 3164 ,$$

que concorda com a razão encontrada a partir das observações tanto quanto é justificado esperar devido à baixa precisão da medição de resistência.

18.35 Razão da Força Eletrostática de Duas Quantidades Iguais de Eletricidade em Relação à Sua Massa

Finalmente, ainda falta ser considerado o terceiro assunto para observações mais detalhadas de acordo com a Seção 18.23, a saber, *a dependência das amplitudes das oscilações produzidas por um ímã giratório em um condutor fechado em relação ao formato do fio condutor*. Observações exatas sobre esse assunto podem servir não apenas para testar as leis formuladas mas também, além disso, como já discutido na Seção 18.23, ser utilizadas para ampliar nosso conhecimento sobre a eletricidade para determinar, em particular, a *razão* ainda desconhecida *entre a força devida à interação eletrostática de duas quantidades iguais de eletricidade e sua massa*.

Seja $\mathfrak{E}$ a quantidade de eletricidade positiva na unidade de comprimento do fio condutor expressa em unidade eletrostática, ela exerce então sobre uma quantidade igual de eletricidade a força eletrostática igual a $\mathfrak{E}^2$ na unidade de distância, enquanto que sua massa foi expressa⁷¹⁸ por $[1/r]\mathfrak{E}$, o que fornece a razão desconhecida dessa força para essa massa [como dada por:]

$$\frac{\mathfrak{E}^2}{\frac{1}{r}\mathfrak{E}} = \frac{r\mathfrak{E}}{1}.$$

Se agora essa proporção, ou a quantidade desconhecida $r\mathfrak{E}$, tiver um valor comparável com outras quantidades determinadas, pode então ser facilmente mostrado que esse valor poderia ser determinado mais exatamente a partir das observações da *dependência da amplitude de oscilação em relação ao formato do circuito*.

A partir das equações diferenciais dos movimentos elétricos em condutores fechados estabelecidas nas Seções 18.8 e 18.10, fica claro que elas contêm a grandeza $r\mathfrak{E}$ apenas na expressão

$$\frac{4M''(1+\lambda)}{c^2} = \frac{4M''}{c^2} + \frac{1}{r\mathfrak{E}}.$$

No entanto, nem todas as ações que podem ser determinados a partir das equações diferenciais dependem desta expressão contida nas equações diferenciais; já que para determinar algumas ações, as equações diferenciais podem ser simplificadas de tal forma que a expressão desapareça completamente. Como demonstrado nas Seções 18.11 e 18.12, isto aplica-se a todas as ações de equilíbrio ou de manutenção dos movimentos existentes, de onde segue, inversamente, que as observações das ações de equilíbrio ou das ações das correntes constantes não podem de forma alguma servir para determinar a grandeza $r\mathfrak{E}$.

As outras ações, ao contrário, determinadas quando a expressão contendo $r\mathfrak{E}$ não desaparece das equações diferenciais, contêm as *oscilações elétricas* produzidas em um fio condutor fechado pela indução devida a um ímã giratório cujas leis foram desenvolvidas na Seção 18.20 a partir dessas equações diferenciais, de acordo com as quais a intensidade de corrente de uma tal oscilação no fio condutor foi obtida como sendo dada por

$$i = -\frac{1}{w'}\sqrt{f^2 + g^2} \cdot \cos\left(\mu t + \arctan \frac{f}{g}\right),$$

⁷¹⁸Ver a página 368 na Seção 18.5.

se tivéssemos

$$f = \sum \sin^2 \rho \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) ,$$

$$g = \sum \sin \rho \cos \rho \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a} \right) ,$$

$$\tan \rho = \frac{\mu a^2 c^2 w'}{4(2\mu^2 a^2 M''(1 + \lambda) - n^2 c^2 N'')} = \frac{\mu a^2 w'}{2\mu^2 a^2 \left(\frac{4M''}{c^2} + \frac{1}{r\mathfrak{E}} \right) - 4n^2 N''} .$$

De acordo com a Seção 18.21, essa determinação da intensidade de corrente i é simplificada na maioria dos casos, a saber, naqueles casos em que todos os termos remanescentes podem ser considerados como infinitamente pequenos comparados com o termo correspondente ao número de ordem $n = 0$. De fato obtemos para esses casos

$$i = - \frac{g_0}{\sqrt{w'^2 + 4\mu^2 \left(\frac{4M_0''}{c^2} + \frac{1}{r\mathfrak{E}} \right)^2}} \cdot \cos \left(\mu t + \arctan \frac{w'}{2\mu \left(\frac{4M_0''}{c^2} + \frac{1}{r\mathfrak{E}} \right)} \right) ,$$

onde, de acordo com a Seção 18.10, temos de colocar

$$M_0'' = 2 \log \frac{8a}{\alpha} .$$

Segue portanto que a grandeza $r\mathfrak{E}$ pode ser encontrada ao medir a intensidade de corrente i quando temos a velocidade angular do ímã, a saber, $\mu/[2\pi]$ voltas por segundo, o comprimento $= 2\pi a$, a espessura $= 2\alpha$, e a resistência do fio condutor $= 2\pi a w'$, já que também o coeficiente de indução g_0 , proporcional à velocidade angular, pode ser determinado a partir da intensidade do ímã indutor e de sua distância e posição em relação ao fio condutor induzido.

Portanto, seria possível determinar *diretamente* a grandeza $r\mathfrak{E}$ *sem considerar a dependência da amplitude das oscilações elétricas em relação ao formato do fio condutor*; contudo, é visto facilmente que essa maneira *direta* não pode levar na prática a qualquer valor exato se a grandeza $1/[r\mathfrak{E}]$ for uma fração muito pequena da grandeza $4M_0''/c^2$, especialmente ao considerar que a determinação de M_0'' e c não pode ser realizada com muita precisão. Contudo, considerando além disso a dependência da amplitude das oscilações elétricas em relação ao formato do fio condutor, a seguinte maneira *indireta* permite determinar a grandeza $r\mathfrak{E}$ com uma precisão muito maior.

Para usar a observação da dependência da amplitude das oscilações elétricas em relação ao formato do fio condutor para uma determinação mais exata da grandeza $r\mathfrak{E}$, é essencial encontrar um método para fornecer a um fio condutor fechando *dois formatos diferentes*, o que permite determinar exatamente os dois valores de M_0'' , ou ao menos sua razão $\nu : 1$.

Deve-se considerar que o desenvolvimento das leis do movimento da eletricidade na primeira parte deste Tratado teve que ser limitado aos *condutores circulares*, para os quais uma simplificação substancial foi obtida pelo fato de que os valores das integrais específicas designadas por M , N , M'' e N'' eram os mesmos para todos os pontos da curva do condutor. Porém, esse último [resultado] também vale para um sistema consistindo em dois círculos paralelos iguais, o que não foi levado em consideração apenas porque ele constitui dois condutores separados. Contudo, por questões práticas ao realizar as observações, um tal sistema pode ser substituído em relação a quase todas as considerações por um condutor fechado

com enrolamento duplo e, portanto, de acordo com essa substituição, os valores das integrais definidas M , N , M'' e N'' podem ser colocados como sendo iguais para todos os pontos de um condutor fechado que constitui dois enrolamentos circulares muito próximos, por meio do qual fica possível expandir as leis de movimento da eletricidade, formulada inicialmente apenas para um condutor circular, a um condutor fechado consistindo em dois enrolamentos circulares iguais muito próximos.

Contudo um tal condutor, como vemos facilmente, apresenta uma *alternativa* essencial relacionada à variedade de conexões entre seus dois enrolamentos, que podem *ou* fornecer a mesma corrente atravessando os dois enrolamentos em série na mesma direção, *ou então* atravessando o segundo enrolamento na direção oposta em relação ao primeiro [enrolamento]. Esses dois casos correspondem a valores completamente diferentes de M , N , M'' e N'' , cuja razão pode ser determinada exatamente. De fato o mesmo vale também para o valor de M'' para $n = 0$, denominado por M''_0 , e podemos colocar a razão dos dois valores de M''_0 para os dois casos anteriores igual a $\nu : 1$.

Seja A a maior intensidade de corrente de uma oscilação elétrica nesse condutor no *primeiro* caso, e B no *segundo* caso, temos então, de acordo com a Seção 18.23,

$$A = \frac{g_0}{\sqrt{w'^2 + 4\mu^2 \left(\frac{4M''_0}{c^2} + \frac{1}{r\mathfrak{E}} \right)^2}},$$

$$B = \frac{g_0}{\sqrt{w'^2 + \mu^2 \left(\frac{4M''_0}{\nu c^2} + \frac{1}{r\mathfrak{E}} \right)^2}},$$

e os *dois valores*, A e B , *podem ser determinados por medições*; no entanto, assume-se aqui que a indução do ímã giratório não se estende a ambas as espiras do condutor fechado, mas que é limitada a uma das duas espiras, ou apenas a um elemento dela. Na realidade esse elemento é substituído pelo pequeno *indutor* que envolve o ímã giratório.

Mas agora esses valores de A e B podem ser determinados por medições para diferentes velocidades angulares, isto é, para valores diferentes de μ , e é claro que sua diferença tem de desaparecer completamente à medida que os valores de μ diminuam. Seja μ_0 o pequeno valor de μ para o qual essa diferença não é perceptível. Represente então por C aos valores de A e B quando considerados iguais; obtemos então

$$C = \frac{\mu_0}{\mu} \cdot \frac{g_0}{w'},$$

já que o coeficiente de indução, denominado por g_0 , é proporcional à velocidade angular. *Também esse terceiro valor, C , pode ser determinado por medições.*

Eliminando agora g_0 das três equações obtidas quando A , B , C são conhecidos por medições, obtemos as duas equações seguintes:

$$\frac{4M''_0}{c^2} + \frac{1}{r\mathfrak{E}} = \frac{w'}{2\mu} \sqrt{\frac{\mu^2}{\mu_0^2} \cdot \frac{C^2}{A^2} - 1},$$

$$\frac{4M''_0}{\nu c^2} + \frac{1}{r\mathfrak{E}} = \frac{w'}{2\mu} \sqrt{\frac{\mu^2}{\mu_0^2} \cdot \frac{C^2}{B^2} - 1},$$

portanto, segue que:

$$\frac{4M_0''}{c^2} = \frac{\nu}{\nu-1} \cdot \frac{w'}{2\mu} \left\{ \sqrt{\frac{\mu^2}{\mu_0^2} \cdot \frac{C^2}{A^2} - 1} - \sqrt{\frac{\mu^2}{\mu_0^2} \cdot \frac{C^2}{B^2} - 1} \right\} ,$$

$$\frac{1}{r\mathfrak{E}} = \frac{1}{\nu-1} \cdot \frac{w'}{2\mu} \left\{ \nu \sqrt{\frac{\mu^2}{\mu_0^2} \cdot \frac{C^2}{B^2} - 1} - \sqrt{\frac{\mu^2}{\mu_0^2} \cdot \frac{C^2}{A^2} - 1} \right\} .$$

A *primeira* dessas equações onde todas as grandezas são conhecidas pode servir para testar a teoria ou as observações, enquanto que a grandeza desconhecida $r\mathfrak{E}$ é encontrada pela *segunda* equação, na qual nem mesmo é necessária a determinação mais precisa das grandezas M_0'' , g_0 e C ,⁷¹⁹ mas apenas aquela [determinação] da razão $\nu : 1$.

A última das duas equações assim encontradas pode finalmente ser dada de uma maneira um pouco mais simples observando que a resistência da unidade de comprimento do fio condutor é igual a $w' = 1/[\pi\alpha^2\kappa]$, com α sendo o raio do fio e κ a condutividade específica do metal e que, além disso, a quantidade de eletricidade positiva expressa em unidades de medida eletrostática contida na unidade de comprimento do fio condutor é igual a $\mathfrak{E} = \pi\alpha^2 \cdot \mathfrak{E}_0$, onde $\mathfrak{E}_0$ denota a quantidade de eletricidade positiva *na unidade de volume* do fio condutor. Substituindo esses valores obtemos

$$\frac{1}{r\mathfrak{E}_0} = \frac{1}{2(\nu-1)\mu\kappa} \cdot \left\{ \nu \sqrt{\frac{\mu^2}{\mu_0^2} \cdot \frac{C^2}{B^2} - 1} - \sqrt{\frac{\mu^2}{\mu_0^2} \cdot \frac{C^2}{A^2} - 1} \right\} .$$

Portanto, falta ser considerado como determinar a razão denominada por $\nu : 1$.

Seja como antes $2\pi a$ o comprimento de todo o fio condutor fechado, sendo que cada metade dele, igual a πa , constitui um enrolamento, e considere essas duas espiras como círculos paralelos cujos centros estão a uma distância δ perpendicular ao plano dos círculos; então o valor de M_0'' pode ser dividido em duas partes em qualquer ponto de todo o fio condutor, a saber, a parte devida ao círculo contendo o ponto que está sendo considerado e a parte devida ao outro círculo à distância $= \delta$ do primeiro círculo. A *primeira* parte é encontrada imediatamente igual ao valor de M_0'' para um círculo de raio $= \frac{1}{2}a$, a saber, de acordo com a Seção 18.16, igual ao dobro do logaritmo da razão de oito vezes o raio do círculo para o raio do fio, $= 2 \log(4a/\alpha)$. Como pode ser visto facilmente, a *última* parte é obtida a partir da primeira parte apenas substituindo o raio α pela distância δ entre os dois círculos, a saber, $= 2 \log(4a/\delta)$. — Se agora os dois enrolamentos são conectados de tal forma que a corrente os atravessa na mesma direção, então o valor de M_0'' de todo o condutor fechado em qualquer ponto de seu primeiro ou segundo enrolamento será igual à *soma* das duas partes,

$$= 2 \log \frac{4a}{\alpha} + 2 \log \frac{4a}{\delta} ;$$

se, por outro lado, os dois enrolamentos estão conectados de tal maneira que a segunda espira seja atravessa no sentido oposto em relação à primeira, então o valor de M_0'' será igual à *diferença* entre as duas partes,

$$= 2 \log \frac{4a}{\alpha} - 2 \log \frac{4a}{\delta} ;$$

⁷¹⁹No texto original temos aqui c no lugar de C . Estou substituindo a letra c minúscula pela letra C maiúscula.

Obtemos portanto a razão desejada como sendo dada por

$$\nu : 1 = \left(2 \log \frac{4a}{\alpha} + 2 \log \frac{4a}{\delta} \right) : \left(2 \log \frac{4a}{\alpha} - 2 \log \frac{4a}{\delta} \right) = \left(\frac{2 \log \frac{4a}{\alpha}}{\log \frac{\delta}{\alpha}} - 1 \right) : 1 .$$

18.36 Conclusão

As discussões relacionadas à determinação da grandeza $r\mathfrak{E}$ na Seção anterior servem principalmente para exemplificar especificamente que *a dependência da amplitude de oscilação produzida por um ímã giratório em um condutor fechado em relação ao formato do fio condutor*, como apresentada na Seção 18.23, constitui um terceiro tópico importante e particularmente apropriado para *observações mais exatas*, merecendo um tratamento mais cuidadoso e mais amplo devido a seu significado múltiplo. Se a realização de observações exatas sobre esse tema é para ter utilização prática, então fica claro que isso tem de ser feito, *em primeiro lugar*, em conexão com a ampla discussão da dependência dos valores das integrais denominadas por N , N'' , M e M'' na Seção 18.8, em relação ao formato do fio condutor, restrito ao caso único de um fio circular na Seção 18.10 e, *em segundo lugar*, com uma discussão específica do valor da grandeza $r\mathfrak{E}$, cuja determinação é de grande interesse por si próprio, como foi tratado na Seção anterior. Agora foi mostrado de fato na Seção anterior como a determinação dessa grandeza $r\mathfrak{E}$ seria possível por meio de observações de um *caso especial* da dependência da amplitude de oscilação em relação ao formato do fio condutor sem entrar em uma discussão ampla dessa dependência em geral; no entanto, é fácil ignorar o fato de que ainda é necessário muito trabalho e observações para resolver a tarefa, que é por isso significativamente simplificada e limitada, e para a qual os métodos descritos e utilizados neste Tratado não são suficientes.

Além disso, como a determinação da grandeza $r\mathfrak{E}$ não diz respeito tanto à verificação das leis desenvolvidas na primeira Seção deste Tratado, que era o objetivo da segunda Seção, mas a uma nova aplicação da teoria com um objetivo peculiar e independente — que é adequado como tema de um Tratado especial — parece apropriado limitar a *execução das observações* pretendidas na segunda Seção deste Tratado ao exame das leis estabelecidas na primeira Seção e às *observações já comunicadas sobre os dois primeiros tópicos mencionados na Seção 18.23* — [a saber, (1),] comparação das amplitudes e fases das oscilações elétricas em diferentes pontos de um fio condutor longo e fechado — [e (2), a] lei da dependência da amplitude da oscilação em relação à velocidade angular do ímã —; e reservar a realização de todas as *observações mais precisas com relação ao terceiro assunto* — a saber, a lei da dependência da amplitude da oscilação com relação ao formato do fio condutor, juntamente com as questões e tarefas especiais relacionadas a ele, de acordo com as instruções da Seção anterior — para um Tratado futuro, para o qual, em última análise, era necessário apenas desenvolver antecipadamente os fundamentos contidos nos resultados do presente Tratado.

Capítulo 19

As Origens e os Significados da Constante c de Weber, da Constante c de Maxwell, e a Relação Dessas Duas Constantes Diferentes com a Velocidade da Luz no Vácuo

A. K. T. Assis⁷²⁰

Apresento aqui as origens e os significados da constante c de Weber e da constante c de James Clerk Maxwell (1831-1879). Embora essas duas constantes sejam representadas pelo mesmo símbolo, elas se referem a grandezas diferentes que possuem valores numéricos diferentes. A constante c de Weber é igual à constante c de Maxwell multiplicada pela raiz quadrada de 2. Também discuto as relações dessas duas constantes diferentes com a velocidade da luz no vácuo.

19.1 A Constante c de Weber

Wilhelm Weber unificou em 1846 a eletrostática (força de Coulomb de 1785), a eletrodinâmica (força de Ampère entre elementos de corrente de 1822 e 1826), e a lei de indução de Faraday (1831). Na Seção 19 desse trabalho de 1846 Weber apresentou a seguinte força entre duas partículas eletrizadas com cargas e e e' separadas pela distância r :⁷²¹

$$\frac{ee'}{r^2} \left[1 - a^2 \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + b \frac{d^2r}{dt^2} \right]. \quad (19.1)$$

A grandeza a nessa Equação é uma constante com a dimensão inversa de uma velocidade, ou seja, tempo por distância. Já b é uma outra grandeza que ele mostrou ser dada por:⁷²²

⁷²⁰Homepage: www.ifi.unicamp.br/~assis

⁷²¹[Web46, Seção 19, pág. 142 das *Obras* de Weber], [Web07, Seção 19, pág. 87] e [Web21b, Seção 19, pág. 136].

⁷²²[Web46, pág. 144 das *Obras* de Weber], [Web07, pág. 89] e [Web21b, pág. 138].

$$b = 2ra^2 . \quad (19.2)$$

Ao combinar as Equações (19.1) e (19.2) ele expressou sua lei fundamental da seguinte maneira:

$$\frac{ee'}{r^2} \left[1 - a^2 \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + 2a^2 \cdot r \frac{d^2r}{dt^2} \right] . \quad (19.3)$$

Na Seção 21 do mesmo trabalho de 1846 ele introduziu uma outra constante pela mesma letra a , enfatizando que seu valor era diferente da constante a introduzida na Seção 19. Ele então expressou sua lei de força em termos dessa nova constante a da seguinte maneira:⁷²³

$$\frac{ee'}{r^2} \left[1 - \frac{a^2}{16} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{a^2}{8} r \frac{d^2r}{dt^2} \right] . \quad (19.4)$$

Em 1848 ele apresentou uma energia potencial a partir da qual podia deduzir sua força.⁷²⁴

Para colocar a Equação (19.4) em um formato mais simples, Weber substituiu em 1852 a constante $a^2/16$ da por uma nova constante $1/c^2$ e expressou sua força da seguinte maneira:⁷²⁵

$$\frac{ee'}{r^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} \cdot \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2r}{c^2} \frac{d^2r}{dt^2} \right] . \quad (19.5)$$

Essa foi a primeira vez em que Weber introduziu essa constante $c = 4/a$. Essa constante c tem a dimensão de uma velocidade, isto é, distância por tempo. Em 1852 Weber não tinha ideia de seu valor numérico (ela poderia valer, por exemplo, 10^5 m/s, 10^{11} m/s ou 10^{15} m/s). Além disso, naquela época ninguém tinha a menor ideia de que essa constante pudesse ter qualquer relação com a velocidade da luz no vácuo. Ela era então uma constante puramente eletrodinâmica.

O motivo pelo qual ele escolheu a letra c para essa nova constante foi provavelmente alfabético, para simplificar a expressão de sua lei de força. Afinal de contas, já havia utilizado as letras a e b na expressão de sua força fundamental.

Além disso, Weber mostrou, em particular, que quando duas partículas estavam se deslocando entre si com uma velocidade relativa constante dada por $dr/dt = \pm c$, de tal forma que $d^2r/dt^2 = 0$, elas não exerceriam uma força resultante mútua de acordo com sua lei. Esse foi o significado que deu a essa constante, a saber:⁷²⁶

c denota o valor constante da velocidade relativa dr/dt na qual duas massas elétricas não exercem nenhuma ação uma sobre a outra.

Ele expressou o mesmo significado de sua constante c em outros trabalhos.⁷²⁷ Por exemplo:⁷²⁸

⁷²³[Web46, Seção 21, págs. 152 e 157 das *Obras* de Weber], [Web07, Seção 21, págs. 94 e 98] e [Web21b, Seção 21, págs. 144 e 149].

⁷²⁴[Web48a, pág. 245 das *Obras* de Weber] com traduções para o inglês em [Web52e], [Web66d], [Web19] e [Web21n].

⁷²⁵[Web52c, pág. 366 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21c, pág. 346].

⁷²⁶[Web52c, pág. 367 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21c].

⁷²⁷[Web55b, pág. 594 das *Obras* de Weber], [WK56, pág. 20 do artigo de 1856 e pág. 605 das *Obras* de Weber], [WK03, pág. 294], [WK21, pág. 137], [WK08, pág. 99] e [KW57, págs. 617 e 651 das *Obras* de Weber].

⁷²⁸Ver, em particular, as páginas 142, 152 e 163 dessa tradução em português.

O significado da *constante* c é o de uma velocidade definida, ou seja, aquela velocidade com a qual duas massas elétricas devem aproximar-se ou afastar-se uma da outra para que não haja atração nem repulsão entre elas.

Em 1869 também expressou sua energia potencial em termos dessa constante c :⁷²⁹

$$\frac{ee'}{r} \left[1 - \frac{1}{c^2} \cdot \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right]. \quad (19.6)$$

Weber trabalhou bastante na determinação das intensidades de corrente, assim como em suas dimensões e unidades, através das ações produzidas por essas correntes elétricas. A unidade eletrodinâmica de intensidade de corrente foi relacionada à força de Ampère entre dois elementos de corrente e à força análoga entre dois fios conduzindo correntes constantes.⁷³⁰ A unidade eletromagnética de intensidade de corrente foi relacionada ao torque exercido por um fio conduzindo corrente ao atuar sobre um ímã. A unidade eletrolítica de intensidade de corrente foi relacionada à quantidade de água que é decomposta por unidade de tempo quando uma corrente flui através dela. Ele também determinou a intensidade de corrente, assim como sua dimensão e unidade, através da origem da corrente, isto é, pela quantidade de carga elétrica que atravessa a seção reta do circuito em um certo intervalo de tempo. Essa unidade foi denominada por ele de unidade mecânica da corrente elétrica. Nesse caso a quantidade de carga foi determinada mecanicamente na eletrostática por meio da força com que duas partículas eletrizadas atuam entre si à distância, isto é, utilizando a força de Coulomb.⁷³¹ Weber mostrou que as razões das unidades eletrodinâmica, eletromagnética e eletrolítica de corrente para a unidade mecânica de corrente estavam relacionada com sua constante c . Cada uma das razões está relacionada de uma maneira diferente com a constante c .

Weber tinha dois motivos principais para medir o valor numérico da constante c . O primeiro era para completar a determinação de sua lei de força fundamental. Dessa forma ele seria capaz de comparar quantitativamente a componente eletrostática de sua força (que depende apenas da distância r entre as partículas eletrizadas) com as componentes dinâmicas (que dependem da velocidade relativa entre elas, dr/dt , assim como da aceleração relativa entre elas, d^2r/dt^2). O segundo motivo era para ser capaz de comparar completamente entre si as intensidades, unidades e dimensões das correntes elétricas obtidas da origem da corrente (ou seja, obtidas da quantidade de carga que atravessa a seção reta do condutor por unidade de tempo) com suas intensidades, unidades e dimensões obtidas pelas outras ações da corrente (ou seja, obtidas por suas ações eletrodinâmicas, eletromagnéticas e eletrolíticas).

A primeira determinação experimental do valor da constante c foi realizada por Weber e Rudolf Kohlrausch (1809-1858) entre 1854 e 1856. O valor numérico que obtiveram foi apresentado em três trabalhos publicados em 1855, 1856 e 1857.⁷³² O valor final da constante de Weber após levar em consideração todas as correções foi dado por:⁷³³

⁷²⁹[Web69, pág. 243 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21h].

⁷³⁰Ver a Nota de rodapé 90 na página 66.

⁷³¹Ver a Nota de rodapé 89 na página 66.

⁷³²[Web55b], [WK56] e [KW57], com traduções para o inglês em [Web21f], [WK03], [WK21] e [KW21]. Esses trabalhos estão traduzidos para o português nos Capítulos 6, 7 e 8, respectivamente.

⁷³³[WK56, pág. 605 das *Obras* de Weber], [WK03, pág. 294], [WK21, pág. 138], [WK08, pág. 100], [KW57, pág. 652 das *Obras* de Weber] e [KW21, pág. 179]. Ver, em particular, a página 197 na Seção 8.17 da tradução em português.

$$c = 4,39450 \times 10^8 \text{ m/s} . \quad (19.7)$$

19.2 A Relação da Constante c de Weber com a Velocidade da Luz

Wilhelm Weber e Gustav Kirchhoff (1824-1887) foram os primeiros cientistas a deduzir teoricamente, em 1857, a equação do telégrafo completa. Utilizando os conceitos atuais e a terminologia usual da teoria de circuitos, é possível dizer que eles foram os primeiros a levar em consideração não apenas a capacitância e resistência do fio, mas também sua auto-indutância. Eles deduziram a equação do telégrafo utilizando a lei de força de 1846 de Weber entre partículas eletrizadas. Os artigos de Kirchhoff foram publicados em 1857.⁷³⁴ O trabalho simultâneo e independente de Weber teve sua publicação atrasada devido à morte de R. Kohlrausch em 1858, com quem Weber estava realizando algumas experiências relacionadas com a propagação de oscilações elétricas ao longo de fios condutores, sendo publicado apenas em 1864.⁷³⁵

Os trabalhos de 1857 de Kirchhoff foram publicados nos *Annalen der Physik und Chemie*, sendo que atualmente o nome desse periódico é apenas *Annalen der Physik*. Nesse ano de 1857 Johann Christian Poggendorff (1796-1877), o Editor desse periódico, publicou um artigo no mesmo Volume dos *Annalen*, após o primeiro artigo de Kirchhoff.⁷³⁶ Ele informou que após ver o artigo de Kirchhoff, encontrou-se com Weber em Berlim. Weber mostrou-lhe um trabalho completo que pretendia publicar contendo essencialmente os mesmos resultados que Kirchhoff. Contudo, Weber ainda não havia enviado seu trabalho para publicação pois estava aguardando os resultados de algumas experiências sobre esse tema que estavam sendo realizadas com R. Kohlrausch. Essas experiências lidavam com a propagação de sinais eletromagnéticos ao longo de fios condutores, levando em consideração correntes variáveis e os efeitos das cargas superficiais sobre a corrente elétrica. Devido ao falecimento de Kohlrausch em 1858, o trabalho experimental de Weber atrasou e ele só publicou seu trabalho completo sobre esse tema em 1864. Em seu trabalho publicado Weber comparou seus resultados teóricos com aqueles de Kirchhoff e mencionou o artigo de Poggendorff.⁷³⁷

Kirchhoff e Weber mostraram, em particular, que quando o condutor tinha resistência desprezível, a equação do telégrafo reduz-se à equação de onda. Nesse caso a velocidade de propagação de uma onda elétrica é aproximadamente igual à velocidade da luz no vácuo. Como Kirchhoff afirmou em seu artigo (referindo-se à constante c de Weber):⁷³⁸

Descobriu-se aqui que a velocidade de propagação de uma onda elétrica é $= c/\sqrt{2}$, ou seja, independente da seção transversal e da condutividade do fio, bem como da densidade da eletricidade; seu valor é de 41950 milhas em um segundo, ou seja, quase igual à velocidade da luz no espaço vazio.

⁷³⁴[Kir57b] e [Kir57c] com traduções para o inglês em [Kir57a] e [Kir21b], e [GA94], respectivamente. Eles estão traduzidos em português nos Capítulos 9 e 13.

⁷³⁵[Web64] com tradução para o inglês em [Web21a] e tradução para o português no Capítulo 18.

⁷³⁶[Pog57] com tradução para o inglês em [Pog21] e tradução para o português no Capítulo 11. Ver ainda o Capítulo 12.

⁷³⁷[Web64, Seção 6, págs. 130-132 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21a, Seção 6]. Ver em particular, a Seção 18.6 dessa tradução em português.

⁷³⁸[Kir57b, págs. 209-210] com traduções para o inglês em [Kir57a, p. 406] e [Kir21b, pág. 214]. Ver, em particular, a página 232 dessa tradução em português.

Representando a velocidade da luz no vácuo por v_L e assumindo que $c/\sqrt{2}$ seja igual a essa velocidade obtém-se:

$$\frac{c}{\sqrt{2}} = v_L \quad \text{ou} \quad c = \sqrt{2} \cdot v_L . \quad (19.8)$$

A força e a energia potencial de Weber dadas pelas Equações (19.5) e (19.6) podem ser expressas em termos da constante c de Weber e também em termos da velocidade da luz no vácuo, v_L , das seguintes maneiras:

$$\frac{ee'}{r^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2r}{c^2} \frac{d^2r}{dt^2} \right] = \frac{ee'}{r^2} \left[1 - \frac{1}{2v_L^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{r}{v_L^2} \frac{d^2r}{dt^2} \right] , \quad (19.9)$$

e

$$\frac{ee'}{r} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] = \frac{ee'}{r} \left[1 - \frac{1}{2v_L^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] . \quad (19.10)$$

Utilizando o valor experimental de Weber e Kohlrausch da constante c de Weber, Equação (19.7), a velocidade de propagação de uma onda elétrica obtida por Weber e Kirchhoff fica então dada por:

$$\frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{4,39450 \times 10^8 \text{ m/s}}{\sqrt{2}} = 3,10738 \times 10^8 \text{ m/s} . \quad (19.11)$$

Esse valor está realmente muito próximo da velocidade da luz que já era conhecida naquela época por observações astronômicas e por experiências terrestres. Entre as observações astronômicas cito os trabalhos do astrônomo dinamarquês Ole Rømer (1644-1710), com a publicação de seus resultados em 1676,⁷³⁹ e do astrônomo inglês James Bradley (1692-1762) com a publicação em 1727.⁷⁴⁰ Rømer e Bradley determinaram a velocidade da luz em relação ao pano de fundo das estrelas fixas. Entre as experiências terrestres cito os trabalhos dos físicos franceses Hippolyte Fizeau (1819-1896) em 1849 e Léon Foucault (1819-1868) em 1850.⁷⁴¹ Fizeau e Foucault determinaram a velocidade da luz em relação à Terra.

Vários cientistas ficaram impressionados com esse resultado notável. Em 1858 Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), que foi aluno e assistente de Weber em algumas de suas experiências, escreveu um artigo (publicado postumamente em 1867) no qual desenvolveu a teoria de um potencial retardado propagando-se no espaço com essa velocidade de $c/\sqrt{2}$.⁷⁴² O físico e matemático dinamarquês Ludvig Valentin Lorenz (1829-1891) desenvolveu uma teoria independente de ondas eletromagnéticas deslocando-se com uma velocidade $c/\sqrt{2}$ utilizando potenciais retardados.⁷⁴³ O matemático alemão Carl Gottfried Neumann (1832-1925), filho do cientista Franz Ernst Neumann (1798-1895), também desenvolveu uma teoria independente sobre a propagação de potenciais eletrodinâmicos, o que gerou um debate com o físico e matemático alemão Rudolf Julius Emanuel Clausius (1822-1888).⁷⁴⁴

⁷³⁹[Röm76] com traduções para o inglês em [Rom77] e [Roe35]. Ver ainda [Coh40] e [Tat78].

⁷⁴⁰[Bra27], [Bra29] e [Bra35].

⁷⁴¹[Fiz49], [FB50] e [Fou53].

⁷⁴²[Rie67b] com tradução para o inglês em [Rie67a] e [Rie77].

⁷⁴³[Lor67b] com tradução para o inglês em [Lor67a].

⁷⁴⁴[Neu68a] com tradução para o inglês em [Neu21b], [Neu68b], [Neu69] com tradução para o inglês em [Neu21a], [Cla68] com tradução para o inglês em [Cla69] e [Arc86].

Maxwell estava ciente desses dois trabalhos de Kirchhoff de 1857. O primeiro artigo foi publicado em alemão nos *Annalen der Physik und Chemie* e uma tradução em inglês apareceu no mesmo ano no periódico *Philosophical Magazine* tendo como título “On the motion of electricity in wires”.⁷⁴⁵ Na Nota 26 do artigo de Schaffer de 1995 encontramos a seguinte observação importante relacionada ao conhecimento de Maxwell sobre o primeiro artigo de 1857 de Kirchhoff.⁷⁴⁶

No início da década de 1870 Maxwell fez notas detalhadas relacionadas ao artigo de Kirchhoff sobre a eletricidade em fios: ver Cambridge University Library MSS ADD 7655 Vn/1, pág. 44 e seguintes.

O segundo artigo de Kirchhoff de 1857 também foi publicado nos *Annalen der Physik und Chemie*.⁷⁴⁷ A primeira frase desse artigo cita o trabalho anterior de 1857 de Kirchhoff. Esse segundo artigo de Kirchhoff foi citado explicitamente por Maxwell na Nota incluída no Artigo [805] do segundo Volume do livro de Maxwell de 1873 intitulado *Tratado sobre Eletricidade e Magnetismo*.⁷⁴⁸ Contudo, essa citação específica não aparece no índice remissivo ao final do *Treatise* de Maxwell relacionado ao nome de Kirchhoff.⁷⁴⁹ Por esse motivo alguns pesquisadores que discutem o trabalho de Maxwell podem não ter percebido essa informação bem importante. O trabalho de 1867 de Ludvig Lorenz também é discutido por Maxwell nessa Nota incluída no Artigo [805] do *Treatise*. Curiosamente essa menção ao nome de Ludvig Lorenz aparece no índice remissivo do livro de Maxwell.

Duas das principais inspirações de Maxwell para o desenvolvimento de sua teoria eletromagnética da luz desenvolvida no período 1861-1873 estavam relacionadas com esses dois resultados, a saber:

- a medida experimental da constante c por Weber e Kohlrausch, publicada entre 1855 e 1857, e
- a obtenção por Kirchhoff e Weber de uma equação de onda descrevendo a propagação de ondas elétricas com uma velocidade $c/\sqrt{2} = 3,1 \times 10^8 \text{ m/s}$, isto é, essencialmente com o mesmo valor que a conhecida velocidade da luz obtida por observações astronômicas e por experiências terrestres. Esses trabalhos foram publicados em 1857 e 1864.

Discuto na próxima Seção alguns trabalhos de Maxwell relacionados com esse assunto.

A medição extremamente importante realizada por Weber e Kohlrausch da constante c tem sido discutida por diversos autores.⁷⁵⁰

⁷⁴⁵[Kir57b] com traduções para o inglês em [Kir57a] e [Kir21b], e com tradução para o português no Capítulo 9.

⁷⁴⁶[Sch95].

⁷⁴⁷[Kir57c] com tradução para o inglês em [GA94] e [Kir21a], e tradução para o português no Capítulo 13.

⁷⁴⁸[Max73a, Artigo 805, pág. 398] e [Max54, Artigo 805, pág. 450].

⁷⁴⁹[Max73a, Índice na pág. 441] e [Max54, Índice na pág. 498].

⁷⁵⁰[Duh02] com tradução para o inglês em [Duh15], [Kir56] com tradução para o inglês em [Kir57], [Ros56], [Wie60], [Woo62], [O’R65, pág. 534], [Wie67], [Woo68], [Whi73, pág. 232], [Woo81], [Wis81], [Ros81], [D’A81], [Har82], [JM86, Vol. 1, págs. 144-146 e 296-297], [Wie92], [Wie93c], [Wie93b], [Wie93a], [Wie94], [Hec96b], [Hec96a], [Hec97], [Wie97], [Gib97], [Dar00], [ARW02], [AW03], [ARW04], [Wie04], [Men06], [Men15], [Tom20] e [Hun21].

19.3 A Constante c de Maxwell e a Confusão Introduzida por Muitos Cientistas, Incluindo Einstein

Apresento agora a origem da constante c de Maxwell.⁷⁵¹ Essa constante aparece na maioria dos livros didáticos como representando a velocidade da luz no vácuo e também a razão das unidades eletromagnética e eletrostática de carga. Seu valor é dado como um número próximo de 3×10^8 m/s. A origem da constante c de Maxwell está intimamente relacionada com a constante c de Weber. O símbolo da constante c de Maxwell é o mesmo símbolo da constante c de Weber. Apesar desse fato, o significado e o valor numérico da constante c de Maxwell são diferentes do significado e do valor numérico da constante c de Weber. O valor da constante c de Maxwell é dado pela constante c de Weber dividida pela raiz quadrada de 2. O objetivo dessa Seção é clarificar essa situação na qual a mesma letra representa duas grandezas diferentes.

Em seu artigo sobre as linhas físicas de força publicado em 1862-1862 Maxwell utilizou a letra V maiúscula para representar a velocidade da luz (ou a velocidade de propagação de perturbações eletromagnéticas em um meio não condutor de acordo com sua teoria eletromagnética da luz), continuando a usar o símbolo V com esse significado em suas outras publicações.⁷⁵² Em seu artigo sobre uma teoria dinâmica do campo eletromagnético publicado em 1865 Maxwell utilizou a letra minúscula v para representar o número de unidades eletrostáticas de eletricidade contidas em uma unidade eletromagnética de eletricidade (ou o número de unidades da eletricidade estática que são transmitidos pela unidade de corrente elétrica na unidade de tempo, com essa corrente sendo estimada em unidades eletromagnéticas), continuando a usar o símbolo v com esse significado em seus outros trabalhos.⁷⁵³ Ele também utilizou essa letra minúscula v para representar essa razão em seu livro *Tratado sobre Eletricidade e Magnetismo* publicado originalmente em 1873.⁷⁵⁴ Maxwell utilizou as letras V e v para essas duas grandezas pelo fato delas terem a dimensão de uma velocidade.

Maxwell mencionou em todos os seus trabalhos citados anteriormente que a primeira determinação numérica da razão entre as unidades eletromagnética e eletrostática de eletricidade, v , havia sido obtida por Weber e Kohlrausch, citando seus trabalhos de 1856 e 1857. Maxwell expressou essa medida como:⁷⁵⁵

$$v = 3,10740 \times 10^8 \text{ m/s} . \quad (19.12)$$

O próprio Maxwell fez uma experiência para determinar essa grandeza em 1868.⁷⁵⁶ Ele obteve o seguinte valor:

$$v = 2,8798 \times 10^8 \text{ m/s} . \quad (19.13)$$

Discuto agora esses valores numéricos obtidos por Weber e Maxwell em suas experiências. O valor da constante c de Weber dividida por raiz quadrada de 2, ou seja, $c/\sqrt{2}$, como obtido por Weber e Kohlrausch entre 1854 e 1856, foi $3,10738 \times 10^8$ m/s, ver a Equação (19.11). A

⁷⁵¹[Gib97], [Men06] e [Ano06].

⁷⁵²[Max62, pág. 22], [Max65, pág. 497], [Max68, pág. 655], [Max54, Vol. 2, Artigo 784, pág. 434] e [Hop59].

⁷⁵³[Max65, pág. 491] e [Max68, pág. 645].

⁷⁵⁴[Max73b, Vol. 2, Artigo 628, pág. 243, e Artigos 768-780, págs. 368-382] e [Max54, Vol. 2, Artigo 628, pág. 268, e Artigos 768-780, págs. 413-430].

⁷⁵⁵[Max65, pág. 499], [Max68, pág. 651] e [Max54, Vol. 2, Artigo 771, pág. 417].

⁷⁵⁶[Max68, pág. 651], [Max70, pág. 438], [Max54, Vol. 2, Artigo 787, pág. 436] e [Hop59].

medição realizada por Maxwell em 1856 forneceu $2,8798 \times 10^8 \text{ m/s}$, ver a Equação (19.13). Comparo agora esses números com o valor atual da velocidade da luz no vácuo como apresentado nos livros didáticos modernos, a saber, $2,99792 \times 10^8 \text{ m/s}$. As variações relativas Δ (ou as diferenças percentuais Δ) dos valores obtidos por Weber e Maxwell, quando comparados com o valor moderno da velocidade da luz no vácuo, são dados por, respectivamente:

$$\Delta_{Weber} = \frac{|3,10738 - 2,99792|}{2,99792} \times 100\% = 3,65\% , \quad (19.14)$$

$$\Delta_{Maxwell} = \frac{|2,8798 - 2,99792|}{2,99792} \times 100\% = 3,94\% . \quad (19.15)$$

Weber e Kohlrausch, antes de realizar essa experiência, não tinham qualquer ideia sobre a ordem de grandeza que deveriam encontrar para c . Seu valor poderia ser, por exemplo, 10^5 m/s , 10^{11} m/s ou 10^{15} m/s . Além disso, em 1854 ninguém tinha ideia de que a constante c de Weber pudesse ter qualquer relação com a velocidade da luz no vácuo, v_L . Isto é, não havia sido previsto que $c/\sqrt{2}$ poderia ter o mesmo valor que v_L . Aproximadamente 14 anos após Weber, Maxwell mediu a mesma grandeza. Ele sabia sua ordem de grandeza com precisão a partir da experiência anterior de Weber. Além disso, Maxwell esperava que o valor dessa grandeza fosse exatamente o mesmo que a velocidade da luz no vácuo a partir de sua teoria eletromagnética da luz. Apesar de todos esses fatos, a medição de Maxwell dessa grandeza $c/\sqrt{2}$ está mais afastada do valor moderno da velocidade da luz no vácuo do que a medição de Weber dessa mesma grandeza, como pode ser visto comparando as Equações (19.14) e (19.15).

Assumindo que a constante c de Weber deva ser exatamente igual à velocidade da luz vezes a raiz quadrada de 2, juntamente com o valor atual da velocidade da luz no vácuo como sendo dado por $2,99792 \times 10^8 \text{ m/s}$, então o valor preciso da constante c de Weber deve ser $4,23970 \times 10^8 \text{ m/s}$. Weber e Kohlrausch encontraram $4,39450 \times 10^8 \text{ m/s}$.

É importante citar aqui as palavras de Kirchner publicadas no centenário da experiência de Weber e Kohlrausch:⁷⁵⁷

[...] se formos usar as palavras de Weber e Kohlrausch, temos de formular os resultados obtidos da seguinte maneira.

A razão entre a unidade mecânica e a unidade magnética de intensidade de corrente comporta-se como $1 : 3,1074 \times 10^{11}$ no sistema mm-mg-seg ou como $1 : 3,1074 \times 10^{10}$ no sistema cm-g-seg [ou seja, no sistema CGS de unidades].

Se levarmos em conta que essa razão não era nem mesmo conhecida em termos de ordem de grandeza naquela época, que foi, portanto, um trabalho decididamente pioneiro, e se percebermos ainda os meios primitivos que tiveram que ser usados naquela época, então devemos admirar o trabalho de Weber e Kohlrausch como uma obra-prima da arte da experimentação, como há muito poucas na história de nossa ciência.

Maxwell comparou os valores medidos dessas duas grandezas, V e v , em vários trabalhos.⁷⁵⁸ No que diz respeito à velocidade da luz, V , ele mencionou as medições de Fizeau,

⁷⁵⁷[Kir56, pág. 531] com tradução para o inglês em [Kir57, pág. 625].

⁷⁵⁸[Max65, pág. 499], [Max68, págs. 651-652] e [Max54, Vol. 2, Artigo 771, pág. 417, juntamente com os Artigos 786-787, págs. 435-436].

Foucault e aquelas baseadas na aberração e na paralaxe do Sol. No que diz respeito à razão entre a unidade eletromagnética e eletrostática de carga, v , ele mencionou as medições de Weber e Kohlrausch, seu próprio experimento, assim como aquele de W. Thomson de 1869.⁷⁵⁹ Em sua teoria eletromagnética da luz era esperado que $V = v$.

Outros autores continuaram a utilizar esse significado da constante v .⁷⁶⁰

Até o momento tudo estava em ordem. A confusão começou com Maxwell em um cartão postal que enviou para o físico e matemático escocês Peter Guthrie Tait (1831-1901) em 1871,⁷⁶¹ e principalmente em seu livro *Tratado sobre Eletricidade e Magnetismo* publicado em 1873.⁷⁶² Em seus artigos de 1855 (publicado em 1858) e 1864 (publicado em 1865), ele elogiou bastante a eletrodinâmica de Weber, vendo apenas um problema nela, a saber, ele acreditava que a lei de Weber era incompatível com o princípio de conservação da energia.⁷⁶³ Em 1869 e 1871 Weber provou detalhadamente que sua força era compatível com o princípio de conservação da energia utilizando sua energia potencial que havia introduzido em 1848.⁷⁶⁴ Maxwell mudou seu ponto de vista apenas em 1871, após as provas de Weber. Harman reproduziu um cartão postal de Maxwell para Tait datado de 7 de novembro de 1871. Nesse cartão postal Maxwell informou a Tait que Weber tinha razão, isto é, a força de Weber pode ser deduzida de uma energia potencial. Portanto, em qualquer operação cíclica não há trabalho gasto ou ganho. Há então conservação da energia na eletrodinâmica de Weber.⁷⁶⁵ Nesse cartão postal Maxwell escreveu a energia potencial ψ de Weber e sua força como sendo dadas por, respectivamente:

$$\psi = \frac{ee'}{r} \left[1 - \frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \right], \quad (19.16)$$

e

$$m \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \frac{ee'}{r^2} \left[1 - \frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 + \frac{r}{c^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \right]. \quad (19.17)$$

Em seu livro *Tratado sobre Eletricidade e Magnetismo* Maxwell discutiu a dedução de Weber da fórmula de Ampère para a força entre dois elementos de corrente de comprimentos ds e ds' . Maxwell considerou dois elementos de corrente conduzindo correntes elétricas de intensidades i e i' como medidas em unidades eletromagnéticas. Ele também considerou duas partículas elétricas e e e_1 (com os valores de suas cargas sendo medidas em unidades eletrostáticas), deslocando-se com velocidades v e v_1 ao longo do primeiro elemento de corrente. Afirmou então que:⁷⁶⁶

a transferência total de eletricidade, calculada algebricamente, ao longo do primeiro circuito, é representada por

⁷⁵⁹[Max70] e [Kin70].

⁷⁶⁰[Kin70], [Tho83], [Ros89] e [TS90].

⁷⁶¹[Har82, págs. 96-97] e [Max95, págs. 686-688].

⁷⁶²Ver o Capítulo XXIII, Teorias de Ação à Distância, no Volume 2 do *Treatise* do Maxwell, [Max73b] e [Max54]. Tradução para o alemão em [Max83a]. Tradução para o português em [Ass92].

⁷⁶³[Max58, págs. 66-67 do artigo de 1858 e págs. 207-208 do livro de Niven] e [Max65, págs. 526-527 do livro de Niven].

⁷⁶⁴[Web69] com tradução para o inglês em [Web21h]; [Web71] com traduções para o inglês em [Web72] e [Web21d].

⁷⁶⁵[Har82, págs. 96-97] e [Max95, págs. 686-688].

⁷⁶⁶[Max73b, Vol. 2, Artigo 849, pág. 428] e [Max54, Vol. 2, Artigo 849, pág. 482].

$$ve + v_1e_1 = cids , \quad (19.18)$$

onde c é o número de unidades de eletricidade estática que são transmitidas pela unidade de corrente elétrica na unidade de tempo.

Ou seja, a constante c introduzida aqui por Maxwell é a mesma constante que ele havia sempre representado por v , isto é, o número de unidades eletrostáticas de eletricidade contidas em uma unidade eletromagnética de eletricidade.

Nos Artigos 850 e 853 de seu *Treatise*, Maxwell considerou duas partículas elétricas, e e e' , separadas por uma distância r . Ele então expressou a força e energia potencial ψ de Weber da mesma forma que as havia representado em seu cartão postal de 1871 para Tait, a saber:⁷⁶⁷

$$\frac{ee'}{r^2} \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(r \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \right) \right] , \quad (19.19)$$

e

$$\psi = \frac{ee'}{r} \left[1 - \frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \right] . \quad (19.20)$$

Maxwell utilizou aqui os símbolos $\partial r/\partial t$ e $\partial^2 r/\partial t^2$ para indicar a velocidade relativa dr/dt e a aceleração relativa d^2r/dt^2 de Weber, respectivamente. O que Maxwell escreveu como $\partial r/\partial t$ seria escrito hoje em dia como dr/dt , como é evidente daquilo que escreveu no Artigo [847] de seu *Treatise*. Embora Weber e Maxwell tenham utilizado símbolos diferentes para expressar a velocidade relativa entre duas partículas (ou seja, as grandezas dr/dt e $\partial r/\partial t$), elas tinham os mesmos significados para esses dois autores. O mesmo pode ser dito da aceleração relativa entre duas partículas (ou seja, as grandezas d^2r/dt^2 (como representada por Weber) e $\partial^2 r/\partial t^2$ (como representada por Maxwell)).

A principal diferença entre as Equações (19.5), (19.17) e (19.19) — ou entre as Equações (19.6), (19.16) e (19.20) — é que a constante c de Maxwell tem um valor diferente da constante c de Weber. Vamos representar aqui a constante c de Weber por c_{Weber} , enquanto que a constante c de Maxwell será representada por $c_{Maxwell}$. Uma comparação das Equações (19.5) e (19.19) — ou uma comparação entre as Equações (19.6) e (19.20) — fornece $1/c_{Weber}^2 = 1/(2c_{Maxwell}^2)$, isto é, $c_{Weber} = \sqrt{2} \cdot c_{Maxwell}$ ou $c_{Maxwell} = c_{Weber}/\sqrt{2}$. Essa comparação mostra que a constante c de Maxwell é a constante c de Weber dividida pela raiz quadrada de 2. Além disso, combinando esse resultado com a Equação (19.8) fornece:

$$c_{Maxwell} = \frac{c_{Weber}}{\sqrt{2}} = v_L . \quad (19.21)$$

Não sei o motivo pelo qual Maxwell escreveu a força e a energia potencial de Weber como dadas pelas Equações (19.16) e (19.17). Talvez ele tenha tido um lapso de memória e não tivesse consigo os trabalhos originais de Weber quando escreveu esse cartão postal para Tait em 1871. De qualquer forma, também não sei o motivo dele continuar a expressar a força e a energia potencial de Weber dessa mesma maneira dois anos mais tarde em seu *Treatise* publicado em 1873, como pode ser visto nas Equações (19.19) e (19.20).

⁷⁶⁷[Max73b, Vol. 2, Artigos 850 e 853, págs. 428-429] e [Max54, Vol. 2, Artigos 850 e 853, págs. 483-484].

No *Treatise* ele pode ter utilizado a letra c em vez da letra v usual para representar o número de unidades eletrostáticas de eletricidade que estão contidas em uma unidade eletromagnética de eletricidade para evitar confusão com a letra v que estava utilizando agora nesse último Capítulo do *Treatise* para representar a velocidade da partícula elétrica e relação ao fio metálico. Contudo, Maxwell não alertou a seus leitores dessa mudança de letras. Também não alertou que a letra atual c no Artigo [849] do último Capítulo do *Treatise* era a mesma grandeza que sua letra v anterior nos Artigos [628] e [771] do mesmo *Treatise*, a saber, o número de unidades de eletricidade estática que são transmitidas pela unidade de corrente elétrica na unidade de tempo.

Além disso, Maxwell não enfatizou no *Treatise* que sua constante c incluída nas Equações (19.19) e (19.20) era numericamente diferente da constante c de Weber aparecendo nas Equações (19.5) e (19.6). A constante c de Weber havia sido amplamente utilizada na física. É impressionante que sem nenhum aviso a seus leitores Maxwell tenha escrito a força e energia potencial de Weber utilizando uma letra c que tinha um valor numérico diferente da letra c que o próprio Weber havia introduzido exatamente na expressão de sua força!

A importância adquirida pelo *Treatise* de Maxwell criou uma confusão relacionada com o significado e com o valor numérico de c que tem durado até os dias atuais.

Paul K. L. Drude (1863-1906) foi um físico alemão que escreveu artigos e livros integrando a óptica com a teoria eletromagnética de Maxwell. Ele utilizou, assim como Maxwell, a letra V maiúscula para representar a velocidade da luz propagando-se no éter.⁷⁶⁸ Em 1894 ele seguiu Maxwell e denominou $c = 3 \times 10^8$ m/s como sendo o número de unidades eletrostáticas de eletricidade contidas em uma unidade eletromagnética. Ele também afirmou que Kirchhoff havia mostrado em 1864 que as ondas elétricas propagam-se ao longo de fios metálicos com essa velocidade c .⁷⁶⁹

Kirchhoff (G. Kirchhoff, Pogg. *Ann.* 121, 1864) provou que ondas elétricas têm de se deslocar ao longo de um fio metálico, localizado no ar, com a velocidade c , onde c é a razão de uma quantidade de eletricidade medida de acordo com a unidade eletrostática por uma quantidade medida em unidade eletromagnética.

Duas correções precisam ser feitas aqui. Kirchhoff havia provado o resultado apontado por Drude em 1857 e não no artigo citado de 1864.⁷⁷⁰ Além disso, em seu artigo de 1857 Kirchhoff havia utilizado a constante c de Weber com o mesmo significado que havia sido dado originalmente por Weber, com seu valor numérico como medido por Weber e Kohlrausch, a saber, $c = 4,39 \times 10^8$ m/s. Como já mencionei anteriormente, Kirchhoff mostrou que ondas elétricas deslocam-se ao longo de um fio com resistência desprezível com a velocidade $c/\sqrt{2} = 3,1 \times 10^8$ m/s.

Em seus livros de 1894, *Physik des Aethers auf elektromagnetischer Grundlage*, e 1900, *Lehrbuch der Optik* (traduzido para o inglês em 1902, *The Theory of Optics*), Drude continuou a utilizar c com o valor numérico dado por Maxwell, $c = 3 \times 10^8$ m/s, e com seu significado como sendo o número de unidades eletrostáticas de eletricidade contidas em uma unidade eletromagnética.⁷⁷¹ Além disso, ele seguiu seu artigo de 1894 e também representou por c a velocidade de ondas eletrodinâmicas propagando-se ao longo de fios e no ar.

⁷⁶⁸[Dru94b], [Dru94a, págs. 343-391 e 483] e [Dru02, págs. 114-119].

⁷⁶⁹[Dru94b, pág. 191].

⁷⁷⁰[Kir57b] com traduções para o inglês em [Kir57a] e [Kir21b], e tradução para o português no Capítulo 9; e [Kir64].

⁷⁷¹[Dru94a, págs. 447-455], [Dru00] e [Dru02, págs. 115-123, 263-265 e 276].

Em 1892 e 1895 o físico holandês Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) utilizou a letra maiúscula V para representar a velocidade da luz em relação ao éter e também a razão entre as unidades eletromagnética e eletrostática de eletricidade.⁷⁷² Contudo, ao redor de 1903 começou a utilizar a letra minúscula c para essas grandezas.⁷⁷³

Em 1900 o físico alemão Max Planck (1858-1947) utilizou c como o símbolo para a velocidade da luz no vácuo, sendo seguido em 1902 por Max Abraham.⁷⁷⁴

O físico alemão Albert Einstein (1879-1955) utilizou a letra maiúscula V para representar a velocidade da luz de 1905 a 1907.⁷⁷⁵ Por exemplo, em seu artigo criando a teoria da relatividade especial, “Sobre a eletrodinâmica de corpos em movimento”, disse o seguinte:⁷⁷⁶

Wir wollen diese Vermutung (deren Inhalt im folgenden “Prinzip der Relativität” genannt werden wird) zur Voraussetzung erheben und außerdem die mit ihm nur scheinbar unverträgliche Voraussetzung einführen, daß sich das Licht im leeren Raume stets mit einer bestimmten, vom Bewegungszustande des emittierenden Körpers unabhängigen Geschwindigkeit V fortplanze. [...] Wir setzen noch der Erfahrung gemäß fest, daß die Größe

$$\frac{2\overline{AB}}{t'_A - t_A} = V$$

eine universelle Konstante (die Licht geschwindigkeit im leeren Raume) sei.

As traduções para o inglês desses artigos de 1905 e 1907 publicadas pela Princeton University Press mantiveram a letra maiúscula V como o símbolo para a velocidade da luz.⁷⁷⁷ Curiosamente, quando esses trabalhos foram traduzidos para o inglês na famosa edição da editora Dover, a letra maiúscula V foi substituída pela letra minúscula c sem qualquer aviso aos leitores.⁷⁷⁸ Por exemplo, as sentenças citadas desse artigo de 1905 sobre a teoria da relatividade especial foram traduzidas como segue na edição da Dover:⁷⁷⁹

We will raise this conjecture (the purport of which will hereafter be called the “Principle of Relativity”) to the status of a postulate, and also introduce another postulate, which is only apparently irreconcilable with the former, namely, that light is always propagated in empty space with a definite velocity c which is independent of the state of motion of the emitting body. [...] In agreement with experience we further assume the quantity

$$\frac{2AB}{t'_A - t_A} = c ,$$

to be a universal constant — the velocity of light in empty space.

Na tradução em português desse artigo não aparece nenhum símbolo nessa primeira sentença, sendo mantido o símbolo original V na segunda sentença.⁷⁸⁰

⁷⁷²[Lor92, pág. 408], [Lor95, págs. 17 e 139] e [Lor06, págs. 17 e 139].

⁷⁷³[Lor22, págs. 81-82], [Lor04, pág. 809] e [Gib97].

⁷⁷⁴[Pla00], [Abr02a] e [Abr02b, págs. 114 e 116].

⁷⁷⁵[Ein05b, págs. 891-2 e 894], [Ein05a, pág. 639] e [Ein07b, pág. 371].

⁷⁷⁶[Ein05b, págs. 891-2 e 894].

⁷⁷⁷[Ein89b, págs. 140 e 143], [Ein89a, pág. 172] e [Ein89c, pág. 238].

⁷⁷⁸[Ein20, págs. 38 e 40] e [Ein52, págs. 69-70].

⁷⁷⁹[Ein20, págs. 38 e 40].

⁷⁸⁰[Ein83, págs. 48 e 52].

Vamos erguer à categoria de postulado esta nossa suposição (a cujo conteúdo chamaremos daqui em diante “Princípio da Relatividade”); e, além disso, vamos introduzir o postulado — só aparentemente incompatível com o primeiro — de que a luz, no espaço vazio, se propaga sempre com uma velocidade determinada, independente do estado de movimento da fonte luminosa. [...] Admitiremos ainda, em concordância com a experiência, que a grandeza

$$\frac{2\overline{AB}}{t'_A - t_A} = V$$

é uma constante universal (velocidade da luz no espaço vazio).

Foi em 1907 que Einstein modificou sua notação e utilizou a letra c minúscula para representar a velocidade da luz no vácuo:⁷⁸¹

Lorentz bewies allerdings bekanntlich in jener Arbeit,⁷⁸² daß nach seinen Grundannahmen eine Beeinflussung des Strahlenganges bei optischen Versuchen durch jene Relativbewegung nicht zu erwarten sei, sofern man sich bei der Rechnung auf die Glieder beschränkt, in denen das Verhältnis v/c jener Relativgeschwindigkeit zur Lichtgeschwindigkeit im Vakuum in der ersten Potenz auftritt. [...] Wir nehmen nun an, die Uhren können so gerichtet werden, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines jeden Licht-strahles im Vakuum — mit Hilfe dieser Uhren gemessen — allenthalben gleich einer universellen Konstante c wird, vorausgesetzt, daß das Koordinatensystem nicht beschleunigt wird.

Tradução para o inglês:⁷⁸³

It is true that in the study cited⁷⁸⁴ Lorentz proved that in optical experiments, as a consequence of his basic assumptions, an effect of that relative motion on the ray path is not to be expected as long as the calculation is limited to terms in which the ratio v/c of the relative velocity to the velocity of light in vacuum appears in the first power. [...] We now assume *that the clocks can be adjusted in such a way that the propagation velocity of every light ray in vacuum—measured by means of these clocks—becomes everywhere equal to a universal constant c , provided that the coordinate system is not accelerated.*

Tradução para o português:⁷⁸⁵

O próprio Lorentz demonstrou em seu trabalho, como consequência de suas hipóteses básicas, que nenhum efeito devido a esse movimento relativo da Terra sobre o caminho óptico seria esperado, desde que os cálculos se limitassem aos termos nos quais a

⁷⁸¹[Ein07a, págs. 412 e 415].

⁷⁸²[Nota de Einstein:] H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Leiden 1895. Neudruck Leipzig, 1906.

⁷⁸³[Ein89d, págs. 252-253 e 256].

⁷⁸⁴[Nota que aparece nessa tradução em inglês:] H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. [Attempt at a theory of electric and optical phenomena in moving bodies] Leiden 1895. Reprinted Leipzig, 1906.

⁷⁸⁵[Ein05].

relação v/c da velocidade relativa à velocidade da luz no vácuo fosse linear. [...] Agora assumiremos que *os relógios podem ser ajustados de tal modo que a velocidade de propagação de qualquer feixe de luz no vácuo — medido por meio desses relógios — seja em qualquer lugar igual a uma constante universal c , desde que o sistema de coordenadas não seja acelerado.*

Como discutido anteriormente, em seu trabalho de 1895 (reimpresso em 1906) citado por Einstein, Lorentz utilizou a letra V maiúscula para representar a velocidade da luz em relação ao éter e também a razão entre as unidades eletromagnética e eletrostática de eletricidade. Agora em seu trabalho de 1907 Einstein utilizou a letra c minúscula para representar a velocidade da luz no vácuo.

Foi também nesse artigo de 1907 que Einstein introduziu sua equação mais famosa, $E = mc^2$.

Certamente Einstein foi influenciado pelos trabalhos de Drude, Planck e Lorentz (esse último a partir de 1903) em sua utilização da letra c para representar a velocidade da luz.⁷⁸⁶ Contudo, ele foi influenciado por Maxwell apenas indiretamente, mas não diretamente. Como apontado por Miller,⁷⁸⁷ em seus trabalhos Einstein falou bastante das equações de Maxwell e da teoria eletromagnética da luz de Maxwell, mas ele nunca leu o livro *Tratado sobre Eletricidade e Magnetismo* de Maxwell, embora uma tradução em alemão tenha sido publicada em 1883.⁷⁸⁸

A partir desse artigo de Einstein de 1907 a letra c minúscula com um valor numérico da ordem de 3×10^8 m/s passou a ser amplamente utilizada para representar a velocidade da luz no vácuo não apenas nos artigos sobre a teoria da relatividade, mas também nos livros didáticos de física, assim como nas publicações de divulgação científica e na mídia em geral. O valor numérico e o significado original da constante c , como obtidos pela primeira vez por Wilhelm Weber, foram essencialmente esquecidos após 1907. Essa situação continuou durante todo o século XX.

Em meus próprios artigos e livros utilizei o símbolo c para representar a velocidade da luz no vácuo, com seu valor da ordem de 3×10^8 m/s. Fiz conscientemente essa escolha pois estava me dirigindo nesses artigos e livros aos cientistas e estudantes de física modernos que haviam aprendido esses significados da letra c em seus livros de ciência. Se não fizesse isso esses leitores não entenderiam o que eu estava escrevendo. De qualquer forma, sempre que discuti os trabalhos originais de Weber, fui cuidadoso em chamar atenção que a constante c de Weber era diferente da velocidade da luz no vácuo.⁷⁸⁹

Nesse livro com a tradução em português dos principais trabalhos de Weber sobre eletrodinâmica estou mantendo a definição, o significado e o valor numérico de c como sendo aqueles dados pelo próprio Weber.

Espero que no século XXI — após a eletrodinâmica de Weber alcançar mais uma vez o papel dominante que ela merece na física — a definição, o significado e o valor numérico de c voltarão a ser aqueles dados por Weber. Ou seja, com um valor numérico dado por $c = \sqrt{2} \cdot v_L$, onde v_L significa aqui a velocidade da luz no vácuo. Isto é, a constante c deve ter um valor compatível com aquele que foi medido pela primeira vez pelo próprio Weber entre 1854 e 1856. Nesse caso minha sugestão é que a velocidade da luz no vácuo deva ser

⁷⁸⁶[Gib97].

⁷⁸⁷[Mil81, págs. 138-139, Nota 7].

⁷⁸⁸[Max83b] e [Max83a].

⁷⁸⁹[Ass94, Seção 3.1], [AW03, pág. 55], [ARW04, pág. 25], [AWW11, Seção 1.6], [AWW14, Seção 1.6], [Ass15a, Seção 2.1] e [AWW18, Seção 1.6].

representada por v_L , com seu valor numérico da ordem de $3 \times 10^8 \text{ m/s}$. Ou seja, espero que a velocidade da luz no vácuo deixe de ser representada por c . Essa letra minúscula c deve ser reservada para a constante de Weber para evitar confusão, em respeito ao seu trabalho original, e em homenagem a esse cientista excepcional.

Referências Bibliográficas

- [AB23] A. K. T. Assis and L. L. Bucciarelli. *Coulomb's Memoirs on Torsion, Electricity, and Magnetism Translated into English*. Apeiron, Montreal, 2023. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Abr02a] M. Abraham. Prinzipien der Dynamik des Elektrons. *Physikalische Zeitschrift*, 4:57–63, 1902.
- [Abr02b] M. Abraham. Prinzipien der Dynamik des Elektrons. *Annalen der Physik*, 315:105–179, 1902.
- [AC11] A. K. T. Assis and J. P. M. d. C. Chaib. *Eletrodinâmica de Ampère: Análise do Significado e da Evolução da Força de Ampère, Juntamente com a Tradução Comentada de Sua Principal Obra sobre Eletrodinâmica*. Editora da Unicamp, Campinas, 2011.
- [AC15] A. K. T. Assis and J. P. M. C. Chaib. *Ampère's Electrodynamics — Analysis of the Meaning and Evolution of Ampère's Force between Current Elements, together with a Complete Translation of His Masterpiece: Theory of Electrodynamic Phenomena, Uniquely Deduced from Experience*. Apeiron, Montreal, 2015. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [AH05] A. K. T. Assis and J. A. Hernandes. Telegraphy equation from Weber's electrodynamics. *IEEE Transactions on Systems and Circuits II*, 52:289–292, 2005.
- [AH07] A. K. T. Assis and J. A. Hernandes. *The Electric Force of a Current: Weber and the Surface Charges of Resistive Conductors Carrying Steady Currents*. Apeiron, Montreal, 2007. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [AH09] A. K. T. Assis and J. A. Hernandes. *A Força Elétrica de uma Corrente: Weber e as Cargas Superficiais de Condutores Resistivos com Correntes Constantes*. Edusp e Edufal, São Paulo e Maceió, 2009. Volume 73 da Coleção Acadêmica.
- [AH13] A. K. T. Assis and J. A. Hernandes. *Elektrischer Strom und Oberflächenladungen: was Wilhelm Weber schon vor mehr als 150 Jahre wußte*. Apeiron, Montreal, 2013. Tradução de H. Härtel. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Amp20a] A.-M. Ampère. Analyse des mémoires lus par M. Ampère a l'Académie des Sciences, dans les séances des 18 et 25 septembre, des 9 et 30 octobre 1820. *Annales Générales des Sciences Physiques*, 6:238–257, 1820.

- [Amp20b] A.-M. Ampère. Analyse des mémoires lus par M. Ampère a l'Académie des Sciences, dans les séances des 18 et 25 septembre, des 9 et 30 octobre 1820. 20 páginas. Reimpressão de *Annales Générales des Sciences Physiques*, Vol. 6, págs. 238-257 (1820), 1820.
- [Amp20c] A.-M. Ampère. Suite du mémoire sur l'action mutuelle entre deux courans électriques, entre un courant électrique et un aimant ou le globe terrestre, et entre deux aimans. *Annales de Chimie et de Physique*, 15:170–218, 1820.
- [Amp21] A.-M. Ampère. Suite de la note sur un appareil à l'aide duquel on peut vérifier toutes les propriétés des conducteurs de l'électricité voltaïque, découvertes par M. Ampère. *Annales de Chimie et de Physique*, 18:313–333, 1821.
- [Amp23] A.-M. Ampère. Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience, dans lequel se trouvent réunis les Mémoires que M. Ampère a communiqués à l'Académie royale des Sciences, dans les séances des 4 et 26 décembre 1820, 10 juin 1822, 22 décembre 1823, 12 septembre et 21 novembre 1825. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, 6:175–387, 1823. Apesar da data, este volume foi publicado apenas em 1827.
- [Amp26] A.-M. Ampère. *Théorie des Phénomènes Électro-dynamiques, Uniquement Déduite de l'Expérience*. Méquignon-Marvis, Paris, 1826.
- [Amp65] A.-M. Ampère. On the Mathematical Theory of Electrodynamic Phenomena, Experimentally Deduced. In R. A. R. Tricker, *Early Electrodynamics — The First Law of Circulation*, pages 155–200, New York, 1965. Pergamon. Partial English translation by O. M. Blunn of Ampère's work “Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques uniquement déduite de l'expérience”, *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, Vol. 6, pp. 175-387 (1823), issued 1827.
- [Amp69] A. M. Ampère. The solenoid. Circuits and magnetic shells. In W. F. Magie, editor, *A Source Book in Physics*, pages 456–460, New York, 1969. McGraw-Hill. Extracts from “Théorie des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience,” Paris, 1826.
- [Amp12] A.-M. Ampère. Mathematical Theory of Electrodynamic Phenomena, Uniquely Derived from Experiments. Traduzido por M. D. Godfrey. Disponível em <https://archive.org/details/AmpereTheorieEn> e <https://sites.google.com/site/michaeldgodfrey/physics-information-and-communication>, 2012.
- [Ano89] Anonymous. Gauss and the electric telegraph. *Popular Science Monthly*, 34:396–399, 1889. Disponível em https://en.wikisource.org/wiki/Popular_Science_Monthly/Volume_34/January_1889/Gauss_and_the_Electric_Telegraph.
- [Ano06] Anonymous. c the light. *Nature Physics*, 2:798, 2006. Doi: 10.1038/nphys483.

- [Arc86] T. Archibald. Carl Neumann versus Rudolf Clausius on the propagation of electrodynamic potentials. *American Journal of physics*, 54:786–790, 1986.
- [ARW02] A. K. T. Assis, K. Reich, and K. H. Wiederkehr. Gauss and Weber’s creation of the absolute system of units in physics. *21st Century Science & Technology*, Vol. 15, No. 3:40–48, 2002.
- [ARW04] A. K. T. Assis, K. Reich, and K. H. Wiederkehr. On the electromagnetic and electrostatic units of current and the meaning of the absolute system of units — For the 200th anniversary of Wilhelm Weber’s birth. *Sudhoffs Archiv*, 88:10–31, 2004.
- [Ass92] A. K. T. Assis. Teorias de ação a distância — uma tradução comentada de um texto de James Clerk Maxwell. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 7:53–76, 1992.
- [Ass94] A. K. T. Assis. *Weber’s Electrodynamics*. Kluwer, Dordrecht, 1994. Hoje em dia esse livro está disponível pela Springer. Doi: 10.1007/978-94-017-3670-1 e www.springer.com/gp/book/9780792331377.
- [Ass99] A. K. T. Assis. Arguments in favour of action at a distance. In A. E. Chubykalo, V. Pope, and R. Smirnov-Rueda, editors, *Instantaneous Action at a Distance in Modern Physics — “Pro” and “Contra”*, pages 45–56, Commack, 1999. Nova Science Publishers.
- [Ass00] A. K. T. Assis. On the propagation of electromagnetic signals in wires and coaxial cables according to Weber’s electrodynamics. *Foundations of Physics*, 30:1107–1121, 2000.
- [Ass03a] A. K. T. Assis. On the first electromagnetic measurement of the velocity of light by Wilhelm Weber and Rudolf Kohlrausch. In F. Bevilacqua and E. A. Gianetto, editors, *Volta and the History of Electricity*, pages 267–286. Università degli Studi di Pavia and Editore Ulrico Hoepli, Milano, 2003. Disponível em <http://ppp.unipv.it/PagesIT/VoltaHistElecSec3Frame.htm>.
- [Ass03b] A. K. T. Assis. Tradução de uma obra de Gauss. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 25:226–249, 2003.
- [Ass10a] A. K. T. Assis. *The Experimental and Historical Foundations of Electricity*. Apeiron, Montreal, 2010. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass10b] A. K. T. Assis. *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade*. Apeiron, Montreal, 2010. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass13] A. K. T. Assis. *Mecânica Relacional e Implementação do Princípio de Mach com a Força de Weber Gravitacional*. Apeiron, Montreal, 2013. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass14a] A. K. T. Assis. Argumente zugunsten der Fernwirkung. Traduzido em 2014 a partir do inglês por M. Pohl. Artigo original: A. K. T. Assis, “Arguments in favour of action at a distance,” in: *Instantaneous Action at a Distance in*

Modern Physics — “Pro” and “Contra”, Editado por A. E. Chubykalo, V. Pope e R. Smirnov-Rueda (Nova Science Publishers, Commack, 1999), págs. 45-56. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis, 2014.

- [Ass14b] A. K. T. Assis. *Relational Mechanics and Implementation of Mach’s Principle with Weber’s Gravitational Force*. Apeiron, Montreal, 2014. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass14c] A. K. T. Assis. Text in memory of Peter Graneau (1921-2014). *Infinite Energy*, 114:14–15, 2014.
- [Ass15a] A. K. T. Assis. *Eletrodinâmica de Weber: Teoria, Aplicações e Exercícios*. Editora da Unicamp, Campinas, 2015. Segunda edição. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis e <https://editoraunicamp.com.br/catalogo/?id=1718>.
- [Ass15b] A. K. T. Assis. *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade*. Apeiron, Montreal, 2015. Livro em russo traduzido da versão em inglês por A. Baraov. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass17] A. K. T. Assis. *I Fondamenti Sperimentali e Storici dell’Elettricità*. Associazione per l’Insegnamento della Fisica, Parma, 2017. La Fisica nella Scuola, Anno L, n. 2 Supplemento, Quaderno 26. Traduzido por P. Cerreta, A. Cerreta e R. Cerreta. Editado por P. Cerreta, R. Serafini e R. Urigu. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass18a] A. K. T. Assis. *The Experimental and Historical Foundations of Electricity*, volume 2. Apeiron, Montreal, 2018. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass18b] A. K. T. Assis. *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade*, volume 2. Apeiron, Montreal, 2018. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass19a] A. K. T. Assis. Argumentos a favor da ação a distância. *Revista Educar Mais*, 3:202–218, 2019. Doi: 10.15536/reducarmais.3.2019.202-218.1505.
- [Ass19b] A. K. T. Assis. *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade*, volume 2. Apeiron, Montreal, 2019. Livro em russo traduzido do volume 2 da versão em inglês por A. Baraov. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass21] A. K. T. Assis. Gauss and Weber’s absolute system of units and its difference to the modern “Gaussian” system of units. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume I: Gauss and Weber’s Absolute System of Units, pages 207–212, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ass22] A. K. T. Assis. *Tradução Comentada das Principais Obras de Coulomb sobre Eletricidade e Magnetismo*. Apeiron, Montreal, 2022. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [AW03] A. K. T. Assis and K. H. Wiederkehr. Weber quoting Maxwell. *Mitteilungen der Gauss-Gesellschaft*, 40:53–74, 2003.

- [AWW11] A. K. T. Assis, K. H. Wiederkehr, and G. Wolfschmidt. *Weber's Planetary Model of the Atom*, volume 19 of *Nuncius Hamburgensis — Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften*. Tredition Science, Hamburg, 2011. Edited by G. Wolfschmidt.
- [AWW14] A. K. T. Assis, K. H. Wiederkehr, and G. Wolfschmidt. *O Modelo Planetário de Weber para o Átomo*. Apeiron, Montreal, 2014. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [AWW18] A. K. T. Assis, K. H. Wiederkehr, and G. Wolfschmidt. *Webers Planeten-Modell des Atoms*. Apeiron, Montreal, 2018. Traduzido por H. Härtel. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Bec43] E. Becquerel. Des lois du dégagement de la chaleur pendant le passage des courants électriques à travers les corps solides et liquides. *Annales de Chimie et de Physique*, 9:21–70, 1843.
- [Bee60] W. Beetz. Ueber die inneren Vorgänge, welche die Magnetisirung bedingen. *Annalen der Physik und Chemie*, 111:107–121, 1860.
- [Blo05] C. Blondel, 2005. Ampère et l'Histoire de l'Électricité. Homepage do CNRS que foi criada e coordenada por Christine Blondel. Disponível em www.ampere.cnrs.fr.
- [Bra27] J. Bradley. An account of a new discovered motion of the fix'd stars. *Philosophical Transactions*, 35:637–661, 1727.
- [Bra29] J. Bradley. The discovery of the aberration of light. In H. Shapley and H. E. Howarth, editors, *A Source Book in Astronomy*, pages 103–108, New York, 1929. McGraw-Hill.
- [Bra35] J. Bradley. The velocity of light. In W. F. Magie, editor, *A Source Book in Physics*, pages 337–340, New York, 1935. McGraw-Hill.
- [Buf53] H. Buff. Tangentenbussole mit langem Multiplicatordrahte. *Annalen der Chemie und Pharmacie*, 86:1–34, 1853.
- [BZ50] H. Buff and F. G. K. Zamminer. Ueber die Magnetisirung von Eisenstäben durch den galvanischen Strom. *Annalen der Chemie und Pharmacie*, 75:83–94, 1850.
- [CA09] J. P. M. d. C. Chaib and A. K. T. Assis. Sobre os efeitos das correntes elétricas (segunda parte) — Tradução da primeira obra de Ampère sobre eletrodinâmica. *Revista Brasileira de História da Ciência*, 2:118–145, 2009.
- [Cas43] W. T. Casselmann. *Ueber die galvanische Kohlenzinkkette und einige mit derselben angestellte Beobachtungen*. PhD thesis, philosophischen Facultät zu Marburg, Marburg, 1843. Inaugural-Dissertation.
- [Cav98] H. Cavendish. Experiments to determine the density of the earth. *Philosophical Transactions*, 88:469–526, 1798. Reimpresso em *The Scientific Papers of the Honorable Henry Cavendish, F. R. S.*, Vol. II, E. Thorpe et al. (editores), (Cambridge University Press, Cambridge, 1928), págs. 249–286; também reimpresso

com notas explicativas de A. S. Mackenzie em *Gravitation, Heat and X-Rays*, (Arno Press, New York, 1981), págs. 57-105.

- [Cha09] J. P. M. d. C. Chaib, 2009. Tese de Doutorado: “Análise do Significado e da Evolução do Conceito de Força de Ampère, juntamente com a Tradução Comentada de Sua Principal Obra sobre Eletrodinâmica.” Universidade Estadual de Campinas — UNICAMP (Campinas, SP). Orientador: A. K. T. Assis. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis e <http://repositorio.unicamp.br/Acervo/Detalhe/435449>.
- [Chi64] R. A. Chipman. Contributions from the museum of history and technology: Science and technology paper 38: The earliest electromagnetic instruments. *Bulletin of the United States National Museum*, pages 121–136, 1964. Disponível em <https://www.gutenberg.org/ebooks/34061>.
- [Chr33] S. H. Christie. Experimental determination of the laws of magneto-electric induction in different masses of the same metal, and its intensity in different metals. *Philosophical Transactions*, 123:95–142, 1833.
- [Chr58] H. Christie. Einige diamagnetische Versuche. *Annalen der Physik und Chemie*, 103:577–612, 1858.
- [Cla68] R. Clausius. Ueber die von Gauss angeregte neue Auffassung der elektrodynamischen Erscheinungen. *Annalen der Physik und Chemie*, 135:606–621, 1868.
- [Cla69] R. Clausius. Upon the new conception of electrodynamic phenomena suggested by Gauss. *Philosophical Magazine*, 37:445–456, 1869.
- [Coh40] I. B. Cohen. Roemer and the first determination of the velocity of light. *Isis*, 31:327–379, 1940.
- [D’A81] S. D’Agostino. Weber and Maxwell on the discovery of the velocity of light in nineteenth century electrodynamics. In M. D. Grmek, R. S. Cohen, and G. Cimino, editors, *On Scientific Discovery*, pages 281–294, Dordrecht, 1981. Springer. Boston Studies in the Philosophy of Science, Vol. 34. Translated by J. A. Boffa. Doi: 10.1007/978-94-010-1284-3_14.
- [Dar00] O. Darrigol. *Electrodynamics from Ampère to Einstein*. Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [Des54] R. Descartes. *The Geometry of René Descartes with a Facsimile of the First Edition*. Dover, New York, 1954. Translated from the French and Latin by D. E. Smith and M. L. Latham.
- [Des65] R. Descartes. Discours de la Méthode & Essays. In C. Adam and P. Tannery, editors, *Oeuvres de Descartes, vol. VI*, pages 1–78: *Discours de la Méthode*, 79–228: *La Dioptrique*, 229–366: *Les Meteores*, 367–485: *La Geometrie*, Paris, 1965. Librairie Philosophique J. Vrin.

- [Des09] R. Descartes. A Geometria - Primeiro Livro. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 19:221–249, 2009. Tradução de J. P. d. S. Ramos. Disponível em <https://www.cle.unicamp.br/eprints/index.php/cadernos/article/view/556/436>.
- [Dör91] M. Dörries. Prior history and aftereffects: hysteresis and “Nachwirkung” in 19th-century physics. *Historical Studies in the Physical and Biological Sciences*, 22:25–55, 1991.
- [Dru94a] P. Drude. *Physik des Aethers auf elektromagnetischer Grundlage*. Verlag von Ferdinand Enke, Stuttgart, 1894.
- [Dru94b] P. Drude. Zum Studium des elektrischen Resonators. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 3:205–239, 1894.
- [Dru00] P. Drude. *Lehrbuch der Optik*. Hirzel, Leipzig, 1900.
- [Dru02] P. Drude. *The Theory of Optics*. Longmans, Green, and Co., London, 1902. Translated by C. R. Mann and R. A. Millikan.
- [Duh02] P. Duhem. *Les Théories Électriques de J. Clerk Maxwell: Étude Historique et Critique*. A. Hermann, Paris, 1902.
- [Duh15] P. Duhem. *The Electric Theories of J. Clerk Maxwell: A Historical and Critical Study*, volume 314 of *Boston Studies in the Philosophy and History of Science*. Springer, Heidelberg, 2015. Translated by A. Aversa.
- [Ein05a] A. Einstein. Ist die Trägheit eines körpers von seinem Energiegehalt abhängig? *Annalen der Physik*, 18:639–641, 1905.
- [Ein05b] A. Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik*, 17:891–921, 1905.
- [Ein07a] A. Einstein. Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen. *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, 4:411–462, 1907.
- [Ein07b] A. Einstein. Über die vom Relativitätsprinzip geforderte Trägheit der Energie. *Annalen der Physik*, 23:371–384, 1907.
- [Ein20] A. Einstein. *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie (Gemeinverständlich)*. F. Vieweg, Braunschweig, 1920. 5ª edição.
- [Ein52] A. Einstein. Does the inertia of a body depend upon its energy-content? In H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski and H. Weyl, *The Principle of Relativity*, pages 67–71, New York, 1952. Dover. Translated by H. Perrett and G. B. Jeffery.
- [Ein83] A. Einstein. Sobre a electrodinâmica dos corpos em movimento. In H. A. Lorentz, A. Einstein e H. Minkowski, *O Princípio da Relatividade*, Lisboa, 3ª edição, 1983. Fundação Calouste Gulbenkian. Págs. 47-86. Tradução de M. J. Saraiva.

- [Ein89a] A. Einstein. Does the inertia of a body depend upon its energy content? In *The Collected Papers of Albert Einstein*, volume 2 — The Swiss Years: Writings, 1900-1909, pages 172–174, Princeton, 1989. Princeton University Press. Anna Beck, translator.
- [Ein89b] A. Einstein. On the electrodynamics of moving bodies. In *The Collected Papers of Albert Einstein*, volume 2 — The Swiss Years: Writings, 1900-1909, pages 140–171, Princeton, 1989. Princeton University Press. Anna Beck, translator.
- [Ein89c] A. Einstein. On the inertia of energy required by the relativity principle. In *The Collected Papers of Albert Einstein*, volume 2 — The Swiss Years: Writings, 1900-1909, pages 238–250, Princeton, 1989. Princeton University Press. Anna Beck, translator.
- [Ein89d] A. Einstein. On the relativity principle and the conclusions drawn from it. In *The Collected Papers of Albert Einstein*, volume 2 — The Swiss Years: Writings, 1900-1909, pages 252–311, Princeton, 1989. Princeton University Press. Anna Beck, translator.
- [Ein05] A. Einstein. Sobre o princípio da relatividade e suas implicações. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 27:37–61, 2005. Tradução de P. A. Schulz.
- [Eke01] S. Ekelöf. The genesis of the Wheatstone bridge. *Engineering Science and Education Journal*, 10:37–40, 2001.
- [EL89] J. A. Ewing and W. Low. On the magnetisation of iron and other magnetic metals in very strong fields. *Philosophical Transactions*, 180:221–244, 1889. Doi: 10.1098/rsta.1889.0007.
- [Far32a] M. Faraday. Experimental researches in electricity. *Philosophical Transactions*, 122:125–162, 1832. Lido em 24 de novembro de 1831. Reimpresso em *Great Books of the Western World*, R. M. Hutchins (editor), (Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952), Vol. 45: Lavoisier, Fourier, Faraday. Págs. 265-285, parágrafos 1-139.
- [Far32b] M. Faraday. Experimental-Untersuchungen über Elektrizität. *Annalen der Physik und Chemie*, 25:91–142, 1832.
- [Far34a] M. Faraday. Experimental researches in electricity. Seventh series. *Philosophical Transactions*, 124:77–122, 1834. Lido em 23 de janeiro, 6 e 13 de fevereiro de 1834. Reimpresso em *Great Books of the Western World*, R. M. Hutchins (editor), (Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952), Vol. 45: Lavoisier, Fourier, Faraday. Págs. 361-390, parágrafos 661-874.
- [Far34b] M. Faraday. Experimental researches in electricity. Sixth series. *Philosophical Transactions*, 124:55–76, 1834. Lido em 11 de janeiro de 1834. Reimpresso em *Great Books of the Western World*, R. M. Hutchins (editor), (Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952), Vol. 45: Lavoisier, Fourier, Faraday. Págs. 347-360, parágrafos 564-660.

- [Far34c] M. Faraday. Von der elektro-chemischen Zersetzung — Fortsetzung. *Annalen der Physik und Chemie*, 33:301–331 and 433–451, 1834.
- [Far46a] M. Faraday. Experimental researches in electricity. Twentieth series. *Philosophical Transactions*, 136:21–40, 1846. Lido em 18 de dezembro de 1845. Reimpresso em *Great Books of the Western World*, R. M. Hutchins (editor), (Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952), Vol. 45: Lavoisier, Fourier, Faraday. Págs. 607-619, parágrafos 2243-2342.
- [Far46b] M. Faraday. Experimental researches in electricity. Twenty-first series. *Philosophical Transactions*, 136:41–62, 1846. Lido em 8 de janeiro de 1846. Reimpresso em *Great Books of the Western World*, R. M. Hutchins (editor), (Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952), Vol. 45: Lavoisier, Fourier, Faraday. Págs. 619-632, parágrafos 2343-2453.
- [Far46c] M. Faraday. Zwanzigste Reihe von Experimental-Untersuchungen über Elektrizität. *Annalen der Physik und Chemie*, 69:289–320, 1846.
- [Far47] M. Faraday. Ein und zwanzigste Reihe von Experimental-Untersuchungen über Elektrizität. *Annalen der Physik und Chemie*, 70:24–59, 1847.
- [Far50] M. Faraday. Experimental researches in electricity. Twenty-third series. *Philosophical Transactions*, 140:171–188, 1850. Lido em 7 e 14 de março de 1850. Reimpresso em *Great Books of the Western World*, R. M. Hutchins (editor), (Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952), Vol. 45: Lavoisier, Fourier, Faraday. Págs. 658-669, parágrafos 2640-2701.
- [Far89] M. Faraday. *Experimental-Untersuchungen über Elektrizität*, volume I. Springer, Berlin, 1889. Deutsche Uebersetzung von S. Kalischer.
- [Far11] M. Faraday. Pesquisas experimentais em eletricidade. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, 28:152–204, 2011. Tradução de A. K. T. Assis e L. F. Haruna. Doi: 10.5007/2175-7941.2011v28n1p152.
- [FB50] H. Fizeau and L. Bréguet. Sur l’expérience relative à la vitesse comparative de la lumière dans l’air et dans l’eau. *Comptes Rendues de l’Académie des Sciences de Paris*, 30:562–563 and 771–774, 1850.
- [Fei51] C. Feilitzsch. Eine Theorie des Diamagnetismus. Magnetismus des Wismuth. Erweiterung der Ampère’schen Theorie. *Annalen der Physik und Chemie*, 82:90–110, 1851.
- [Fey33a] E. Feyerabend. Der erste praktisch verwendete elektrische Telegraph. *Technikgeschichte*, 22:83–87, 1933.
- [Fey33b] E. Feyerabend. *Der Telegraph von Gauss und Weber im Werden der elektrischen Telegraphie*. Reichsportministerium, Berlin, 1933.
- [Fiz49] H. Fizeau. Sur une expérience relative à la vitesse de propagation de la lumière. *Comptes Rendues de l’Académie des Sciences de Paris*, 29:90–92, 1849.
- [Fou22] J. B. J. Fourier. *Théorie Analytique de la Chaleur*. Firmin Didot, Paris, 1822.

- [Fou53] L. Foucault. *Sur les Vitesses Relatives de la Lumière dans l’Air et dans l’Eau*. Bachelier, Paris, 1853.
- [Fou52] J. B. J. Fourier. Analytical Theory of Heat. In *Great Books of the Western World*, Vol. 45, pages 161–251, Chicago, 1952. Encyclopaedia Britannica. Translated by A. Freeman.
- [GA94] P. Graneau and A. K. T. Assis. Kirchhoff on the motion of electricity in conductors. *Apeiron*, 19:19–25, 1994.
- [Gau32] C. F. Gauss. Anzeige der “Intensitas Vis Magneticae Terrestris ad Mensuram Absolutam Revocata”. *Göttingische gelehrte Anzeigen*, 205-207:2041–2058, 1832. Vol. 205 de 24 de dezembro, 1832, págs. 2041-2048; Vols. 206 e 207 de 27 de dezembro, 1832, págs. 2049-2058. Reimpresso em C. F. Gauss’ *Werke*, Vol. 5, págs. 293-304 (Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1867). Versão corrigida em: *Astronomische Nachrichten* 10, 1833, Nr. 238, págs. 349-360: Anzeige der Abhandlung des Herrn Hofraths Gauß: Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata.
- [Gau33a] C. F. Gauss. [abstract of the paper:] Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata. *Philosophical Magazine*, 2:291–299, 1833.
- [Gau33b] C. F. Gauss. Die Intensität der erdmagnetischen Kraft, zurückgeführt auf absolutes Maass. *Annalen der Physik und Chemie*, 28:241–273 and 591–615, 1833. Traduzido por J. C. Poggendorff.
- [Gau34] C. F. Gauss. Mesure absolue de l’intensité du magnétisme terrestre. *Annales de Chimie et de Physique*, 57:5–69, 1834.
- [Gau36] C. F. Gauss, 1836. Ob ismërenii zemnago magnitizma. (Soč[inenie] Karl[a] Frid[richa] Gaussa). Per[evël] A. Drašusov. Učenyja zapiski Imperatorskago universiteta čast 11, 1836, Nr. 7 (Januar), str. 3-22; Nr. 8 (Februar), str. 246-271; Nr. 9 (März), str. 341-381.
- [Gau37] C. F. Gauss. [abstract of the paper:] Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata. *Abstracts of the Papers Printed in the Philosophical Transactions of the Royal Society of London, from 1830 to 1837 inclusive*, 3:166–174, 1837.
- [Gau38a] C. F. Gauss. Anleitung zur Bestimmung der Schwingungsdauer einer Magnetnadel. In C. F. Gauss and W. Weber, editors, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837*, volume II, chapter IV, pages 58–80. Dieterichschen Buchhandlung, Göttingen, 1838. Reimpresso em Carl Friedrich Gauss’ *Werke*, Vol. 5, págs. 374-394 (Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1867).
- [Gau38b] C. F. Gauss. Ueber ein neues, zunächst zur unmittelbaren Beobachtung der Veränderungen in der Intensität des horizontalen Theils des Erdmagnetismus bestimmtes Instrument. In C. F. Gauss and W. Weber, editors, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837*, volume II, chapter I, pages 1–19. Dieterichschen Buchhandlung, Göttingen, 1838. Reimpresso

em Carl Friedrich Gauss' *Werke*, Vol. 5, págs. 357-373 (Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1867).

- [Gau39a] C. F. Gauss. Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus. In C. F. Gauss and W. Weber, editors, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1838*, volume III, chapter I, pages 1–57. Weidmannschen Buchhandlung, Leipzig, 1839. Reimpresso em Carl Friedrich Gauss' *Werke*, Vol. 5, págs. 119-194 (Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1867).
- [Gau39b] C. F. Gauss. Misura assoluta dell' intensità della forza magnetica terrestre. *Effemeridi astronomiche di Milano*, primo supplemento:3–132, 1839. Tradotta e commentata da P. Frisiani.
- [Gau40] C. F. Gauss. Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im Verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte. In C. F. Gauss and W. Weber, editors, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839*, volume IV, chapter I, pages 1–51. Weidmannschen Buchhandlung, Leipzig, 1840. Reimpresso em Carl Friedrich Gauss' *Werke*, Vol. 5, págs. 195-242 (Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1867).
- [Gau41a] C. F. Gauss. General theory of terrestrial magnetism. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs*, Vol. 2, pages 184–251, London, 1841. Richard and John E. Taylor. Translated by Mrs. Sabine, and revised by Sir John Herschel, Bart.
- [Gau41b] C. F. Gauss. Intensitas vis magneticae terrestres ad mensuram absolutam revocata. *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Goettingensis Recentiores*, 8:3–44, 1841. Apresentado na Sociedade Real de Ciências de Göttingen em 15 de dezembro de 1832. Reimpresso em Carl Friedrich Gauss' *Werke*, Vol. 5, págs. 79-118 (Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1867).
- [Gau41c] C. F. Gauss. On a new instrument for the direct observation of the changes in the intensity of the horizontal portion of the terrestrial magnetic force. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs*, Vol. 2, pages 252–267, London, 1841. Richard and John E. Taylor. From the *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837*, Volume II, Chapter I, pp. 1-19. — Herausgegeben von Carl Friederich Gauss und Wilhelm Weber. Göttingen, 1838. Translated by Mr. William Francis, and revised by Major Sabine and Professor Lloyd.
- [Gau43] C. F. Gauss. General propositions relating to attractive and repulsive forces acting in the inverse ratio of the square of the distance. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs*, Vol. 3, pages 153–196, London, 1843. Richard and John E. Taylor.
- [Gau94] C. F. Gauss. Die Intensität der erdmagnetischen Kraft auf absolutes Maass zurückgeführt. In E. Dorn, editor, *Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften*, Vol. 53. Wilhelm Engelmann Verlag, Leipzig, 1894. Tradução de A. Kiel, Notas de E. Dorn. Reimpresso em *Carl Friedrich Gauss' — Werke — Supplement* — Volume 3: Varia: 15 Abhandlungen in deutscher Übersetzung. Mit einer Einleitung, einer Bibliographie und Registern herausgegeben von Karin Reich.

Hrsg. von der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen, Universitätsverlag Göttingen 2019, págs. 533-594.

- [Gau35] C. F. Gauss. The absolute measure of magnetic force. In W. F. Magie, editor, *A Source Book in Physics*, pages 519–524, New York, 1935. McGraw-Hill.
- [Gau52] C. F. Gauss, 1952. Intensivnost semnoj magnitnoj sily, privedennaja k absoljutoj mere. In: B. M. Janovskij (Hrsg): Karl Fridrich Gauss. Izbrannye trudy po zemnomu magnetizmu. Perevod A. N. Krylova. Moskau 1952, str. 23-75.
- [Gau75] C. F. Gauss. Letter from Gauss to Schumacher, April 29, 1845. In *Carl Friedrich Gauss, Werke, Ergänzungsreihe, Vol. V, Briefwechsel C. F. Gauss — H. C. Schumacher, Part 2*, pages 436–440. Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1975.
- [Gau03] C. F. Gauss. The intensity of the earth’s magnetic force reduced to absolute measurement. Traduzido em 1995 por Susan P. Johnson, editado por L. Hecht. Disponível desde 2003 em <http://21sci-tech.com/translation.html>, 2003.
- [Gau21a] C. F. Gauss. [Gauss, 1832, Abstract of the paper:] Intensitas vis magneticae terrestres ad mensuram absolutam revocata. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume I: Gauss and Weber’s Absolute System of Units, pages 37–45, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Gau21b] C. F. Gauss. On a new instrument for the direct observation of the changes in the intensity of the horizontal portion of the terrestrial magnetic force. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume I: Gauss and Weber’s Absolute System of Units, pages 123–134, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Gau21c] C. F. Gauss. *Teoría General del Magnetismo Terrestre*. Catarata, Madrid, 2021. Introducción, traducción y notas de J. M. Vaquero.
- [Gau21d] C. F. Gauss. The absolute measure of the earth’s magnetic force. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume I: Gauss and Weber’s Absolute System of Units, pages 49–80, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [GG96] P. Graneau and N. Graneau. *Newtonian Electrodynamics*. World Scientific, Singapore, 1996.
- [Gib97] P. Gibbs, 1997. Why is c the symbol for the speed of light? Disponível em <http://math.ucr.edu/home/baez/physics/Relativity/SpeedOfLight/c.html> e <http://vixra.org/abs/1901.0004>.
- [Gil71a] C. S. Gillmor. *Coulomb and the Evolution of Physics and Engineering in Eighteenth-Century France*. Princeton University Press, Princeton, 1971.
- [Gil71b] C. S. Gillmor. Coulomb, Charles Augustin. In C. C. Gillispie, editor, *Dictionary of Scientific Biography*, Vol. 3, pages 439–447. Charles Scribner’s Sons, New York, 1971.

- [Gra84a] P. Graneau. Ampere tension in electric conductors. *IEEE Transactions on Magnetics*, 20:444–455, 1984.
- [Gra84b] P. Graneau. Longitudinal magnetic forces. *Journal of Applied Physics*, 55:2598–2600, 1984.
- [Gra86] P. Graneau. The Ampere-Neumann electrodynamics of metallic conductors. *Forstschritte der Physik*, 34:457–503, 1986.
- [Gra87] P. Graneau. Wire explosions. *Physics Letters A*, 120:77–79, 1987.
- [Gra94] P. Graneau. *Ampere-Neumann Electrodynamics of Metals*. Hadronic Press, Palm Harbor, 2nd edition, 1994.
- [Gro39] W. R. Grove. Volta’sche Säule von größser elektro-chemischer Kraft. *Annalen der Physik und Chemie*, 48:300–304, 1839.
- [GT14] K. H. Glassmeier and B. T. Tsurutani. Carl Friedrich Gauss — General theory of terrestrial magnetism — a revised translation of the German text. *History of Geo- and Space Sciences*, 5:11–62, 2014. Doi: 10.5194/hgss-5-11-2014.
- [GT19] P. M. Grant and J. S. Thompson. Standardization of the Ohm as a unit of electrical resistance, 1861-1867. *Proceedings of the IEEE*, 107:2281–2289, 2019. Doi: 10.1109/JPROC.2019.2945495.
- [GW39] Gauss and Weber. Remarks on the construction of magnetic observatories and the instruments which they should contain. *The Annals of Electricity, Magnetism, & Chemistry; and Guardian of Experimental Science*, 3:92–108, 1839.
- [GW66] C. F. Gauss and W. Weber. Results of the observations made by the Magnetic Association in the year 1836. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs*, Vol. 2, pages 20–97, New York, 1966. Johnson Reprint Corporation. Translated by Mr. W. Francis. The translation has been revised by Professor Lloyd and Major Sabine.
- [HA00] J. A. Hernandez and A. K. T. Assis. Propagação de sinais em condutores com a eletrodinâmica de Weber e comparação com o eletromagnetismo clássico. In SBF, editor, *Anais do XXI Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, São Lourenço, 23 a 27/10/2000*, page 1, São Paulo, 2000. Sociedade Brasileira de Física. Publicado em www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/enfpc/xxi/procs/res89.
- [HA01] J. A. Hernandez and A. K. T. Assis. Propagação de sinais em condutores segundo a eletrodinâmica de Weber. *Ciência e Natura*, 23:7–26, 2001.
- [Har82] P. M. Harman. *Energy, Force, and Matter — The Conceptual Development of Nineteenth-Century Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
- [Hec96a] L. Hecht. Experimental apparatus and instrumentation. *21st Century Science & Technology*, 9(3):35–40, 1996.

- [Hec96b] L. Hecht. The significance of the 1845 Gauss-Weber correspondence. *21st Century Science & Technology*, 9(3):22–34, 1996. Disponível em https://21sci-tech.com/articles/Atomic_Science.pdf e <https://archive.org/details/WeberAmpereElectrodynamicsHistory>.
- [Hec97] L. Hecht. Wilhelm Weber: giant of 19th century physics. *21st Century Science & Technology*, 10(2):53–54, 1997.
- [Hel47] H. von Helmholtz. *Über die Erhaltung der Kraft*. Engelmann, Leipzig, 1847. Reimpresso em H. Helmholtz, *Wissenschaftliche Abhandlungen* (Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1882), Vol. 1, Artigo 2, págs. 12–75.
- [Hel53] H. Helmholtz. On the conservation of force; a physical memoir. In J. Tyndall and W. Francis, editors, *Scientific Memoirs*, Volume on Natural Philosophy, pages 114–162, London, 1853. Taylor and Francis. Translated by J. Tyndall. Disponível em https://books.google.com.br/books?id=C1i4AAAAIAAJ&hl=pt-BR&source=gbp_navlinks_s.
- [Hel72a] H. Helmholtz. Ueber die Theorie der Elektrodynamik. *Monatsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften*, pages 247–256, 1872. Reimpresso em H. Helmholtz, *Wissenschaftliche Abhandlungen* (Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1882), Vol. 1, Artigo 34, págs. 636–646.
- [Hel72b] H. von Helmholtz. On the theory of electrodynamics. *Philosophical Magazine*, 44:530–537, 1872.
- [Hen04] K. Hentschel. Leben und Werke des Instrumentmachers Moritz Meyerstein (1808–82). *Einbecker Jahrbuch*, 49:157–184, 2004.
- [Hen05] K. Hentschel. *Gaußens unsichtbare Hand: Der Universitätsmechanicus und Maschineninspector Moritz Meyerstein — Ein Instrumentbauer im 19. Jahrhundert*. Abhandlungen der Göttinger Akademie der Wissenschaften, Göttingen, 2005. Mathem.-Physik. Klasse, Reihe 3, Nr. 52.
- [Hen07] K. Hentschel. Gauß, Meyerstein and Hanoverian metrology. *Annals of Science*, 64:41–72, 2007.
- [Hen20] K. Hentschel. The ‘invisible hand’ of Carl Friedrich Gauß — retracing the life of Moritz Meyerstein, a 19th century instrument maker and Universitäts-Mechanicus. In C. Forstner and M. Walker, editors, *Biographies in the History of Physics: Actors, Objects, Institutions*, chapter 2, pages 13–36. Springer, Berlin, 2020. Translated by A. M. Hentschel.
- [Hop59] I. B. Hopley. Maxwell’s determination of the number of electrostatic units in one electromagnetic unit of electricity. *Annals of Science*, 15:91–108, 1959. Doi: 10.1080/00033795900200098.
- [Hor47] E. N. Horsford. Ueber den elektrischen Leitungswiderstand der Flüssigkeiten. *Annalen der Physik und Chemie*, 70:238–243, 1847.
- [Hun21] B. J. Hunt. *Imperial Science: Cable Telegraphy and Electrical Physics in the Victorian British Empire*. Cambridge University Press, Cambridge, 2021.

- [Jac51] Jacobi. Sur quelques points de la galvanométrie. *Comptes Rendues de l'Académie des Sciences de Paris*, 33:277–282, 1851.
- [Jac15] R. Jackson. John Tyndall and the early history of diamagnetism. *Annals of Science*, 72:435–489, 2015. Doi: 10.1080/00033790.2014.929743.
- [JM86] C. Jungnickel and R. McCormmach. *Intellectual Mastery of Nature — Theoretical Physics from Ohm to Einstein*, volume 1-2. University of Chicago Press, Chicago, 1986.
- [Joh97] L. Johnson. In memoriam: Susan P. Johnson. *Executive Intelligence Review*, 24:58, 1997.
- [Jou40a] J. P. Joule. Investigations in magnetism and electro-magnetism. *The Annals of Electricity, Magnetism, & Chemistry; and Guardian of Experimental Science*, 4:131–137, 1840.
- [Jou40b] J. P. Joule. On electro-magnetic forces. *The Annals of Electricity, Magnetism, & Chemistry; and Guardian of Experimental Science*, 5:470–472, 1840.
- [Jou41a] J. P. Joule. On the heat evolved by metallic conductors of electricity, and in the cells of a battery during electrolysis. *Philosophical Magazine*, 19:260–277, 1841. Reimpresso em *The Annals of Electricity, Magnetism, and Chemistry; and Guardian of Experimental Science*, Vol. 8, págs. 287-301 (1842).
- [Jou41b] J. P. Joule. On the production of heat by voltaic electricity. *Proceedings of the Royal Society of London*, 4:280–281, 1841. Reimpresso em *Athenaeum*, Vol. 697, 192 (1841) e *Philosophical Magazine*, Vol. 18, págs. 308-309 (1841).
- [Jou42] J. P. Joule. Sur la chaleur développée dans les conducteurs métalliques et dans les auges d'une pile sous l'influence de l'électricité. *Archives de l'Électricité. Supplément a la Bibliothèque Universelle de Genève*, 2:54–79, 1842.
- [Jou52] J. P. Joule. Account of experiments with a powerful electro-magnet. *Philosophical Magazine*, 3:32–36, 1852.
- [Kin70] W. F. King. Description of Sir Wm. Thomson's experiments made for the determination of v , the number of electrostatic units in the electromagnetic unit. *Report of the Thirty-ninth Meeting of the British Association for the Advancement of Science*, pages 434–436, 1870.
- [Kir57a] G. Kirchhoff. On the motion of electricity in wires. *Philosophical Magazine*, 13:393–412, 1857. Disponível em <https://archive.org/stream/londonedinburghp13maga#page/392/mode/2up>.
- [Kir57b] G. Kirchhoff. Ueber die Bewegung der Elektrizität in Drähten. *Annalen der Physik und Chemie*, 100:193–217, 1857. Reimpresso em G. Kirchhoff's *Gesammelte Abhandlungen* (Barth, Leipzig, 1882), págs. 131-154.
- [Kir57c] G. Kirchhoff. Ueber die Bewegung der Elektrizität in Leitern. *Annalen der Physik und Chemie*, 102:529–544, 1857. Reimpresso em G. Kirchhoff's *Gesammelte Abhandlungen* (Barth, Leipzig, 1882), págs. 154-168.

- [Kir64] G. Kirchhoff. Zur Theorie der Entladung einer Leydener Flasche. *Annalen der Physik und Chemie*, 197:551–566, 1864. Reimpresso em G. Kirchhoff’s *Gesammelte Abhandlungen* (Barth, Leipzig, 1882), págs. 168-182.
- [Kir56] F. Kirchner. Über die Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit aus elektromagnetischen Messungen nach W. Weber und R. Kohlrausch. *Die Naturwissenschaften*, 43:529–533, 1956.
- [Kir57] F. Kirchner. Determination of the velocity of light from electromagnetic measurements according to W. Weber and R. Kohlrausch. *American Journal of Physics*, 25:623–629, 1957. Translated by A. Akeley.
- [Kir21a] G. Kirchhoff. On the motion of electricity in conductors. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume III: Measurement of Weber’s Constant c , Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, pages 229–241, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Kir21b] G. Kirchhoff. On the motion of electricity in wires. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume III: Measurement of Weber’s Constant c , Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, pages 201–220, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Koh53] R. Kohlrausch. Das Sinus-Elektrometer. *Annalen der Physik und Chemie*, 88:497–518, 1853.
- [Koh54a] R. Kohlrausch. Theorie des elektrischen Rückstandes in der Leidener Flasche. *Annalen der Physik und Chemie*, 91:56–82, 1854.
- [Koh54b] R. Kohlrausch. Theorie des elektrischen Rückstandes in der Leidener Flasche (Schluss). *Annalen der Physik und Chemie*, 91:179–214, 1854.
- [Koh83] F. Kohlrausch. *An Introduction to Physical Measurements — with appendices on absolute electrical measurement, etc.* J. & A. Churchill, London, 2nd edition, 1883. Translated from the fourth German edition by T. H. Waller and H. R. Procter.
- [Kra12] H. Kragh. Zöllner’s universe. *Physics in Perspective*, 14:392–420, 2012.
- [KW57] R. Kohlrausch and W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass. *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physischen Classe*, 3:221–292, 1857. Reimpresso em *Wilhelm Weber’s Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 609-676.
- [KW21] R. Kohlrausch and W. Weber. Electrodynamic measurements, fourth memoir, specially attributing mechanical units to measures of current intensity. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics*

Translated into English, volume III: Measurement of Weber's Constant c , Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, pages 141–199, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

- [LA98] E. K. Lauridsen and N. Abrahamsen. The history of astatic magnet systems and suspensions. *Centaurus*, 40:135–169, 1998.
- [LB67] D. Lardner and E. B. Bright. *The Electric Telegraph*. James Walton, London, 3rd edition, 1867. A new edition revised and re-written by E. B. Bright.
- [Len35] E. Lenz. Ueber die Leitungsfähigkeit der Metalle für die Elektrizität bei verschiedenen Temperaturen. *Annalen der Physik und Chemie*, 34:418–438, 1835.
- [Len38] E. Lenz. Ueber die Leitungsfähigkeit des Goldes, Bleis und Zinns für die Elektrizität bei verschiedenen Temperaturen. *Annalen der Physik und Chemie*, 45:105–121, 1838.
- [Len43a] E. Lenz. Ueber die Gesetze der Wärme-Entwicklung durch den galvanischen Strom. *Annalen der Physik und Chemie*, 59:203–240, 1843.
- [Len43b] E. Lenz. Ueber die Gesetze der Wärme-Entwicklung durch den galvanischen Strom (fortsetzung). *Annalen der Physik und Chemie*, 59:407–420, 1843.
- [Len43c] H. F. E. Lenz. Ueber die Gesetze der Wärme-Entwicklung durch den galvanischen Strom. *Bulletin de la Classe Physico-mathématique de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg*, 1:column 209 – column 253, 1843.
- [Len44a] E. Lenz. Ueber die Gesetze der Wärme-Entwicklung durch den galvanischen Strom. *Annalen der Physik und Chemie*, 61:18–49, 1844.
- [Len44b] H. F. E. Lenz. Ueber die Gesetze der Wärme-Entwicklung durch den galvanischen Strom. *Bulletin de la Classe Physico-mathématique de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg*, 2:column 161 – column 188, 1844.
- [Llo80] J. T. Lloyd. Lord Kelvin demonstrated. *The Physics Teacher*, 18:16–24, 1980.
- [Llo07] J. T. Lloyd. Lorde Kelvin demonstrado. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 29:499–508, 2007. Traduzido por A. K. T. Assis.
- [Lor67a] L. Lorenz. On the identity of the vibrations of light with electrical currents. *Philosophical Magazine*, 34:287–301, 1867.
- [Lor67b] L. Lorenz. Ueber die Identität der Schwingungen des Lichts mit den elektrischen Strömen. *Annalen der Physik und Chemie*, 131:243–263, 1867. Aus dem “Oversigt over det K. Danske Vidensk. Selsk. Forhandl.” 1867. No. 1, vom Hrn. Verfatter übersandt.
- [Lor92] H. A. Lorentz. La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants. *Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles*, 25:363–552, 1892. Reimpresso em H. A. Lorentz, *Collected Papers* (Springer, Dordrecht, 1936), Vol. II, págs. 164–343.

- [Lor95] H. A. Lorentz. *Versuch einer Theorie der Electricischen und Optischen Erscheinungen in Bewegten Körpern*. E. J. Brill, Leiden, 1895. Reimpresso em H. A. Lorentz, *Collected Papers* (Springer, Dordrecht, 1937), Vol. V, págs. 1-138. Tradução para o inglês pelo Wikisource disponível em https://en.wikisource.org/wiki/Translation:Attempt_of_a_Theory_of_Electrical_and_Optical_Phenomena_in_Moving_Bodies.
- [Lor04] H. A. Lorentz. Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than that of light. *Proceedings of the Academy of Sciences of Amsterdam*, 6:809–831, 1904.
- [Lor06] H. A. Lorentz. *Versuch einer Theorie der Electricischen und Optischen Erscheinungen in Bewegten Körpern*. Teubner, Leipzig, 1906. Reimpressão da edição de 1895. Reimpresso em H. A. Lorentz, *Collected Papers* (Springer, Dordrecht, 1937), Vol. V, págs. 1-138. Tradução para o inglês pelo Wikisource disponível em https://en.wikisource.org/wiki/Translation:Attempt_of_a_Theory_of_Electrical_and_Optical_Phenomena_in_Moving_Bodies.
- [Lor22] H. A. Lorentz. Maxwells elektromagnetische Theorie. In A. Sommerfeld, editor, *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss Ihrer Anwendungen*, volume 5, Part 2, chapter 13, pages 63–144. B. G. Teubner, Leipzig, 1904-1922. Abgeschlossen im Juni 1903.
- [LSN21] A. R. d. S. Lima, A. P. B. d. Silva, and L. F. d. Nascimento. Uma proposta histórica e experimental para o estudo dos multiplicadores do efeito magnético. *Experiências em Ensino de Ciências*, 16:185–206, 2021.
- [Mal82] S. R. C. Malin. Sesquicentenary of Gauss’s first measurement of the absolute value of magnetic intensity. *Philosophical Transactions*, 306:5–8, 1982.
- [Mal07] S. R. C. Malin. Gauss’ determination of absolute intensity. In D. Gubbins and E. Herrero-Bervera, editors, *Encyclopedia of Geomagnetism and Paleomagnetism*, pages 278–279. Springer, Dordrecht, 2007. Doi: 10.1007/978-1-4020-4423-6_104.
- [Mar22] R. d. A. Martins. Joule’s 1840 manuscript on the production of heat by voltaic electricity. *Notes and Records*, 76:117–153, 2022. Doi: 10.1098/rsnr.2020.0027.
- [Max62] J. C. Maxwell, 1861-62. On physical lines of force. *Philosophical Magazine*, Vol. 21, págs. 161-175, 281-291 e 338-348 (1861); Vol. 23, págs. 12-24 e 85-95 (1862). Reimpresso em W. D. Niven (ed.), *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell* (Cambridge University Press, Cambridge, 1890), Vol. 1, págs. 451-513.
- [Max58] J. C. Maxwell. On Faraday’s lines of force. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 10:27–83, 1858. Lido em 10 de dezembro de 1855 e 11 de fevereiro de 1856. Reimpresso em W. D. Niven (ed.), *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell* (Cambridge University Press, Cambridge, 1890), Vol. 1, págs. 155-229.

- [Max65] J. C. Maxwell. A dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical Transactions*, 155:459–512, 1865. Lido em 8 de dezembro de 1864. Reimpresso em W. D. Niven (ed.), *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell* (Cambridge University Press, Cambridge, 1890), Vol. 1, págs. 526-597.
- [Max68] J. C. Maxwell. On a method of making a direct comparison of electrostatic with electromagnetic force; with a note on the electromagnetic theory of light. *Philosophical Transactions*, 158:643–657, 1868. Reimpresso em W. D. Niven (ed.), *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell* (Cambridge University Press, Cambridge, 1890), Vol. 2, págs. 125-143.
- [Max70] J. C. Maxwell. Experiments on the value of v , the ratio of the electromagnetic to the electrostatic unit of electricity. *Report of the Thirty-ninth Meeting of the British Association for the Advancement of Science; held at Exeter in August 1869*, pages 436–438, 1870.
- [Max73a] J. C. Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism*, volume I. Clarendon Press, Oxford, 1873.
- [Max73b] J. C. Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism*, volume II. Clarendon Press, Oxford, 1873.
- [Max83a] J. C. Maxwell. *Lehrbuch der Electricität und des Magnetismus*. Springer, Berlin, 1883. 2 Bde. Deutsche Übersetzung von B. Weinstein.
- [Max83b] J. C. Maxwell. *Lehrbuch der Electricität und des Magnetismus*. Springer, Berlin, 1883. 1 Bde. Deutsche Übersetzung von B. Weinstein.
- [Max54] J. C. Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Dover, New York, 1954. Two volumes. Unabridged republication of the third edition of 1891.
- [Max95] J. C. Maxwell. *The Scientific Letters and Papers of James Clerk Maxwell*, volume II: 1862-1873. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Edited by P. M. Harman.
- [MB82] S. R. C. Malin and D. R. Barraclough. 150th anniversary of Gauss’s first absolute magnetic measurement. *Nature*, 297:285, 1982.
- [Men06] K. S. Mendelson. The story of c . *American Journal of Physics*, 74:995–997, 2006. Doi: 10.1119/1.2238887.
- [Men15] K. S. Mendelson. On an early proposal for a unified system of units. *American Journal of Physics*, 83:183–185, 2015. Doi: 10.1119/1.4896353.
- [Mer84] U. C. Merzbach. *Carl Friedrich Gauss: A Bibliography*. Scholarly Resources Inc., Wilmington, Delaware, 1984.
- [Mil81] A. I. Miller. *Albert Einstein’s Special Theory of Relativity*. Addison-Wesley, Reading, 1981.

- [ML22] B. C. d. S. Matos and M. C. d. Lima. Efeito Faraday: entre a atividade óptica natural e a teoria dos elétrons. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 44, 2022. Doi: 10.1590/1806-9126-RBEF-2021-0395.
- [MRGL10] F. Martin-Rodriguez, G. B. Garcia, and M. A. Lires. Technological archaeology: technical description of the Gauss-Weber telegraph. In IEEE, editor, *2010 Second Region 8 IEEE Conference on the History of Communications*, Madrid, 2010. Histelcon. Doi: 10.1109/HISTELCON.2010.5735309.
- [MS20] R. A. Martins and A. P. B. Silva. Joule’s experiments on the heat evolved by metallic conductors of electricity. *Foundations of Science*, pages 1–77, 2020. Doi: 10.1007/s10699-020-09681-1.
- [Mül50] J. Müller. Ueber die Magnetisirung von Eisenstäben durch den galvanischen Strom. *Annalen der Physik und Chemie*, 79:337–344, 1850.
- [Mül51a] J. Müller. *Bericht über die neuesten Fortschritte der Physik*. Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1851.
- [Mül51b] J. Müller. Ueber den Sättigungspunkt der Elektromagnete. *Annalen der Physik und Chemie*, 82:181–188, 1851.
- [Ner33] J. J. Nervander. Mémoire sur un galvanomètre à châssis cylindrique par lequel on obtient immédiatement et sans calcul la mesure de l’intensité du courant électrique qui produit la déviation de l’aiguille aimantée. *Annales de Chimie et de Physique*, 55:156–184, 1833.
- [Neu48a] F. E. Neumann. *Über ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirte elektrischer Ströme*. G. Reimer, Berlin, 1848. Vorgelesen in der Berliner Akademie der Wissenschaften am 9. August 1847.
- [Neu48b] J. Neumann. Entwicklung der in elliptischen Coordinaten ausgedrückten reciproken Entfernung zweier Punkte in Reihen, welche nach den Laplace’schen $Y^{(n)}$ fortschreiten; und Anwendung dieser Reihen zur Bestimmung des magnetischen Zustandes eines Rotations-Ellipsoides, welches durch vertheilende Kräfte erregt ist. *Journal für reine und angewandte Mathematik*, 37:21–50, 1848.
- [Neu49] F. Neumann. Über ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirte elektrischer Ströme. *Abhandlungen der Königlischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pages 1–70, 1849. Vorgelegt in der Akademie der Wissenschaften am 9. August 1847.
- [Neu58] C. Neumann. *Explicare tentatur quomodo fiat ut lucis planum polarisationis per vires electricas vel magneticas declinetur*. Halis Saxonum, 1858.
- [Neu63] C. Neumann. *Die magnetische Drehung der Polarisationssebene des Lichts — Versuch einer mathematischen Theorie*. Verlag des Buchhandlung des Waisenhauses, Halle, 1863.
- [Neu68a] C. Neumann. *Die Principien der Elektrodynamik. Eine mathematische Untersuchung*. H. Laupp, Tübingen, 1868. Reimpresso em *Mathematische Annalen*, Vol. 17, págs. 400-434 (1880).

- [Neu68b] C. Neumann. Resultate einer Untersuchung über die Principien der Elektrodynamik. *Nachrichten der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften*, 10:223–234, 1868.
- [Neu69] C. Neumann. Notizen zu einer kürzlich erschienenen Schrift über die Principien der Elektrodynamik. *Mathematische Annalen*, 1:317–324, 1869.
- [Neu21a] C. Neumann. Notes on a recently published essay on the principles of electrodynamics. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume IV: Conservation of Energy, Weber's Planetary Model of the Atom and the Unification of Electromagnetism and Gravitation, pages 49–54, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Neu21b] C. Neumann. Principles of electrodynamics. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume IV: Conservation of Energy, Weber's Planetary Model of the Atom and the Unification of Electromagnetism and Gravitation, pages 17–47, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [New90] I. Newton. *Principia — Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*. Nova Stella/Edusp, São Paulo, 1990. Livro I: O Movimento dos Corpos. Tradução de T. Ricci, L. G. Brunet, S. T. Gehring e M. H. C. Célia.
- [Ohm26a] G. S. Ohm. Bestimmung des Gesetzes, nach welchem Metalle die Kontakt-Elektrizität leiten, nebst einem Entwurfe zu einer Theorie des Voltaschen Apparates und des Schweiggerschen Multiplikators. *Journal für Chemie und Physik*, 46:137–166, 1826. Reimpresso em *Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften*, Número 244, C. Piel (ed.), (Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1938), págs. 8-29.
- [Ohm26b] G. S. Ohm. Ein Nachtrag zu dem vorstehenden Aufsatz. *Annalen der Physik und Chemie*, 7:117–118, 1826.
- [Ohm26c] G. S. Ohm. Versuch einer Theorie der durch galvanische Kräfte hervorgebrachten elektroskopischen Erscheinungen. *Annalen der Physik und Chemie*, 6:459–469, 1826.
- [Ohm26d] G. S. Ohm. Versuch einer Theorie der durch galvanische Kräfte hervorgebrachten elektroskopischen Erscheinungen (Beschluss). *Annalen der Physik und Chemie*, 7:45–54, 1826.
- [Ohm27] G. S. Ohm. *Die Galvanische Kette, mathematisch bearbeitet*. T. H. Riemann, Berlin, 1827.
- [Ohm60] G. S. Ohm. *Théorie Mathématique des Courants Électriques*. L. Hachette et Co., Paris, 1860. Traduction, préface et notes de J.-M. Gaugain.
- [Ohm66] G. S. Ohm. The galvanic circuit investigated mathematically. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs*, Vol. 2, pages 401–506, New York, 1966. Johnson Reprint Corporation. English translation by W. Francis.

- [O'R65] A. O'Rahilly. *Electromagnetic Theory — A Critical Examination of Fundamentals*. Dover, New York, 1965.
- [Pla45] J. Plana. Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface de deux sphères conductrices complètement isolées. *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 7:71–401, 1845.
- [Pla54] J. Plana. Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface intérieure et sphérique d'une sphère creuse de métal, et à la surface d'une autre sphère conductrice électrisée que l'on tient isolée dans la cavité. *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 16:57–95, 1854.
- [Pla00] M. Planck. Ueber irreversible Strahlungsvorgänge. *Annalen der Physik*, 306:69–122, 1900.
- [Plü48] Plücker. Ueber ein einfaches Mittel, den Diamagnetismus schwingender Körper zu verstärken. *Annalen der Physik und Chemie*, 73:613–618, 1848.
- [Pog48] J. C. Poggendorff. Ueber die diamagnetische Polarität. *Annalen der Physik und Chemie*, 73:475–479, 1848.
- [Pog57] J. C. Poggendorff. Bemerkung zu dem Aufsatz des Herrn Prof. Kirchhoff. *Annalen der Physik und Chemie*, 100:351–352, 1857. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 4, pág. 242, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1894).
- [Pog21] J. C. Poggendorff. Comment on the paper by Prof. Kirchhoff. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume III: Measurement of Weber's Constant c , Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, page 225, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Poi12a] Poisson. Extrait d'un mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs. *Journal de Physique, de Chimie, d'Histoire Naturelle et des Arts*, 75:229–237, 1812.
- [Poi12b] Poisson. Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs. *Mémoires de la Classe des Sciences Mathématiques et Physiques*, pages 1–92, 1812. Année 1811. Première partie. Lu les 9 mai et 3 août 1812.
- [Poi13] Poisson. Second mémoire sur la distribution de l'électricité a la surface des corps conducteurs. *Journal de Physique, de Chimie, d'Histoire Naturelle et des Arts*, 77:380–386, 1813. Lu à l'Institut, le 6 septembre 1813.
- [Poi22a] S. D. Poisson. Mémoire sur la théorie du magnétisme. Lu à l'Académie royale des Sciences le 2 Février 1824. *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France*, 5:247–338, 1821-1822. Histoire de l'Académie. Analyse des travaux de l'Académie royale des sciences pendant l'année 1821, partie mathématique; par M. le chevalier Delambre, secrétaire perpétuel. Apesar da data, este volume foi publicado apenas em 1826.

- [Poi22b] S. D. Poisson. Second Mémoire sur la théorie du magnétisme. Lu à l'Académie royale des Sciences le 27 Décembre 1824. *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France*, 5:488–533, 1821-1822. Histoire de l'Académie. Analyse des travaux de l'Académie royale des sciences pendant l'année 1821, partie mathématique; par M. le chevalier Delambre, secrétaire perpétuel. Apesar da data, este volume foi publicado apenas em 1826.
- [Poi25a] Poisson. Solution d'un problème relatif au magnétisme terrestre. *Annales de Chimie et de Physique*, 30:257–263, 1825.
- [Poi25b] Poisson. Solution d'un problème relatif au magnétisme terrestre. *Connaissance des Temps, ou des Mouvements Célestes, à l'usage des Astronomes et des Navigateurs, por l'An 1828*, pages 322–330, 1825. Paris.
- [Poi19] Poisson. Essay on the distribution of electricity on the surface of conducting bodies. Traduzido por S. Gallagher. Disponível em <https://histomathsci.blogspot.com>, 2019.
- [Pot84] A. Potier. *Collection de Mémoires relatifs à la Physique*, volume 1: *Mémoires de Coulomb*. Gauthiers-Villars, Paris, 1884.
- [Pou37] Pouillet. Mémoire sur la pile de Volta et sur la loi générale de l'intensité que prennent les courants, soit qu'ils proviennent d'un seul élément, soit qu'ils proviennent d'une pile à grande ou à petite tension. *Comptes Rendues de l'Académie des Sciences de Paris*, 4:267–279, 1837.
- [RA11] S. Reif-Acherman. Studies on the temperature dependence of electric conductivity for metals in the nineteenth century: a neglected chapter in the history of superconductivity. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 33:4602, 2011. Doi: 10.1590/S1806-11172011000400020.
- [Rei48a] F. Reich. Versuche über die abstossende Wirkung eines Magnetpoles auf unmagnetische Körper. *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Klasse*, Band I aus den Jahren 1846 und 1847:251–255, 1848.
- [Rei48b] F. Reich. Versuche über die abstossende Wirkung eines Magnetpols auf unmagnetische Körper. *Annalen der Physik und Chemie*, 73:60–65, 1848.
- [Rei49] F. Reich. On the repulsive action of the pole of a magnet upon non-magnetic bodies. *Philosophical Magazine*, 34:127–130, 1849.
- [Rei02] K. Reich. *Gauß' Werke in Kurzfassung*. Erwin Rauner, Augsburg, 2002. Algorismus, Studien zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften, Vol. 39.
- [Rei19] K. Reich, 2019. Die Intensität der erdmagnetischen Kraft: Nr. 15, pp. xxxix-xlii. In *Carl Friedrich Gauss' — Werke — Supplement —* Band 3: Varia: 15 Abhandlungen in deutscher Übersetzung. Mit einer Einleitung, einer Bibliographie und Registern herausgegeben von Karin Reich. Hrsg. von der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen, Universitätsverlag Göttingen 2019, pp. 533-594.

- [Rie67a] B. Riemann. A contribution to electrodynamics. *Philosophical Magazine*, 34:368–372, 1867. Esse texto foi escrito em 1858.
- [Rie67b] B. Riemann. Ein Beitrag zur Elektrodynamik. *Annalen der Physik und Chemie*, 131:237–243, 1867. Esse texto foi escrito em 1858.
- [Rie77] B. Riemann. A contribution to electrodynamics. In C. White, *Energy Potential: Toward a New Electromagnetic Field Theory*, pages 295–300, New York, 1977. Campaigner. Translated by J. J. Cleary Jr.
- [Roe35] O. Roemer. The velocity of light. In W. F. Magie, editor, *A Source Book in Physics*, pages 335–337, New York, 1935. McGraw-Hill.
- [Röm76] Römer. Démonstration touchant le mouvement de la lumière. *Le Journal des Scavans*, pages 233–236, 1676.
- [Rom77] Romer. A demonstration concerning the motion of light, communicated from Paris, in the Journal des Scavans, and here made English. *Philosophical Transactions*, 12:893–894, 1677.
- [Ros89] E. B. Rosa. Determination of v , the ratio of the electromagnetic to the electrostatic unit. *Philosophical Magazine*, 28:315–332, 1889. Doi: 10.1080/14786448908621359.
- [Ros56] L. Rosenfeld. The velocity of light and the evolution of electrodynamics. *Il Nuovo Cimento*, Supplement to vol. 4:1630–1669, 1956. Reimpresso em Cohen, R. S. e Stachel, J. J. (eds.), *Selected Papers of Léon Rosenfeld*. Boston Studies in the Philosophy of Science, Vol. 21. Springer, Dordrecht, Cap. 14, págs. 134-177.
- [Ros81] L. Rosenfeld. Kirchhoff, Gustav Robert. In C. C. Gillispie, editor, *Dictionary of Scientific Biography*, Vol. 7, pages 379–383, New York, 1981. Charles Scribner's Sons.
- [Sch20] J. S. Schweigger. Zusätze zu Oersted's elektro-magnetische Versuchen. *Allgemeine Literatur-Zeitung*, 296:cols. 622–624, 1820.
- [Sch21a] Schweiger. Sur l'electro-magnétisme. *Bibliothèque Universelle des Sciences, Belles-Lettres, et Arts*, 16:197–200, 1821.
- [Sch21b] J. S. Schweigger. Noch einige Worte über diese neuen elektromagnetischen Phänomene. *Journal für Chemie und Physik*, 31:35–41, 1821.
- [Sch21c] J. S. Schweigger. Über Elektromagnetismus. *Journal für Chemie und Physik*, 31:7–17, 1821.
- [Sch21d] J. S. Schweigger. Zusätze zu Oersted's elektromagnetische Versuchen. *Journal für Chemie und Physik*, 31:1–6, 1821.
- [Sch88] U. Schmucker. The Wingst geomagnetic observatory and the development of geomagnetism during the past fifty years. *Deutsche Hydrographische Zeitschrift*, 41:93–107, 1988. Doi: 10.1007/BF02225920.

- [Sch95] S. Schaffer. Accurate measurement is an English science. In M. Norton Wise, editor, *The Values of Precision*, chapter 6, pages 137–172. Princeton University Press, Princeton, 1995.
- [Sie60] W. Siemens. Vorschlag eines reproducirbaren Widerstandsmaaßes. *Annalen der Physik und Chemie*, 186:1–20, 1860. Doi: 10.1002/andp.18601860502.
- [Sie61] W. Siemens. Proposal for a new reproducible standard measure of resistance to galvanic currents. *Philosophical Magazine*, 21:25–38, 1861. Translated by F. Guthrie.
- [Sih21] A. Sihvola. Johan Jacob Nervander and the quantification of electric current. *IEEE Antennas & Propagation Magazine*, 63:123–128, 2021. Doi: 10.1109/MAP.2020.3039803.
- [Sto88] J. T. Stock. Eben Horsford (1818) and the measurement of electrolytic resistance. *Journal of Chemical Education*, 65:700–701, 1988.
- [Tat78] R. Taton (editor). *Roemer et la Vitesse de la Lumière*. J. Vrin, Paris, 1978.
- [TBA18] D. A. V. Tonidandel, W. d. C. Boaventura, and A. E. A. d. Araújo. A primeira teoria matemática da propagação elétrica: uma leitura estendida do artigo “Sobre a teoria do telégrafo elétrico”, de William Thomson. *Revista Brasileira de História da Ciência*, 11:267–287, 2018.
- [Tho56a] W. Thomson. On the theory of the electric telegraph. *Philosophical Magazine*, 11:146–160, 1856.
- [Tho56b] W. Thomson. On the theory of the electric telegraph. *Proceedings of the Royal Society of London*, 7:382–399, 1856. Reimpresso em W. Thomson, *Mathematical and Physical Papers*, Vol. II (C. J. Clay and Son, London, 1884), artigo LXXIII, págs. 61–76.
- [Tho83] J. J. Thomson. On the determination of the number of electrostatic units in the electromagnetic unit of electricity. *Philosophical Transactions*, 174:707–721, 1883. Doi: 10.1098/rstl.1883.0023.
- [Tho01] S. P. Thompson. *Michael Faraday: His Life and Work*. Cassell and Company, London, 1901.
- [Tim05] A. Timm. Der elektromagnetische Telegraph von Gauß und Weber. *Göttinger Bibliothekschriften*, 30:169–187, 2005.
- [Tom20] F. D. Tombe. The 1855 Weber-Kohlrausch experiment (the speed of light). *The General Science Journal*, 2020. Disponível em www.gsjournal.net/Science-Journals/Research%20Papers/View/7711.
- [TS90] J. J. Thomson and G. F. C. Searle. A determination of “v,” the ratio of the electromagnetic unit of electricity to the electrostatic unit. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 181:583–621, 1890. Doi: 10.1098/rsta.1890.0011.

- [Tyn54] J. Tyndall. On the diamagnetic force. *British Association Report, Notes and Abstracts of Miscellaneous Communications to the Sections*, pages 14–16, 1854. London: Murray.
- [Tyn55a] J. Tyndall. On the nature of the force by which bodies are repelled from the poles of a magnet. *Proceedings of the Royal Institution of Great Britain*, 2:13–16, 1855.
- [Tyn55b] J. Tyndall. On the nature of the force by which bodies are repelled from the poles of a magnet; to which is prefixed, an account of some experiments on molecular influences. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 145:1–51, 1855.
- [Tyn55c] J. Tyndall. On the nature of the force by which bodies are repelled from the poles of a magnet; to which is prefixed, an account of some experiments on molecular influences. *Philosophical Magazine*, 10:153–179 and 257–290, 1855.
- [Tyn56] J. Tyndall. Further researches on the polarity of the diamagnetic force. *Philosophical Transactions*, 146:237–259, 1856.
- [Tyn69] J. Tyndall. *Heat Considered as a Mode of Motion*. D. Appleton & Company, New York, 1869.
- [Tyn88] J. Tyndall. *Researches on Diamagnetism and Magne-crystallic Action including the Question of Diamagnetic Polarity*. D. Appleton and Company, New York, 1888.
- [VS08] J. Venermo and A. Sihvola. The tangent galvanometer of Johan Jacob Nervander. *IEEE Instrumentation & Measurement Magazine*, 11:16–23, 2008.
- [Web35] W. Weber. Ueber die Elasticität der Seidenfäden. *Annalen der Physik und Chemie*, 34:247–257, 1835. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 1, W. Voigt (ed.), (Springer, Berlin, 1892), págs. 438-444.
- [Web37] W. Weber. Bemerkungen über die Einrichtung magnetischer Observatorien und Beschreibung der darin aufzustellenden Instrumente. In C. F. Gauss and W. Weber, editors, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1836*, volume I, chapter I, pages 13–33. Dieterichschen Buchhandlung, Göttingen, 1837. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 2, E. Riecke (ed.), (Springer, Berlin, 1892), págs. 3-19.
- [Web38a] W. Weber. Bemerkungen über die Einrichtung und den Gebrauch des Bifilar-Magnetometers. In C. F. Gauss and W. Weber, editors, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837*, volume II, chapter II, pages 20–37. Dieterichschen Buchhandlung, Göttingen, 1838. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 2, E. Riecke (ed.), (Springer, Berlin, 1892), págs. 43-57.
- [Web38b] W. Weber. Das Induktions-Inklinatorium. In C. F. Gauss and W. Weber, editors, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837*, volume II, chapter V, pages 81–96. Dieterichschen Buchhandlung, Göttingen, 1838. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 2, E. Riecke (ed.), (Springer, Berlin, 1892), págs. 75-88.

- [Web38c] W. Weber. Remarques sur l'établissement des observatoires magnétiques, et description des instrumens à y placer. In A. Quetelet, editor, *Correspondance Mathématique et Physique*, pages 49–71. Société Belge de Librairie, Bruxelles, 1838. Tome X et Tome Second de la Troisième Série.
- [Web39] W. Weber. Der Induktor zum Magnetometer. In C. F. Gauss and W. Weber, editors, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1838*, volume III, chapter IV, pages 86–101. Weidmannschen Buchhandlung, Leipzig, 1839. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 2, E. Riecke (ed.), (Springer, Berlin, 1892), págs. 105-118.
- [Web40] W. Weber. Unipolare Induction. In C. F. Gauss and W. Weber, editors, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839*, volume IV, chapter III, pages 63–90. Weidmannschen Buchhandlung, Leipzig, 1840. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 2, E. Riecke (ed.), (Springer, Berlin, 1892), págs. 153-175, resumo com algumas alterações e modificações feitas por Weber em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 2, E. Riecke (ed.), (Springer, Berlin, 1892), págs. 176-179.
- [Web41a] W. Weber. Observations on the arrangement and use of the bifilar magnetometer. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs*, Vol. 2, pages 268–280, London, 1841. Taylor and Francis. From the *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837*, Volume II, Chapter II, pp. 20-37. — Herausgegeben von Carl Friedrich Gauss und Wilhelm Weber. Göttingen, 1838. Translated by Mr. William Francis, and revised by Professor Lloyd and Major Sabine. Disponível em <https://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/2501#/summary>.
- [Web41b] W. Weber. Remarks on the arrangement of magnetical observatories, and description of the instruments to be placed in them. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs*, Vol. 2, pages 25–42, London, 1841. Taylor and Francis. From the *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1836*, Volume I, Chapter I, pp. 13-33. Translated by Mr. William Francis, and revised by Professor Lloyd and Major Sabine. Disponível em <https://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/2501#/summary>.
- [Web41c] W. Weber. Ueber das elektrochemische Aequivalent des Wassers. In C. F. Gauss and W. Weber, editors, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840*, volume V, chapter IX, pages 91–98. Weidmannschen Buchhandlung, Leipzig, 1841. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 13-18.
- [Web42] W. Weber. Ueber das elektrochemische Aequivalent des Wassers. *Annalen der Physik und Chemie*, 55:181–189, 1842. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 13-18.
- [Web46] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen — Über ein allgemeines Grundgesetz der elektrischen Wirkung. *Abhandlungen bei Begründung der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften am Tage der zweihundertjährigen Geburtstagfeier Leibnizens herausgegeben von der Fürstlich Jablonows-*

kischen Gesellschaft (Leipzig), pages 211–378, 1846. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 25-214.

- [Web48a] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen. *Annalen der Physik und Chemie*, 73:193–240, 1848. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 215-254.
- [Web48b] W. Weber. Über die Erregung und Wirkung des Diamagnetismus nach den Gesetzen inducirter Ströme. *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Klasse*, Band I aus den Jahren 1846 und 1847:346–358, 1848. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 255-265.
- [Web48c] W. Weber. Über die Erregung und Wirkung des Diamagnetismus nach den Gesetzen inducirter Ströme. *Annalen der Physik und Chemie*, 73:241–256, 1848. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 255-268.
- [Web49] W. Weber. Bemerkungen zu Neumann's Theorie inducirter Ströme. *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Classe*, pages 1–8, 1849. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 269-275.
- [Web51] W. Weber. Messungen galvanischer Leitungswiderstände nach einem absolutem Maasse. *Annalen der Physik und Chemie*, 82:337–369, 1851. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 276-300.
- [Web52a] W. Weber. *Abhandlungen über elektrodynamische Maassbestimmungen*. Weidmannsche Buchhandlung, Leipzig, 1852.
- [Web52b] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere über Diamagnetismus. *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physischen Classe*, 1:485–577, 1852. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 473-554.
- [Web52c] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Widerstandsmessungen. *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physischen Classe*, 1:199–381, 1852. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 301-471.
- [Web52d] W. Weber. On the excitation and action of diamagnetism according to the laws of induced currents. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs*, Vol. 5, pages 477–488, London, 1852. Taylor and Francis. Translated by W. Francis from Poggendorff's *Annalen*, Jan. 7, 1848. Disponível em <https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.212784> e <https://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/2501#/summary>.

- [Web52e] W. Weber. On the measurement of electro-dynamic forces. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs*, Vol. 5, pages 489–529, London, 1852. Taylor and Francis. Disponível em <https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.212784> e <https://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/2501#/summary>.
- [Web52f] W. Weber. Ueber den Zusammenhang der Lehre vom Diamagnetismus mit der Lehre von dem Magnetismus und der Elektrizität. *Annalen der Physik und Chemie*, 87:145–189, 1852. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 555-590.
- [Web53a] W. Weber. Die Anwendung der magnetischen Induction auf Messung der Inclination mit dem Magnetometer. *Annalen der Physik und Chemie*, 90:209–247, 1853.
- [Web53b] W. Weber. On the connexion of diamagnetism with magnetism and electricity. In J. Tyndall and W. Francis, editors, *Scientific Memoirs*, Volume on Natural Philosophy, pages 163–199, London, 1853. Taylor and Francis. Translated by J. Tyndall. Disponível em https://books.google.com.br/books?id=C1i4AAAAIAAJ&hl=pt-BR&source=gbs_navlinks_s.
- [Web53c] W. Weber. Ueber die Anwendung der magnetischen Induktion zur Messung der Inklination mit dem Magnetometer. *Göttinger Nachrichten*, 2:17–24, 1853. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 2, E. Riecke (ed.), (Springer, Berlin, 1892), págs. 328-332.
- [Web53d] W. Weber. Verbesserung einer Formel in dem elektrodynamischen Maassbestimmungen. *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Classe*, Jahrgang 1852:164, 1853. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), pág. 549.
- [Web53e] W. E. Weber. Ueber die Anwendung der magnetischen Induktion auf Messung der Inklination mit dem Magnetometer. *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 5:3–58, 1853. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 2, E. Riecke (ed.), (Springer, Berlin, 1892), págs. 277-327.
- [Web54] W. Weber. Bestimmung der rechtwinkligen Komponenten der erdmagnetischen Kraft in Göttingen in dem Zeitraume von 1834-1853. *Göttinger Nachrichten*, 15:217–226, 1854. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 2, E. Riecke (ed.), (Springer, Berlin, 1892), págs. 374-380.
- [Web55a] W. Weber. On the theory of diamagnetism — Letter from Professor Weber to Prof. Tyndall. *Philosophical Magazine*, 10:407–410, 1855. Traduzido por J. Tyndall. Reimpresso em J. Tyndall, *Researches on Diamagnetism and Magnetic-crystallic Action including the Question of Diamagnetic Polarity* (D. Appleton and Company, New York, 1888), págs. 243-249.
- [Web55b] W. Weber. Vorwort bei der Übergabe der Abhandlung: Elektrodynamische maassbestimmungen, insbesondere zurückführung der stromintensitäts-messungen

auf mechanisches maass. *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Klasse*, 17:55–61, 1855. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 591-596.

- [Web56] W. Weber. Bestimmung der rechtwinkeligen Komponenten der erdmagnetischen Kraft in Göttingen in dem Zeitraume von 1834-1853. *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 6:3–46, 1856. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 2, E. Riecke (ed.), (Springer, Berlin, 1892), págs. 333-373.
- [Web57] W. Weber. Verbesserung. *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physischen Classe*, 3:292, 1857.
- [Web58] W. Weber. Bericht über einige im physikalischen Institute in Göttingen gemachte Versuche. *Nachrichten von der Georg Augustus Universität und der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 6:67–76, 1858. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 4, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1894), págs. 3-9.
- [Web61a] W. Weber. On the measurement of electric resistance according to an absolute standard. *Philosophical Magazine*, 22:226–240 and 261–269, 1861. Traduzido pelo Dr. E. Atkinson.
- [Web61b] W. Weber. Ueber die beabsichtigte Einführung eines galvanischen Widerstands-Etalons oder Standards. *Nachrichten von der Georg Augustus Universität und der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 17:263–273, 1861. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 4, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1894), págs. 10-16.
- [Web62] W. Weber. Zur Galvanometrie. *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematische Klasse*, 10:3–96, 1862. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 4, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1894), págs. 17-96.
- [Web63] W. Weber. Ueber die Abhandlung “Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über elektrische Schwingungen”. *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Klasse*, 15:10–17, 1863. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 4, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1894), págs. 97-103.
- [Web64] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere über elektrische Schwingungen. *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physischen Classe*, 6:571–716, 1864. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 4, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1894), págs. 105-241.
- [Web69] W. Weber. Ueber einen einfachen Ausspruch des allgemeinen Grundgesetzes der elektrischen Wirkung. *Annalen der Physik und Chemie*, 136:485–489, 1869. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 4, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1894), págs. 243-246.

- [Web71] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie. *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physischen Classe*, 10:1–61, 1871. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 4, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1894), págs. 247-299.
- [Web72] W. Weber. Electrodynamic measurements — Sixth memoir, relating specially to the principle of the conservation of energy. *Philosophical Magazine*, 43:1–20 and 119–149, 1872. Translated by Professor G. C. Foster, F.R.S., from the *Abhandlungen der mathem.-phys. Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften*, Vol. X (January 1871).
- [Web87] W. Weber. Mesures électrodynamiques. In J. Joubert, editor, *Collection de Mémoires relatifs a la Physique*, Vol. III: *Mémoires sur l'Électrodynamique*, pages 289–402. Gauthier-Villars, Paris, 1887.
- [Web94a] W. Weber. Ueber die Einrichtung des Bifilargalvanometers. In H. Weber, editor, *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 4, pages 584–615, Berlin, 1894. Springer.
- [Web94b] W. Weber. *Wilhelm Weber's Werke*, H. Weber, (ed.), volume 4, *Galvanismus und Elektrodynamik*, segunda parte. Springer, Berlin, 1894.
- [Web66a] W. Weber. Observations on the arrangement and use of the bifilar magnetometer. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs*, Vol. 2, pages 268–280, New York, 1966. Johnson Reprint Corporation.
- [Web66b] W. Weber. On the connexion of diamagnetism with magnetism and electricity. In J. Tyndall and W. Francis, editors, *Scientific Memoirs*, Volume on Natural Philosophy, pages 163–199, New York, 1966. Johnson Reprint Corporation. Translated by J. Tyndall.
- [Web66c] W. Weber. On the excitation and action of diamagnetism according to the laws of induced currents. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs*, Vol. 5, pages 477–488, New York, 1966. Johnson Reprint Corporation. Translated by W. Francis.
- [Web66d] W. Weber. On the measurement of electro-dynamic forces. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs*, Vol. 5, pages 489–529, New York, 1966. Johnson Reprint Corporation.
- [Web07] W. Weber, 2007. Determinations of electrodynamic measure: concerning a universal law of electrical action, *21st Century Science & Technology*, traduzido para o inglês por S. P. Johnson, editado por L. Hecht e A. K. T. Assis. Disponível desde março de 2007 em <http://21sci-tech.com/translation.html> e www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web19] W. Weber, 2019. On the measurement of electro-dynamic forces. Classics of Measure no. 1. Second edition. Version of 21 February 2019. This English translation appeared originally in R. Taylor (editor), *Scientific Memoirs, selected from the Transactions of Foreign Academies of Science and Learned Societies*, Volume V, part 20, article 14 (London: Taylor and Francis, 1852). Disponível em www.sizes.com/library/classics/Weber1.pdf.

- [Web20] W. Weber, 2020. Remarks on Neumann’s theory of induced currents. Segunda versão colocada online em julho de 2020 em www.ifi.unicamp.br/~assis. Traduzida por Elisabeth Becker-Schmollmann e editada por A. K. T. Assis.
- [Web21a] W. Weber. Electrodynamic measurements, fifth memoir, relating specially to electric oscillations. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume III: Measurement of Weber’s Constant c , Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, pages 267–383, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web21b] W. Weber. Electrodynamic measurements, first memoir, relating specially to a general fundamental law of electric action. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume II: Weber’s Fundamental Force and the Unification of the Laws of Coulomb, Ampère and Faraday, pages 33–203, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web21c] W. Weber. Electrodynamic measurements, second memoir, relating specially to measures of resistance. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume II: Weber’s Fundamental Force and the Unification of the Laws of Coulomb, Ampère and Faraday, pages 291–441, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web21d] W. Weber. Electrodynamic measurements, sixth memoir, relating specially to the principle of the conservation of energy. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume IV: Conservation of Energy, Weber’s Planetary Model of the Atom and the Unification of Electromagnetism and Gravitation, pages 67–111, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web21e] W. Weber. Electrodynamic measurements, third memoir, relating specially to diamagnetism. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume III: Measurement of Weber’s Constant c , Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, pages 11–83, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web21f] W. Weber. Foreword to the submission of the treatise: electrodynamic measurements, specially attributing mechanical units to measures of current intensity. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume III: Measurement of Weber’s Constant c , Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, pages 125–129, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web21g] W. Weber. Observations on the arrangement and use of the bifilar magnetometer. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume I: Gauss and Weber’s Absolute System of Units,

pages 135–149, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

- [Web21h] W. Weber. On a simple formulation of the general fundamental law of electric action. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume IV: Conservation of Energy, Weber's Planetary Model of the Atom and the Unification of Electromagnetism and Gravitation, pages 55–58, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web21i] W. Weber. On the connexion of diamagnetism with magnetism and electricity. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume III: Measurement of Weber's Constant c , Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, pages 85–120, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web21j] W. Weber. On the electrochemical equivalent of water. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume I: Gauss and Weber's Absolute System of Units, pages 195–200, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web21k] W. Weber. On the excitation and action of diamagnetism according to the laws of induced currents. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume II: Weber's Fundamental Force and the Unification of the Laws of Coulomb, Ampère and Faraday, pages 249–257, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web21l] W. Weber. On the intended introduction of a galvanic resistance etalon or standard. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume III: Measurement of Weber's Constant c , Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, pages 249–254, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web21m] W. Weber. On the measurement of electric resistance according to an absolute standard. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume II: Weber's Fundamental Force and the Unification of the Laws of Coulomb, Ampère and Faraday, pages 267–286, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web21n] W. Weber. On the measurement of electro-dynamic forces. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume II: Weber's Fundamental Force and the Unification of the Laws of Coulomb, Ampère and Faraday, pages 207–247, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web21o] W. Weber. On the treatise “Electrodynamic measurements, relating specially to electric oscillations”. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume III: Measurement of Weber's

Constant c , Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, pages 257–261, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

- [Web21p] W. Weber. Remarks on the arrangement of magnetical observatories, and description of the instruments to be placed in them. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume I: Gauss and Weber's Absolute System of Units, pages 85–101, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web21q] W. Weber. Report on some experiments made at the Physics Institute in Göttingen. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume III: Measurement of Weber's Constant c , Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, pages 243–248, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Web24] W. Weber. On galvanometry. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume V: Unipolar Induction, Galvanometry, Biographical Studies, and Weber's Electrodynamics Versus Different Field Theories, pages 59–123, Montreal, 2024. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Whe34] C. Wheatstone. An account of some experiments to measure the velocity of electricity and the duration of electric light. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 124:583–591, 1834.
- [Whe43] C. Wheatstone. An account of several new instruments and processes for determining the constants of a voltaic circuit. *Philosophical Transactions*, 133:303–327, 1843.
- [Whe44a] C. Wheatstone. Beschreibung verschiedener neuen Instrumente und Methoden zur Bestimmung der Constanten einer Volta'schen Kette. *Annalen der Physik und Chemie*, 62:499–543, 1844.
- [Whe44b] C. Wheatstone. Description de plusieurs instruments et procédés nouveaux pour déterminer les constantes d'un circuit voltaïque. *Annales de Chimie et de Physique*, 10:257–293, 1844. Traduzido por M. J.-V. Fayeux.
- [Whi73] E. T. Whittaker. *A History of the Theories of Aether and Electricity*, volume 1: *The Classical Theories*. Humanities Press, New York, 1973.
- [Wie60] K. H. Wiederkehr. Wilhelm Webers Stellung in der Entwicklung der Elektrizitätslehre. Dissertation, Universität Hamburg, 1960.
- [Wie67] K. H. Wiederkehr. *Wilhelm Eduard Weber — Erforscher der Wellenbewegung und der Elektrizität (1804-1891)*, volume 32 of *Grosse Naturforscher*, H. Degen (ed.). Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1967.
- [Wie92] K. H. Wiederkehr. Wilhelm Weber und die Entwicklung in der Geomagnetik und Elektrodynamik. *Gauß-Gesellschaft, Mitteilungen*, 29:63–72, 1992.

- [Wie93a] K. H. Wiederkehr. Das Experiment von Wilhelm Weber und Rudolf Kohlrausch 1855 und Maxwells elektromagnetische Lichttheorie. In W. Schröder, editor, *The Earth and the Universe (A Festschrift in honour of Hans-Jürgen Treder)*, pages 452–463. Interdivisional Commission on History of the International Association of Geomagnetism and Aeronomy, Bremen-Rönnebeck, 1993.
- [Wie93b] K. H. Wiederkehr. W. Weber und die Entwicklung der Elektrodynamik. In G. Berg, W. Eisenberg, W. Hergert, and W. Schreier, editors, *II. Weber — Symposium Die Gebrüder Weber — Wegbereiter interdisziplinärer Forschung in Halle und Leipzig am 16. Oktober und 18. November 1993*, pages 39–54. Fachbereich Physik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg und Wilhelm-Weber-Gesellschaft e. V., 1993.
- [Wie93c] K. H. Wiederkehr. Wilhelm Weber und die Entwicklung in der Geomagnetik und Elektrodynamik. In G. Berg, W. Eisenberg, W. Hergert, and H. Thieme, editors, *I. Weber — Symposium anlässlich des 100. Todestages W. Webers in Halle und Wittenberg am 20. und 21. Juni 1991*, pages 1–14. Fachbereich Physik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg und Wilhelm-Weber-Gesellschaft e. V., 1993.
- [Wie94] K. H. Wiederkehr. Wilhelm Weber und Maxwells elektromagnetische Lichttheorie. *Gesnerus, Part. 3/4*, 51:256–267, 1994.
- [Wie97] K. H. Wiederkehr. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) und Wilhelm Weber (1804-1891). In K. v. Meyenn, editor, *Die Grossen Physiker*, Vol. 1, pages 357–370 and 522–524. Verlag C. H. Beck, München, 1997.
- [Wie04] K. H. Wiederkehr. Ein bisher unveröffentlichter Brief von Rudolf Kohlrausch an Andreas v. Ettingshausen von 1854, das Kohlrausch-Weber-Experiment von 1854/55 und die Lichtgeschwindigkeit in Wilhelm Webers Elektrodynamik. *NTM International Journal of History and Ethics of Natural Sciences, Technology and Medicine*, 12:129–145, 2004.
- [Wis81] M. N. Wise. German concepts of force, energy, and the electromagnetic ether: 1845–1880. In G. N. Cantor and M. J. S. Hodge, editors, *Conceptions of Ether — Studies in the History of Ether Theories 1740–1900*, pages 269–307, Cambridge, 1981. Cambridge University Press.
- [WK56] W. Weber and R. Kohlrausch. Über die Elektrizitätsmenge, welche bei galvanischen Strömen durch den Querschnitt der Kette fließt. *Annalen der Physik und Chemie*, J. C. Poggendorff (ed.), 99:10–25, 1856. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 597-608.
- [WK68] W. Weber and R. Kohlrausch. Über die Einführung absoluter elektrischer Maße. In S. Balke, H. Gericke, W. Hartner, G. Kerstein, F. Klemm, A. Portmann, H. Schimank, and K. Vogel, editors, *Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften*, new series, Vol. 5. Friedrich-Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1968. Comentado por F. Kohlrausch e K. H. Wiederkehr.

- [WK03] W. Weber and R. Kohlrausch. On the amount of electricity which flows through the cross-section of the circuit in galvanic currents. In F. Bevilacqua and E. A. Giannetto, editors, *Volta and the History of Electricity*, pages 287–297. Università degli Studi di Pavia and Editore Ulrico Hoepli, Milano, 2003. Traduzido por S. P. Johnson e editado por L. Hecht. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [WK08] W. Weber and R. Kohlrausch. Sobre a quantidade de eletricidade que flui através da seção reta do circuito em correntes galvânicas. *Revista Brasileira de História da Ciência*, 1:94–102, 2008. Traduzido por A. K. T. Assis.
- [WK21] W. Weber and R. Kohlrausch. On the amount of electricity which flows through the cross-section of the circuit in galvanic currents. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume III: Measurement of Weber's Constant c , Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, pages 131–140, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Wol05] G. Wolfschmidt (ed.). *Vom Magnetismus zur Elektrodynamik: anlässlich des 200. Geburtstags von Wilhelm Weber (1804-1891) und des 150. Todestages von Carl Friedrich Gauss (1777-1855)*. Schwerpunkt Geschichte der Naturwissenschaften, Mathematik und Technik, Hamburg, 2005.
- [Woo62] A. E. Woodruff. Action at a distance in nineteenth century electrodynamics. *Isis*, 53:439–459, 1962.
- [Woo68] A. E. Woodruff. The contributions of Hermann von Helmholtz to electrodynamics. *Isis*, 59:300–311, 1968.
- [Woo81] A. E. Woodruff. Weber, Wilhelm Eduard. In C. C. Gillispie, editor, *Dictionary of Scientific Biography*, Vol. 14, pages 203–209, New York, 1981. Charles Scribner's Sons.
- [WSH03] D. Warner, R. Sherman, and K. Hentschel. The several faces of earth induction. *Bulletin of the Scientific Instrument Society*, 76:30–34, 2003.
- [Zöl76] J. C. F. Zöllner. *Prinzipien einer elektrodynamischen Theorie der Materie*. Engelmann, Leipzig, 1876.

Esse é o terceiro de 4 volumes do livro “Obras de Weber sobre Eletrodinâmica Traduzidas e Comentadas”.

Esse terceiro Volume contém os principais trabalhos de Weber relacionados ao diamagnetismo, incluindo sua terceira memória principal sobre Medições Eletrodinâmicas, publicada em 1852.

Esses trabalhos são seguidos por três artigos publicados por Weber e Rudolf Kohlraush entre 1855 e 1857, nos quais apresentaram a medição da constante fundamental c de Weber que aparece em sua lei de força. O trabalho de Weber e Kohlrausch de 1857 é a quarta grande memória sobre Medições Eletrodinâmicas.

Logo após essa medição, Kirchhoff e Weber conseguiram deduzir a equação completa do telégrafo a partir da eletrodinâmica de Weber. Seus trabalhos foram publicados em 1857 e 1864. Quando a resistência do fio era desprezível, a equação do telégrafo se reduzia à equação da onda. A velocidade de propagação de uma onda elétrica ao longo do fio que encontraram era igual à conhecida velocidade da luz no vácuo. Esse resultado notável da eletrodinâmica de Weber indicou, pela primeira vez na história da física, uma conexão direta e quantitativa entre a eletrodinâmica e a óptica. Este volume contém as traduções dos dois artigos de Kirchhoff de 1857 sobre esse tema, juntamente com um artigo de J. C. Poggendorff que enfatiza as pesquisas independentes feitas por Weber e Kirchhoff sobre esse assunto, nas quais os dois cientistas chegaram simultaneamente aos mesmos resultados. O trabalho de Weber de 1864 é sua quinta grande memória sobre Medições Eletrodinâmicas. A tradução desse trabalho também está incluída neste volume.

Esse Volume termina com uma discussão sobre as origens e significados da constante c de Weber, da constante c de Maxwell, e a relação dessas duas constantes diferentes com a velocidade da luz no vácuo.

Sobre o Autor: O Prof. André Koch Torres Assis nasceu em 1962. Concluiu o bacharelado e o doutorado no Instituto de Física da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP (1983 e 1987, respectivamente). Realizou um pós-doutorado no Laboratório Culham (Oxfordshire, Inglaterra, United Kingdom Atomic Energy Authority, 1988) e outro no Centro de Pesquisas Eletromagnéticas da Northeastern University (Boston, EUA, 1991-1992). Trabalhou por quatro períodos na Alemanha: (a) de agosto de 2001 até novembro de 2002, assim como (b) de fevereiro a maio de 2009, nessas duas vezes no Instituto para a História das Ciências Naturais da Universidade de Hamburgo; (c) de abril a junho de 2014 na Universidade Técnica de Dresden; e (d) de setembro a dezembro de 2023 na Universidade de Augsburg. Essas quatro estadias foram apoiadas por bolsas de pesquisa concedidas pela Fundação Alexander von Humboldt, da Alemanha. Suas obras “*Eletrodinâmica de Weber*” e “*Eletrodinâmica de Ampère*” receberam os Prêmios Jabuti 1996 e 2012 concedidos pela Câmara Brasileira do Livro como livros do ano na área de ciências exatas. É professor do Instituto de Física da UNICAMP desde 1989, onde orienta estudantes de graduação e de pós-graduação, realizando pesquisas sobre os fundamentos do eletromagnetismo, da gravitação e da cosmologia. Em particular trabalha sobre a Mecânica Relacional, o princípio de Mach, a origem da inércia, a força de Ampère entre elementos de corrente, e a eletrodinâmica de Weber. É o autor de diversos livros de física e de várias traduções de trabalhos científicos clássicos (obras de Arquimedes, Newton, Coulomb, Ampère, Weber etc.) disponíveis gratuitamente em sua homepage: <https://www.ifi.unicamp.br/~assis>

9781987980417



9 781987 980417