横 Mercator 図法を“真球でなく扁平な”地球に適用することの無意味さについて
On the Meaninglessness of Applying the Transverse Mercator Projection to the “not Perfectly Spherical but Oblate” Earth

参事官　河瀬和重
Deputy Director-General　KAWASE Kazushige

要　旨

我が国における地図投影関連の書物において，横 Mercator 図法及び Gauß-Krüger 図法は，“大体同じようなもの”というニュアンスでの記述が大勢を占めている．こうした誤解が生ずる背景としては，『ユニバーサル横メルカトル（UTM）』という業界用語の存在も少なからず遠因となっているかもしれない．

親切な書物には「厳密には Gauß-Krüger 図法」という記述も認められるが，そもそも横 Mercator 図法なる投影法が“決して真球ではなく扁平な”地球に対する地図投影法として存在する意義があるのか否かについて考察を試みる．

1. はじめに

横 Mercator（以下「TM」という．）図法は，Johann Heinrich Lambert が考案し 1772 年に発表した地図投影法である（Lambert, 1772）．Lambert がこの図法を発表した時点においては，既に人類は地球が真球よりも南北方向に扁平な回転楕円体にむしろ近いことを認識しており（1730 年代から 1740 年代にかけてのフランス Académie des sciences による測地遠征），Lambert（1772）においても正角円錐図法については真球に加え回転楕円体に対する投影変換式も導出されているが，TM 図法はあくまでも地球が回転楕円体ではなく真球であることを想定している．

通常，中・大縮尺の地図投影においては地球の扁平率を考慮することは必須である一方で，十分小さな縮尺の場合には地球を真球とみなしても差し支えないということが定説とされているが，本稿では，全地球表面に対する投影を想定する小縮尺図について TM・Gauß-Krüger（以下「GK」という．）両図法の描像を示した上で，両者は全く似て非なるものであり，結果として TM 図法をあらゆる縮尺において我々が暮らす現実の地球に適用することが無意味であるという事実を再確認したい．

2. TM 図法について

TM 図法は，地球を真球とみなした上で，通常の Mercator 図法で赤道に接するように投影する円筒を設定する代わりに，着目する任意の子午線に接するように円筒を横倒しした上で正角投影（等角写像）を行う図法である．通常の Mercator 図法では，北極及び南極は新たに設定した緯度変数（等長緯度）が無限大となるため描画不可能となるが，TM 図法の場合は中央子午線を本初子午線に設定した場合，いわゆる東極（北緯 0°, 東経 90°）及び西極（北緯 0°, 西経 90°）の地点は同様に描画不可能となる．

図-1 は，前述した状況の下での TM 図法による投影図を示したものである．南米西方沖の赤道直下に点在する Galápagos 諸島に属し，西極点から約 30 数 km 付近に位置する Genovesa 島は図-1 には既に描画されておらず，画郭から左側へ大幅に外れ，面積にして数万倍に拡大されて投影されることとなる．

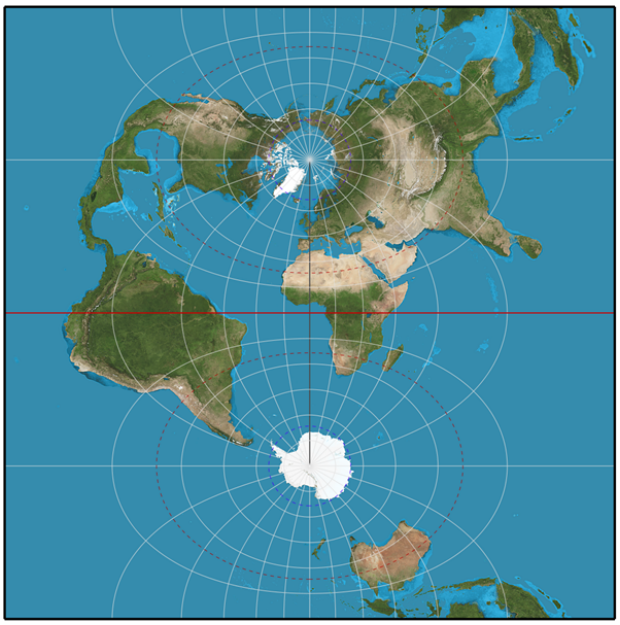

図-1　地球を真球とみなし，中央子午線を本初子午線に設定した TM 図法による投影図．いわゆる“東極”及び“西極”は描画不可能である．Wikimedia Commons のコンテンツから抜粋．

通常の Mercator 図法が，画郭がおおむね正方形となるよう北緯及び南緯 $\mathrm{gd}\,\pi\ \mathrm{rad} \cong 85.05°$ 付近 [1] で描画を打ち切っているのと同様に，図-1 では赤道上の東経及び西経 $(90 \mp 5)°$ 付近で描画を打ち切って表示している．打切地点付近における投影の線拡大率は $\sec(\mathrm{gd}\,\pi) = \cosh\pi \cong 11.59$ 程度でさほど大したことはないと言えなくもないが，これ以降，線拡大率は無限大へと急激に増大していく運命にある．

[1] $\mathrm{gd}\,x \overset{\mathrm{def}}{=} \int_0^x \frac{\mathrm{d}\theta}{\cosh\theta}$ は Gudermann 関数．

3. GK 図法について

GK 図法は，地球を有限の扁平率 f（GRS80 地球楕円体の場合 $1/298.257\,222\,101$）を有する扁球であるとみなして，設定する中央子午線の子午線弧長を緯度変化に対し正しく追随反映しつつ正角投影を行う図法である（TM 図法で用いた投影する対象となる横倒しの円筒は，より一般的に楕円筒となる）．図-2 に示すように，GK 図法により投影した場合，全地球表面が有限領域に投影され，TM 図法では描画することが事実上困難な Galápagos 諸島も画面左やや下に漏れなく描画できていることが確認できる．

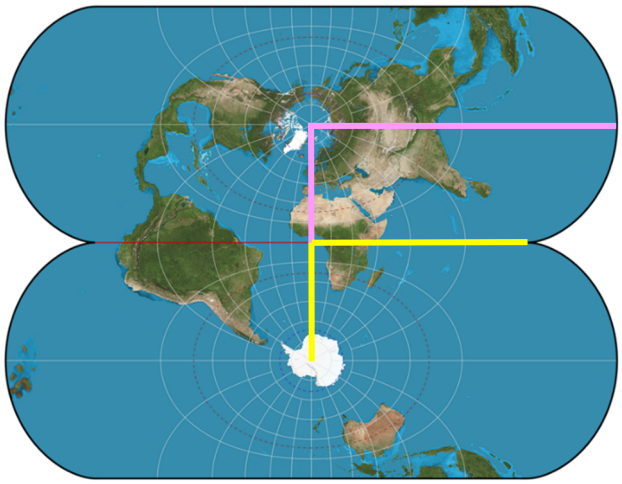

図-2　中央子午線を本初子午線に設定した GK 図法による投影図．“東極”及び“西極”を含めた全地球表面を投影可能である．Wikimedia Commons のコンテンツから抜粋し一部加工．

筆者が知る限りにおいて，地球楕円体表面全体を対象とした GK 図法による投影図を示した最も古い文献は Ludwig（1943）であると認識しており，König and Weise（1951）においても当該文献が引用されていることを確認している（90 頁，図 18 周辺）が，本稿においては，より簡潔明解に記述が整理された Lee（1976）の内容に専ら依拠して論述している．

図-2 から見て取れるとおり，GK 図法は途中で赤道の断裂が生じ，以降赤道は曲線表示されることとなるが，具体的な赤道断裂の開始位置は，GRS80 地球楕円体の第一離心率を $e=\sqrt{f(2-f)}$ とすると東経及び西経 $\boldsymbol{\pi(1\mp e)/2}$ rad $\cong 82.64°$ or $97.36°$ 付近となる．また，投影の線拡大率は前述の赤道断裂の地点で $\boldsymbol{1/e}\cong 12.22$ となり，最大値でも東極及び西極の極点でおよそ $\boldsymbol{18.41}$ に留まる．さらに，GK 図法は全体として縦横比おおむね $1:1.3$ の画郭に完全に収まる．すなわち，図-2 において表示されている桃色線分の縦横比がおおむね $\boldsymbol{1:2.6}$ となるわけである．ちなみに，図-2 の黄色線分の縦横比はおおむね $\boldsymbol{1:1.8}$ 程度と算出され，図-2 の描画は決して誇大矮小やデフォルメなどではなく，図-1 との違いを明確に表現している．

これら緑色に着色した，図-2 の特徴を如実に示す具体的数値の導出の詳細について，次節以降において順次示していく．

3.1 Jacobi の楕円関数及び楕円積分

本節では，以後の計算に用いる Jacobi の楕円関数及び楕円積分について事前準備として一通り整理しておく．詳細については，Abramowitz and Stegun（1964）の 16 章及び 17 章を参照されたい．

3.1.1 振幅関数 (amplitude)

e を定数とする φ の関数 $u(\varphi,e)$ が

$$u(\varphi,e)=\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\theta}}$$

のように表されるとき，u の逆関数を $\varphi=\mathrm{am}\,u=\mathrm{am}(u,e)$ とおいて，φ を振幅関数（amplitude）という．今の場合，φ は地球楕円体における地理（測地）緯度，e は地球楕円体の第一離心率に相当する．

3.1.2 sn, cn, dn 関数及び派生する関数

前節で示された $\varphi=\mathrm{am}(u,e)$ の関係の下で，e を母数とする $\mathrm{sn}\,u,\mathrm{cn}\,u,\mathrm{dn}\,u$ なる関数がそれぞれ次のように定義される：

$$\mathrm{sn}\,u=\mathrm{sn}(u,e)\overset{\text{def}}{=}\sin\varphi,$$
$$\mathrm{cn}\,u=\mathrm{cn}(u,e)\overset{\text{def}}{=}\cos\varphi,$$
$$\mathrm{dn}\,u=\mathrm{dn}(u,e)\overset{\text{def}}{=}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}.$$

また，

$$\mathrm{ns}\,u\overset{\text{def}}{=}1/\mathrm{sn}\,u,\ \mathrm{nc}\,u\overset{\text{def}}{=}1/\mathrm{cn}\,u,\ \mathrm{nd}\,u\overset{\text{def}}{=}1/\mathrm{dn}\,u,$$
$$\mathrm{sn}'\,u\overset{\text{def}}{=}\mathrm{sn}(u,e'),\ \mathrm{cn}'\,u\overset{\text{def}}{=}\mathrm{cn}(u,e'),\ \mathrm{dn}'\,u\overset{\text{def}}{=}\mathrm{dn}(u,e')$$

などが定義される．$e'=\sqrt{1-e^2}$ を補母数と称し，今の場合，e' は地球楕円体の第二離心率に相当する．

さらに，$\mathrm{p},\mathrm{q},\mathrm{r}$ を $\mathrm{s},\mathrm{c},\mathrm{d},\mathrm{n}$ のいずれかの文字とするとき，表記法として $\mathrm{pq}\,u\overset{\text{def}}{=}\mathrm{pr}\,u/\mathrm{qr}\,u$ と約束する．

3.1.3 楕円積分及び Jacobi の epsilon 関数

$F(\varphi,e)\overset{\text{def}}{=}u(\varphi,e)$ を第 1 種楕円積分（Legendre-Jacobi の標準形）といい，$K=K(e)\overset{\text{def}}{=}F(\pi/2,e)$ を第 1 種完全楕円積分という．また，

$$E(\varphi,e)\overset{\text{def}}{=}\int_0^{\varphi}\sqrt{1-e^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

を第 2 種楕円積分といい，$E(\varphi,e)$ を $\varphi=\mathrm{am}\,u$ の

関係を踏まえ u の関数と見立てたもの：

$$\mathcal{E}(u) = \operatorname{en} u = \operatorname{en}(u, e) \overset{\text{def}}{\equiv} E(\operatorname{am} u, e) = \int_0^u \operatorname{dn}^2(w, e)\,\mathrm{d}w = \int_0^{\operatorname{sn} u} \sqrt{\frac{1 - e^2 t^2}{1 - t^2}}\,\mathrm{d}t$$

を Jacobi の epsilon 関数という．定義から明らかなようにこの関数は奇関数であり，純虚数 $\mathrm{i}v$ を引数とする関数値は

$$\operatorname{en}(\mathrm{i}v) = \mathrm{i}(v - \operatorname{en}' v + \operatorname{sc}' v \operatorname{dn}' v) = -\operatorname{en}(-\mathrm{i}v)$$

と表され，関数値自体も純虚数となることに留意しておく（Abramowitz and Stegun, 1964; 17.4.10）．さらに，$E = E(e) \overset{\text{def}}{\equiv} E(\pi/2, e) = \operatorname{en}(K, e)$ を第 2 種完全楕円積分という．

加えて，補母数に対する第 1 種及び第 2 種の完全楕円積分について，

$$K' \text{or} E' = K'(e) \text{ or } E'(e) \overset{\text{def}}{\equiv} K(e') \text{ or } E(e')$$

と定義する．一般に $KE' + EK' - KK' = \pi/2$ なる関係（Legendre の関係式）が成り立つほか，母数 e が GRS80 地球楕円体の第一離心率である場合，第 1 種及び第 2 種の完全楕円積分はおおむね

$$K \cong 1.5734,\ E \cong 1.5682,\ K' \cong 3.8944,\ E' \cong 1.0114$$

と算出される．なお，

$$\Pi(\varphi; c, e) \overset{\text{def}}{\equiv} \int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1 - c \sin^2\theta)\sqrt{1 - e^2 \sin^2\theta}}$$

を第 3 種楕円積分といい，一般の楕円積分は以上に示した三種類の楕円積分で表わされる．

3.2 Mercator 座標から GK 投影に至る写像過程

GK 投影は，中央子午線における子午線弧長を緯度変化に対し正しく反映した等角写像として定義される．この定義に従い，3.1 で紹介した Jacobi 楕円関数を用いて $\varphi = \operatorname{am} u$ の関係を認識しつつ，通常の Mercator 投影において導入される新たな緯度変数（等長緯度）から出発して写像過程を整理する．

3.2.1 等長緯度 $q(\varphi)$ 及び子午線弧長 $B(\varphi)$ の Jacobi 楕円関数による表現

a を地球楕円体の長半径とし，M_θ 及び N_θ をそれぞれ地理（測地）緯度 $\theta\ (0 \le \theta \le \varphi)$ における子午線曲率半径及び卯酉線曲率半径とするとき，等長緯度 $q(\varphi)$ を求める式：

$$q(\varphi) \overset{\text{def}}{\equiv} \int_0^{\varphi} \frac{M_\theta \mathrm{d}\theta}{N_\theta \cos\theta} = \int_0^{\varphi} \frac{(1 - e^2)\mathrm{d}\theta}{(1 - e^2 \sin^2\theta)\cos\theta} = \tanh^{-1}(\sin\varphi) - e \tanh^{-1}(e \sin\varphi) = (1 - e^2)\Pi(\varphi; e^2, 1)$$

及び赤道から地理（測地）緯度 φ に至る子午線弧長 $B(\varphi)$ を求める式：

$$B(\varphi) \overset{\text{def}}{\equiv} \int_0^{\varphi} M_\theta \mathrm{d}\theta = \int_0^{\varphi} \frac{a(1 - e^2)\mathrm{d}\theta}{(1 - e^2 \sin^2\theta)^{3/2}} = a(1 - e^2)\Pi(\varphi; e^2, e)$$

において，$\theta = \operatorname{am} w\ \ (0 \le w \le u)$ にて積分変数を変数変換すると，$\mathrm{d}\theta = \operatorname{dn} w\,\mathrm{d}w$ に留意しつつ，それぞれ次に掲げる式を得ることとなる：

$$q = \int_0^u \frac{(1 - e^2)\mathrm{d}w}{\operatorname{cn} w \operatorname{dn} w} = \tanh^{-1}(\operatorname{sn} u) - e \tanh^{-1}(e \operatorname{sn} u),$$

$$B = \int_0^u \frac{a(1 - e^2)\mathrm{d}w}{\operatorname{dn}^2 w} = a\{E - \operatorname{en}(K - u)\}.$$

3.2.2 Jacobi 楕円関数を用いた GK 図法導出の概要

前述した準備を踏まえ，GK 図法をつかさどる投影変換式は，おおむね次の手順により得られる：

① 地球楕円体から平面へ等角投影した Mercator 座標 (q, λ) から出発し，中間変数 $u(\varphi)$ を媒介として，中央子午線上における緯度変数 $q(\varphi)$ と $x = B(\varphi)$ との関数関係を（複素平面における実軸上の局所的関係として）樹立する．

② 変数 q に経度変数 λ を虚数部として統合した複素数 $\Omega = q + \mathrm{i}\lambda$ の全複素平面上の定義域へと，当該関数を（要請する写像が等角写像であることを踏まえ，正則な複素関数として）解析接続する．

以降においては，u 及び x を複素数に拡張した際の表記をそれぞれ $\Upsilon = u + \mathrm{i}v$ 及び $Z = x + \mathrm{i}y$ とし，中間複素変数 Υ を媒介とした $\Omega \Longrightarrow \Upsilon \Longrightarrow Z$ の写像変換として GK 投影を取り扱うこととする．

3.3 GK 図法の Jacobi 楕円関数による表現及び特徴的な各数値の導出

3.2.2 において述べた内容に基づき，Mercator 座標から GK 投影に至る写像過程について，写像をつかさどる投影変換式も含め図示すると図-3 のようになる．図-3 の中央に在る $\Omega \Longrightarrow \Upsilon$ に係る地図投影は“Thompson 投影”と称され，未発表ながら 1945 年に Edgar Hynes Thompson が考案したとされているものである（Lee, 1976）．

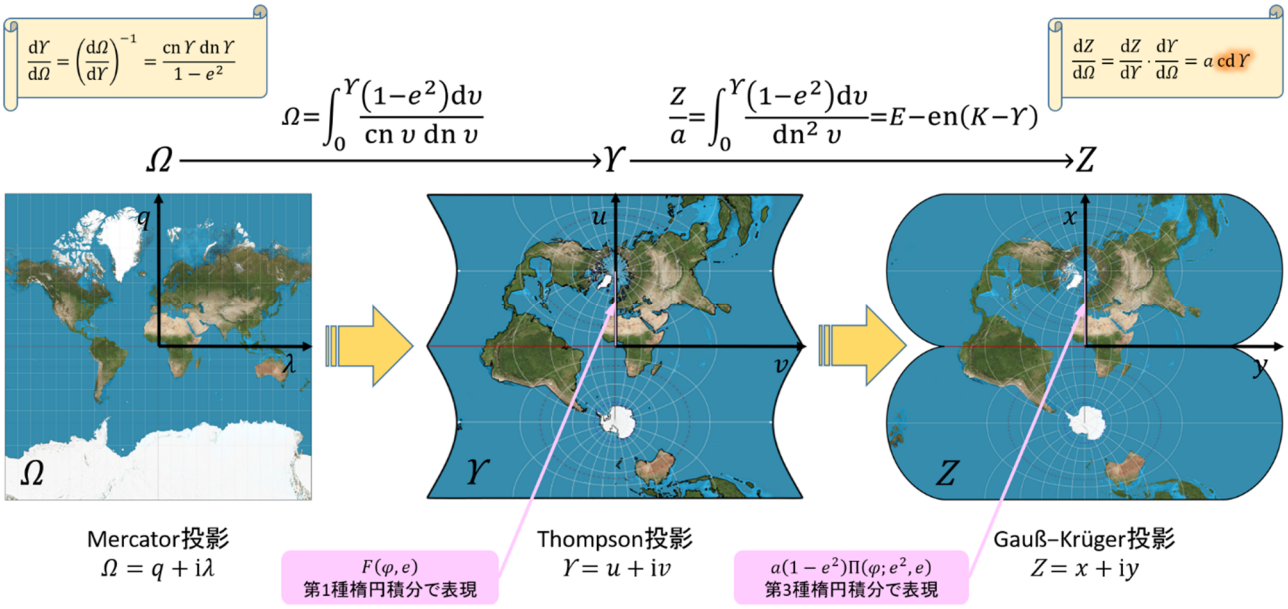

図-3　中間複素変数 Υ を媒介とした Mercator 座標から GK 投影に至る模式図．Thompson 投影の図は ©2010 Mapthematics LLC. 著作権者の許可を得て利用し一部加工．その他の図は Wikimedia Commons のコンテンツから抜粋し一部加工．

ここで，図-3 の右上象牙色地の囲みに在る，橙色に着色した $\mathrm{cd}\,\Upsilon$ なる量は，Ω から Υ を経由して Z に至る投影の線拡大率 $m_{\Omega\Rightarrow Z}$ を

$$m_{\Omega\Rightarrow Z}=\frac{1}{N_\varphi\cos\varphi}\left|\frac{dZ}{d\Omega}\right|=\frac{a}{N_\varphi\cos\varphi}\left|\mathrm{cd}\,\Upsilon\right|$$

として求めるためにあらかじめ導出しているものである．

$\mathrm{d}Z/\mathrm{d}\Omega$ 自体は残念ながら Ω の関数としてあらわに表現することはできないが，中間複素変数 Υ の導入により，Υ の関数として比較的簡単な形式で表すことができる．

なお，$\Upsilon\Rightarrow Z$ に係る投影変換式の積分が第 2 種完全楕円積分及び Jacobi の epsilon 関数の差で表されることについては，Abramowitz and Stegun（1964）の 16.26.6 及び 17.4.7 を参照されたい．

以上のようなことに留意しつつ，図-3 に示されている投影図について，特徴的な地点における諸量の数値を取りまとめたものが図-4 である．

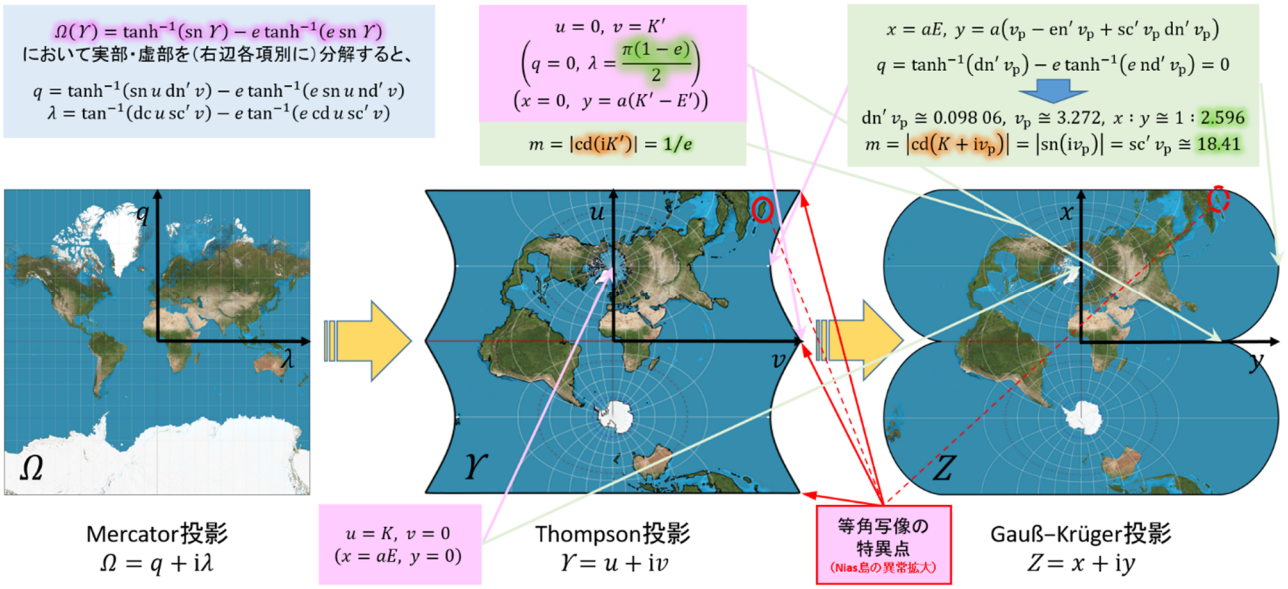

図-4　図-3 に示されている投影図について特徴的な地点における諸量の数値を取りまとめた図．投影図の出自は図-3 と同様．

図-4 左上に在る水色地の囲み中において桃色に着色した式は 3.2.1 で示した q の積分実行式を複素変数に拡張したものであるが，この式の実部・虚部への分離については Lee（1976）において巧妙な導出過程が記されている．

また，図-4 右下に在る桃色地の赤枠囲みから発する赤矢印にて指示した Thompson 投影図の尖端部における各地点は等角写像の特異点であり，この点では投影の線拡大率：

$$m_{\Omega\Rightarrow\Upsilon}=\frac{1}{N_\varphi\cos\varphi}\left|\frac{\mathrm{d}\Upsilon}{\mathrm{d}\Omega}\right|=\frac{|\mathrm{cn}\,\Upsilon\,\mathrm{dn}\,\Upsilon|}{(1-e^2)N_\varphi\cos\varphi}$$

が無限大となる．この事実は，当該地点近くに位置する Indonesia 領 Nias 島が実面積に比べ異常に肥大して描画されていることからも読み取れる．加えて，当該特異点から赤道が断裂し，以後曲線表示となっている．このことはすぐ右隣の GK 投影図への変換時にまで影響を及ぼすこととなり，実際に Thompson 投影図（Υ 複素平面）の特異点に対応する投影地点からやはり赤道の断裂が生ずるのであるが，GK 投影図（Z 複素平面）においては赤道の断裂が始まる点は写像の特異点とはならない．

以上を留意しつつ，まず特異点となる点（図-4 中央上の桃色地の囲みから発する桃色矢印の先端）の Υ 複素平面における座標値を求めてみる．当該地点は赤道上に在るため，上述の $m_{\Omega\Rightarrow\Upsilon}$ を表す式のうち $1/N_\varphi\cos\varphi$ は $1/a$（有限値）となる．また図から明らかに $u=0$ であるが，その上で $m_{\Omega\Rightarrow\Upsilon}$ を表す式の最右辺に存する絶対値を無限大とする v の値は K' であることが容易に分かる（Abramowitz and Stegun, 1964; 16.5.7）．そのときの Ω 複素平面における経度変数 λ の値は，$\mathrm{dc}\,0=\mathrm{cd}\,0=1$ 及び $\mathrm{sc}'\,K'=\infty$ に留意しつつ，図-4 水色地囲みから

$$\lambda=\tan^{-1}\infty-e\tan^{-1}\infty=\boldsymbol{\pi(1-e)/2}\ \text{rad}\cong 82.64°$$

となることが確かめられる．

次に，GK 投影図における赤道断裂地点での投影の線拡大率を求める．当該地点は赤道上に在るため，$m_{\Omega\Rightarrow Z}$ を表す式のうち $a/N_\varphi\cos\varphi$ は 1 となる．今の場合 $\Upsilon=u+\mathrm{i}v=0+\mathrm{i}K'$ なので，

$$m_{\Omega\Rightarrow Z}=|\mathrm{cd}(\mathrm{i}K')|=\boldsymbol{1/e}\cong 12.22$$

が得られる（Abramowitz and Stegun, 1964; 16.7.4）．

同様に，GK 投影図におけるいわゆる東極点での投影の線拡大率を求める．当該地点は赤道上に在るため $a/N_\varphi\cos\varphi$ はやはり 1 となり，対応する等長緯度 q は 0 となる．当該点の Υ 複素平面における座標値を $u_\mathrm{p}+\mathrm{i}v_\mathrm{p}$ とすると，図-3 中央及び図-4 中央から $u_\mathrm{p}=F(\pi/2,e)=K$ となり，

$$m_{\Omega\Rightarrow Z}=\left|\mathrm{cd}\left(K+\mathrm{i}v_\mathrm{p}\right)\right|=\left|\mathrm{sn}\left(\mathrm{i}v_\mathrm{p}\right)\right|=\mathrm{sc}'\,v_\mathrm{p}$$

が得られる（Abramowitz and Stegun, 1964; 16.8.4 及び 16.20.1）．

v_p については $\mathrm{sn}\,u_\mathrm{p}=\mathrm{sn}\,K=1$ に留意しつつ，図-4 左上水色地囲みの q の式を参照すれば，図-4 右上薄緑色地囲みの q についての関係式を得る．ここで $q=0$, $\mathrm{nd}'\,v_\mathrm{p}=1/\mathrm{dn}'\,v_\mathrm{p}$ であるから，結局のところ非線形方程式：

$$\tanh^{-1}\delta-e\tanh^{-1}(e/\delta)=0$$

を $\delta=\mathrm{dn}'\,v_\mathrm{p}$ について解いた上で v_p を求めればよい．方程式の求解並びに Jacobi 楕円関数及びその逆関数の関数値等，数値計算については高精度計算サイト『keisan』（カシオ計算機株式会社，2008）を用いた．これにより $\delta=\mathrm{dn}'\,v_\mathrm{p}\cong 0.098\,060$, $v_\mathrm{p}\cong 3.2719$ が得られ，$m_{\Omega\Rightarrow Z}$ を $\mathrm{sn}'\,v_\mathrm{p}/\mathrm{cn}'\,v_\mathrm{p}$ の関数値として計算しても差し支えないが，δ から直接的に

$$m_{\Omega\Rightarrow Z}=\mathrm{sc}'\,v_\mathrm{p}=\frac{\mathrm{sn}'\,v_\mathrm{p}}{\mathrm{cn}'\,v_\mathrm{p}}=\sqrt{\frac{1-\delta^2}{\delta^2-e^2}}\cong\boldsymbol{18.41}$$

のように楕円関数を介さず求めることもできる．

さらに，図-2 の桃色線分の縦横比を図-4 右の GK 投影図における東極点の座標値の比として求める．図-3 の $\Upsilon\Longrightarrow Z$ の投影変換式：

$$z=x+\mathrm{i}y=a\{E-\mathrm{en}(K-\Upsilon)\}$$

において，$\Upsilon=K+\mathrm{i}v_\mathrm{p}$ を代入すると $z=a\{E-\mathrm{en}(K-\mathrm{i}v_\mathrm{p})\}$ となり，3.1.3 で示したように純虚数を引数とする Jacobi の epsilon 関数（奇関数）の関数値がやはり純虚数となることから，z の実部・虚部への分離は容易に実行できる．すなわち，

$$x=aE\cong 1.5682a,$$
$$\mathrm{i}y=a\,\mathrm{en}\left(\mathrm{i}v_\mathrm{p}\right)=\mathrm{i}a\left(v_\mathrm{p}-\mathrm{en}'\,v_\mathrm{p}+\mathrm{sc}'\,v_\mathrm{p}\,\mathrm{dn}'\,v_\mathrm{p}\right).$$

が得られ，（『keisan』では $\mathrm{en}\left(\mathrm{i}v_\mathrm{p}\right)$ を e 及び前述の δ のみを用いて直接純虚数として算出することも可能だがいずれにしても）数値計算により最終的に

$$x:y\cong 1.5682:4.0708\cong 1:2.596\approx\boldsymbol{1:2.6}$$

が得られる．

最後に，図-2 の黄色線分の縦横比を求める．縦線分の長さは桃色のそれと等しく，上述から aE である．横線分の長さは赤道断裂地点の y 座標として与えられるが，まず Y 複素平面における v 軸上に対応する Z 複素平面における y 軸上の座標値の関係を求める．$Y = \mathrm{i}v$ を図-3 の $Y \Longrightarrow Z$ の投影変換式に代入すると $z = a\{E - \mathrm{en}(K - \mathrm{i}v)\}$ となる．ここで Abramowitz and Stegun（1964）の 16.20.1, 16.20.2, 16.20.3, 17.4.7 及び 17.4.10 を参照すると，

$$
\begin{aligned}
z &= a\{\mathrm{en}(\mathrm{i}v) - e^2\,\mathrm{sn}(\mathrm{i}v)\,\mathrm{cd}(\mathrm{i}v)\} \\
&= \mathrm{i}a(v - \mathrm{en}'\,v + \mathrm{sc}'\,v\,\mathrm{dn}'\,v - e^2\,\mathrm{sc}'\,v\,\mathrm{nd}'\,v) \\
&= \mathrm{i}a\{v - \mathrm{en}'\,v + \mathrm{sc}'\,v\,\mathrm{nd}'\,v\,(\mathrm{dn}'^2\,v - e^2)\} \\
&= \mathrm{i}a\{v - \mathrm{en}'\,v + \mathrm{sc}'\,v\,\mathrm{nd}'\,v\,(1 - e'^2\,\mathrm{sn}'^2\,v - e^2)\} \\
&= \mathrm{i}a(v - \mathrm{en}'\,v + e'^2\,\mathrm{sc}'\,v\,\mathrm{nd}'\,v\,\mathrm{cn}'^2\,v) \\
&= \mathrm{i}a(v - \mathrm{en}'\,v + e'^2\,\mathrm{sn}'\,v\,\mathrm{cd}'\,v) \\
&= \mathrm{i}a\{v - E' + \mathrm{en}'(K' - v)\}
\end{aligned}
$$

と変形でき，x 座標（実部）の値が 0 になるという，投影図中の座標設定上においても至極当然の結果を得る．Y 複素平面における赤道断裂地点の v 座標の値は $v = K'$ であるから，上式に代入すると

$$z = x + \mathrm{i}y = 0 + \mathrm{i}a(K' - E')$$

が得られる．よって求める縦横比は $aE : a(K' - E')$ であり，3.1.3 で紹介しておいた第 1 種及び第 2 種の完全楕円積分に係る概算値を用いて

$$E : (K' - E') \cong 1.5682 : (3.8944 - 1.0114) \approx \mathbf{1 : 1.8}$$

と算出される．

以上により，3. 冒頭で示した，緑色に着色した具体的数値の導出が全て完了した．

4. TM・GK 両図法の比較考察

図-1 及び図-2 を見比べると一目瞭然であるが，両者は全く似て非なるものであり，宇宙から見える地球が我々にとっていかに丸く感じられようとも，地球楕円体の扁平率を正しく考慮する限りにおいては全地球表面を投影する手段として TM 図法は全く相応しくなく，GK 図法が適切であることが分かる．

十分に小さな縮尺の場合は地球楕円体の扁平率は考慮するに値しないというのが地図投影の通説であり，実際地球表面を広域に投影する通常の Mercator 図法その他の主だった地図投影法では地球形状の違いは人間の知覚では判別不可能なのであるが，こと TM・GK 図法に関しては，いかに鈍感な人間の知覚といえども両者の明確な違いが認識できる．

5. まとめ

地球が有している扁平率においては，中・大縮尺ではもちろんのこと，たとえ小縮尺であっても TM 図法と GK 図法との違いは誤魔化すことができない（中央子午線を本初子午線に設定した場合において，人様が現に居住している Galápagos 諸島を「無かったこと」にするのは失礼である）ことが確認された．

したがって，どのような投影縮尺を想定した場合においても地球を想定した TM 図法は「厳密には GK 図法」なる注釈を免れ得ず，そうであるならば議論・言及する意義は，ほぼ無いと考えて差し支えない．

TM 図法は，現在の人類からすれば現実にあり得ない仮想天体における空想的な数学モデルに過ぎず，“TM”という単語が登場する意味を見出せるのは，もはや“UTM”という場面だけかもしれない．少なくとも当院としては，「TM 図法」という呼称は混乱の元となるため，「GK 図法」で統一呼称を図っていきたいと思料する．

（公開日：令和 6 年 8 月 9 日）

参 考 文 献

Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1964): *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 10th printing with corrections: December 1972, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 55, https://na-inet.jp/na/abramowitz_and_stegun/ (accessed 1 Jul. 2024).

カシオ計算機株式会社 (2008): 高精度計算サイト『keisan』, https://keisan.casio.jp/ (accessed 1 Jul. 2024).

König, R. and Weise, K. H. (1951): *Mathematische Grundlagen der Höheren Geodäsie und Kartographie*, Erster Band: Das Erdsphäroid und Seine Konformen Abbildungen, Springer-Verlag. doi: 10.1007/978-3-642-87438-3

Lambert, J. H. (1772): *Ammerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten*. In Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung, Dritter Theil, Im Verlag der Buchhandlung der Realschule, Kapitel VI. doi: 10.3931/e-rara-8613

Lee, L. P. (1976): *Conformal projections based on Jacobian elliptic functions*, Cartographica, 13(1, Monograph 16), 67–101. doi: 10.3138/X687-1574-4325-WM62

Ludwig, K. (1943): *Die der transversalen Mercatorkarte der Kugel entsprechende Abbildung des Rotationsellipsoids*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 185(4), 193–230. doi: 10.1515/crll.1943.185.193