EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİ VƏ RİYAZİ STATİSTİKA MÜNTƏXƏBATI

EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİNİN ƏSASLARININ VƏ ONUN TƏTBİQLƏRİNİN POPULYAR ŞƏRHİ

H. M. ƏHMƏDOVANIN
rus dilindən tərcüməsində

C. E. ALLAHVERDİYEV və ***A. H. HACIYEVİN***
ön sözlərilə

AEA-nın müxbir üzvü, filologiya elmləri doktoru, professor, dilçi – türkoloq ***Ə. Ə. Orucovun*** *əziz xatirəsinə ithaf edirəm*

H. M. Əhmədova. «Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika müntəxəbatı». Rus dilindən tərcümə. Bakı, "Şərq–Qərb", 2009, 496 səhifə.

"Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika müntəxəbatı" Yu. V. Proxorovun redaktəsi ilə hazırlanmış "Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия" adlı ensiklopediyadan (səh. 834-893) tərcümədir. Geniş oxucu kütləsi üçün nəzərdə tutulmuş bu əsər oxucuları ehtimal nəzəriyyəsinin yaranması və təşəkkülündə (XV-XX əsrlərdə) P. Laplas, V. Ya. Bunyakovski, S. N. Bernşteyn və A. N. Kolmoqorov kimi görkəmli mütəfəkkirlərin ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikaya fəlsəfi baxışları və şərhləri ilə tanış edəcəkdir. Oxuculara Azərbaycan və rus dillərində təqdim olunan müntəxəbat ali təhsil ocaqlarının fizika-riyaziyyat, fəlsəfə, hüquq fakültələrinin, tibb universitetinin tələbələri, magistrant və aspirantlar, dissertantlar və müəllimlər, astronom və Yer nəzəriyyəsi ilə məşğul olanlar, Göy sisteminin tarixi ilə maraqlananlar üçün faydalı mənbə olacaqdır.

Müntəxəbat Bakı Dövlət Universitetinin "Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika" fakültəsi Elmi şurasının 10 mart 2009-cu il tarixli iclasının 1 saylı protokolunun qərarı ilə nəşr olunmuşdur.

ISBN 978-9952-34-210-9

© H. M. Əhmədova, 2009
Müəllif hüquqları qorunur

TƏRCÜMƏYƏ ÖN SÖZ

Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika elminin formalaşmış bir sahə kimi inkişafında, XX əsrin 30-cu illərində akademik A. N. Kolmoqorovun təklif etdiyi və elmin bu sahəsinin əsaslarını təşkil edən aksiomatika yeni inkişaf dövrü yaratdı. Bu aksiomatikanın yaranmasına və ümumiyyətlə, ehtimal nəzəriyyəsinin inkişafına dünyanın tanınmış riyaziyyatçılarının nəşr etdirdikləri müxtəlif elmi əsərlərin təsiri danılmazdır. Bu əsərlər arasında P. Laplasın «Essai philosophique sur les probabilités», V. Ya. Bunyakovskinin «Основания математической теории вероятностей», S. N. Bernşteynin «Основания математической теории вероятностей» adlı əsərlərini xüsusi qeyd etmək olar. Qeyd olunan əsərlər və A. N. Kolmoqorovun ehtimal nəzəriyyəsi haqqında yazdığı «Большая Советская энциклопедия»-da (birinci nəşr) dərc olunmuş ensiklopedik məqalələr həmin sahə haqqında geniş məlumat verən, bu sahənin incəliklərini dərindən əks etdirən, zəngin və tamamlanmış elmi əsər kimi təqdim oluna bilər.

Adları yuxarıda çəkilən əsərlər ehtimal nəzəriyyəsinin klassik ədəbiyyatı kimi qəbul oluna bilinər. Bu əsərlərdə ehtimal nəzəriyyəsi fəlsəfəsinə baxış, ehtimal anlayışına müxtəlif yanaşmalar, əsas fundamental anlayış və nəticələr təqdim olunur və artıq bu sahənin riyaziyyatın ayrılmaz bir hissəsi olduğu təsdiq olunur.

P. S. Laplasın «Essai philosophique sur les probabilités» adlı əsəri 1908-ci ildə A. K. Vlasov tərəfindən müntəxəbat şəklində rus dilində nəşr edilmiş və 1999-cu ildə akademik Yu. V. Proxorovun redaktəsi ilə hazırlanmış «Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия» kitabında dərc olunmuşdu.

Son illər Azərbaycanda ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın sürətli inkişafı və ümumiyyətlə, onun müxtəlif elmi məsələlərdə geniş istifadəsi bu əsərlərin Azərbaycan dilinə tərcüməsini zamanın tələbinə çevirmişdi.

Təqdim olunan kitab H. Ə. Əhmədova tərəfindən müntəxəbatın Azərbaycan dilinə edilən ilk tərcüməsidir.

Azərbaycanın ali məktəblərində Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika sahəsində ixtisaslaşanlara, aspirantura, magistratura və

bakalavr pillələrində təhsil alanlara tədris edilən fənlərdə, elmin müxtəlif sahələrində, biologiya, tibb, informatika, sosiologiya, psixologiya və digər istifadə olunan ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika metodlarına aid ədəbiyyat əsasən rus dilində olduğundan müntəxəbatın Azərbaycan dilində nəşr edilməsinə böyük ehtiyac vardı.

Bu kitabın Azərbaycan dilində nəşr edilməsi ölkədə ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika və onlarla bağlı sahələrin inkişafına əvəzsiz töhfədir.

AMEA-nın müxbir üzvü, f.-r. e. d., professor A. H. HACIYEV

TƏRCÜMƏÇİDƏN

"Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika müntəxəbatı" adlı kitab Yu. V. Proxorovun redaktəsi ilə hazırlanmış "Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия" adlı ensiklopediyadan (səh. 834-893) tərcümə olunmuşdur. Müntəxəbat P. Laplasın "Essai philosophique sur les probabilités" adlı görkəmli əsərinin (1908-də A. K. Vlasovun rus dilinə tərcüməsindən) Azərbaycan dilinə tərcüməsi ilə başlanır. Daha sonra V. Ya. Bunyakovskinin "Основания математической теории вероятностей" (СПб., 1846) adlı ehtimal nəzəriyyəsi üzrə rus dilində ilk dərsliyindən giriş, son və tarixi oçerk, Ş. N. Bernşteynin "Современное состояние теории вероятностей" (M., 1927. Syurix, 1932) adlı iki məruzəsinin giriş hissələrində insanın bilik sistemində ehtimal nəzəriyyəsinin əhəmiyyəti haqqında danışılır və nəhayət, A. N. Kolmoqorovun «Математика, ее содержание, методы и значение» (M., 1956) kitabının 2-ci cildindən «Теория вероятностей» fəsli, ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarının elementar şərhi verilmişdir. Müntəxəbatın sonuncu hissəsi «Большая Советская энциклопедия»-nın (M., 1937-58) 1-ci və 2-ci nəşrlərində yerləşdirilmiş, ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika üzrə məqalələrdən rus dilindən tərcümədir.

Təqdim olunan bu kitab qeyd olunan əsərlərin Azərbaycan dilinə ilk tərcüməsidir.

BDU-nin "Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika" kafedrasında magistraturada təhsil alan tələbələrə tədris edilən fənlərdə istifadə olunan ədəbiyyat, demək olar ki, əsasən rus dilində olduğundan belə bir vəsaitin zəruriliyi günün tələbi olmuşdu. Müəllifləri C. E. Allahverdiyev, H. M. Əhmədova, A. H. Hacıyev olan "Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika ensiklopediyası" adlı ensiklopediyanın hazırlandığı ərəfədə bu müntəxəbatın da hazırlanmasına ehtiyac yarandı.

Əsərin rus dilində variantı köhnə rus leksikonunda yazıldığından (bu variant kitabın ikinci hissəsində verilmişdir) və buna görə də, tərcümədə bu üslubun olduğu kimi saxlanılmasına ciddi riayət edilməsinə səy göstərilmişdir. Müntəxəbatın hazırlanmasında ehtimal nəzəriyyəsi fəlsəfəsinə baxışın, terminologiyanın səlis və dəqiq ifadə olunmasında müəllimim, hörmətli C. E. Allahverdiyevə, bütün bu əsərin hazırlanmasında elmi məsləhətləri ilə iş prosesində qarşıya çıxan çətinliklərin həllində hərtərəfli yardım etmış qayğıkeş A. H. Hacıyevə, işçi qrupumuz, – G. A. Nəbiyeva, H. Ə. Cəfərova, Ü. E. Həsənova, G. F. Əhmədovaya, bizə daima mənəvi dayaq olmuş, hərtərəfli şərait yaratmış AMEA-nın Kibernetika İnstitutunun direktoru akademik T. A. Əliyevə sonsuz minnətdarlığımı bildirməklə böyük məmnunluq duyuram.

Adı çəkilən kitabın hazırlanmasında istifadə etdiyim ədəbiyyat üçün mənə imkan yaratmış AMEA-nın Kibernetika İnstitutunun kitabxanasının əməkdaşlarına, şəxsi kitabxanalarından istifadə etdiyim A. H. Hacıyevə və C. E. Allahverdiyevə dərin təşəkkürümü bildirirəm.

Yuxarıda adlarını çəkdiyim işçi qrupumuzun hər bir üzvünə gərgin əməklərinə görə, T. Ş. Məmmədova və xüsusilə də, G. A. Nəbiyevaya minnətdarlığımı bildirirəm.

Əgər bu kitab ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın fəlsəfi, tarixi və metodologiyası məsələləri ilə oxucuların diqqətini cəlb etmiş olarsa, onlara minnətdar olub, özümü olduqca xoşbəxt hiss edərəm.

BDU, dosent H. M. ƏHMƏDOVA

TƏRCÜMƏYƏ ÖN SÖZ

Hələ çox qədim zamanlarda uzunmüddətli müşahidələr nəticəsində insanlar istilərin erkən başlaması, soyuqların tez və ya gec düşməsi ilə bağlı müxtəlif "əlamətlərə" əsasən deyərdilər: "Bu yüz ildə (50 ildə, 10 ildə) bir dəfə baş verə bilən hadisədir". Bu, elə təsadüfiliyə ədədi ölçü vermək təşəbbüsü idi, yəni "tezlik" anlayışından istifadə etmək təşəbbüsü idi.

XI–XVI əsrlərdə təsadüfilik dərəcəsini ədədlə, ölçü ilə səciyyələndirməyin mümkünlüyü fikri yaranmağa və beləliklə də, "təsadüfi hadisənin ehtimalı" anlayışı özünə yer tutmağa başladı. XVII əsrin görkəmli riyaziyyatçıları P. Paskal (Pascal) və Fermanı (Fermat) ehtimalların hesablanılması əsaslarının qoyuluşunun baniləri olduğunu hesab etmək düzgün olardı.

Ticarətin, gəmiçiliyin inkişafı ilə əlaqədar olaraq, sığortalama məsələlərinin ortaya çıxması, müxtəlif qumar oyunlarında uduş şansı hadisələrinin ehtimallarının hesablanmasına başlanğıc kimi baxmaq olar. Laplası ehtimal hesabının mühümlüyünü və əhəmiyyətliliyini hesab edənlərin birincisi sanmaq ədalətli olardı. Ehtimal nəzəriyyəsi, demək olar ki, elmin bütün sahələrində, o cümlədən, müasir fizika, atom nəzəriyyəsi, atış və sığorta nəzəriyyələrində, biologiya və antropologiyada böyük müvəffəqiyyətlə tətbiq olunur.

Azərbaycanda Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın inkişafı XX əsrin sonuna təsadüf etsə də, hazırda bu sahələrlə sıx əlaqədar olan – informatika, kibernetika, biometrika, stoxastik maliyyə riyaziyyatı, sığorta nəzəriyyəsi, kommunikasiya texnologiyalarının inkişafı və s. kimi sahələr ehtimal nəzəriyyəsinin müxtəlif istiqamətlərinin inkişafı ilə bağlıdır.

Azərbaycan dilində ciddi və səlis ehtimal leksikonunda yazılmış ədəbiyyatın yox dərəcəsində olması, termin və anlayışların hələ də təsbit olunmaması baxımından bu çatışmamazlıqları aradan qaldırmaq istiqamətində ilk addımlardan olan "Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika müntəxəbatı"-nın oxucu kütləsi üçün olduqca faydalı bir vəsait olacağına ümid etmək olar. Belə hesab edirəm ki, Həqiqət Əhmədova tərcümə prosesində müntəxəbatda rus dilində

verilən əsərləri diqqətlə, ciddiliklə analiz etmiş və Azərbaycan dilində tərcümənin yüksək səviyyədə olmasına nail ola bilmişdir.

Təqdim olunan bu kitabda ehtimal nəzəriyyəsinin yaranma tarixində Laplasın ehtimal nəzəriyyəsi fəlsəfəsinə baxışı, V. Ya Bunyakovski, S. N. Bernşteyn və A. N. Kolmoqorovun ehtimalın əsasları barədə fikirləri verilmişdir.

Tərcümə olunan bu kitabda qədim rus dilində yazılmış orijinalda olan fəlsəfi və riyazi düşüncələri mümkün qədər saxlamağa səy göstərildiyini və buna müvəffəq olunduğunu söyləmək olar.

AMEA-nın akademiki f. - r. e. d., professor
C. E. ALLAHVERDİYEV

EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİ
VƏ RİYAZİ STATİSTİKA MÜNTƏXƏBATI

Müntəxəbatın birinci hissəsinin titul səhifəsi aşağıda verilir.

ЛАПЛАС

ОПЫТ ФИЛОСОФИИ
ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

(Essai philosophique sur les probabilités)

ПОПУЛЯРНОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЯ ПРИЛОЖЕНИЙ

Перевод **А. І. В.**

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

А. К. Власова

ПР-ДОЦЕНТА МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Москва – 1908.

Pyer Simon Laplas (Pierre Simon Laplace)
1749-1827

Müntəxəbat fransız alimi P. Laplasın «Ehtimal nəzəriyyəsi fəlsəfəsinə baxış» adlı görkəmli əsərinin tərcüməsi ilə başlayır. Daha sonra giriş hissəsi, son və ehtimal nəzəriyyəsi üzrə rus dilində ilk dərslik – V. Ya. Bunyakovskinin «Основания математической теории вероят-

ностей» (СПб., 1846) adlı əsərindən tarixi oçerk verilir. İnsan biliyi sistemində ehtimal nəzəriyyəsinin əhəmiyyəti S. N. Bernşteynin iki məruzəsinin (M., 1927; Цюрих, 1932) giriş hissələrində şərh olunur. Nəhayət, A. N. Kolmoqorovun «Математика, ее содержание, методы и значение» kitabının 2-ci cildindən «Ehtimal nəzəriyyəsi» fəsli – ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarının elementar şərhidir. Müntəxəbatın xülasə hissəsi «Большая Советская энциклопедия»-nın 1-ci və 2-ci nəşrlərində (M., 1937-58) verilmiş ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika üzrə məqalələrdən ibarətdir.

P. Laplas (P. Laplace, 1749-1827) yaşadığı illərdə «Ehtimal nəzəriyyəsi fəlsəfəsinə baxış» beş dəfə (fevral və noyabr, 1814, 1816, 1819, 1825) dərc olunmuşdu. Bu əsərin ikinci və üçüncü nəşrləri onun «Analitik ehtimal nəzəriyyəsi» («Théorie analytique des probabilités», Paris, 1812, – birinci nəşr) əsərinin giriş hissəsi kimi verilmişdir. Belə hesab olunur ki, «Ehtimal nəzəriyyəsi fəlsəfəsinə baxış» hələ 1725-də, «Écoles normales»-da müəllifin oxuduğu mühazirələrin ideyalarının necə inkişaf etməsini özündə ehtiva edir.

«Ehtimal nəzəriyyəsi fəlsəfəsinə baxış» və onun tərcümələri 1840-dan başlayaraq, 19-cu və 20-ci əsrlərdə dəfələrlə nəşr olunmuşdur. Onun sonuncu nəşrlərindən biri – 1825-ci il 5-ci fransız nəşrinin ingilis tərcüməsi (Laplace R. S., Philosophical essay on probabilities, N. Y. – B., 1994), əvvəlki nəşrlərin izahları nəzərə alınmaqla geniş kommentarilərlə hazırlanmışdır.

«Ehtimal nəzəriyyəsi fəlsəfəsinə baxış» rus dilinə tərcümədə 1908-də dərc olunmuşdur. Azərbaycan dilində bu tərcümə aşağıda verilir.

Tərcüməyə ön söz

Ehtimal nəzəriyyəsi – riyazi analizin ən maraqlı, hətta qeyri-mütəxəssislərin də nəzərini özünə çoxdan cəlb etmiş qollarından biridir. Riyazi statistikanın, biometrikanın, müxtəlif növ sığortaların inkişaf edərək və geniş xalq kütlələrinə yayılaraq, ictimai və iqtisadi siyasətin qaçılmaz faktoruna çevrilməsi, bu elmlərin əsası və tətbiqlərinin təməli olan ehtimal nəzəriyyəsinin bunlardakı rolunu sübut edir.

Son zamanlar bu nəzəriyyə yalnız fizika-riyaziyyat fakültələrinin riyaziyyat bölmələrində, əvvəllər də tədris olunmuş bir predmet kimi hətta belə bölmələr yaradılmış hüquq fakültələrinin və digər ali məktəblərin bölmələrində də, öyrənilməsi hökmən vacib sayılan bir predmet kimi daxil olunur.

Beləliklə, təbii olaraq, ehtimal nəzəriyyəsi üzrə belə əsərlərin yaradılması tələbatı yaranmışdı ki, bunlar, daha geniş oxucu dairəsi üçün nəzərdə tutulsun və bu predmetin hərtəfərli işıqlandırılmasında bu nəzəriyyənin əsaslı surətdə öyrənilməsinə giriş rolunu oynamış olsun.

Laplasın oxucunun diqqətinə burada təqdim olunan «Ehtimal nəzəriyyəsi fəlsəfəsinə baxış» («Essai philosophique sur les probabilités») əsərinin tərcüməsini bu cəhətdən ən məqsədəuyğun hesab etmək olar. Fransız həndəsəçisinin bu gözəl əsərində bu nəzəriyyənin, demək olar ki, bütün əsas məsələlərinin toplusu verilir, təsadüfi təzahürlər nəzəriyyəsinin elm və həyatın ən dərin və incə məsələlərinə tətbiq olunduğu məsələlərinə toxunulur. Ehtimal nəzəriyyəsi heç bir kəsə Laplasa olduğu qədər borclu deyildir. Onun «Théorie analytique des probabilités» əsəri bu predmet üzrə bir növ *prinsipia* təşkil edir. Bu əsas əsərə giriş kimi «Ehtimal nəzəriyyəsi fəlsəfəsinə baxış» əlavə olunmuşdur, bu başlıq ilə o, əvvəl ayrıca monoqrafiya kimi dərc olunmuşdu. Bu klassik əsərin yüz illik yaşı onun əhəmiyyətini azaltmamışdır. Cevonsun ifadəsinə görə ««Essai philosophique sur les probabilités» – dərc olunmuş ən dərin və incə traktatlardan biridir. Məntiqi metodu öyrənən hər bir kəs bu traktatla yaxşı tanış olmalıdır, çünki zaman ötdükcə o, ya az itirmiş və ya heç bir şey itirməmişdir». Cevons özünün «Elmin əsasları, məntiq və elmi metod haqqında traktat» əsərlərində belə yazmışdı. Belə də əlavə etmək olardı ki, Laplasın bu kitabı ilə tanışlıq, ümumtəhsil məqsədlərində öz məlumatlarının artırılmasını genişləndirmək istəyən şəxsləri, şübhəsiz ki, qane edəcəkdir, özünü elmi işlərə və ya statistikaya, biometrikaya və sığortanın praktiki məsələlərinə elmi nəticələrin tətbiqinə həsr etmiş insanlarda riyazi ehtimal nəzəriyyəsinin əsaslı surətdə öyrənilməsinə maraq və enerji yaradacaqdır.

Tərcümə, Laplasın əsərlərinin tam küllüyyatına daxil olmuş «Analitik ehtimal nəzəriyyəsi»-nin («Théorie analytique des probabilités») üçüncü nəşrinə əlavə olunmuş girişdən olunmuşdur. Dahi həndəsəçinin məşhur «Baxış» («Опыт», «Essai») traktatı artıq çoxdan digər dillərə tərcümə olunmuşdur və mən fikirləşirəm ki, son zamanlar ehtimal nəzəriyyəsinə bizdə maraq canlandığından, rus tərcüməsinin olması artıq bir şey olmayacaqdır.

A. Vlasov.

EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİ FƏLSƏFƏSİNƏ BAXIŞ

«Ehtimal nəzəriyyəsi fəlsəfəsinə baxış» – mənim, riyaziyyat professoru kimi, Laqranjla birlikdə milli konventin dekreti ilə dəvət olunduğum «école normales»-da, 1795-də ehtimal nəzəriyyəsi üzrə oxuduğum mühazirələr kursunun genişləndirilmiş formada «Théorie analitique des probabilités» əsərinə verilmiş giriş sözüdür. Burada mən, analizdən istifadə etmədən, ehtimal nəzəriyyəsinin bu kitabda şərh olunmuş prinsiplərini və ümumi nəticələrini, əksəriyyəti məhz ehtimal nəzəriyyəsinin məsələləri olan həyatın ən mühüm suallarına tətbiq edərək şərh etmək istəyirəm. Dəqiq demək istəsək, hətta demək olar ki, bizim bütün biliklərimiz ehtimalidir; bizim yəqinliklə dərk edə biləcəyimiz predmetlərin çox da geniş olmayan dairəsində, hətta riyaziyyatın özündə belə, həqiqətə qovuşmanın əsas vasitələri – induksiya və analogiya – ehtimallara əsaslanır; beləliklə, bəşəri biliklərin bütün sistemi bu əsərdə şərh olunmuş nəzəriyyə ilə bağlıdır. Şübhəsiz ki, burada idrakın, ədalətin və humanizmin əbədi prinsiplərinə bunları daima müşayiət edən xoşbəxt bir mümkünlüklər (rus. статочности) kimi baxılarsa, maraqla görmək olur ki, bu prinsiplərə riayət etmək olduqca faydalıdır, lakin onları nəzərə almamaq çox ziyanlıdır; belə ki, bunların mümkünlüyü lotereyada əlverişli mümkünlüklər kimi təsadüfün dəyişmələri arasında üstünlüyə malikdir. Mən arzu edərdim ki, bu giriş sözündə rast gəlinən fikirlər filosofların diqqətini cəlb etsin və onların diqqətini olduqca dəyərli predmetin öyrənilməsinə yönəldə bilsin.

Ehtimal haqqında

Bütün hadisə və ya proseslər, hətta özünün əhəmiyyətsizliyi ilə guya ki, təbiətin ali qanunlarından asılı olmayanları belə, o dərəcədə də məhz bu qanunların zəruri nəticələridir, məs., günəşin dövr etməsi kimi. Bu nəticələri bütün kainat sistemi ilə əlaqələndirən bağları bilmədən, bunların birinin digərinin ardınca məlum bir düzgünlüklə və ya görünməz bir qayda ilə baş verib-vermədiklərindən asılı olaraq, onların son səbəblər və ya təsadüf nəticəsində baş verdikləri fərz olunur, lakin xəyalın məhsulu olan bu səbəblər, bizim bilik hüdudlarımız genişləndikcə, nəzərə alınmayaraq sağlam fəlsəfə qarşısında tamamilə itmiş oldu, belə ki, bu fəlsəfəyə görə, bu səbəblər – həqiqi səbəbi yalnız özümüz olan – bilgisizliyin təzahürüdür.

Baş vermiş hər bir hadisə və ya proses özündən əvvəlki ilə belə bir açıq-aşkar prinsipə əsaslanaraq əlaqəlidir ki, hər hansı hadisə və ya proses (təzahür) onu doğuran səbəb olmadan baş verə bilməz. «Əsas kifayətedici prinsip» (rus. «принцип достаточного основания») adı ilə məlum olan bu

aksiom, hətta əhəmiyyətsiz sayılan olaylara da şamil olunur. Bu olayları onları əmələ gətirən səbəblər olmadan ən azad iradə belə yarada bilməz; çünki bu iradə, əgər bir halda təsir göstərib, digər halda təsir göstərməkdən yayınmış olsa idi və hər iki vəziyyət isə bütün cəhətlərilə tamamilə oxşar olsaydı, iradənin seçimi – səbəbsiz bir olay olardı: Leybnitsin dediyi kimi, bu iradə epikürçülərin kor-koranə bir halı olardı. Əks fikir əqlin illüziyasıdır ki, o, fərqinə varılmayan davranışlarda iradənin bu və ya digər seçimində xırda səbəbləri nəzərdən qaçıraraq əminliklə hesab edir ki, bu fikir özü-özünə və səbəbsiz yaranır.

Beləliklə, biz kainatın hazırki vəziyyətinə onun əvvəlki vəziyyətinin nəticəsi və növbəti vəziyyətinin səbəbi kimi baxmalıyıq.

Təbiəti canlandıran qüvvələr və onun bütün tərkib hissələrinin nisbi vəziyyəti hər hansı bir verilmiş anda əqlə məlum olsa idi və üstəlik bu ağıl elə geniş ola bilsəydi ki, bunları əhatəli analiz edə biləydi, o, kainatın nəhəng cisimlərinin hərəkətini ən yüngül atomların hərəkətləri ilə eyni bir düsturda əhatə etmiş olardı: onun üçün yəqin olmayan heç bir şey qalmazdı və gələcək, həmçinin keçmiş onun qarşısında canlanmış olardı. Kamil insan zəkasının astronomiyaya verə bildikləri belə idrakın zəif eskizi haqqında təsəvvür verir. Ümumdünya cazibəsinin kəşfi ilə bağlı olaraq, mexanika və həndəsədə əqlin etdiyi kəşflər, kainat sisteminin keçmiş və gələcək vəziyyətlərini eyni bir analitik ifadələrlə anlamağa imkan yaratdı. Həmin metodu bəzi digər bilik obyektlərinə tətbiq etdikdə, müşahidə olunan hadisə və ya prosesləri ümumi qanunlarla ifadə etmək bizim idrakımıza müyəssər oldu və o, verilmiş şərtlər nəticəsində baş verə biləcək hadisə və ya prosesləri öncədən söyləməyə belə müvəffəq oldu. Gerçəklik axtarışında ruhun bütün cəhdləri daima ruhu idraka (zəkaya) yaxınlaşdırmağa yönəlmişdir və indicə qeyd etdiyimiz elə idraka ki, ruh ondan həmişə sonsuz uzaqda olacaqdır. İnsana xas olan bu cəhdetmə onu heyvanlardan üstün edir; onun bu istiqamətdəki uğurları millətləri və əsrləri fərqləndirir və onların həqiqi şöhrətini təşkil edir.

Xatırlayaq ki, bizdən o qədər də uzaq olmayan keçmiş dövrlərdə yağışa və ya fövqəladə quraqlığa, olduqca uzanmış quyruğu olan kometə, günəş tutulmasına, şimal şəfəqinə və ümumiyyətlə, qeyri-adi təzahürlərə Göy qəzəbinin əlaməti kimi baxılırdı. Bunların zərərli təsirinin qarşısını almaq üçün Göyə (Tanrıya) yalvarırdılar. Planetlərin və ya günəşin hərəkətini dayandırmaq üçün Tanrıya yalvarmırdılar: müşahidə tez bir zamanda bu yalvarışların tamamilə səmərəsiz olduğunu hiss etdirərdi. Lakin uzun müddətdən bir baş verən və itən təzahürlərdən belə fikir yaranırdı ki, bunlar təbiətdə qərarlaşmış qaydalara ziddir və insanlar fərz etməyə başladılar ki, bunları Göy (Tanrı) yaradır və o, insanları günahlarına görə cəzalandırmaq

üçün bunları lazımi bildiyi kimi də dəyişir. 1456-da müşahidə olunmuş uzanmış quyruğu olan komet, bu ərəfədə türklərin sürətli qələbələri nəticəsində Bizans imperiyasının süquta uğramasından dəhşətə gəlmiş Avropada çaxnaşma yaratdı. Bu Göy ulduzu özünün dörd dövrünü başa vurduqdan sonra, bu hadisə bizim aramızda çox müxtəlif maraqlar doğurdu. Bu dövr ərzində kainat sisteminin əldə olunmuş qanunları ilə tanışlıq insanın kainata gerçək münasibətlərindəki bilgisizliyi ilə doğrulmuş qorxunu aradan qaldırmış oldu; bu kometin 1531, 1607 və 1682-ci illərdə müşahidə olunmuş komet olduğu qənaətinə gəlmiş Halley (Halley), onun 1758-in sonunda və ya 1759-un əvvəlində qayıdışını öncədən söylədi. Elm aləmi bu qayıdışı səbrsizliklə gözləyirdi, belə ki, bu elmdə edilmiş ən böyük kəşflərdən birini və bununla da, çox böyük məsafələr qət edən Göy ulduzlarının dövrləri haqqında Senekinin öngörülüklə söyləmiş olduğu: «Gün gələcək ki, indi bizə məlum olmayan şeylər bir neçə yüzilliklər boyu öyrənilməsinin davam olunması sayəsində, özünün bütün açıq-aşkarlığı ilə zühur edəcəklər; əcdadlarımız bu qədər aşkar gerçəkliklərin onların nəzərindən qaçmasına çox təəccüblənəcəklər» fikrini də təsdiq etməli idi. Onda Klero (Clairaut) iki ən böyük planet – Yupiter və Saturnun təsiri nəticəsində bu kometin məruz qaldığı kükrəntiləri analiz etməyə başladı: olduqca böyük hesablamalardan sonra onun perigelilərdən yaxın keçəcəyini 1759-un aprelin başlanğıcına təyin etdi və müşahidə bunu təsdiq etdi. Astronomiyanın bizə aşkar etdiyi düzgünlük bütün təzahürlərdə heç bir şübhə doğurmadan özünü göstərir. Havanın və ya buxarın sadə molekulunun cızdığı əyri, planetlərin orbiti kimi dəqiqliklə təyin olunur: bunlar arasındakı fərq, yalnız, bizim bilgisizliyimizdən irəli gəlir.

Ehtimal, müəyyən qədər bu bilgisizliklə, müəyyən dərəcədə isə bizim bilgimizlə şərtləşdirilir. Bizə məlumdur ki, üç və ya daha çox hadisədən biri baş verəcəkdir; lakin bunlardan birinin digərlərindən hər hansı bir üstünlüyə malik olması barədə hər hansı dəlilin olmasına da əsasımız yoxdur. Belə bir inamsızlıqda biz hansı hadisənin baş verəcəyini yəqinliklə söyləyə bilmərik. Lakin bu hadisələrdən ixtiyari birinin baş verməyəcəyi fərz olunur, çünki bu hadisənin baş verməməsi üçün onun baş verməsini istisna edən bir neçə, eynilə mümkün ola bilən hallar olduğu halda, onun baş verməsi üçün yalnız bir əlverişli hal vardır.

Təsadüflər nəzəriyyəsi – bütün bircins hadisələrin bərabər mümkün olan hallarının, yəni varlığı bizim üçün eyni dərəcədə qeyri-müəyyən olan halların məlum sayı ilə ifadə etməyə nail olunmasından və ehtimalı axtarılan hadisənin baş verməsi üçün əlverişli hallar sayının da təyin oluna bilinməsindən ibarətdir. Bu əlverişli hallar sayının bütün mümkün halların

sayına nisbəti – bu ehtimalın ölçüsüdür və beləliklə, bu ehtimal – surəti bütün əlverişli hallar sayı, məxrəci bütün mümkün hallar sayı olan kəsrdir.

Ehtimalın əvvəlki anlayışında fərz olunur ki, əlverişli hallar sayı və bütün mümkün hallar sayı eyni nisbətdə artırıldıqda ehtimal dəyişmir. Buna əminlik üçün iki – A və B urnlarına baxaq; A-da dörd ağ və iki qara kürəcik, B-də yalnız iki ağ və bir qara kürəcik olsun. Fərz edək ki, A-dakı iki qara kürəcik bir-birilə iplə bağlanmışdır və bu kürəciklərdən birini götürdükdə bu ip qırılır, dörd ağ kürəciyin də belə iki sistem əmələ gətirdiyi fərz olunur. Qara sistemin kürəciklərindən birinin çıxarılması üçün əlverişli olan bütün mümkün hallar qara kürəciyin çıxması ilə nəticələnəcəkdir. Əgər kürəcikləri bir-birilə birləşdirən iplərin qırılmayan olduğu fərz olunarsa, onda aydındır ki, bütün mümkün baş vermələrin sayı dəyişməyəcəkdir, qara kürəciklərin çıxarılması üçün əlverişli baş verələrin sayı da dəyişməyəcəkdir; yalnız bu halda bir dəfədə urndan iki kürəcik çıxacaqdır. Urndan qara kürəciyin çıxması ehtimalı əvvəlkinə bərabər olub, dəyişməyəcəkdir. Onda aydındır ki, bu hal B urnu halı olacaqdır, lakin yalnız belə bir fərqli cəhət olacaqdır ki, bu sonuncu urnun üç kürəciyi dəyişməz olaraq, bir-birilə bağlanan kürəciklərin üç cütü ilə əvəz olunacaqdır. Bütün mümkün hallar hər hansı hadisənin baş verməsi üçün əlverişli olarsa, onda güman (ehtimal) yəqinliklə əvəz olunur və onun ifadəsi vahidə bərabər olur. Bu anlamda yəqinlik və ehtimal müqayisə olunandırlar, lakin bununla belə əqlin iki halı arasında mühüm fərq vardır: ya həqiqət əqlə ciddi surətdə isbat olunur və ya əql hələ də kiçik bir səhvin ola biləcəyini də nəzərdə tutur.

Yalnız doğruyaoxşar hadisələrdə, hər bir ayrıca insanda ona məlum ola bilən verilənlər arasındakı fərq, eyni bir əşyalar haqqında mövcud olan fikir müxtəlifliyinin əsas səbəblərindən biridir. Məs., üç – A, B, C urnlarından birində yalnız qara kürəciklər, qalan ikisində yalnız ağ kürəciklər olduğu fərz olunur. Kürəcik C urnundan çıxarılmalıdır; bu kürəciyin qara olması ehtimalı nəyə bərabərdir? Əgər bizə məlum olsa idi ki, bu üç urndan hansı yalnız qara kürəciklər olanıdır, onda qara kürəciklərin B-də və ya A-da deyil, məhz C-də olduğunu fərz etmək üçün heç bir dəlil yoxdur, onda bütün bu üç fərziyyənin eyni dərəcədə mümkün olduğu görüntüsü yaranar, belə ki, qara kürəcik yalnız birinci fərziyyə şərtində çıxarıla bilindiyindən, onun çıxarılması ehtimalı üçdə birə bərabərdir. Əgər A-da yalnız ağ kürəciklərin olduğu məlum olarsa, onda bizim tərəddüdümüz yalnız B və C urnları ilə əlaqədar olacaqdır və C urnundan çıxan kürəciyin qara olması ehtimalı ikidə birə bərabər olacaqdır. Əgər biz əmin olarsaq ki, A və B urnlarında yalnız ağ kürəciklərdir, bu halda ehtimal, nəhayət, yəqinliyə çevrilir.

Çoxsaylı toplantı qarşısında hansısa bir tərzdə söylənilmiş fakt dinləyicilərin bilik dairəsinə görə müxtəlif ehtimallarla qiymətləndirilir. Əgər bu fakt barədə məruzə edən şəxs bu fakta tamamilə əmindirsə və onun tutduğu vəziyyəti və xarakteri böyük inam təlqin edirsə, onun hekayətinin nə dərəcədə qeyri-adi olmasından asılı olmayaraq, maariflənməmiş dinləyicilər üçün bu şəxsin danışığı adi fakt kimi eyni dərəcədə doğruyaoxşar olacaqdır; şübhəsiz ki, ona inanacaqlar. Lakin dinləyicilərdən hər hansı birinə məlum olarsa ki, həmin fakt bu şəxsdən heç də az hörmətli olmayan şəxs tərəfindən inkar olunur, onda bu dinləyicidə şübhə oyanacaqdır; maarifli insanlar bu faktı yalan hesab edəcəklər, çünki onlar tapa biləcəklər ki, bu fakt yaxşı yoxlanılmış faktlara, ya da ki, təbiətin dəyişməz qanunlarına ziddir.

Yanlış fikirlərin cahil dövrlərdə Yer üzündə yayılmasına görə biz, kütlənin məlumatlı hesab etdikləri və həyatın ən mühüm məsələlərində inanmağa adət etdikləri şəxslərin fikirlərinin təsirinə borcluyuq. Magiya və astrologiya buna aid mühüm misallardır. Uşaqlıqdan insanlara təlqin olunmuş, yoxlanılmadan qəbul edilərək, olduqca uzun müddət onlarda davamlı olaraq, bərqərarlaşdırılan ümumi inamla formalaşmış belə yanlış fikirlər dəstəklənirdi; lakin elmin inkişafı ilə və nəhayət, bunlar maariflənmiş insanların ağıllarında darmadağın olunduqdan sonra, onların fikirləri xalq arasında təqlid sayəsində və adətetmə vərdişilə belə yanlış fikirlərin yox olması zərurətini yaratdı. Məhz mənəvi aləmin ən möhtəşəm və təhrikedici olan bu gücü, eyni hakimiyyətli başqa bir yerdə, tərəfdarları olan ideyalara tam tərs olan və bütöv bir millətə xas ideyaları təsdiq edir və qoruyub saxlayır. Bizimkindən fərqli, əksər hallarda şəraitin yaratdığı yad baxışlara, biz nə qədər də anlaşıqlı olmalıyıq. Biz kifayət qədər maariflənməmiş hesab etdiklərimizi maarifləndirəcəyik: lakin əvvəlcə, özümüzün şəxsi baxışlarımıza ciddi surətdə yenidən baxaraq, onların nisbi yəqinliyini qərəzsız ölçüb-biçməliyik.

Baxışlar arasında fərq həmçinin bizə məlum verilənlərin təsirinin təyin olunması üsulundan da asılıdır. Ehtimal nəzəriyyəsi elə incə mülahizələrlə əlaqəlidir ki, xüsusilə mürəkkəb məsələlərdə eyni verilənlərə malik iki şəxsin müxtəlif nəticələrə gəlməsi heç də təəccüb doğurmur. Bu nəzəriyyənin əsas prinsiplərini indi şərh edək.

Ehtimalların hesablanmasının ümumi prinsipləri

I p r i n s i p. Prinsiplərdən birincisi – ehtimalın özünün tərifidir və biz gördük ki, ehtimal – əlverişli hallar sayının bütün mümkün hallar sayına nisbətidir.

I I p r i n s i p. Lakin bu zaman müxtəlif halların bərabər mümkünlüyü fərz olunur. Əgər bu hətta belə olmasa, onda bu halların uyğun mümkünlükləri təyin olunur; bunların dəqiq qiymətləndirilməsi təsadüflər nəzəriyyəsinin ən incə bəndlərindən biridir. Onda ehtimal hər bir əlverişli halın mümkünlüklərinin cəmi olacaqdır. Bu prinsipi misalla izah edək.

Fərz edək ki, havaya böyük və çox nazik metal pul atılır; bu pulun hər iki üzü tamamilə oxşardır, bunları *xaç* və *şəbəkə* ilə adlandıraq. Pulun iki dəfə atılmasında *xaçın* heç olmasa bir dəfə görünməsi ehtimalını tapaq. Aydındır ki, eyni mümkün ola bilən dörd hal ola bilər, doğrudan da: birinci və ikinci atılmada *xaç*; birinci atılmada *xaç* və ikincidə *şəbəkə*; birinci atılmada *şəbəkə* və ikincidə *xaç*; nəhayət, hər iki atılmada *şəbəkə*. Birinci üç hal, ehtimalı axtarılan hadisə üçün əlverişlidir, bu ehtimal, deməli, $3/4$-ə bərabərdir; odur ki, iki dəfə atılmada xaçın heç olmasa bir dəfə düşməsi üçün bir şans əleyhinə üç şans vardır.

Bu oyunda, belə hesab etmək olar ki, üç müxtəlif hal vardır, məhz: birinci atılmada *xaçın* düşməsi pulun ikinci dəfə atılması zəruriliyini istisna edir; birinci atılmada şəbəkə və ikincidə *xaçın* düşməsi; nəhayət, birinci və ikinci atılmada *şəbəkə*. Əgər biz Dalamber kimi bu halları eyni mümkün üç hal kimi hesab etmiş olsaydıq, onda bu ehtimalın $2/3$ olduğunu alardıq. Lakin aydındır ki, *xaçın* birinci atılmada düşməsi ehtimalı $1/2$-ə bərabərdir, bununla belə digər halların hər birinin ehtimalı $1/4$-ə bərabərdir; çünki birinci hal sadə hadisədir və bu hadisə iki mürəkkəb hadisəyə uyğundur: birinci və ikinci atılmada *xaç* düşməsinə və birincidə *xaç,* ikinci atılmada *şəbəkə* düşməsinə. Əgər indi, ikinci prinsipə görə birinci atılmada *xaçın* mümkünlüyü $1/2$-i birinci atılmada *şəbəkə*, ikinci atılmada *xaçın* mümkünlüyü $1/4$-ə əlavə etsək, axtarılan ehtimal üçün $3/4$ ehtimalı alınar, bu isə hər iki dəfə atılmanı yerinə yetirmək fərziyyəsini qəbul etdikdə tapdığımız ehtimalla uzlaşır. Bu fərziyyə bu hadisə üçün mərc gəlmiş şəxsin aqibətini heç də dəyişmir.

I I I p r i n s i p. Ehtimal nəzəriyyəsinin ən mühüm bəndlərindən biridir və burada illüziyalara daha çox yer verilir və bu elə bir qaydadır ki, ehtimallar qarşılıqlı birləşmələrlə artır və azalır. Əgər hadisələrdən biri digərindən asılı deyildirsə, onların birgə baş verməsi ehtimalı bu hadisələrin hər birinin ehtimallarının hasilinə bərabərdir. Məs., bir zərin bir dəfə atılmasında bir xalının düşməsi ehtimalı altıda bir olduğu halda, iki zərin bir dəfə atılmasında iki xal düşməsi ehtimalı otuz altıda birə bərabər olur. Doğrudan da, bir zərin hər bir üzü digərinin altı üzü ilə kombinasiya

oluna bilindiyindən, onda eyni mümkün otuz altı hal vardır və bunlardan yalnız biri iki xalı verir. Ümumiyyətlə isə, hər hansı hadisənin eyni şəraitdə, verilmiş ədəd dəfə təkrar olunması ehtimalı, bu sadə hadisənin ehtimalının bu ədəd qədər qüvvət üstünə yüksəldilməsindən alınan ədədə bərabərdir. Beləliklə, vahiddən kiçik olan kəsrin ardıcıl qüvvət üstləri həmişə azalır, odur ki, bir sıra olduqca böyük ehtimallardan asılı olan hadisə həddən ziyadə kiçik ehtimallı da ola bilər. Fərz edək ki, hər hansı bir fakt şahidlik edən iyirmi nəfərlə bizə elə surətdə ötürülür ki, birinci onu ikinciyə, ikinci üçüncüyə və s. ötürür: daha sonra fərz edirik ki, hər bir şahidlik ehtimalı $9/10$-a bərabərdir; şahidliklərdən alınan faktın ehtimalı bu halda səkkizdə birdən az olardı. Əşyalardakı aydınlığın azalması ilə ehtimalın da azalmasına ən yaxşı müqayisə: göz qarşısına bir neçə şüşə lövhə qoyulduqda, bir şüşədən tamamilə aydın görünən əşyanın görünməz olması üçün hətta az sayda lövhənin kifayət etməsidir. Tarixçilər, deyəsən, faktların ehtimalının belə tədrici azalmasına kifayət qədər diqqət yetirmirdilər, əgər tarixi hadisələrə çox sayda nəsillər ardıcıllığı keçdikdən sonra nəzər salınarsa, əksəriyyəti yəqin hadisələr sayılan belə hadisələr sınaqlarla yoxlanılsaydı, onlar ən azı şübhə doğurardı.

Sırf riyazi elmlərdə ən əvvəlki nəticələr baş verdikləri prinsipin yəqinliyində iştirak edir. Analizin fizikaya tətbiqində alınan nəticələr faktların və ya təcrübələrin tam yəqinliyinə malikdir. Mənəvi elmlərdə, hər bir nəticə əvvəlki nəticədən doğruyaoxşarlıq əsasında çıxarıldığından, bu nəticələrin nə qədər ehtimallı olmasına baxmayaraq, xətaların sayı onların sayı ilə birlikdə artır, hər hansı bir prinsipin ən əvvəlki nəticələrində gerçəklik şanslarından artıq olur.

I V p r i n s i p. Əgər iki hadisə bir-birindən asılı olarsa, mürəkkəb hadisənin ehtimalı – birinci hadisənin ehtimalının, bu hadisənin baş verməsi şərtində, ikinci hadisənin baş verməsi ehtimalına hasilidir. Məs., üç A, B, C urnlarına baxdığımız halda, bunlardan ikisində yalnız ağ kürəciklər və birində yalnız qara kürəciklər olduqda, C urnundan ağ kürəcik çıxması ehtimalı $2/3$-ə bərabərdir, belə ki, üç urndan yalnız ikisində ağ kürəciklər vardır. C urnundan ağ kürəciyin çıxmasına əsaslanmaqla məhz hansı urnda yalnız qara kürəciklər olduğu haqqında məlumatsızlıq, artıq yalnız A və B urnlarına aid olur; B urnundan ağ kürəciyin çıxması ehtimalı $1/2$-ə bərabərdir; $2/3$-nin $1/2$ və ya $1/3$-ə hasili, deməli, B və C urnlarından eyni zamanda iki ağ kürəcik çıxarılması ehtimalıdır. Əslində, buna görə, A-nın yalnız qara kürəciklər olan urnlardan biri olması zəruridir, aydındır ki, bu halın ehtimalı $1/3$-dir.

Bu misaldan baş vermiş hadisələrin gələcək hadisələrin ehtimalına təsiri olduğu aydın olur; belə ki, ehtimalı əvvəlcədən 2/3-yə bərabər olan B urnundan ağ kürəciyin çıxması ehtimalı, C urnundan ağ kürəcik çıxdıqdan sonra, 1/2 olur: həmin urndan, əgər qara kürəcik çıxsaydı, bu ehtimal yəqinliyə çevrilərdi. Bu təsir əvvəlki prinsipin nəticəsi olan aşağıdakı prinsip vasitəsilə təyin olunur.

V p r i n s i p. Əgər baş vermiş hadisənin ehtimalı *a priori* hesablanarsa və bu birinci və digər hadisədən ibarət hadisənin ehtimalı hesablanılarsa, onda birinciyə bölünmüş ikinci ehtimal, müşahidə olunmuş hadisədən sonra gözlənilən hadisənin ehtimalı olacaqdır.

Burada keçmişin gələcək hadisənin ehtimalına təsiri barədə bəzi filosofların qaldırdığı sual ortaya çıxır. Fərz edək ki, *xaç* və *şəbəkə* oyununda *xaç şəbəkədən* daha çox düşmüşdür: yalnız buna əsasən biz belə fikirləşə bilirik ki, elə bir həmişəlik səbəb vardır ki, belə nəticə üçün əlverişlidir. Məs., həyatda daimi xoşbəxtlik bacarıqlılığın sübutudur, bu isə insanları xoşbəxt adamlara üstünlük verməyə sövq edir. Lakin, əgər şəraitin qeyri-sabitliyindən biz, hər dəfə mütləq qeyri-müəyyənlik vəziyyətinə qayıdırıqsa; məs., *xaç və şəbəkə* oyununda metal pul hər bir atılmada dəyişdirilirsə, onda keçmişin gələcəyə cüzi aydınlıq gətirməsi mümkün deyildir və bunu hesaba almaq mənasızlıq olardı.

V I p r i n s i p. Müşahidə olunmuş hadisənin baş vermə səbəblərindən hər biri ehtimal olunmaqdan daha çox, xüsusən də, ona görə doğruyaoxşardır ki, bu səbəb mövcud olduqda hadisə baş verəcəkdir; bu səbəblərdən hər hansı birinin mövcud olması ehtimalı, aydındır ki, surəti – bu səbəbdən baş verən hadisənin ehtimalı olan, məxrəci isə bütün səbəblərə aid olan oxşar ehtimalların cəmi olan kəsrə bərabərdir: əgər bu müxtəlif, *a priori* baxılan səbəblər eyni ehtimallı deyildirlərsə, onda hər bir səbəbin doğurduğu hadisənin ehtimalı əvəzinə, bu ehtimalın, səbəbin özünün ehtimalına hasili götürülməlidir. Bu, təsadüfiliklər analizinin hadisələrdən səbəblərə keçidlə məşğul olan sahəsinin əsas prinsipidir.

Bu prinsip düzgün hadisələrin nəyə görə xüsusi səbəblə əlaqədar olmasını izah edir. Bəzi filosoflar fərz edirdilər ki, bu hadisələr digərlərindən daha az ehtimallıdırlar və *xaç* və *şəbəkə* oyununda, məs., *xaçın* ardıcıl olaraq iyirmi dəfə düşməsi birləşməsi daha az təbiidir, nəinki *xaç* və *şəbəkənin* düzgün qarışdırılmadıqları birləşmələrdən. Lakin belə nöqteyi-nəzər fərz edir ki, keçmiş hadisələr gələcək hadisələrin mümkünlüyünə təsir edir, bu isə qətiyyən mümkün deyildir. Düzgün hallara yalnız ona görə az-az təsadüf olunur ki, onlar çoxsaylılardan daha azdır.

Biz simmetriya müşahidə etdikdə səbəbi müəyyənləşdirmək istəsək, bundan belə nəticə çıxarılmamalıdır ki, biz simmetrik hadisəyə daha az mümkün ola bilən hadisə kimi baxırıq; bu hadisə ya requlyar səbəbin və ya təsadüfün nəticəsi ola bildiyindən, birinci fərziyyə ikincidən daha çox ehtimallı olur. Biz masa üzərində hərflərin belə düzülüşünü görürük: *Konstantinopol* və bu halda biz hesab edirik ki, bu düzülüş təsadüfilik nəticəsi deyildir, ona görə yox ki, belə düzülüş başqalarından daha az ehtimal olunur, belə ki, əgər bu söz heç bir dildə istifadə olunmasaydı, belə düzülüşün heç bir xüsusi səbəbinin olduğuna biz şübhələnməzdik: lakin bu söz bizdə istifadə olunan sözdür, onda bu düzülüşdə kiminsə hərfləri belə qoyması halının ehtimalı, şübhəsiz ki, düzülüşün təsadüfilik nəticəsi halındakı ehtimalından daha çox olur.

Burada *qeyri-adi* sözünü təyin etmək yerinə düşərdi. Biz bütün mümkün ola bilən hadisələri fikrən müxtəlif siniflərə bölürük və bu hadisələrdən ən az sayda hadisədən ibarət sinifləri biz *qeyri-adi* sinif hesab edirik. Məs., *xaç* və *şəbəkə* oyununda xaçın yüz dəfə ardıcıl düşməsi bizə qeyri-adi görünür, çünki yüz dəfə atılmada baş verə bilən, demək olar ki, sonsuz sayda birləşmələri düzgün sıralara və ya bizim nəzərimizə görə bu birləşmələrdə asanca hiss olunan qayda hökm sürən sıralara və nəhayət, düzgün olmayan sıralara böldükdə, bu sonuncular misilsiz dərəcədə çoxdur. İçərisində yalnız biri ağ, digərləri qara kürəcik olan milyon kürəcik yerləşən urndan ağ kürəciyin çıxması da bizə qeyri-adi hal kimi görünür, çünki iki rəngə uyğun hadisələrin yalnız iki sinfini təşkil edirik. Lakin milyon ədəd nömrələnmiş kürəcik olan urndan 475813 №-li kürəciyin çıxması bizə adi hadisə kimi görünür, çünki nömrələri onları siniflərə bölmədən fərdi surətdə yoxladıqda, bunlardan birinin digərindən daha tez çıxacağını düşünməyimizə heç bir əsas yoxdur.

Biz əvvəlkilərdən, ümumiyyətlə, belə nəticə çıxarmalıyıq ki, hər hansı fakt nə dərəcədə qeyri-adidirsə, onu əsaslandırmaq üçün ciddi dəlillər olmalıdır; çünki onun haqqında şahidlik edənlər səhv edə bilərlər və ya aldana bilərlər və buna görə də, real fakt özü-özlüyündə daha az, bu iki səbəb isə daha çox ehtimal olunur. Şahidlərin şahidliklərinin ehtimalları haqqında danışdıqda biz buna xüsusilə əmin olacağıq.

V I I p r i n s i p. Gələcək hadisənin ehtimalı – müşahidə olunmuş hadisədən çıxarılmış hər bir səbəbin ehtimalının, bu səbəb olduqda, gələcək hadisənin baş verməsi ehtimalına hasillərinin cəmidir. Aşağıdakı misalda bu prinsip aydın olur.

İçərisində yalnız iki – ağ və ya qara kürəcik olan urn olduğunu fərz edirik. Bu kürəciklərdən biri çıxarılır, sonra o, yenidən urna qaytarılır ki, yeni tiraj başlansın. Fərz edirik ki, ilk iki tirajda ağ kürəciklər

çıxmışdır, belə sual qoyulur: üçüncü tirajda ağ kürəciyin çıxması ehtimalı nəyə bərabərdir.

Burada yalnız iki hipotez irəli sürmək olar: kürəciklərdən biri ağ, digəri qaradır və ya hər ikisi ağdır. Birinci hipotezdə müşahidə olunmuş hadisənin ehtimalı $1/4$ -ə bərabərdir; bu ehtimal ikinci hipotezdə vahidə və ya yəqinliyə bərabərdir. Odur ki, səbəblər qədər də bu hipotezlərə də baxsaq, altıncı prinsipə görə, bunlara uyğun ehtimalların $1/5$ və $4/5$ olduğunu alırıq. Lakin əgər birinci hipotez yerinə yetərsə, onda üçüncü tirajda ağ kürəciyin çıxarılması ehtimalı $1/2$ -ə bərabərdir; ikinci hipotezdə bu ehtimal vahidə bərabərdir. Bu sonuncu ehtimalları uyğun hipotezlərin ehtimallarına vurduqdan sonra alınmış hasillərin cəmi və ya $9/10$, – üçüncü tirajda ağ kürəciyin çıxması ehtimalı olacaqdır.

Sadə hadisənin ehtimalı məlum olmadıqda, onda bu ehtimalın sıfırdan vahidə qədər bütün ədədi qiymətlər alacağını fərz etmək olar. Müşahidə olunmuş hadisədən sonra bu hipotezlərin hər birinin ehtimalı, altıncı prinsipə əsasən, surəti – bu hadisənin bu hipotezdə ehtimalına, məxrəci isə bütün hipotezlər üçün oxşar ehtimalların cəminə bərabər, kəsrə bərabərdir. Hadisənin verilmiş sərhədlərdə mümkünlüyünün ehtimalı – bu sərhədlərdə yerləşən kəsrlərin cəminə bərabərdir. Əgər hər bir kəsri uyğun hipotezdə təyin olunan gələcək hadisənin ehtimalına vurarıqsa, onda yeddinci prinsipə görə, bütün hipotezlərə aid hasillərin cəmi – müşahidə olunmuş hadisə üzrə baş verəcək gələcək hadisənin ehtimalı olacaqdır. Beləliklə, biz tapırıq ki, hadisə ardıcıl bir neçə dəfə baş verdikdən sonra, onun növbəti dəfə də baş verməsi ehtimalı, bir vahid artırılmış bu ədədin, iki vahid artırılmışına nisbətinə bərabərdir. Məs., biz ən qədim tarixi dövrü beş min il əvvələ və ya $1\,826\,613$ gün geriyə aid etsək və nəzərə alsaq ki, bu müddət ərzində günəş, hər bir gün hər dəfə yeni günlə əvəz olunduqda daima çıxmışdır, onda günəşin sabah da çıxacağı üçün bir şansa qarşı $1\,826\,214$ şans olacaqdır. Hadisə və ya proseslərin küllüyyatından günləri və ilin fəsillərini tənzimləyən prinsipin olduğunu bilən şəxs üçün bu ədəd misilsiz dərəcədə mühümdür, o görür ki, indiki anda bunların cərəyan etməsinin qarşısını heç bir qüvvə ala bilməz.

Byuffon özünün siyasi arifmetikasında ehtimalı əvvəlkindən fərqli, başqa yolla hesablayır. O fərz edir ki, bu ehtimal vahiddən, surəti vahidə bərabər, məxrəci isə iki ədədinin o dövrdən keçən günlər sayına qüvvət üstünə yüksəldilmişinə bərabər ədəd olan kəsr qədər fərqlənir. Lakin keçmiş hadisələrdən səbəblərin və gələcək hadisələrin ehtimalına keçidin düzgün üsulu bu məşhur yazıçıya məlum deyildi.

Gözləmə haqqında

Hadisələrin ehtimalı bu hadisələrin mövcudluğunda maraqlı şəxslərin ümidini və ya qorxusunu təyin etməyə xidmət edir. *Ümid* sözünün müxtəlif mənaları vardır: bu, adətən, şəxsin yalnız gümanla etdiyi fərziyyələrlə, hər hansı mənfəəti gözləyərək, qazancını ifadə edir. Bu qazanc – ehtimal nəzəriyyəsində, gözlənilən miqdarın onun alınması ehtimalına hasilinə bərabərdir, bu isə miqdarın ehtimallara mütənasib olaraq paylandığı fərz olunduqda, hadisəyə qoşma olan riskə məruz qalmamaq arzusunda olan maraqlı şəxsin ödəməli olacağı miqdarın hissəsini təşkil edir. Ehtimalın bərabər dərəcədə paylanması gözlənilən miqdara bərabər hüquqlar verdiyindən, biz bütün kənar halları nəzərə almasaq, bu, yeganə doğru paylanmadır. Bu qazancı biz *riyazi gözləmə* adlandıracağıq.

V I I I p r i n s i p. Əgər qazanc bir çox hadisədən asılıdırsa, onda hər bir hadisənin ehtimalını bu hadisənin baş verməsi ilə bağlı mənfəətə vuraraq, bu hasillərin cəmini götürsək, biz bu qazancı alarıq.

Bu prinsipi misallara tətbiq edək. Fərz edək ki, *xaç* və *şəbəkə* oyununda birinci atılmada *xaç* düşərsə, Pavel iki frank alır, *xaç* yalnız ikinci atılmada düşərsə, o, beş frank alır. İki frankı birinci halın ehtimalı $1/2$ -ə, beş frankı ikinci halın ehtimalı $1/4$ -ə vursaq, hasillərin cəmi və ya Pavelin qazancı olan iki tam dörddə bir frankı alarıq. Bu məbləğ o qədərdir ki, o, bu qazancı ona əldə etməyə səbəbkar olan şəxsə əvvəlcədən verməlidir: çünki oyunun bərabərhüquqlu olması üçün oyunda ortaya qoyulan məbləğ onun gətirdiyi qazanca bərabər olmalıdır.

Əgər Pavel birinci atılmada xaç düşdükdə iki frank və hətta birinci atılmada da xaç, ikinci atılmada da xaç düşdükdə belə, beş frank alarsa, onda iki frankın və beş frankın $1/2$ -ə vurulmasından sonra bu hasillərin cəmi – Pavelin qazancı üçün üç frank yarıma bərabər olacaqdır, deməli, bu onun oyunda ortaya qoyacağı məbləğdir.

I X p r i n s i p. Bəziləri gəlir, digərləri ziyan gətirməsi ehtimal olunan bir sıra hadisələrin olduğunu bilərək, biz bunlardan alına bilən qazancı təyin edə bilərik, buna görə, hər bir əlverişli hadisənin ehtimalını onun gətirdiyi mənfəətə hasilinə vuraraq, hasillərin cəmini hesablayıb, hər bir əlverişsiz hadisənin ehtimalını onunla bağlı ziyana vuraraq, hasillərin cəmini hesabladığımız birinci cəmdən çıxmalıyıq. Əgər ikinci cəm birincidən çoxdursa, onda qazanc ziyana, ümid isə qorxuya çevrilir.

Həyatda, həmişə, heç olmasa gözlənilən qazancın onun ehtimalına hasili ilə ziyan üçün belə hasilin bərabər götürülməsi baxımından hərəkət etmək gərəkdir. Lakin buna nail olmaq üçün gəliri, ziyanı və onların uyğun

ehtimallarını dəqiq qiymətləndirmək zəruridir. Buna görə ən doğru əqlə, incə nəzakətə və böyük təcrübəyə, aşağıdakı nisbətlərdə malik olmaq gərəkdir: özünü xurafatdan, illüziyalardan, qorxudan və ümiddən, əksər insanların var-dövlət barədə öz izzət-nəfslərini arxayın etdikləri yanlış fikirlərdən qorumağı bacarmaq gərəkdir.

Aşağıdakı məsələyə əvvəlki prinsiplərin tətbiqi həndəsəçiləri çox maraqlandırmışdı. Pavel aşağıdakı şərtlərlə *xaç* və *şəbəkə* oyununda iştirak edir: əgər birinci atılmada *xaç* düşmüşdürsə, o, iki frank, *xaç* yalnız ikinci atılmada düşmüşdürsə, dörd frank, *xaç* yalnız üçüncü atılmada düşmüşdürsə, səkkiz frank və s. alır. Onun oyunda ortaya qoyduğu məbləğ, səkkizinci prinsipə görə, atılmalar sayına bərabər olmalıdır; odur ki, əgər partiya sonsuz davam edilirsə, onda bu məbləğ sonsuz olmalıdır. Bununla belə, heç bir ağıllı adam bu oyunda hətta orta məbləği, məs., 50 frankı ortaya qoymazdı. Sağlam düşüncənin göstərişləri ilə hesablama nəticələrinin arasında bu fərq nədən yaranır? Tez bir zamanda öyrəndilər ki, bu ondan asılıdır ki, hər hansı mənfəətdən bizə çatan mənəvi qazanc, bu mənfəətə mütənasib deyildir və o, minlərlə səbəblərdən asılıdır, amma bunlardan ən ümumisi və mühümü – əksər hallarda çətinliklə təyin olunan vəziyyətdir (səbəblər nəzərdə tutulur – H. M.). Əslində, aydındır ki, milyonerlə müqayisədə, 100 frankı olan şəxs üçün bir frank daha qiymətlidir. Buna görə də, gözlənilən mənfəətdə onun bir frankının mütləq dəyəri nisbi dəyərindən fərqləndirilməlidir: bu nisbi dəyər onu istəyə məcbur edən dəlillərdən asılı olduğu halda, birincisi bundan asılı deyildir. Bu nisbi dəyərin qiymətləndirilməsi üçün ümumi prinsip vermək mümkün deyildir. Lakin bununla belə Daniil Bernullinin təklif etdiyi və bir çox hallarda səmərəli olan prinsip aşağıda verilir.

X p r i n s i p. Son dərəcə kiçik məbləğin nisbi dəyəri – maraqlı şəxsin bütün əmlakının mütləq dəyərə nisbətinə bərabərdir. Burada fərz olunur ki, hər bir insanın hər hansı əmlakı vardır və onun dəyərinin sıfra bərabər olduğunu heç bir halda fərz etmək belə olmaz. Doğrudan da, hətta heç bir şeyi olmayan şəxs belə, öz zəhmət və ümidlərilə yaratdıqlarına, heç olmasa yaşamaq üçün zəruri olan dəyəri verir.

İndicə şərh etdiyimiz prinsipi analiz edərək, aşağadakı qaydanı alarıq.

Əgər hər hansı şəxsin varidatının onun gözləmələrindən asılı olmayan hissəsini vahidlə işarə edib, bu gözləmələr və onların ehtimallarına görə bu varidatın ala biləcəyi qiymətlər təyin edilərsə, onda bu ehtimallarla göstərilən uyğun qüvvət üstlərinə yüksəldilmiş bu qiymətlərin hasili fiziki sərvət olacaqdır, bu isə həmin şəxsin öz varidatından vahid əvəzinə götürülmüş hissəsindən və öz gözləmələrindən ala biləcəyi mənəvi qazanc

olacaqdır; onda fərq fiziki sərvətin artımı olacaqdır, buna görə biz gözləmələrə borcluyuq: biz bu artımı *mənəvi gözləmə* adlandıracağıq. Asanlıqla görmək olur ki, mənəvi gözləmə o halda riyazi gözləmə ilə üst-üstə düşür ki, vahid əvəzinə qəbul edilmiş varidat gözləmələrdən yaranan dəyişikliklərlə müqayisədə sonsuz olur. Lakin bu dəyişikliklər bu vahidin əsas hissəsini təşkil edirsə, hər iki gözləmə bir-birindən olduqca çox fərqlənə bilər.

Bu qayda sağlam düşüncənin göstərişlərilə uzlaşan nəticələrə gətirir, bunun sayəsində bunlar müəyyən dəqiqliklə qiymətləndirilə bilinir. Məs., əvvəlki misalda tapırıq ki, əgər Pavelin iki yüz frankı vardırsa, onda oyunda ortaya qoyulan məbləgin iki yüz frankdan artıq qoyulması ağılsızlıqdır. Həmin bu qayda bütün varidatı təhlükəyə məruz qoymaqdansa, bu təhlükəni tez bir zamanda gözlənilən varidatın bir neçə hissəsinə paylaşdırılmasını tövsiyə edir. Bundan belə nəticə çıxır ki, hətta ən ədalətli oyunda belə, uduzulmuş məbləğ həmişə uduşdan nisbətən çox olur. Məs., yüz frankı olan oyunçu *xaç* və *şəbəkə* oyununda əlli frank ortaya qoyursa, bundan sonra ondakı məbləğ səksən yeddi frank olacaqdır, yəni bu son məbləğ oyunçuya oyundan sonra onun varı haqqında vəziyyəti kimi həmin mənəvi qazancı verə bilərdi. Beləliklə, oyun hətta o halda da əlverişsizdir ki, oyunda ortaya qoyulan məbləğ gözlənilən məbləğin onun ehtimalına hasilinə bərabər olsun. Buna əsaslanaraq, gözlənilən məbləğin bu hasildən kiçik olduğu oyunlarda mənəviyyatsızlıq haqqında mühakimə yürütmək olar. Oyundakı mənəviyyatsızlıqlar yalnız yanlış mühakimələrə və tamahkarlığa görə mövcuddur və bunlar, hətta sonsuz bəlaların mənbəi olan xam xəyal ümidləri naminə və bunların doğruyaoxşar olmadığını qiymətləndirmək iqtidarında olmadıqlarından xalqı onun üçün zəruri olanı belə qurban verməyə sövq edirlər.

Oyunların mənfəətsizliyi, gözlənilən bütün mənfəəti eyni bir təhlükəyə məruz qoymamağın faydası və sağlam düşüncənin göstərdiyi bütün oxşar nəticələr hər bir fərd üçün onun mənəvi sərvətini ifadə edən fiziki sərvətin funksiyalarından asılı olmayaraq mövcuddur. Mənəvi sərvət funksiyasının artımının fiziki sərvətin artımına nisbətinin, bu sonuncunun artması ilə azalması kifayətdir.

Ehtimalların analitik metodları haqqında

Ehtimalın müxtəlif məsələlərinə bizim indicə şərh etdiyimiz prinsiplərin tətbiqi elə metodlar tələb etdi ki, bunların axtarışı analizin bir çox sahələrinin, o cümlədən, birləşmələr nəzəriyyəsinin və sonlu fərqlər hesabının başlanğıcına səbəb oldu.

Əgər vahid üstəgəl birinci hərf, vahid üstəgəl ikinci hərf, vahid üstəgəl üçüncü hərf və s. n-ci hərfə qədər binomların hasilini yazıb, vahiddən bu hasilin açıq ifadəsini çıxsaq, onda bir-bir, iki-iki, üç-üç və s. bütün hərflərdən ibarət birləşmələrin cəmini alarıq, belə ki, hər bir birləşmənin əmsalı vahid olacaqdır. n hərfdən ibarət s hərfli birləşmələrin sayını almaq üçün, qeyd etmək kifayətdir ki, bu hərflərin öz aralarında bərabərliyi halında əvvəlki hasil vahid üstəgəl birinci hərf binomunun n-ci qüvvət üstünə çevriləcəkdir; beləliklə, n hərfdən s hərfli binom- ların sayı – bu binomun ayrılışında qüvvət üstü n-ə bərabər birinci hərfin əmsalı olacaqdır; bu ədəd, aydındır ki, məlum binom düsturundan alına-caqdır.

Hər bir birləşmədə hərflərin düzülüşünə fikir verəcəyik, nəzərə almalıyıq ki, əgər birinci hərfi ikincisinə birləşdirdikdə, onu ya birinci və ya ikinci yerə yerləşdirməklə iki birləşmə alınır. Əgər bu birləşmələrə üçüncü hərf də birləşdirilərsə, onda bu hərfi hər bir birləşmədə birinci, ikinci və ya üçüncü yerdə yerləşdirmək olar ki, bu da əvvəlki ikincisindən hər birinə üç birləşməni verir; cəmisi altı birləşmə. Buradan asanlıqla belə nəticə çıxarmaq olur ki, s hərfdən ibarət yerləşmələrin sayı – vahiddən s-ə qədər ədədlərin hasilinə bərabərdir. Buna görə də, hərflərin düzülüşü qaydasını da nəzərə aldıqda bu hasilə n hərfdən s hərfli birləşmələrin sayını da vurmaq gərəkdir; bu isə ona gətirir ki, bu ədədi ifadə edən binomun həddinin əmsalının məxrəci atılmalıdır.

n nömrədən ibarət lotereya olduğunu fərz edək, bu lotereyalardan hər bir tirajda s saydası çıxır: s sayda verilən nömrənin bir tirajda çıxması ehtimalını təyin etmək lazımdır. Buna görə də, n lotereyada s saydasının birləşmələri sayı təyin edilməlidir. Sonra oxşar surətdə, r lotereyadan s lotereya olan birləşmələrin sayı təyin olunur. Bu sonuncu ədədin əvvəlkinə nisbəti, aydındır ki, s sayda verilmiş nömrənin r sayda lotereya arasında çıxması ehtimalı olacaqdır; deməli, bu, axtarılan ehtimal olacaqdır. Məlum olduğu kimi, 90 nömrədən ibarət, hər bir tirajında beş nömrə çıxan Fransa lotereyasında verilmiş biletin çıxması ehtimalı $5/90$ və ya $1/18$-ə bərabərdir; deməli, bu halda oyunun bərabərhüquqlu olması üçün lotereya oyununda ortaya qoyulan məbləğin on səkkiz misli qaytarılmalıdır. 90 nömrədən iki-iki bütün mümkün birləşmələrin sayı $4\,005$-ə bərabərdir və bunlardan hər bir tirajda onu çıxır. Verilən ambın çıxması ehtimalı, buna görə də, $1/400{,}5$-ə bərabərdir və bu halda lotereya ortaya qoyulan məbləğin 400,5 mislini qaytarmalı olardı; üç-üç birləşmələr üçün o, bu məbləği $11\,748$ dəfə, dörd-dörd birləşmələr üçün $511\,038$ dəfə və beş-beş

birləşmələr üçün $43\,949\,268$ dəfə artırmalı olardı; lotereya da oyunçulara bu imkanları verməkdən uzaqdır.

Fərz edək ki, urnda a sayda ağ və b sayda qara kürəcik vardır və urndan bir kürəcik çıxarılır və sonra o, yenidən urna qaytarılır: belə sual qoyulur ki, n tirajda m sayda ağ və $n-m$ sayda qara kürəcik çıxması ehtimalı nəyə bərabərdir? Aydındır ki, hər bir tirajda mümkün halların sayı a üstəgəl b-yə bərabərdir. İkinci tirajın hər bir halı birinci tirajın bütün halları ilə kombinasiya oluna bilindiyindən, iki tirajda mümkün ola bilən bütün halların sayı a üstəgəl b binomunun kvadratına bərabərdir. Bu kvadratın ayrılışında a-nın kvadratı – iki dəfə ağ kürəcik çıxan halların sayı, a və b-nin hasilinin iki misli – ağ və qara kürəciklər çıxan halların sayı, b-nin kvadratı – iki dəfə qara kürəcik çıxan halların sayıdır. Bu qayda ilə davam etdikdə, ümumiyyətlə, tapmaq olur ki, a üstəgəl b binomunun n-ci dərəcəsi – n tirajda bütün mümkün olan halların sayını ifadə edir və bu ayrılışda a-nın m-ci dərəcəsinə vurulan həddi – m dəfə ağ, $n-m$ dəfə qara kürəcik çıxan halların sayını ifadə edir. Buna görə də, bu həddi qüvvət üstü n-ə bərabər olan binoma böldükdə, m dəfə ağ və $n-m$ dəfə qara kürəcik çıxması ehtimalını alarıq. a-nın a üstəgəl b-yə nisbəti – bir tirajda ağ kürəciyin çıxması ehtimalı, b-nin a üstəgəl b-yə nisbəti isə bir tirajda qara kürəcik çıxması ehtimalı olduğundan, n tirajda m ağ kürəcik çıxması ehtimalı – p üstəgəl q binomunun n-ci dərəcəsinin ayrılışında qüvvət üstü m olan p-nin vuruğudur: asanlıqla görmək olur ki, p üstəgəl q cəmi vahiddir. Binomun çox gözəl bu xassəsi ehtimal nəzəriyyəsində çox səmərəlidir.

Lakin ehtimal haqqında məsələlərin ən ümumi və birbaşa həlli – onları fərqlər tənliklərindən asılılığa gətirməkdir. Ehtimal ifadə edən funksiyanın ardıcıl qiymətlərini müqayisə etdikdə, dəyişənlər onlara uyğun fərqlər qədər artdıqda təklif olunan məsələ çox vaxt bu qiymətlər arasında sadə münasibətlərə gətirir. Bu – *adi* və ya *xüsusi fərqlərlə tənlik* adlanan münasibətdir: bir dəyişən olduqda adi, bir neçə dəyişən olduqda, xüsusi fərqlərli tənlik. Bir neçə misala baxaq.

Eyni bacarıqlı üç oyunçu aşağıdakı şərtlərlə oyunda iştirak edir. İlk iki oyunçudan rəqibini udan, üçüncü oyunçu ilə oynayır və əgər o, üçüncüyə qalib gəlirsə, onda oyun sona çatır. Əgər o uduzursa, onda qalib oyunçu digəri ilə oynayır və s. və oyun, oyunçulardan biri ard-ardınca digər iki oyunçunu udana qədər davam edir, bununla da, partiya sona çatır: partiyanın hər hansı n gedişdən sonra qurtaracağı ehtimalını tapmaq tələb olunur. Əvvəlcə oyunun məhz n gedişdən sonra başa çatacağı

ehtimalını tapaq. Buna görə, oyunu udan oyunçu, oyuna n minus vahid gedişdən sonra başlamalıdır və həm bu, həm də növbəti oyunu udmalıdır. Əgər o, n minus vahid gedişini udmaq əvəzində öz rəqibi tərəfindən məğlub olsaydı və həm də, bu rəqib-qalib növbəti anda digər oyunçunu da udsaydı, onda oyun bu gedişdə sona çatmış olardı. Odur ki, oyunçulardan birinin n minus vahid gedişində partiyaya qoşulmasının ehtimalı – partiyanın məhz bu gedişdə sona çatması ehtimalına bərabərdir; bu oyunçu isə növbəti gedişi də udmalıdır ki, partiya n-ci gedişdə sona çatsın, bu halın ehtimalı yalnız əvvəlki ehtimalın yarısına bərabər olacaqdır. Bu ehtimal, aydındır ki, n ədədinin funksiyasıdır; deməli, bu funksiya, bu funksiyadakı n bir vahid azaldıldıqdan sonra onun yarısına bərabərdir. Bu bərabərlik – *adi sonlu fərqlərlə tənliklər* adlanan tənliklərdən biridir.

Bu tənliyin köməyilə partiyanın məhz verilən hər hansı gedişdə sona çatacağı ehtimalını asanlıqla təyin etmək olur. Aydındır ki, partiya ikinci gedişdən tez qurtara bilməz və buna görə də, ilk iki oyunçudan rəqibini udan oyunçu ikinci gedişdə üçüncü oyunçunu da hökmən udmalıdır; bu gedişdə partiyanın sona çatacağı ehtimalı, buna görə də, $1/2$-ə bərabərdir. Buradan əvvəlki tənliyə əsasən biz belə nəticəyə gəlirik ki, partiyanın sona çatmasının ardıcıl ehtimalları: üçüncü gediş üçün $1/4$-ə, dördüncü gediş üçün $1/8$-ə və s. bərabərdir, ümumiyyətlə, n-ci gediş üçün $1/2$-in qüvvət üstlərindən sonuncusu minus vahidə bərabər qüvvət üstü ilə təyin olunur. Bu qüvvət üstləri ilə götürülmüş $1/2$-lərin cəmi ($\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$, – H. M.) vahid minus n-ci gediş ehtimalına ($1-\frac{1}{2^{n-1}}$, H. M.) bərabərdir; bu – partiyanın ən çoxu n gedişdə sona çatacağı ehtimalıdır.

Ehtimalın hesablanması üçün ilk, az və ya çox çətin bir məsələyə baxaq, bu məsələni həll etmək mümkün olmuşdu və Paskal onu Fermata həll etmək üçün təklif etmişdi. Eyni bacarıqlı iki oyunçu – A və B bir-birilə belə bir şərtlə oynayırlar ki, kim ilk dəfə olaraq, digərinə verilən say dəfə qalib gələrsə, o, oyunda ortaya qoyulan məbləğlərin cəmi qədər partiyanı udur; bir neçə gedişdən sonra oyunçular partiyanı başa çatdırmamış oyunu dayandırmağa razılaşırlar; sual olunur, bu məbləğ bunlar arasında necə paylaşdırılmalıdır? Aydındır ki, onların payları partiyanı udmaq üçün uyğun ehtimallara mütənasib olmalıdır; buna görə də, məsələ bu ehtimalların təyin olunmasına gətirilir. Bu ehtimallar, aydındır ki, verilən ədədə çatmaq üçün, hər bir oyunçunun udması üçün çatışmayan xallar sayından asılıdır. Odur ki, oyunçu A-nın ehtimalı iki ədədin funksiyasıdır,

bunları biz *göstəricilər* adlandıracağıq. Əgər hər iki oyunçu bir gediş etməyə də razılaşsaydılar (əgər bu gedişdən sonra ortadakı məbləğin paylaşdırılması partiyanı udmaq üçün yeni ehtimallarla mütənasib olarsa, bu razılaşma onların taleini dəyişmir), onda ya A bu gedişi udur və bu halda onun üçün çatışmayan xallar sayı bir vahid azalacaqdır və ya B onu udacaqdır və bu halda B üçün çatışmayan xallar sayı bir vahid az olacaqdır. Lakin bu hallardan hər birinin ehtimalı $1/2$-ə bərabərdir; axtarılan funksiya – birinci göstəricisi bir vahid azaldılmış bu funksiya üstəgəl ikinci göstəricisi bir vahid azaldılmış funksiyanın yarısına bərabərdir. Bu bərabərlik *sonlu fərqlərlə tənliklər* adlanan tənliklərdən biridir.

Bu tənliyin köməyilə oyunçu A üçün ehtimalları, oyunçu A verilən say qədər xal topladığı halda ehtimalın və ya bu ehtimalı ifadə edən funksiyanın vahidə bərabər olmasını nəzərə alaraq (yoxsa birinci göstərici sıfra bərabər olduqda, bu funksiya ikinci göstəricisi ilə birlikdə sıfra çevrilir) və ən kiçik ədədlərdən başlayaraq təyin etmək olar. Beləliklə, fərz edərək ki, oyunçu A-ya yalnız bir xal çatışmır, biz onda taparıq ki, onun üçün uduş ehtimalları, B üçün bir və ya iki, və ya üç xal çatışmamasından asılı olaraq, $1/2$, $3/4$, $7/8$-ə və s. bərabər olur. Ümumiyyətlə, onda bu ehtimal bərabərdir: vahid minus $1/2$ üstü B üçün çatışmayan xallar sayı. Sonra fərz edək ki, oyunçu A üçün iki xal çatışmır və oyunçu B üçün bir və ya iki və ya üç xal çatışmamasından asılı olaraq, bu ehtimalın $1/4$, $1/2$, $11/16$ və s. bərabər olduğunu tapırıq. Daha sonra fərz edirik ki, oyunçu A üçün üç xal çatışmır və s.

Hər hansı bir kəmiyyətin ardıcıl qiymətlərinin fərqlərlə tənliyinin köməyilə alınmasının bu üsulu uzun və çətindir. Həndəsəçilər bu tənliyi ödəyən göstəricilərin ümumi funksiyasının alınması metodlarını axtarırdılar ki, hər bir xüsusi halda bu funksiyada göstəricilərin uyğun qiymətlərini yerinə qoymaq mümkün olsun. Bu məsələyə ümumi halda baxaq. Buna görə üfiqi xətt üzrə yerləşən sıradakı hədlərdən elələrini götürək ki, bunlardan hər biri əvvəlkilərdən məlum qanun əsasında yaranır. Fərz edək ki, bu qanun bir neçə ardıcıl hədləri onların öz göstəriciləri ilə və ya onların sırada tutduğu yeri göstərən ədədlə əlaqələndirən tənliklə ifadə olunur. Bu həmin tənlikdir ki, mən onu *bir göstəricili sonlu fərqlərlə tənlik* adlandırıram. Bu tənliyin tərtibi və ya dərəcəsi onun kənar hədlərinin tərtiblərinin fərqidir. Bu tənliyin köməyilə sıranın hədlərini ardıcıl surətdə təyin etmək və onu qeyri-müəyyən olaraq davam etdirmək olar; lakin buna görə, sıranın tənliyin dərəcəsinə bərabər hədlərinin sayını bilmək zəruridir. Bu hədlər fərqlərlə tənliyin inteqralı və ya sıranın ümumi həddinin məhz ixtiyari sabit ifadələridir.

İndi əvvəlki sıranın hədlərinin üstündən üfqü yerləşən hədlərinin ikinci sırasını götürək; ikinci sıranın hədlərinin üstündən üçüncü üfqü sıranı da götürək və s. Sonsuzluğa qədər belə davam edərək, fərz edək ki, bütün bu sıraların hədləri şaquli və həm də üfqü istiqamətlərdə götürülmüş bir neçə ardıcıl hədlərlə və bunların hər iki istiqamətdə yerlərini göstərən ədədlər arasında ümumi tənliklə əlaqələnmişdir. Bu həmin tənlikdir ki, mən onu *iki göstəricili sonlu xüsusi fərqlərlə tənlik* adlandırıram.

Oxşar qaydada əvvəlki sıraların müstəvisi üzərindən hədləri, uyğun olaraq, birinci müstəvi üstündə olan oxşar sıraların ikinci müstəvisini götürək; sonra, bu ikinci müstəvinin üzərindən oxşar sıraların üçüncü müstəvisini götürək və fərz edək ki, bu sıraların bütün hədləri uzunluq, en və hündürlük istiqamətlərində götürülmüş bir neçə ardıcıl hədlərlə və bu istiqamətlərdə onların yerini göstərən üç ədəd arasında tənliklə əlaqələndirilmişdir. Bu həmin tənlikdir ki, mən, onu *üç göstəricili sonlu xüsusi fərqlərlə tənlik* adlandırıram.

Nəhayət, məsələyə mücərrəd formada və fəzanın ölçülərindən asılı olmayaraq baxaraq, ümumiyyətlə, məlum sayda göstəricilərin funksiyaları olan kəmiyyətlər sisteminə baxaraq, fərz edək ki, bu kəmiyyətlər, bu göstəricilərə nəzərən onların fərqləri arasında və göstəricilərin özlərinin arasında bu kəmiyyətlərin sayı qədər tənlik vardır; bunlar – göstəricilərinin sayı məlum olan sonlu xüsusi fərqlərli tənliklər olacaqdır.

Bu tənliklərin köməyilə bu kəmiyyətləri ardıcıl surətdə təyin etmək olar. Bir göstəricili tənlik halında sıranın hədlərinin məlum sayını bilmək zəruri olduğu kimi, iki göstəricili tənlik halında da ümumi hədlərinin hər biri bu göstəricilərdən birinin ixtiyari funksiyası kimi ifadə oluna bilən sıraların bir və ya bir neçə sətirlərini bilmək zəruridir. Eynilə də, üç göstəricili tənlik halında da ümumi hədlərinin hər biri iki göstəricinin ixtiyari funksiyası kimi ifadə oluna bilən sıraların bir və ya bir neçə müstəvisini bilmək zəruridir və s. Bütün bu hallarda sıraların hər hansı bir həddini ardıcıl xaricetmə yolu ilə təyin etmək mümkündür. Xaricetmə aparılan tənliklərin hamısı eyni bir tənliklər sistemindən olduğundan, bu xaricetmələrin köməyilə alınmış ardıcıl hədlərin bütün ifadələri həddin yerini təyin edən göstəricilərin funksiyası olan bir ümumi ifadədə olmalıdır. Bu ifadə fərqlərlə təklif olunmuş tənliyin inteqralıdır və onun tapılması – inteqral hesabının predmetidir.

Teylor ilk dəfə «Methodus incrementarum» adı ilə sonlu fərqlərlə xətti tənlikləri tədqiq etmişdir. O, burada bir əmsallı və sonuncu həddi göstəricinin funksiyaları olan birinci tərtib tənliklərin inteqrallanması yolunu verir. Düzdür, ədədi və həndəsi silsilələrin hədlərinin əlaqələrinə həmişə baxılmışdır və bunlar fərqlərlə xətti tənliklərin ən sadə hallarıdır;

lakin bunlara hələ belə nöqteyi-nəzərdən baxılmamışdı, bu nöqteyi-nəzər ümumi nəzəriyyə ilə qovuşaraq, bu nəzəriyyələrə gətirir və bunlar əsl kəşflər hesab olunur.

O zamanlara yaxın dövrdə, Muavr sabit əmsallı ixtiyari tərtib sonlu fərqlərlə tənliklərə – *qayıdışlı sıralar* (suites récurrentes) adlandırılan tənliklərə baxmışdı. O, bunları olduqca bacarıqlı üsulla inteqrallaya bilmişdi. İxtiraçıların yolu ilə getmək həmişə maraqlı olduğundan, mən Muavrın tutduğu yolu qayıdışlı sıraya tətbiq edərək şərh edəcəyəm; bu sıranın ardıcıl üç həddi arasında əlaqə verilir. Muavr əvvəlcə həndəsi silsilənin ardıcıl hədləri arasında əlaqəyə və ya onu ifadə edən ikihədli tənliyə baxır. O, bu münasibəti əvvəlki hədlərə aid edərək, onu bu şəkildə sabit vuruğa vuraraq, hasili ilkin tənlikdən çıxır. Bu üsulla o, həndəsi silsilənin üç ardıcıl həddini əlaqələndirən tənlik alır. Sonra Muavr ikinci silsiləyə baxır, bu silsilənin ardıcıl hədlərinin nisbəti – indicə götürülən həmin vuruqdur. O, bu yeni silsilədə tənliyin hədlərinin göstəricisini oxşar qaydada bir vahid azaldır: bu şəkildə o, bu silsiləni ikinci silsilənin hədlərinin nisbətinə vurur və hasili ikinci silsilənin tənliyindən çıxır, bununla da o, onun birinci silsilə üçün tapdığı qayda ilə bu silsilənin üç ardıcıl hədləri arasında tamamilə oxşar münasibəti alır. Daha sonra o qeyd edir ki, hər iki silsiləni hədbəhəd topladıqda, həmin münasibət üç ixtiyari belə ardıcıl cəmlər arasında qüvvədə qalır. O, bu nisbətin əmsallarını təklif olunmuş qayıdışlı sıranın hədlərinin nisbətinin əmsalları ilə müqayisə edir və hər iki həndəsi silsilənin nisbətlərini təyin etmək məqsədilə ikinci dərəcəli tənlik tapır ki, bu tənliyin kökləri bu nisbətlər olur. Beləliklə, Muavr qayıdışlı sıranı hər biri ixtiyari sabitə vurulmuş iki həndəsi sıraya ayırır, bu sabit qayıdışlı sıranın ilk iki həddinin köməyi ilə tapılır. Bu ağıllı üsul mahiyyətcə Dalamberin sonradan sabit əmsallı sonsuz kiçilən fərqlərlə xətti tənliklərin inteqrallanması üçün tətbiq etdiyi və Laqranj tərəfindən sonlu fərqlərlə oxşar tənliklərə keçirilmiş olan metoddur.

Bundan sonra mən sonlu xüsusi fərqlərlə xətti tənliklərə, əvvəlcə, qayıdışla-qayıdışlı sıralar adı ilə (rus., возвратно-возвратных; suites récurro-récurrentes) baxmışam. Bütün bu tənliklərin ən ümumi və ən sadə inteqrallanması qaydası, mənə elə gəlir ki, mənim doğuran funksiyaların baxılmasına əsaslandırdığım üsuldur ki, onun ideyası belədir.

Əgər t dəyişəninin artan qüvvət üstlərinə görə sıraya ayrılmış t dəyişəninin funksiyası olan A-nı götürsək, onda bu qüvvət üstlərindən hər hansı birinin əmsalı bu qüvvət üstünün funksiyası və ya bu dərəcənin göstəricisi olacaqdır. A – bu əmsalın və ya göstəricinin *doğuran funksiya* adlandırdığım funksiyasıdır.

İndi isə A sırasını həmin t dəyişəninin xətti funksiyasına, məs., vahid plyus bu dəyişənin iki mislinə vursaq, onda hasil yeni doğuran funksiya olacaqdır ki, burada dəyişənin hər hansı qüvvət üstünün əmsalı – A-da həmin qüvvət üstlü əmsal plyus bir vahid az qüvvət üstlü əmsalın iki mislidir. Beləliklə, hasildəki göstərici funksiya A-dakı göstərici funksiya plyus, həmin iki misli götürülmüş funksiya olacaqdır ki, bu funksiyada göstərici bir vahid azaldılmışdır. Hasilin ayrılışında bu göstərici funksiya, beləliklə, A-da göstərici funksiyanın törəməsi olacaqdır, elə törəmə ki, onu bu sonuncu funksiya qarşısında qoyulan δ xarakteristikası ilə ifadə etmək olur. Xarakteristika ilə göstərilən əməliyyat A-nın vuruğundan asılıdır, bu vuruğu B ilə işarə edəcəyik və fərz edəcəyik ki, A kimi o da t dəyişəninin qüvvət üstləri üzrə sıraya ayrılmışdır.

İndi yenə də, B-ni, A-nın B-yə hasilinə vursaq, bu, A-nın B-nin kvadratına hasilinə bərabər olacaqdır, onda üçüncü doğuran funksiya təşkil olunacaqdır ki, bu funksiyada t-nin hər hansı dəyişəninin əmsalı əvvəlki hasilin uyğun əmsalının oxşar törəməsi olacaqdır; buna görə də, onu əvvəlki törəmə qarşısında qoyulmuş həmin δ xarakteristikası ilə işarə etmək olar; onda bu xarakteristika A sırasına uyğun əmsalın qarşısında iki dəfə yazılacaqdır. Lakin onu iki dəfə yazmaq əvəzinə onu iki əmsalı ilə yazırlar.

Bu qayda ilə davam edərək, ümumi halda biz görəcəyik ki, A-nı B üstü n-ə vurduqdan sonra, əgər A-nın uyğun əmsalı qarşısında n üstlü δ xarakteristikasını yazsaq, hasildə t dəyişəninin hər hansı qüvvət üstlü əmsalı alınır.

Fərz edək ki, B, – vahid bölünsün t-dir; onda A-nın B-yə hasilində hər hansı qüvvət üstlü bu dəyişənin (t-nin) əmsalı, A-da, qüvvət üstü bir vahid artıq olan əmsal olacaqdır; buradan belə nəticə alınır ki, A-nın n dərəcəli B-yə hasilində bu əmsal, A-da, n vahid artıq dərəcəli əmsal olacaqdır.

C ilə vahid bölünsün t dəyişəni minus vahidi işarə edək; onda A-nın C-yə hasilində hər hansı qüvvət üstlü dəyişənin əmsalı – A sırasında onun bir vahid qüvvət üstlü əmsalı minus həmin sırada bu qüvvət üstlü əmsal olacaqdır; bu, deməli, göstəricisi bir vahid azaldılan bu sonuncu əmsalın sonlu fərqi olacaqdır. Beləliklə, A-nın qüvvət üstü n olan C-yə hasilində əmsal, – A-nın uyğun əmsalının n-ci fərqi olacaqdır.

Belə ki, burada B, – vahid plyus C-yə bərabər olduğundan, qüvvət üstü n olan B, – həmin qüvvət üstlü vahid plyus C binomuna bərabərdir. Buna görə də, bu qüvvət üstlərilə qeyd olunan binomların A-ya hasilindən

sonra hər iki hasilin eyni olduğu aşkar olur. Lakin A-nın n üstlü B-yə hasilində hər hansı qüvvət üstlü t dəyişəninin əmsalı, biz gördüyümüz kimi, A-da qüvvət üstü n vahid böyük olan əmsaldır; deməli, bu əmsal n ədədi qədər artırılmış göstərici funksiyadır. A-nın vahid plyus C binomuna ayrılışına hasilində, biz əvvəlki mülahizələrə əsasən, A-nın C-nin ardıcıl dərəcələrinə hasilləri əvəzinə A-dakı göstərici funksiyanın ardıcıl fərqlərini yazaraq və bu funksiyanı C-dən asılı olmayan həddə vuraraq, uyğun əmsalları alarıq. Deməli, biz göstəricinin qeyri-müəyyən n qədər artırılmış hər hansı funksiyasını alırıq, bu funksiya qüvvət üstü n olan vahid plyus vahid binomunun uyğun olaraq, funksiyanın özünə və onun ardıcıl fərqlərinə vurulmuş əmsalları ilə ifadə olunur ki, bu da sıraların ardıcıl hədlərinin fərqləri vasitəsilə bu sıraların interpolyasiyasını verir, əgər qeyri-müəyyən n-ə kəsr kimi baxılarsa.

Eynilik tənliyi – B bərabərdir C plyus vahid, C bərabərdir B minus vahid eynilik tənliyini verir. Bu sonuncu bərabərliyin hər iki tərəfini n qüvvət üstünə yüksəldib və bunları da A-ya vurduqda A-nın qüvvət üstü n olan C-yə hasilində t dəyişəninin verilmiş qüvvət üstlü əmsalı – A-da həmin qüvvət üstü ilə əmsalın n-ci sonlu fərqi olacaqdır. Qüvvət üstü n olan B minus vahid binomunun ayrılışına A-nın hasilində verilən qüvvət üstlü dəyişənin əmsalı – bu ayrılışın A-dakı həmin qüvvət üstlü əmsalının qiymətlərinə uyğun olaraq, vurulmuş hədlərinin cəminə bərabər olur, əgər bu əmsalın göstəricisi ardıcıl surətdə n, n minus vahid, n minus iki və s. qədər artırılarsa, göstərici funksiyanın n-ci sonlu fərqi funksiyanın ardıcıl qiymətlərilə ifadə olunur.

δ ilə A-da t dəyişəninin verilən qüvvət üstlü əmsalının B vuruğuna nəzərən törəməsini işarə edərək, C vuruğuna nəzərən törəməni Δ xarakteristikası ilə işarə edək. Əgər B bərabərdir C plyus vahid tənliyində δ əvəzinə Δ yazsaq, onda əvvəlkinə əsasən, bu tənliyin hər iki tərəfini n-ci qüvvətə yüksəltsək, bərabərlik pozulmur, yalnız bu zaman ayrılışın hər bir həddində A-da dəyişənin verilən qüvvət üstlü əmsalı və ya göstərici funksiya, xarakteristikanın hər bir qüvvət üstündən sonra qoyulmalıdır, xarakteristikalardan asılı olmayan həddə isə bu funksiyaya vurulmalıdır. Bunlar C bərabərdir B minus vahid tənliyində, həmçinin B minus C bərabərdir vahid tənliyində də yerinə yetir. B və C əvəzinə δ və Δ yazsaq və bu sonuncu tənliyin hər iki tərəfini n-ci dərəcədən qüvvətə yüksəldib, sonra birinci hissənin ayrılışını yazsaq, bərabərlik pozulmur, yalnız bu zaman hər bir həddə göstərici funksiya δ və Δ-nın qüvvətə yüksəldilmiş xarakteristikalarından və qüvvətə yüksəldilmiş bu xarakte-

ristikaların hasilindən sonra yazılmalıdır; bu funksiya yalnız ikinci hissədə vahid əvəzinə yazılmalıdır; bu funksiyanın ifadəsi, nəticədə, onun ardıcıl qiymətlərinin və fərqlərinin vasitəsilə alınır.

B və C vuruqlarının digər qiymətlərinə bu mülahizələri tətbiq etdikdə, biz aşağıdakı ümumi nəticəyə gəlirik: B və C-ni əlaqələndirə bilən bütün eynilik tənliklərinin ayrılışında B və C-də təmsil olunan t dəyişəninin funksiyalarının nə cür olmasından asılı olmayaraq, bu funksiyaları δ və Δ-nın uyğun xarakteristikaları ilə əvəz etmək olar, yalnız bu zaman göstərici funksiya qüvvətə yüksəldilmiş xarakteristikadan və qüvvətə yüksəldilmiş xarakteristikaların hasillərindən sonra yazılmalı, xarakteristikadan asılı olmayan hədlər isə bu funksiyaya vurulmalıdır. Doğrudan da, aydındır ki, əgər B və C-ni əlaqələndirən tənliyin, hər hansı söhbət gedən həddində r, $-B$-nin dərəcəsi, r', $-C$-nin dərəcəsidirsə, *doğuran* funksiyalardan onların əmsallarına keçmək üçün δ-ni B-nin və Δ-nı C-nin əvəzinə və dərəcələrin hasilini də yerinə yazmaq gərəkdir.

Bölmə mümkün olmadığı halda, Muavr bu nəticəni analoji genişləndirərək, qüvvət üstü kəsr olan kəmiyyətə qüvvətə yüksəldilmiş kəmiyyətin kökü kimi baxır, bu kökdə kökaltı kəmiyyət – kəsrin surətində göstərilən qüvvətə yüksəldilmiş kəmiyyət, kökün dərəcəsi – həmin kökün məxrəcidir. Sonra o görmüşdür ki, Dekart işaraləməsi üzrə eyni bir hərfin iki qüvvətinin hasili onların dərəcələrinin toplanmasına, nisbəti – bölünənin dərəcəsindən bölənin dərəcəsinin, lakin birincisi ikincisindən böyük olduqda, çıxılmasına gətirir. Vallis bu nəticəni birinci göstərici ikinci göstəriciyə bərabər və ya ondan kiçik olduğu hallar üçün genişləndirərək, bu fərqi ya sıfra bərabər götürür və ya onu mənfi edir. Onda o fərz edirdi ki, mənfi qüvvət üstü göstəricisi – vahidin müsbət, lakin həmin qüvvətə yüksəldilmiş kəmiyyətə nisbətidir. Bu mülahizələr onu, ümumi halda differensial birhədlilərin inteqrallanmasına gətirdi; buradan o, qüvvət üstü tam və müsbət ədəd olan differensial binomların xüsusi növ müəyyən inteqrallarını çıxardı. Sonradan o, bu inteqralları ifadə edən ədədlərin qanununu müşahidə edərək, həndəsəçiləri olduqca maraqlandıran və mənim yeni ehtimal nəzəriyyəmin əsaslarından biri olan müəyyən inteqrallar hesabının başlanğıcı sayılan bir sıra interpolyasiya və uğurlu induksiyalar vasitəsilə dairənin sahəsinin onun diametrinin kvadratına nisbətini sonsuz hasillə ifadə etmişdir; bu hasili sonsuz davam etdirməyib dayandırdıqda, tədricən bu nisbət alınır: analizin ən gözəl nəticələrindən biri. Lakin çox qəribədir ki, radikal qüvvətlərin kəsri dərəcələrini çox yaxşı araşdıran Vallis, bunları ondan əvvəlkilər kimi işarə etməyə davam etmişdir. Nyuton ilk dəfə, əgər səhv etmirəmsə, «Oldenburqa Məktublarında» bu qüvvətlərin işarələmələrini kəsri dərəcələr

vasitəsilə daxil etmişdir. Binomun qüvvət üstlərinin göstəricisini onun ayrılışındakı hədlərin əmsalları ilə induksiya metodu ilə müqayisə edərək, bu metodu belə gözəl tətbiq edən Vallis, bu qüvvət üstü tam və müsbət olduğu halda, bu əmsalların qanununu müəyyən etmiş və onu analoji surətdə kəsri və mənfi qüvvət üstləri halına genişləndirmişdir. Dekart işarələnməsinə əsaslanan bu müxtəlif nəticələr, onun analizin inkişafına təsirini sübut edir. Dekart işarələməsinin daha üstün bir cəhəti də vardır ki, o, loqarifmlər haqqında ən sadə və düzgün anlayış verir, bu loqarifmlər əslində eyni bir kəmiyyətin qüvvət üstlərinin göstəriciləridir, bunlar sonsuz kiçilən kəmiyyətlər qədər ardıcıl artaraq, bütün ədədləri ifadə edə bilirlər.

Lakin bu işarələmənin ən mühüm ümumiləşməsi, onun dəyişən göstəricilərə genişləndirilməsidir, bu isə ən yeni analizin ən məhsuldar istiqamətlərindən biri olan göstərici hesabını təşkil edir. Leybnits dəyişən göstəricilərli transsendent kəmiyyətləri birinci olaraq göstərmişdir və bunlarla o, sonlu funksiyanın təşkil olunduğu elementlər sistemini tamamlamış oldu, belə ki, dəyişənin hər bir aşkar sonlu funksiyası sonuncu analizdə toplama, çıxma, hasil və bölmə, sabit və ya dəyişən qüvvətlərə yüksəltmə vasitəsilə sadə kəmiyyətlərə gətirilir. Bu elementlərdən ibarət tənliklərin kökləri – dəyişənin qeyri-aşkar funksiyalarıdır. Beləliklə, dəyişən – hiperbolik loqarifmi vahid olan ədədin qüvvətləri sırasında göstəricinin loqarifminə bərabər olan qüvvətə bərabərdir, odur ki, dəyişənin loqarifmi qeyri-aşkar funksiyadır.

Leybnits, kəmiyyətlərdə olduğu kimi, özünün differensial xarakteristikasına dərəcələr verməк fikrinə gəldi; amma bu halda bu dərəcələr eyni bir kəmiyyətin təkrarən vurulmasını deyil, eyni bir funksiyanın təkrarən differensiallamasını göstərəcəkdir. Dekart işarələməsinin bu ümumiləşdirilməsi Leybnitsi differensialların müsbət, inteqralların isə mənfi qüvvətlərinin analogiyasına gətirdi. Laqranj bu gözəl analogiyanı onun bütün təfərrüatı ilə izlədi; o, dəyişənlər sonlu və müxtəlif artımlar aldıqda, həmçinin bu artımlar sonsuz kiçilən olduqda, bu və digər hallarda fərqlərin və inteqralların başqa şəklə salınması üçün həm maraqlı, həm də faydalı ümumi düsturlara, induksiya metodunun nə vaxtsa olunmuş tətbiqlərindən ən gözəl sayılan bir sıra induksiyalara gətirib çıxardı. Lakin çətin hesab etdiyindən o, isbatlar vermədi. Doğuran funksiyalar nəzəriyyəsi Dekart işarələməsini ixtiyari xarakteristikalara genişləndirir: bu nəzəriyyə bu xarakteristikaların göstərdiyi qüvvətə yüksəltmə və əməllər arasında analogiyanı aydın şəkildə sübut edir, odur ki, bu nəzəriyyəyə xarakteristikaların göstərici hesabı kimi də baxıla bilinər. Sıralara və fərqlər tənliklərinin inteqrallanmasına aid olan nə varsa, bu nəzəriyyədən son dərəcə asanlıqla alınır.

Ehtimalların hesablanmasının tətbiqi. Oyunlar haqqında

Oyunlarla ifadə olunan kombinasiyalar ehtimallar haqqında ilk tədqiqlərin predmeti olmuşdur. Bu kombinasiyaların intəhasız müxtəlifliyi arasında bir çoxu asanlıqla hesablanılır, digərləri olduqca çətin hesablanma tələb edir və kombinasiyalar çətinləşdikcə bu hesablamalardakı çətinliklərin də artması ilə bunları dəf etmək və maraq həndəsəçiləri analizin bu növünü getdikcə daha çox təkmilləşdirməyə sövq etdi. Biz əvvəl gördük ki, birləşmələr nəzəriyyəsinin köməyilə hər hansı bir lotereyada qazancı asanlıqla müəyyən etmək olur; lakin birə qarşı bir mərcini neçənci tirajda saxlamağı bilmək çox çətindir, məs., bütün nömrələrin çıxmasını. Əgər n – nömrələrin sayı, r – hər bir tirajda çıxan nömrələrin sayı, i isə tirajların naməlum sayıdırsa, onda bütün nömrələrin çıxması ehtimalının ifadəsi i-nin n-ci dərəcəsindən r sayda ardıcıl ədədlərin hasilinin sonlu fərqindən asılıdır. n ədədi xeyli böyük olduqda bu ehtimalın 1/2-ə bərabər alınmasına baxmayaraq, bu fərqi heç olmasa yaxşı yığılan sıraya ayırmadıqda, i-nin qiymətini tapmaq mümkün olmur. Buna çox böyük ədədlərin funksiyalarının yaxınlaşmaları üçün əvvəl göstərilmiş metodun köməyilə uğurla nail olmaq mümkündür. Beləliklə, biz belə nəticəyə gəlirik ki, əgər lotereya on min nömrədən təşkil olunmuşdursa və hər bir tirajda bunlardan yalnız biri çıxarılırsa, onda birə qarşı bir mərcini, yəni bütün nömrələrin 95 767 tirajdan sonra çıxacağı mərcini gəlmək sərfəli deyildir və həmin mərci 97 768 tiraj halında gəlmək sərfəlidir. Fransız lotereyasında 85-ci tirajda mərc gəlmək sərfəli deyil, 86-cı tirajda isə sərfəlidir.

Belə bir hala da baxaq: iki oyunçu – A və B *xaç* və *şəbəkə* oyununu belə bir qaydada oynayırlar ki, hər bir atılmada *xaç* düşdükdə A, B-yə bir jeton verir, *şəbəkə* düşdükdə B, A-ya bir jeton verir; B-də olan jetonların sayı məhduddur, A-nın jetonlarının sayı qeyri-məhduddur və partiya yalnız B-nin jetonları qurtardıqda sona çatır. Sual olunur, oyunçulardan birinin digərilə mərc gəlməsi üçün atmaların sayı nə qədər olmalıdır ki, oyun bitmiş hesab olunsun. Partiyanın i sayda atılmadan sonra sona çatacağı ehtimalının ifadəsi sıra ilə verilir, əgər B-nin jetonlarının sayı çox olarsa, bu sıra çoxlu hədlər və vuruqlardan ibarət olur; bu sıranın 1/2-ə bərabər olmasını təmin edən naməlum i-nin qiymətinin tapılması, bu sıranı olduqca yığılan sıraya gətirmək mümkün olmadıqda, mümkün olmazdı. İndicə şərh etdiyimiz metodu bu sıraya tətbiq edərək,

naməlum i üçün çox sadə ifadə tapırıq, buradan isə belə nəticə alınır ki, məs., B-də yüz jeton olarsa, onda birə qarşı birdən bir qədər az şans vardır ki, partiya 23 780 atılmadan sonra sona yetsin və birə qarşı bir şansdan bir qədər çox şans vardır ki, partiya 23 781 atılmadan sonra başa çatsın.

Bu iki misal, verdiyimiz misallarla birlikdə, oyunlar üçün məsələlərin analizinin mükəmməlləşdirilməsinə nə cür təsir etdiyini göstərmək üçün kifayətdir.

Bərabər fərz olunan şanslar arasında mümkün ola bilən naməlum qeyri-bərabərliklər haqqında

Ehtimalların hesablanması nəticələrinə xüsusi diqqətəlayiq bu növ bərabərsizliklər xeyli təsir göstərir. *Xaç və şəbəkə* oyununa baxaq və fərz edək ki, metal pulun hər iki üzü eyni yüngüllüklə düşür; onda birinci atılmada *xaçın* düşməsi ehtimalı 1/2-ə bərabərdir, onun ardıcıl iki dəfə düşməsi ehtimalı 1/4-ə bərabərdir. Lakin, əgər metal pulun üzlərində qeyri-bərabərlik vardırsa və buna görə də, üzlərdən birinin digərindən çox düşməsi kimi üstünlüyü olursa və bu qeyri-bərabərliyin hansı üz üçün əlverişli olduğu məlum olmazsa, onda birinci atılmada *xaç* düşməsi ehtimalı yenə də 1/2 olacaqdır, çünki bu qeyri-bərabərlik haqqında bizim bilgisizliyimiz halında, əgər bu qeyri-bərabərlik düşən üz üçün əlverişlidirsə, sadə hadisənin ehtimalı bir o qədər də artır, əgər bu qeyri-bərabərlik onun üçün əlverişli deyildirsə, onda bu ehtimal o qədər də azalır. Lakin bu bilgisizliyimizdə *xaçın* iki dəfə ardıcıl düşməsi ehtimalı artır. Əslində bu ehtimal, birinci atılmada *xaçın* düşməsi ehtimalı ilə onun birinci dəfə *xaç* düşməsindən sonra ikinci dəfə də *xaç* düşməsi ehtimalına hasilinə bərabərdir; lakin birinci dəfə *xaç* düşməsi metal pulun qeyri-bərabər üzlü olmasının bu hal üçün əlverişli olduğu nəticəsinə gətirir; deməli, naməlum qeyri-bərabərlik bu halda ikinci atılmada *xaç* düşməsi ehtimalını artırır; o, aydındır ki, hər iki ehtimalın hasilini də artırır. Bu suala cavabı hesablamaq məqsədilə fərz edək ki, bu qeyri-bərabərlik sadə hadisənin ehtimalının iyirmidə bir qədər artması üçün əlverişlidir. Əgər bu hadisə *xaçın* düşməsi hadisəsidirsə, onun ehtimalı – 1/2 plyus 1/20 və ya 11/20, iki dəfə ardıcıl *xaç* düşməsidirsə, onda onun ehtimalı 11/20-nin kvadratı və ya 121/400 olacaqdır. Əgər *şəbəkə* düşməsi əlverişli hadisə olarsa, onda *xaçın* ehtimalı – 1/2 minus 1/20 və ya 9/20 olacaqdır, xaçın ard-ardınca iki dəfə düşməsi ehtimalı 81/400 olacaqdır. Qeyri-bərabərliyin bu hadisələrdən hansı üçün əlverişli olduğunu əvvəlcədən bilmək üçün heç bir əsas olmadığından, aydındır ki, «*xaç – xaç*» – mürəkkəb hadisəsinin ehtimalını

tapmaq üçün əvvəlki iki ehtimalı toplamaq və bunların cəminin yarısını götürmək lazımdır, nəticədə bu ehtimal 101/400 -ə bərabər olur ki, bu da 1/4-in 1/400 qədər və ya 1/20 kvadratının artımına bərabərdir ki, qeyri-bərabərlik onun əlverişli etdiyi hadisənin mümkünlüyünü bu qədər artırır. Oxşar olaraq «*şəbəkə – şəbəkə*» düşmə ehtimalı 101/400 -ə bərabərdir; lakin «*xaç – şəbəkə*» və ya «*şəbəkə – xaç*» düşməsi ehtimallarından hər biri yalnız 99/400-ə bərabərdir, belə ki, bu dörd ehtimalın cəmi yəqinliyə və ya vahidə bərabər olmalıdır. Beləliklə, adi olaraq belə məlum olur ki, sadə hadisələr üçün əlverişli olan, eyni mümkün sayılan sabit və naməlum səbəblər eyni bir sadə hadisənin təkrar olunması ehtimalını həmişə artırır.

Atılma sayı cüt olduqda *xaç və şəbəkə* hər ikisi ya cüt dəfə, ya da tək dəfə düşməlidir. Bu hallardan hər birinin ehtimalı, əgər metal pulun hər iki üzünün düşməsi mümkünlüyü eyni olarsa, 1/2-ə bərabərdir; lakin bunlar arasında naməlum qeyri-bərabərlik olduqda, onda bu qeyri-bərabərlik həmişə birinci hal üçün əlverişli olur.

Eyni bacarıqlı iki oyunçu belə bir şərtlə oynayırlar ki, hər bir gedişdə oyunu uduzan öz rəqibinə jeton verir və partiya oyunçulardan birinin jetonu qurtarana qədər davam edir. Ehtimalların hesablanmasından bizə aydın olur ki, oyunun bərabərhüquqlu olması üçün oyunçuların oyunda ortaya qoyduqları məbləğ onların jetonlarının sayına mütənasib olmalıdır. Lakin onların bacarıqları arasında kiçicik naməlum qeyri-bərabərlik olarsa, onda o, jetonların sayı az olan oyunçu üçün əlverişli olacaqdır. Əgər oyunçular öz jetonlarını iki dəfə, üç dəfə artıq götürməyi şərtləşsələr, onun partiyanı udması ehtimalı artır və bu ehtimal 1/2-ə bərabər olacaqdır və ya onların jetonlarının sayı aralarındakı nisbət eyni qalmaq şərtilə sonsuz artdığı hallarda belə, ikinci oyunçunun ehtimalı kimi olacaqdır.

Bu naməlum qeyri-bərabərlikləri təsadüfün şanslarına məruz qoyaraq onların təsirini düzəltmək olar. Məs., *xaç və şəbəkə* oyununda, əgər biz *xaçla* ikinci metal pulda düşən üzü həmişə adlandırmağı şərtləşsək, onda birinci pulda ard-ardınca* *xaç* düşməsi ehtimalı dörddə birə daha çox yaxınlaşacaqdır, nəinki bir pulun atılmasında. Bu sonuncu halda fərq birinci pulun əlverişli halı üçün naməlum qeyri-bərabərliyin verdiyi ehtimalın kiçik artımının kvadratına bərabərdir: digər halda bu fərq bu kvadratın dörd mislinin ikinci pul üçün uyğun kvadrata hasilinə bərabərdir.

Urna nömrələnmə qaydası ilə birdən yüzə qədər nömrələnmiş yüz nömrə atılmışdır və bunları qarışdırmaq məqsədilə urnu silkələdikdən sonra bunlardan biri çıxarılır; aydındır ki, bu qarışdırma yaxşı olmuşdursa, onda

* şərti mənada.

nömrələrin çıxması ehtimalları bərabər olacaqdır. Lakin bunların çıxmasında nömrələrin urna atılması qaydasında asılı olan cüzi fərqlərin olmaması üçün şübhə yaranmasın deyə, bu fərqləri nisbətən azaltmaq məqsədilə, bu nömrələri onları birinci urndan çıxardıqdan sonra qarışdırmaq üçün ikinci urna atırlar. Üçüncü, dördüncü və s. urnlar ikinci urndakı bu kiçicik fərqi azaldacaqdır.

Hadisələrin qeyri-müəyyən artması nəticəsində yaranan ehtimal qanunları haqqında

Hadisələrin gedişatını qeyri-sabit və düzgün olmayan edən, *təsadüf* adı ilə anladığımız dəyişən və naməlum səbəblər çərçivəsində bu hadisələrin sayının artması ilə nəzərə çarpacaq qədər, son dərəcədə bir düzgünlük yaranır ki, bu da qabaqcadan düşünülmüş niyyətdən asılılıq kimi görünmüş və onu İlahi qüvvənin varlığına sübut kimi saymışdılar. Lakin bu haqda düşünərək, biz tezliklə əmin oluruq ki, bu düzgünlük ən çox ehtimal olunan tez-tez baş verəcək sadə hadisələrin uyğun ehtimallarının aşkar olunmasıdır. Məs., içərisində ağ və qara kürəcik olan urndan hər dəfə çıxarılan kürəciyin urna qaytarıldığı fərz olunur və yeni tirajda da bu təkrar olunur. Çıxarılmış ağ kürəciklər sayının çıxarılmış qara kürəciklər sayına nisbəti ilkin tirajlarda, əksər hallarda, olduqca düzgün nəticə verməyəcəkdir; lakin bu qeyri-düzgünlüyün qeyri-sabit səbəbləri elə təsirlər yaradır ki, bunlar hadisələrin düzgün məcrada baş verməsi üçün növbə ilə əlverişli və əlverişsiz olur, bu təsirlər tirajların sayı çoxaldıqca bir-birini qarşılıqlı yox edərək, urndakı ağ kürəciklər sayının qara kürəciklər sayına nisbətini və ya hər bir tirajda urndan ağ və ya qara kürəciyin çıxmasının uyğun ehtimallarını get-gedə daha çox nəzərə çarpdırır. Buradan aşağıdakı teorem alınır.

Çıxarılmış ağ kürəciklər sayının çıxarılmış bütün kürəciklər sayına nisbətinin urndakı ağ kürəciklər sayının bütün kürəciklər sayına nisbətindən, verilmiş intervaldan artıq yayınmayacağı ehtimalı – fərz olunan intervalın nə qədər kiçik olmasından asılı olmayaraq, hadisələr sayını qeyri-müəyyən surətdə artırdıqda qeyri-müəyyən surətdə yəqinliyə yaxınlaşır.

Sağlam düşüncənin təlqin etdiyi bu teoremi analizin köməyilə isbat etmək çətin idi. Və bununla ilk olaraq məşğul olan məşhur həndəsəçi Yakob Bernulli bu teoremin özü verdiyi isbatına böyük əhəmiyyət verirdi. Doğuran funksiyalar hesabının bu predmetə tətbiqi, bu teoremi asanlıqla isbat etməklə yanaşı, müşahidə olunan hadisələrlə əlaqəli nisbətin onların uyğun mümkünlüklərilə əlaqəli əsl nisbətindən yalnız məlum sərhədlərdə yayınma ehtimalını da təyin edir.

Əvvəlki teoremdən ümumi qanun kimi baxılacaq bir nəticə çıxarmaq olar: təbiətin yaratdıqlarının nisbətləri bu yaradılmışlara külli miqdarda baxıldıqda, təxminən sabit qalır. Məs., illərin müxtəlifliyinə baxmayaraq, məhsulların cəmi uzun illər üçün eyni olaraq qalır; odur ki, hər şeyi nəzərə alan insan, təbiətin ona qeyri-bərabər bəxş etdiklərini bütün dövrlərə bərabər paylaşdıraraq, ilin mövsümlərinin qeyri-sabitliyindən özünü qoruya bilər. Mən əvvəlki qanundan mənəvi səbəblərdən yaranan təsirləri istisna etmirəm. Hər il üçün doğum sayının əhalinin sayına nisbəti və nigahların doğumlara nisbəti çox dəyişmir: Parisdə illik doğum sayı, demək olar ki, dəyişmir; eşitdiyimə görə, adi vaxtda, ünvan olmaması səbəbindən məktubların poçtla çatdırılmaması ildən-ilə az dəyişir; oxşar vəziyyət Londonda da müşahidə olunmuşdur.

Bundan başqa bu teoremdən belə nəticə alınır ki, qeyri-müəyyən davam olunan hadisələr sırasında requlyar və sabit səbəblərin təsiri zaman ötdükcə, qeyri-requlyar səbəblərin təsirini üstələməlidir. Bu vəziyyət lotereyadan alınan gəliri də əkinçilik məhsullarından alınan gəlir kimi ona görə labüd edir ki, onların fərz etdikləri şanslar oyunda ortaya qoyulan məbləğ çox olduqda onlara qazanc gətirir. Beləliklə, nəzərə alınarsa ki, əlverişli çoxsaylı şanslar cəmiyyətin əsası və dayağı olan idrakın, ədalətin və humanizmin ədədi prinsiplərinə riayət edilməsilə həmişə əlaqədardır, bu prinsiplərə əməl etmək böyük üstünlük, bunlardan yayınmaq – böyük nöqsandır. Hər kəs tarixə və özünün şəxsi təcrübəsinə nəzər salarsa, görər ki, bütün faktorlar bu hesabın nəticəsini təsdiq edir. İdraka və insanın təbii hüquqlarına əsaslanan qərarların, bunları daxil etmiş və qoruyub saxlamış xalqların uğurlu nəticələrinə nəzər salın. Həmçinin vicdanı öz əxlaqının əsası götürən dövlətlərə onun nə cür üstünlüklər verdiyinə baxın və görün ki, onlar öz vədlərini yerinə yetirməkdə ciddi dəqiqlik naminə verdikləri qurbanlara görə necə mükafatlanmışlar. Ölkə daxilində nə dərəcədə nəhəng bir etimad! Ətrafda necə bir nüfuz! Əksinə bir baxın, öz rəhbərlərinin hakimiyyətsevərliyi və xəyanətkarlığı ucbatından xalqlar tez-tez dərin bədbəxtliklərə düçar olmuşlar. Hər dəfə böyük dövlət qələbələrə böyük sevgidən başı gicəllənib dünyaya hökmranlığa can atdıqda, təhlükə altında olan insanları asılı olmamazlıq hissi ittifaqda birləşdirir. Qeyri-sabit səbəblər arasında müxtəlif dövlətlərin genişlənməsinə və kiçilməsinə oxşar olaraq, eynilə də, təbii çərçivələr sabit səbəblər kimi təsir göstərərək, nəhayət, qələbə qazanmalıdır. Buna görə də, dövlətin möhkəmliyi naminə, həm də xoşbəxtliyi naminə, bu sərhədləri keçmək olmaz, bu sərhədlərə onlar bu səbəblərin təsirindən aramsız olaraq qayıtmalıdırlar, necə ki, tüğyan edən fırtınadan qabaran dəniz suları ağırlıqdan öz hövzəsinə qayıdır. Bu, ehtimal hesabının çoxsaylı fəlakətli təcrübələr ilə təsdiqlənmiş nəticələrindən

biridir. Daimi səbəblər nöqteyi-nəzərindən baxılan tarix maraq üçün faydadan çox elə faydanı ifadə etmiş olardı ki, o, insanlara ən yaxşı dərs verə bilmiş olsun. Bəzən bu səbəblərin qaçılmaz nəticələrinin təsadüfi təsirləri aşkar olunduqda onların təsadüf nəticəsində baş verdiyini düşünürlər; məs., bir-birindən böyük dənizlər və ya böyük məsafə ilə aralı olan ərazilərdə yaşayan hər hansı xalqın digər xalqa tabe olması heç bir vəhclə qəbulolunmazdır. Belə iddia etmək olar ki, zaman ötdükcə bu sabit səbəb, həmin anlamda zaman ötdükcə aşkar olunan dəyişkən səbəblərlə həmişə birləşərək, nəhayət, onlar arasında ən güclüsünə rast gələcəkdir ki, tabe xalqa təbii asılı olmamazlığını qaytarsın və ya onu onunla qonşu hər hansı güclü dövlətə birləşdirsin.

Təsadüfi analizin ən mühüm hallarının əksəriyyətində, sadə hadisələrin mümkünlükləri məlum olmur və biz, olub keçmiş hadisələrdə bizim səbəblər barədə bunlardan asılı fərziyyələrimizdə bir göstəriş axtarmaq məcburiyyətində oluruq. Doğuran funksiyalar analizini müşahidə olunmuş hadisələrdən çıxarılmış nəticələrin yuxarıda qeyd olunmuş ehtimal prinsipinə tətbiq etdikdə, biz aşağıdakı teoremi alırıq.

Hadisə sadə olarsa və ya bir neçə sadə hadisədən ibarət olarsa, məs., oyun partiyası çox dəfə təkrar olunmuşdursa, onda sadə hadisələrin müşahidələnənini ən ehtimallı edən mümkünlüklər – ən doğruyaoxşar müşahidənin göstərdiyi mümkünlüklərdir: müşahidə olunan hadisə təkrar olunduqca, bu doğruyaoxşarlıq artır və o, təkrar olunma sayı sonsuz olduqda, nəhayət, yəqinliklə qovuşur.

Burada iki cür yaxınlaşma mümkündür: bunlardan biri – baş vermiş hadisəyə, ən böyük doğruyaoxşarlıq şamil edən mümkünlüklərin bu və ya digər tərəfdən götürülmüş sərhədlərinə aiddir, ikinci yaxınlaşma isə bu mümkünlüklərin bu sərhədlər arasında olması ehtimalına aiddir. Mürəkkəb hadisənin get-gedə daha çox dəfə təkrar olunması, əgər bu sərhədlər eyni qalarsa, bu ehtimalı artırır; bu təkrarlanma, əgər ehtimal dəyişməzsə, bu sərhədlərin arasını daraldır: sonsuzluqda bu məsafə sıfra çevrilir, ehtimal isə yəqinliyə keçir.

Əgər bu teorem Avropanın müxtəlif ölkələrində doğulan oğlanlar sayının qızlar sayına nisbətinə tətbiq olunarsa, onda bu nisbət hər yerdə təqribən, 22-nin 21-ə nisbətinə bərabər olub, oğlanların ən ehtimallı çox yüngül doğumunu sübut edir. Bu nisbətin Neapol və Peterburqda da belə olduğunu nəzərə alaraq, biz görürük ki, bu mənada iqlimin təsiri hiss olunmazdır. Buna görə ümumi fikrə zidd olaraq, belə düşünmək olar ki, oğlan doğumları hətta şərqdə də üstünlük təşkil edir. Buna görə də, mən, Misirə ezam olunmuş fransız alimlərinə bu maraqlı məsələ ilə məşğul olmağı təklif etdim: lakin doğum barədə dəqiq məlumatların alınmasındakı çətinlik

onlara bu məsələni həll etməyə imkan vermədi. Xoşbəxtlikdən Qumboldt yeni verilənlər əsasında bu məsələni diqqətdən kənarda qoymadı; o, bu verilənləri Amerikada müşahidə etmiş və ağılla, fərasətlə, inadla və cəsarətlə toplamışdı. O, cəngəlliklər arasında da oğlan doğumlarının qız doğumlarına nisbətinin Parisdə müşahidə edilmiş kimi olduğunu tapmışdı, bu isə oğlan doğumlarının üstünlüyünə insan nəsli üçün ümumi qanun kimi baxmaq məcburiyyəti yaratmalıdır. Bu mənada müxtəlif növ heyvanlar üçün qanunlar təbiətşünasların diqqətini, məncə, özünə cəlb etməlidir.

Oğlan doğumlarının qız doğumlarına nisbəti vahiddən çox az fərqlənir, lakin hər hansı bir yerdə müşahidə olunmuş olduqca çoxsaylı doğumlar, bu mənada ümumi qanuna zidd nəticə verə bilərdi və bununla yanaşı, bizim buradan bu qanunun olmaması nəticəsinə gəlməyə haqqımız yoxdur. Belə bir nəticə çıxarmaq üçün çox böyük ədədlər tətbiq olunmalıdır və belə nəticənin böyük ehtimalla göstərildiyinə əmin olmaq gərəkdir. Məs., Byuffon özünün siyasi arifmetikasında bir neçə Burqundiya icmasında qız doğumlarının oğlan doğumlarından çox olmasını misal gətirmişdir. Bu icmalardan *Carcelle-le Griqnon* icması 2009-cu il üçün beş il ərzində 1026 qız və 983 oğlan doğulacağını bildirir. Bu ədədlər o qədər böyük olmasalar da, bunlar qız doğulmasının çox ehtimallı olmasını yalnız 9/10 ehtimalı ilə verir; bu ehtimalın *xaç* və *şəbəkə* oyununda *xaçın* dörd dəfə ardıcıl düşməməsi ehtimalından az olmasına baxmayaraq, bu anomaliyanın səbəbini tapmaq üçün kifayət deyildir; əgər bu icmada doğulma yüzillik ərzində müşahidə olunsaydı, bu anomaliya güman ki, nəzərə çarpmazdı.

Doğum barədə doğum şəhadətnamələri kitabları vətəndaşların vəziyyətlərinin təminatı məqsədilə diqqətlə tərtib olunmadığından, böyük bir dövlətin əhalisinin çox çətin və dəqiq yerinə yetirilməsi çətin olan əməliyyata – əhalinin siyahıya alınmasına müraciət etmədən təyin etmək olar. Lakin buna görə əhalinin illik doğumlara nisbəti məlum olmalıdır. Buna nail olmaq üçün ən dəqiq üsul ondan ibarətdir ki, 1) ümumi nəticənin yerləşdiyi mövqenin şəraitindən asılı olmaması üçün dövlətdə elə departamentlər seçilməlidir ki, onlar bu dövlətin bütün ərazilərində təqribən eyni cür paylanmış olsunlar; 2) hər hansı verilmiş dövr üçün hər bir departamentdə bir neçə icmanın əhalisinin siyahısı diqqətlə aparılmalıdır; 3) bu dövrdən əvvəl və bu dövrdən sonrakı bir neçə il ərzində doğum siyahılarının köməyilə illik doğumlara uyğun orta ədəd tapılmalıdır. Əhalinin sayına bölünmüş bu ədəd, siyahıyaalma çox olduqca, hərillik doğumların sayının əhalinin sayına nisbətini daha doğru ifadə edir. Dövlət belə siyahıyaalmanın xeyirli olmasına əmin olaraq, mənim xahişimə əsasən onun yerinə yetirilməsinə razılıq verdi. Bütün Fransa üzrə eynimövqeli otuz

departamentdə elə icmalar qeyd olunmuşdur ki, bunlar ən dəqiq məlumatlar verə bilirdi. Bu icmalarda siyahıyaalma, ümumi nəticədə, 23 sentyabr 1802-ci il üçün 2 037 615 nəfər sakin olduğunu qeydə almışdı. Bu icmalarda 1800, 1801 və 1802 illəri üçün doğum sayları siyahısı aşağıdakı nəticələri vermişdi:

doğum	nigah	ölüm halları
110 312 oğlan 105 287 qız	46 037	103 659 kişi 99 443 qadın

Əhali sayının illik doğum sayına nisbəti, beləliklə, 28 352 845-in 1 000 000-a nisbəti olur; bu nisbət əvvəlki illərdə hesablananlarla müqayisədə böyükdür. Bu nisbəti Fransadakı illik doğum sayına vurduqda, bu dövlətin əhalisinin sayını alırıq. Lakin bu qayda ilə alınan əhali sayının əhalinin gerçək sayından verilən bir sərhədi aşmaması ehtimalı nəyə bərabərdir? Bu məsələni həll edərək və onun həllinə əvvəlki verilənləri tətbiq edərək, mən tapdım ki, Fransada hər ildəki doğum sayının bir milyona bərabər olduğu fərz olunarsa, əhalinin sayı 28 352 845 nəfər olacaqdır, bu isə bu nəticənin xətasının hətta yarımmilyona bərabər olmayacağına, bir şansa qarşı üç yüz min şansın olacağına dəlalət edir.

Əvvəlki siyahılara görə oğlan doğumları sayının qız doğumları sayına nisbəti – 22-nin 21-ə nisbətinə bərabərdir; nigahlar sayının doğum saylarına nisbəti üçün on dördə nisbəti kimidir.

Parisdə hər iki cinsdən uşaqların xaç suyuna salınması 22-nin 21-ə nisbətindən bir qədər yayınır. 1745-dən – doğum barədə doğum şəhadətnaməsi kitablarında cins də qeyd olunmağa başlandığı zamandan bu paytaxtda 1784-ün sonuna qədər 393 386 oğlan və 377 555 qız xaç suyuna salınmışdı. Bu ədədlərin nisbəti təqribən 25-in 24-ə nisbətinə bərabərdir; belə çıxır ki, Parisdə hər iki cinsdən xaç suyuna salınanların sayını bərabərləşdirmək üçün hansısa xüsusi səbəb vardır.

Əgər bu məsələyə ehtimal hesabını tətbiq etsək, onda bu səbəbin olması üçün bir şansa qarşı 238 şansın olduğunu taparıq, bu isə bu səbəbin axtarılmasına kifayət qədər haqq verir. Mən bu haqda fikirləşərkən, mənə belə gəldi ki, nəzərə çarpan bu fərq ondan asılıdır ki, kənd və əyalətlərdən olan valideynlər oğlan uşaqlarını özlərində saxlamaqda müəyyən üstünlük olduğunu düşünərək, onları Parisdəki atılmış uşaqlar üçün Yetimxanaya qızlarla müqayisədə daha az göndərirdilər, bu isə iki cinsdən doğum saylarının nisbətindən də aydın ola bilərdi; məhz bu Yetimxananın siyahısı

mənə bunu sübut etdi. Bu Yetimxanaya 1745-in əvvəlindən 1809-un sonuna qədər 163 499 oğlan və 159 405 qız qəbul olunmuşdu. Bu ədədlərdən birincisi ikincisindən yalnız otuz səkkizdə bir qədər artıqdır, əslində isə bu heç olmasa, iyirmi dörddə bir qədər artıq olmalı idi. Bu səbəbin mövcudluğunu o da sübut edir ki, əgər atılmış uşaqlar nəzərə alınmazsa, Parisdə doğulmuş oğlan uşaqları sayının qız uşaqları sayına nisbəti, bütün Fransada oldığu kimi, 22-nin 21-ə nisbətinə bərabərdir.

Parisdə də, Londonda da oğlan doğumlarının qız doğumlarından üstünlüyündəki sabitlik, bəzi alimlərin müşahidə apardıqları müddət ərzində İlahi bir qüvvənin müdaxiləsi kimi görünürdü və onlar düşünürdülər ki, bu qüvvə olmasaydı, hadisələrin gedişini aramsız pozan qeyri-requlyar səbəblər, qızların illik doğumlarının oğlan doğumlarından üstünlüyünü göstərməliydi.

Lakin bu dəlil belə bir yeni misaldır ki, çox vaxt sui-istifadə olunan son nəticələr, problemlərin daha dərin tədqiqində, bunların həlli üçün zəruru verilənlər olduqda, həmişə itir. Söhbət gedən sabitlik requlyar səbəblərin nəticəsidir ki, bunlar illik doğum sayı olduqca çox olduqda təsadüfdən asılı olan anomaliyaları üstələyən oğlan doğumlarına üstünlük verir. Bu sabitliyin uzun zaman müddətində qalacağı ehtimalının tapılması, təsadüflər analizinin o sahəsinə aiddir ki, burada keçmiş hadisələrdən gələcək hadisələrin ehtimalına keçilir, nəticədə isə bizə bəlli olur ki, Parisdə 1745-dən 1784-ə qədər müşahidə olunmuş doğumlar üzrə oğlanların illik doğumları yüzillik ərzində qız doğumlarını həmişə üstələyəcəkdir: beləliklə, təəccüblənməyə heç bir dəlil-sübut yoxdur ki, yarımyüzillikdə də eyni nəticə müşahidə olunmuşdu.

Belə bir misala baxaq ki, hadisələrin sayı artdıqca onlar sabit münasibətləri necə aşkar edir? Dairəvi qaydada düzülmüş urnlar sırasına baxaq və bunlardan hər birində çox sayda ağ və qara kürəciklər vardır; deməli, bu urnlarda ağ kürəciklərlə qaraların nisbətləri əvvəlcə olduqca müxtəlif ola bilər, məs., bu urnlardan hansı birində yalnız ağ, digər hər hansı birində yalnız qara kürəciklər olan hal. Əgər biz birinci urndan kürəcik çıxarıb, onu ikinci urna qoyaraq, bu urndakı kürəcikləri yaxşıca qarışdırdıqdan sonra, ondan bir kürəcik çıxarıb, onu üçüncü urna qoyaraq və i. a., sonuncu urna qədər bu qayda ilə davam edərək, sonuncudan çıxarılmış kürəciyi birinci urna qoyaraq, biz bu tirajlar sırasını qeyri-müəyyən olaraq davam etdirə bilərik; ehtimalların analizi bizə göstərir ki, bu urnlarda ağ kürəciklərlə qara kürəciklərin nisbətləri, nəhayət, eyni olur və urnlardakı bütün ağ kürəciklər cəminin bütün qara kürəciklər cəminə nisbətinə bərabər olur. Onda bu dəyişdirilmə qaydasının requlyarlığından

nisbətlərdəki ilkin düzgün olmamazlıq zaman ötdükcə itir ki, bu da nəticədə ən sadə qaydanın öz yerini tutmasına səbəb olur. Əgər biz bu urnlar arasında yeni urnlar yerləşdirsək və bu urnlardakı ağ kürəciklər cəminin qara kürəciklər cəminə nisbəti əvvəlki nisbətdən fərqli olarsa və biz, bütün bu urnlardan kürəciklərin çıxarılmasını əvvəlki qayda ilə davam etdirsək, əvvəlki urnlarda qərarlaşmış o sadə qayda əvvəlcə pozulacaqdır və ağ kürəciklər sayının qaraların sayına nisbəti düzgün olmayacaqdır; lakin bu düzgün olmamazlıq get-gedə itəcəkdir və yeni qayda ilə əvəz olunacaqdır ki, bu qayda nəhayət, urnlardakı ağ kürəciklər sayının qaraların sayına nisbətlərinin bərabərliyi qaydası, qərarlaşacaqdır. Bu nəticəni təbiətdəki bütün birləşmələrə genişləndirmək olar, belə ki, bu birləşmələrə xas olan sabit qüvvələr düzgün təsir tərzini bərqərar edir, bu isə qəribə qanunlarla idarəolunan sistemin xaosunun içindən belə özünü biruzə verir.

Belə görünür ki, baş verən hadisələr və ya proseslər, hətta təsadüfdən ən çox asılı olanları belə, demək olar ki, bunların sayı artdıqca aramsız olaraq tamamilə müəyyən münasibətlərə yaxınlaşmağa meylli olur; odur ki, əgər biz bu münasibətlərin hər birini hər iki tərəfdən ixtiyari uzunluqlu parça ilə məhdudlaşdırsaq, onda müşahidələrin orta nəticəsi bu parça daxilində yerləşəcəkdir və əvvəl-axır yəqinlikdən yalnız ixtiyari verilən kəmiyyətdən kiçik olan kəmiyyət qədər fərqlənəcəkdir. Beləliklə, çoxsaylı müşahidələrə tətbiq edilən ehtimal hesabı vasitəsilə bu münasibətlərin mövcudluğunu dərk etmək olar. Lakin bunların səbəblərini araşdırmazdan əvvəl, həm də faydasız düşüncələrdə çaşıb qalmamaq üçün, bu münasibətlərin təsadüfdən asılı olmayan anomaliyalar kimi baxılmasını istisna edən ehtimallarla göstərilməsinə əmin olmaq zəruridir. Doğuran funksiyalar nəzəriyyəsi bu ehtimal üçün olduqca sadə ifadə verir, bu ifadə differensial kəmiyyətin hasilinin inteqrallanmasından alınır, bu ehtimal üçün çoxsaylı müşahidələrdən alınmış bu nəticə gerçək ehtimaldan vahiddən kiçik və məsələnin növündən asılı olan bir sabit qədər yayınır, bu sabitin qüvvət üstü yayınma kvadratının müşahidələr sayına nisbətinə bərabərdir. Verilmiş sərhədlərlə götürülmüş inteqralın sərhədləri müsbət və mənfi sonsuzluq olan həmin inteqrala nisbəti – gerçəkdən yayınma ehtimalının sərhədlər arasında olmasını ifadə edəcəkdir. Çoxsaylı müşahidələrlə göstərilən nəticələrin ümumi ehtimal qanunu belədir.

Ehtimal nəzəriyyəsinin natural fəlsəfəyə tətbiqi

Təbiət hadisələri və ya proseslərinin əksəriyyəti o qədər kənar səbəblərlə müşayiət olunur ki, bunlara çoxsaylı dəyişikliklər yaradan o qədər səbəblər qarışır ki, onları dərk etmək olduqca çətin olur. Bunların əsl mahiyyətini

dərk etmək üçün yalnız təkrarlanan müşahidələr və sınaqlar aparılmalıdır ki, kənar təsirlər bir-birini yox etsinlər və orta nəticələr bu hadisələri və ya prosesləri və onların müxtəlif elementlərini aşkar edə bilsinlər. Bu müşahidələr nə qədər çox olarsa və nə qədər az fərqlənərsə, bunların nəticələri gerçəkliyə o qədər yaxın olur. Bu axırıncı şərtə müşahidə metodlarının seçilməsi, alətlərin dəqiqliyi və dəqiqlilik sayəsində nail olunur. Ehtimal nəzəriyyəsinin köməyilə və ən münasib (əlverişli) orta nəticələr və ya ən az xəta ilə olan nəticələr təyin olunur. Lakin bu kifayət deyildir; bundan başqa bu nəticələrin xətalarının verilən sərhədlər arasında olması ehtimalı qiymətləndirilməlidir; bunsuz biz, yalnız alınmış dəqiqliyin dərəcəsi haqqında mükəmməl olmayan anlayış almış olarıq. Buna görə də, bu məqsədə xidmət edən düsturlar elmi metodun əsl təkmilləşdirilməsini və onun mühüm əlavəsini təşkil edir. Bu düsturların analizi ehtimal nəzəriyyəsində ən incə və çətin sahədir; bu analiz mənim bu nəzəriyyə üzrə dərc olunmuş əsərimdə əsas predmetlərdən birini təşkil edir, burada mən üstünlüyü olan elə bir neçə düstur tapmışam ki, bunlar xətaların ehtimal qanunlarından asılı deyildirlər və bilavasitə müşahidələrlə verilən təsadüfi kəmiyyətləri və onların ifadələrini özlərində ehtiva edirlər.

Hər bir müşahidənin analitik ifadəsi təyin olunması tələb olunan elementlərin funksiyasıdır; və əgər bu elementlər təxminən məlum olarsa, bu funksiya bunların düzəlişlərinin xətti funksiyasına çevrilir. Bu funksiyanı müşahidənin özünə bərabərləşdirərək, *şərti tənlik* adlandırılan tənlik alırıq. Əgər oxşar tənliklərin sayı çox olarsa, onda bunlar elə kombinasiya olunmalıdırlar ki, nəticədə elementlərin sayı qədər sonuncu tənliklər alınsın, bu elementlərə düzəlişləri isə sonradan bu tənlikləri həll edərək təyin etmək mümkün olsun. Görəsən, nəticədə alınası sonuncu tənliklərin alınması üçün tənliklərin kombinasiya üsullarından hansı daha əlverişlidir? Xətaların ehtimal qanunu necə bir qanundur ki, bu qanunun bu xətalardan alınan elementləri hələ də olduqca dəyişkəndirlər? Bu suallara cavabı ehtimal nəzəriyyəsindən öyrənəcəyik. Şərti tənliklərin köməyi ilə sonuncu tənliyin qurulması bu şərti tənliklərdən hər birinin qeyri-müəyyən vuruğa vurulmasına və bu hadisələrin birləşdirilməsinə gətirir. Deməli, vuruqların elə sistemi seçilməlidir ki, bu sistemdə ən kiçik xəta gözlənilsin. Lakin hər hansı elementin mümkün olan xətaları onların uyğun ehtimallarına vurularsa, onda aydındır ki, ən əlverişli sistem – müsbət işarə ilə götürülmüş bütün hadisələrin cəmi *minimum* olan sistem olacaqdır, çünki müsbət və ya mənfi xətaya həmişə itki kimi baxılmalıdır. Beləliklə, hasillərin bu cəmini qurduqda, *minimumluq* şərti münasib vuruqlar sistemini və ya ən əlverişli sistemi təyin edəcəkdir. Beləliklə, biz tapırıq ki, bu sistem – hər bir şərti tənlikdə elementlərin əmsallarının sistemidir, odur

ki, ilk sonuncu tənlik – hər bir şərti tənliyin uyğun olaraq, birinci elementinin əmsalına vurulması ilə və bu qayda ilə vurulmuş bütün belə tənliklərin birləşdirilməsi ilə qurulur. İkinci sonuncu tənlik də, ikinci elementin əmsalları ilə oxşar qayda ilə davransaq, analoji alınır və i. a. Beləliklə, çoxsaylı müşahidələr toplusunda əks olunan hadisə və ya proseslərin elementləri və qanunları daha çox aydınlıqla aşkarlana bilinir.

Hər bir elementdə arzu olunmaz xətaların ehtimali-hiperbolik loqarifmi vahidə bərabər olan, mənfi işarə ilə götürülmüş və xətalar ehtimalının modulu kimi baxılan sabit əmsala vurulmuş, xətanın kvadratına bərabər olan qüvvətə yüksəldilmiş ədədə mütənasibdir, çünki, əgər xəta dəyişməz qalarsa, xəta artdıqda onun ehtimalı sürətlə azalır; odur ki, əgər mən belə ifadə edə bilərəmsə, alınmış elementin çəkisi, bu modul nə qədər böyük olarsa, o qədər çox gerçəyə yaxın olur. Buna görə də, mən bu modulu elementin və ya nəticənin *çəkisi* adlandıracağam. Bu çəki ən əlverişli vuruqlar sistemindən böyük mümkün qiymətə malikdir; bu isə bu sistemə digərləri ilə müqayisədə üstünlük verir. Ümumi ağırlıq mərkəzinə görə müqayisə olunan həm bu çəkinin, həm də cisimlərin çəkisinin bu gözəl analogiyasından aydın olur ki, əgər hər hansı bir element çoxsaylı müşahidələrdən təşkil olunmuş müxtəlif sistemlərlə verilərsə, onda bütün nəticələrdən ən əlverişlisi olan orta nəticə – ayrılıqda götürülmüş hər bir nəticənin özünün çəkisinin hasillərinin cəminin bütün çəkilərin cəminə nisbətinə bərabərdir.

Bundan başqa, müxtəlif sistemlərin nəticəsinin ümumi çəkisi onların ayrı-ayrılıqdakı çəkilərinin cəminə bərabərdir, odur ki, bütün bunların birlikdə götürülmüş orta nəticəsinin xətaları ehtimali-hiperbolik loqarifmi vahidə bərabər olan, bütün çəkilərin cəminə vurulmuş mənfi işarə ilə götürülmüş xətanın kvadratına bərabər olan qüvvətə yüksəldilmiş ədədə mütənasibdir. Əslində hər bir çəki hər bir sistemin xətalarının ehtimal qanunundan asılıdır, bu qanun isə demək olar ki, həmişə naməlumdur; lakin sistemin müşahidələrinin onların orta qiymətlərindən yayınmaları vasitəsilə bu qanunu özündə ehtiva edən vuruğu xaric etmək mənə müyəssər oldu. Beləliklə, çoxlu sayda müşahidələr toplusu ilə əldə olunmuş nəticələr haqqında bizim bilgilərimizi genişləndirmək üçün yaxşı olardı ki, hər bir nəticə ilə yanaşı onun uyğun çəkisi də yazılsın; bu məqsəd üçün analiz bizi ümumi və sadə metodlarla təmin edir. Xətaların ehtimal qanununu ifadə edən üstlü funksiya bu şəkildə alındıqda, biz belə bir ehtimala malik oluruq ki, nəticənin xətası verilən sərhədlərdə yerləşir, üstlü funksiyanın xətanın differensialına hasilinin inteqralı bu sərhədlərdə götürülərək, nəticənin çəkisinin kvadrat kökünün vahid diametrli çevrəyə nisbətinə vurulmalıdır. Buradan belə bir nəticə alınır ki, eyni bir ehtimallı nəticələrin xətaları

onların çəkilərinin kvadrat köklərinə tərs mütənasibdir; bu isə onların nisbi dəqiqliklərinin müqayisəsinə xidmət edə bilər. Bu metodu müvəffəqiyyətlə tətbiq etmək üçün müşahidələrin və ya sınaqların şərtləri elə surətdə müxtəlifləşdirilməlidir ki, xətanın dəyişməz səbəblərinə təsadüf olunmasın. Müşahidələrin sayı olduqca çox olmalıdır, təyin olunası elementlər çox olduqca bunlar da çox olmalıdır, belə ki, nəticənin orta çəkisi müşahidələr sayının elementlər sayına nisbəti ilə birlikdə artır. Bundan başqa, bu müşahidələrdə elementlərin dəyişikliklərinin müxtəlif cür olması zəruridir, çünki əgər iki elementin dəyişikliyi tamamilə eyni olardısa, onda onların əmsalları şərti tənliklərdə mütənasib olardı, onda bu elementlər birlikdə bir məchulla ifadə olunardı ki, bu da onları bu müşahidələr üzrə fərqləndirməyi mümkünsüz etmiş olardı. Nəhayət, zəruridir ki, müşahidələr dəqiq olsun: bütün şərtlərdən ən birincisi olan bu şərt nəticənin çəkisini olduqca artırır, bu nəticənin ifadəsinin böləni – müşahidələrin bu nəticədən yayınmaları kvadratlarının cəmidir. Belə ehtiyatlı tədbirlərdə əvvəlki metoddan istifadə etmək və çoxsaylı müşahidələrdən çıxarılmış nəticələrin etibarlılıq dərəcəsini qiymətləndirmək mümkün olacaqdır.

Şərti tənliklərdən son tənliklərin çıxarılması üçün indicə verdiyimiz qayda ona gətirilir ki, müşahidələr xətalarının kvadratlar cəmi *minimumlaşdırılsın*, çünki hər bir şərti tənlik müşahidə ilə onun xətası cəmi ilə əvəzləmədən sonra dəqiqləşir; əgər bu tənlikdən bu xətanın ifadəsi təyin edilərsə, onda asanlıqla əmin olmaq olur ki, bu ifadələrin kvadratları cəminin «*minimum*»luq şərti həmin bu qaydanı verir. Bu qayda müşahidələr sayı çox olduqca daha dəqiq olur; hətta bu say böyük olmadıqda belə, hər halda axtarılan düzəlişləri fikirləşmədən ala bilmək üçün sadə üsul verən həmin qaydanı tətbiq etmək təbii görünür. Bu qayda eyni bir ulduzun müxtəlif astronomik cədvəllərinin dəqiqliyini müqayisə etmək üçün də istifadə oluna bilinər. Həmişə belə fərz etmək olar ki, bu cədvəllər eyni bir şəklə gətirilmişdir, bu halda bunlar yalnız dövrlərlə, arqumentlərin orta hərəkətlərilə və əmsalları ilə fərqlənirlər; belə ki, bunlardan birində digərlərində olmayan arqument olarsa, onda aydındır ki, bu belə fərziyyə ilə əsaslandırılır ki, bu arqumentin əmsalı sıfra bərabərdir. Əgər bütün bu cədvəllər yaxşı müşahidələrin bütün toplusundan istifadə edilərək tərtib olunursa, onda bunlar xətaların kvadratları cəminin «*minimum*»luq şərtini ödəyərdilər; beləliklə, bu şərtə daha çox yaxınlaşan cədvəllər olduqca çoxsaylı müşahidələrlə tərtib olunmuş cədvəllərlə müqayisədə, üstünlüyə layiqdirlər.

Yuxarıda şərh olunmuş metod, əsas etibarilə, astronomiyada müvəffəqiyyətlə tətbiq oluna bilinər. Astronomik cədvəllər nail olduqlarına, həqiqətən də, müşahidələrin və nəzəriyyələrin dəqiqliyinin heyrətamiz doğruluğuna,

həmçinin, şərti tənliklərin istifadə olunması ilə borcludurlar, bu tənliklərin sayəsində isə çox gözəl müşahidələrin əksər sayı eyni bir elementin düzəlməsinə xidmət edir. Lakin xətalar ehtimalını da təyin etmək tələb olunur, çünki bu düzəlişlərdə xətaların ola biləcəyi istisna deyil; indicə mənim şərh etdiyim metod bu məqsədə xidmət edir. Bu metodun bir neçə maraqlı tətbiqlərini göstərməkdən ötrü, mən, *Bouvardın* yenicə başa çatdırdığı, Yupiter və Saturnun hərəkətləri haqqındakı çox dərərli bir əsərindən istifadə etdim, o, olduqca dəqiq cədvəlləri olduqca böyük bir diqqətlə tərtib etmiş, qarşıdurmaları və *Bradley* və astronomların müşahidə etdikləri bu iki planetin kvadraturlarını araşdırmışlar; onlar son illərə qədər *Bouvardın* davamçıları olmuşlar. *Bouvard,* bu cədvəllərdən bu planetlərin hərəkətlərinin, vahid kimi götürülən Günəş kütləsi ilə müqayisə olunan kütlələrininin və hərəkətlərinin elementlərinin düzəlişlərini çıxarmışdır. Bu hesablamalardan Saturnun kütləsinin Günəş kütləsinin 3 512 -də bir hissəsinə bərabər olduğu alınmışdır. Bunlara mənim ehtimal düsturlarımı tətbiq edərək, mən bu nəticənin xətasının onun ədədi qiymətinin yüzdə birdən az olması üçün bir şansa qarşı on bir min şansın olduğunu tapdım; və ya əgər yüz ildən sonra yeni müşahidələrə əvvəlki müşahidələrlə birlikdə həmin üsulla baxılarsa, demək olar ki, eyni bir nəticəyə gəlmək olur, lakin yeni nəticə *Bouvard* nəticəsindən yüzdə bir qədər fərqlənməyəcəkdir. Bu alim-astronom bundan başqa tapır ki, Yupiterin kütləsi Günəş kütləsinin 1 701 -də bir hissəsinə bərabərdir; mənim ehtimal metodum isə bu nəticənin hətta neçə yüzdə bir qədər səhv olmadığı üçün bir şansa qarşı milyon şans olduğunu verir.

Bu metod geodeji əməliyyatlara da müvəffəqiyyətlə tətbiq oluna bilinər. Yer səthində böyük qövsün uzunluğu dəqiq ölçülmüş bazaya söykənən üçbucaqlar zənciri ilə təyin olunur; lakin bucaqların nə cür dəqiqliklə ölçülməsinə baxmayaraq, qaçılmaz xətalar olacaqdır, bunlar çox sayda üçbucaqlardan çıxarılmış qövsün ədədi qiymətinin gerçəkdən olduqca yayınmasına səbəb olacaqdır. Beləliklə, bizə məlumdur ki, ədədi qiymət mükəmməl olmayacaqdır, əgər biz onun xətasının verilən sərhədlər hüdudunda yerləşməsi ehtimalını təyin edə bilməsək, onda bizə məlum olan ədədi qiymət, deməli, mükəmməl qiymət olmayacaqdır. Geodeji nəticənin xətası hər bir üçbucağın bucaqlarının xətalarının funksiyasıdır. Adı çəkilən əsərdə mən ehtimal qanunu bizə məlum olan çoxsaylı xüsusi xətaların çox saydasının bir və ya bir neçə xətti funksiyalarının ədədi qiymətlərinin ədədi ehtimallarını almaq üçün ümumi düsturlar vermişəm; deməli, bu düsturların köməyilə, xüsusi xətaların ehtimal qanununun nə cür olmasından asılı olmayaraq, hər hansı geodeji nəticənin təyin olunmuş sərhəd hüdudlarında yerləş-

məsi ehtimalını təyin etmək olar. Buna görə də, bu qanundan asılı olmamaq olduqca zəruridir, belə ki, hətta ən sadə qanunlar belə bunların təbiətdə mövcud olacaqları mümkün olanlarının sonsuz sayda olduqları nəzərə alınarsa, həmişə sonsuz kiçik ehtimallıdırlar. Amma xüsusi xətaların naməlum qanunu düsturlara qeyri-müəyyən kəmiyyət daxil edir və əgər onu xaric etmək mümkün olmazsa, bu kəmiyyət bu xətaların sayını azaltmağa imkan verməzdi. Biz gördük ki, astronomik məsələlərdə ixtiyari müşahidə xətti tənliyə gətirir, elementlərin alınması üçün bu qeyri-müəyyən kəmiyyət, hər bir tənlikdə elementlərin ən ehtimallı ədədi qiymətləri qoyulduqdan sonra, qalıqların kvadratları cəminin köməyilə xaric olunur. Geodeji məsələlərdə, oxşar tənliklər olmadığından, digər xaricetmə üsulu axtarılmalıdır. Biz bu üsulu, hər bir müşahidə olunan üçbucağın bucaqları cəminin iki düzbucaq plyus sferik artdığı aşan kəmiyyətlə alırıq. Bu kəmiyyətlərin kvadratları cəmi ilə şərti tənliklərin qalıqlarının kvadratları cəmi əvəz olunur; onda bir sıra geodeji əməliyyatların son nəticəsinin verilən kəmiyyəti aşmayacağı ehtimalını hesablamaq olar. Lakin hər bir üçbucağın 3 bucağı arasında onların xətaları cəmini paylaşdırdıqda hansı üsul ən əlverişlidir? Ehtimalların analizi göstərir ki, hər bir bucaq, geodeji nəticənin çəkisinin mümkün qədər ən böyük olması üçün, bu cəmin üçdə biri qədər kiçildilməlidir; bu isə həmin xətanı az ehtimallı edir. Deməli, ixtiyari üçbucağın üç bucağını müşahidə etmək və göstərilən üsulla onları düzəltmək böyük üstünlüyə malikdir. Sadə sağlam düşüncə bu faydanı hiss etməyə vadar edir; amma yalnız ehtimal hesabı bu faydanı qiymətləndirə bilər və göstərə bilər ki, bu düzəliş sayəsində bu fayda mümkün olduqca daha böyük olur.

Böyük dairənin qövsünün uclarından birində ölçülmüş bazaya söykənən bu qövsün ədədi qiymətinin dəqiqliyinə əmin olmaq üçün bu qövsün digər ucunda ikinci baza ölçülür və bu bazalardan biri üzrə digərinin uzunluğu ölçülür. Əgər bu uzunluq müşahidədən az yayınarsa, onda belə fikirləşmək tamamilə anlaşılardı ki, bu bazaları birləşdirən üçbucaqlar zənciri, demək olar ki, bu zəncirdən təyin olunan böyük qövsün uzunluğu kimi çox dəqiqdir. Sonra bu kəmiyyətə düzəliş verilir, buna görə üçbucaqların bucaqları elə dəyişdirilir ki, hesablanmış bazalar ölçülmüş bazalarla uzlaşsın; lakin bunu sonsuz sayda üsulla etmək olar, bunlar arasında geodeji nəticələri ən böyük çəkiyə malik olanlarına üstünlük verilməlidir, çünki həmin xəta bu halda ən az ehtimallı olur. Ehtimalların analizi bir neçə bazanın ölçülmələrindən alınan ən əlverişli düzəlişi bilavasitə almaq üçün düsturlar, həmçinin bazaların çoxsaylılığı sayəsində yaranan ehtimal qanunlarını, məhz bu çoxsaylılıq sayəsində daha sürətlə azalan qanunları verir.

Çoxsaylı müşahidələrdən çıxarılmış nəticələr xətaları, ümumiyyətlə, məhz hər bir müşahidənin xüsusi xətalarının xətti funksiyasıdır. Bu funksiyanın əmsalları məsələnin növündən və bu nəticənin alınması üçün istifadə olunan üsuldan asılıdır. Ən əlverişli üsul, aydındır ki, nəticələrdən alınan eyni bir xəta – digərlərindən ən az ehtimala malik olanıdır. Beləliklə, ehtimal hesabının natural fəlsəfəyə tətbiqi – bu funksiyaların ədədi qiymətlərinin ehtimallarını analitik olaraq təyin etməkdən və bunların qeyri-müəyyən əmsallarının elə seçilməsindən ibarətdir ki, bu ehtimal qanunu ən sürətli azalan qanun olsun. Xüsusi xətaların naməlum ehtimal qanununu, demək olar ki, həmişə məsələnin verilənləri vasitəsilə daxil edən vuruğu sonradan düsturlardan xaric edərək, nəticələrin xətalarını verilən kəmiyyəti aşmayacağı ehtimalını ədədi qiymətləndirmək mümkün olur. Beləliklə, çoxsaylı müşahidələrdən alınmış nəticələrə görə nəyi arzu edəriksə, onun hamısını ala bilirik.

Bundan başqa, digər mülahizələr vasitəsilə çox yaxın nəticələr almaq mümkündür. Məs., fərz edək ki, eyni bir kəmiyyət üçün min bir müşahidə aparılmışdır; bütün bu müşahidələrin ədədi ortası ən əlverişli metodla verilmiş nəticədir; lakin nəticəni belə də seçmək olar ki, hər bir xüsusi kəmiyyətdən müsbət işarə ilə götürülmüş bütün yayınmalar cəmi *minimum* olsun: əslində isə bu şərti ödəyən nəticəyə gerçəyə ən yaxınlaşmış nəticə kimi baxmaq təbiidir. Əgər müşahidələrdən alınmış ədədi qiymətlər böyüklüyü qaydasında yerləşdirilərsə, onda asanlıqla görmək olur ki, mərkəzdə yerləşən ədədi qiymət əvvəlki şərti ödəyəcəkdir; hesablamalar isə bizə göstərir ki, müşahidələr sayı sonsuz olduğu halda bu kəmiyyət gerçək kəmiyyət ilə üst-üstə düşür; bununla belə, ən əlverişli metodla verilən nəticə ən üstün sayılır.

Ehtimallara, Göy cisimlərinin hərəkətlərindəki müşahidə xətalarında gizli qalan kiçik bərabərsizlikləri fərqləndirmək və bu hərəkətlərdə nəzərə çarpan anomaliyaların səbəbini aydınlaşdırmaq məqsədilə də baxılır. Tixo Brage bütün Ay müşahidələrini bir-birilə müqayisə edərək, Aya Günəş və planetlərə tətbiq olan tənlikdən fərqli, zaman tənliyini tətbiq etməyin zəruriliyini etiraf edir. Oxşar surətdə çoxsaylı müşahidələrin toplusu Mayerə aşkar etdi ki, pressesiya bərabərsizliyinin əmsalı Ay üçün kiçildilməlidir. Hətta Mazonun da təsdiq etdiyi və hətta böyütmüş olduğu bu kiçilmənin ümumdünya cazibə qüvvəsindən alınmadığı görüntüsü yaratmağına baxmayaraq, astronomların böyük əksəriyyəti bunu öz hesablamalarında nəzərə almalıdılar. Bundan sonra mən, olduqca çox sayda Ay müşahidələrinin ehtimal hesablamalarını apardım, bu məqsəd üçün bu müşahidələr, mənim xahişimlə *Bouvard* tərəfindən seçilmiş və araşdırılmışdır; nəticədə bu kiçilmə mənə elə böyük ehtimalla göründü ki, mən bunun səbəbini tapmağı

özümə borc sandım. Mən çox yaxşı gördüm ki, bu səbəb yalnız Yer sferoidinin elliptik şəkildə olması ilə izah oluna bilinər, amma o vaxta qədər bu, Ayın hərəkəti nəzəriyyəsində, ona yalnız əhəmiyyətsiz hədlər daxil edə biləcəyi baxımdan nəzərə alınmamışdı; buradan mən nəticə çıxardım ki, bu hədlər differensial tənliklərin ardıcıl inteqrallanmasında əhəmiyyətli hədlərə çevrilir. Mən sonra bu hədləri ayrıca analiz ilə təyin etdim və əvvəlcə heç bir astronomun ağlına belə gəlməyən, Ayın uzunluq dairəsinin *sinus*'una mütənasib olan en dairəsi üzrə Ayın hərəkəti bərabərsizliyini kəşf etdim. Sonradan mən bu bərabərsizliyin köməyilə, Aya tətbiq olunan pressesiya bərabərsizliyində Mayerin qeyd etmiş olduğu və kiçiltməni yaradan uzunluq dairəsi üzrə Ay hərəkətində digər bərabərsizliyin mövcudluğunun olduğunu bildim. Bu kiçilmə kəmiyyəti və en dairəsi üzrə əvvəlki bərabərsizliyin əmsalı Yerin sıxılmasını müəyyənləşdirmək üçün çox münasibdirlər. Özümün tədqiqlərim haqqında, o vaxtlar bütün yaxşı müşahidələrin müqayisəsi yolu ilə Ay cədvəllərinin təkmilləşdirilməsi ilə məşğul olan Burqa xəbər verərək, mən onun bu iki kəmiyyəti xüsusi bir diqqətlə təyin etməsini xahiş etdim. Onun tapdığı, olduqca gözəl uzlaşan bu iki kəmiyyət Yer üçün eyni bir sıxılma – 1/305 sıxılmasını verir, bu isə rəqqasın müşahidələrindən və meridianın dərəcələrinin ölçmələrindən çıxarılmış orta qiymətdən az fərqlənir, lakin məncə, bu sıxılma, müşahidə xətalarının bu ölçmələrə və onları dəyişdirən səbəblərin təsirinə görə, Ay bərabərsizlikləri ilə daha dəqiq təyin olunur.

Ehtimalları araşdırarkən, mən Ayın əsrlik tənliyinin səbəbini öyrəndim. Ayın ən yeni müşahidələrinin əvvəlki aytutulmaları müşahidələrilə müqayisəsi astronomlara Ayın hərəkətinin sürətlənməsini göstərmiş oldu; lakin həndəsəçilər, xüsusilə də, Laqranj dəyişikliklərdəki bu sürətlənməyə səbəb olan hədlərin uğursuz axtarışından sonra, bu sürətlənməni nəzərə almadılar. Köhnə və ən yeni müşahidələrin, həmçinin ərəblərin arada müşahidə etdikləri aytutulmalarının diqqətlə araşdırılması mənə göstərdi ki, bu sürətlənməyə səbəblər böyük ehtimala malikdirlər. Bu nöqteyi-nəzərdən, mən Ay nəzəriyyəsinə yenidən baxdım və tapdım ki, Ayın əsrlik tənliyi Yer orbitinin ekssentrisitetinin əsrlik dəyişməsi ilə əlaqədar olaraq, bu peykə Günəşin təsiri ilə baş verir, bu isə Ay orbitinin perigelisinin və düyünlərinin hərəkətlərinin əsrlik tənliklərinin kəşfinə gətirdi. Bu nəzəriyyənin bütün qədim və yeni müşahidələrlə olduqca gözəl uzlaşması onu yüksək dərəcədə açıq-aşkar etdi.

Ehtimal hesabı, oxşar surətdə, məni Yupiter və Saturnun hərəkətlərindəki böyük düzgün olmamazlıqların mövcudluğu səbəbinə gətirdi. Halley (Halley Edmund, 1656–1742) ən yeni müşahidələri qədimlərilə müqayisə edərək, Yupiterin hərəkətində sürətlənmə və Saturnun hərəkətində

yavaşımanı tapdı. O, bu müşahidələri uzlaşdırmaq üçün, bu hərəkətləri müxtəlif işarələrlə və 1700-ci ildən keçən zamanın kvadratı kimi artan iki əsrlik tənliklərə tabe etdi. Eyler və Laqranj, iki planetin hərəkətlərində qarşılıqlı cazibə yaradacaq dəyişiklikləri analiz etdilər. Onda onlar əsrlik tənlikləri tapdılar; lakin onların nəticələri o dərəcədə müxtəlif idi ki, bunlardan heç olmazsa biri yalnış olmalı idi. Buna görə də, mən Göy mexanikasının bu mühüm məsələsi ilə məşğul olmaq qərarına gəldim və mən, planetlərin orta hərəkətlərinin dəyişməzliyini qəbul etdim, bu isə Halleyin Yupiter və Saturnun cədvəllərinə daxil etdiyi əsrlik tənliklərin yox edilməsi məcburiyyətini yaratdı. Beləliklə, bu planetlərin hərəkətlərindəki düzgün olmamazlıqların izahı, bir də, yalnız kometlərin cazibələri ola bilərdi ki, buna bəzi astronomlar müraciət etdilər, daha bir izah isə hər bir planet üçün əks işarələrlə təyin olunan, bu iki planetin qarşılıqlı təsirlə hərəkətlərdə olduqları uzun müddətdə bunların hərəkətlərinin bərabərsizliyinin mövcudluğudur. Bu növ bərabərsizliklər haqqında mənim tapdığım teorem, bu bərabərsizliyi mənim üçün olduqca doğruyaoxşar etdi. Bu teoremdən belə nəticə alınır ki, əgər Yupiterin hərəkəti sürətlənirsə, onda Saturnun hərəkəti yavaşıyır, bu isə Halleyin qeyd etdiyinə oxşar nəticədir; bundan başqa, bu teoremdən Yupiterin hərəkətinin sürətlənməsi barədə alınan nəticə Saturnun hərəkətinin yavaşıması nəticəsinə gətirir ki, bu da Halleyin əsrlik tənliklərin bir-birilə münasibətləri haqqındakı aldığı nəticə kimidir. Yupiter və Saturnun orta hərəkətlərini tədqiq etdikdə mənə asanlıqla aydın oldu ki, Yupiterin iki misillə götürülmüş hərəkəti, Saturnun beş misillə götürülmüş hərəkətini, yalnız çox kiçik kəmiyyət qədər aşır. Bu arqument üçün ola bilən bərabərsizlik periodu, təxminən doqquz əsrə bərabər ola bilərdi. Əslində, onun əmsalının dərəcəsi orbitlərin ekssentrisitetlərinin kublarının dərəcəsi kimi olmalı idi. Lakin mənə məlum idi ki, ardıcıl inteqrallanmalar nəticəsində, bu əmsalda, bu bərabərsizliyin arqumentində zamanın çox kiçik vuruğunun kvadratlarının böləni də alınır ki, bu da onun böyük ədədi qiymət almasına səbəb ola bilər: bu bərabərsizliyin mövcudluğu, buna görə də, mənə çox ehtimallı göründü. Aşağıdakı qeyd onun ehtimalını daha da artırdı. Tixo Bragenin müşahidələri zamanı mən bu arqumenti sıfra bərabər götürərək gördüm ki, ən yeni müşahidələrin köhnələrilə müqayisəsindən Halley özünün göstərmiş olduğu dəyişiklikləri tapmalı idi, bununla belə ən yeni müşahidələrin öz aralarında müqayisəsi, Lambertin bu müqayisədən çıxaracaqlarına oxşar və zidd dəyişiklikləri verməli idi. Buna görə də, bu qeyri-bərabərliyin mövcudluğuna əmin olmağım üçün, mən tərəddüd etmədən, zəruri olan uzun və yorucu hesablama apardım: bu hesablama bundan başqa mənə çox sayda digər bərabərsizlikləri aşkar edən hesablama

nəticəsi ilə təsdiq olundu, bunların çoxluğu sayəsində Yupiter və Saturn cədvəlləri müşahidələrin özlərinin ən dəqiqliyinə qədər başa çatdırıldı.

Ehtimalların hesablanmasının köməyilə Yupiterin ilk üç peykinin orta hərəkətlərinin çox gözəl qanununu da kəşf etmək mənə müyəssər oldu; bu qanuna görə birinci peykin orta uzunluq dairəsi minus ikinci peykin uzunluq dairəsinin üç misli plyus üçüncünün uzunluq dairəsini iki misli dəqiq olaraq yarımçevrəyə bərabərdir. Bu ulduzlar kəşf olunduqları zamandan onların orta hərəkətləri yaxınlaşma ilə bu qanunu ödəyirlər, yaxınlaşma isə böyük doğruyaoxşarlıqla bu qanunun mövcudluğunu göstərirdi: mən bunların qarşılıqlı təsirindəki səbəbi axtarmağa başladım. Bu təsirin diqqətlə araşdırılması nəticəsində mənə aydın oldu ki, bunların orta hərəkətlərinin bu qanuna yalnız məlum sərhədlərdə belə yaxınlaşan belə ilkin münasibəti kifayət edərdi ki, onların qarşılıqlı təsiri bu qanunu qərarlaşdırsın və onu dəqiqliklə müdafiə edə bilsin. Beləliklə, bu üç peyk fəzada öz hərəkətlərini, əgər hər hansı səbəblər, məs., kometlər onların Yupiter ətrafında hərəkətlərini gözlənilmədən pozmasalar, əvvəlki qanunla daima davam etdirəcəklər.

Buradan görünür ki, təbiətin göstəriciləri çoxsaylı müşahidələrin nəticəsi olduğundan və buna görə də, məlum üsullarla izah oluna bilinmədiyindən bu göstəricilərə olduqca diqqətlə yanaşılmalıdır. Dünya sisteminə aid məsələlərin olduqca çətin olması, həndəsəçiləri yaxınlaşmalara müraciət etməyə məcbur etdi, belə yaxınlaşmalarda həmişə atılan kəmiyyətlərin hiss olunacaq təsir göstərə biləcəyindən duyulan narahatlıq hissi qaçılmaz olur. Müşahidələrdən belə təsirin olduğu aşkar ediləndə, onlar yenidən bunların analizinə başlayırdılar; yoxlama nəticəsində onlar müşahidə olunmuş anomaliyaların səbəbini həmişə tapırdılar; onlar bu anomaliyaların qanununu təyin edirdilər və əksər hallarda, hətta müşahidələrdən də hələ aşkar olunmamış qeyri-bərabərlikləri kəşf edərək, bu müşahidələri qabaqlayırdılar və baş verə biləcək nələrisə söyləyə bilirdilər. Beləliklə, belə demək olar ki, ümumdünya cazibə qüvvəsinə əsaslanan nəzəriyyələrin analitik təkmilləşdirilməsinə təbiətin özü şərait yaratmışdı və mənim fikrimcə, bu, təəccüb doğurmağa layiq bu prinsipin gerçəkliyinin ən güclü sübutlarından biridir.

Dünya sisteminin ən gözəl qeyri-adi hadisələrindən biri, – öz oxu ətrafında bütün fırlanma hərəkətləri və Günəşin öz oxu ətrafında fırlanması ilə eyni istiqamətdə və demək olar ki, onun ekvator müstəvisində planet və peyklərin fırlanma hərəkətləridir. Belə bir gözəl fenomen heç də təsadüfi deyildir: o, bu hərəkətləri təyin edən ümumi səbəbin olmasını göstərir. Bu səbəbin hansı ehtimalla baş verdiyini bilmək üçün nəzərə alınır ki, hal-ha-

zırdakı kimi bizə məlum planetlər sistemi, – heç olmasa Gerşel kimi, Uran planetinə də altı peyk aid edilərsə, – on bir planet və on səkkiz peykdən ibarətdir. Günəşin, altı planetin, Ayın, Yupiterin peyklərinin, Saturnun halqasının və onun peyklərindən birinin öz oxu ətrafında fırlanma hərəkətləri məlumdur. Bu hərəkətlər fırlanma hərəkətləri ilə birlikdə eyni bir istiqamətdə cəmisi qırx üç hərəkət təşkil edir; ehtimalların analizindən biz belə nəticəyə gəlirik ki, bu qaydanın təsadüfün nəticəsi olmadığı əleyhinə dörd min milliard şans vardır; bu isə bizim sübhə etmədiyimiz belə tarixi hadisələrin ehtimalından daha böyük olan bir ehtimaldır. Odur ki, ən azı biz, həmin əminliklə qəbul etməliyik ki, hər hansı bir ilkin səbəb planetlərin hərəkətlərini istiqamətləndirmişdir, xüsusilə də, əgər nəzərə alınarsa ki, bu hərəkətlərin böyük əksəriyyətinin Günəş ekvatoruna meyl etməsi çox da böyük deyildir.

Günəş sisteminin digər gözəl bir fenomeni planet və peyklərin orbitlərinin ekssentrisitetlərinin kiçik olmasına rəğmən, komet orbitlərinin olduqca dartılmış şəkildə olmasıdır, odur ki, bu sistemdə orbitlər böyük ekssentrisitetlərin kiçiklərinə aralıq keçid və təzahürünü yaratmırlar. Burada biz yenə də requlyar səbəbin təsirinin olduğunu qəbul etməliyik: təsadüf, bütün planetlərin və onların peyklərinin orbitlərinə, təxminən dairəvi forma verə bilməzdi; buna görə də, zəruridir ki, Göy cisimlərinin hərəkətlərini təyin edən bu səbəb onları, demək olar ki, dairəvi formalı etsin. Bundan başqa, kometlərinin orbitlərinin ekssentrisitetlərinin böyük olması üçün zəruridir ki, bunların böyüklüyü bu səbəbin mövcudluğu nəticəsində alınsın və bu səbəb, bununla belə, bu hərəkətlərin istiqamətlərinə təsir edə bilməsin; çünki demə, əksinə və düzünə hərəkət edən kometlər o qədərdir ki, bunların bütün orbitlərinin ekliptikaya orta meyli düzbucağın yarısına çox yaxındır, bu isə bu cisimlərin yalnız təsadüfi qaydada səpələnməsi halında mümkün ola bilərdi.

Söhbət gedən bu səbəbin nə cür təbiətli olmasından asılı olmayaraq, əgər o, planetlərin hərəkətinə səbəb olmuşsa və onları istiqamətləndirmişdirsə, onda zəruridir ki, bu səbəb bütün bu cisimləri də əhatə etməliydi, bunları bir-birindən ayıran məsafələrə gəldikdə isə səbəb yalnız möhtəşəm cazibə mayesi ola bilərdi: Günəş ətrafında eyni bir istiqamətdə, təxminən dairəvi formalı hərəkət yaratmaq üçün bu maye bu ulduzu atmosfer kimi əhatə etməli idi. Planetlərin hərəkətlərinin öyrənilməsi, beləliklə, bizi belə bir fikrə gətirir ki, Günəş atmosferi qeyri-adi istilik nəticəsində əvvəlcə bütün planetlərin orbitləri ətrafını bürümüş və getdikcə hazırdakı sərhədlərinə qədər sıxılmışdır.

Fərz etdiyimizə görə, Günəş öz əvvəlki vəziyyətində dumandan ibarət ləkələrə oxşayırmış, bunlar teleskopda dumana bürünmüş az və ya çox

parlayan nüvə görüntüsü yaradır, bu duman nüvənin səthi üzərində getdikcə sıxlaşaraq, gözəl bir gündə onu ulduza çevirir. Əgər biz analoji olaraq, belə hesab edəriksə ki, bütün ulduzlar belə yaranmışdır, onda belə fərz edə bilərik ki, onlar əvvəlki ilkin duman vəziyyətindən daha əvvəlki elə vəziyyətlərdə olmuşlar ki, bu vəziyyətlərdə duman materiyası getdikcə daha çox səpələnmiş, nüvə isə getdikcə daha az parlaq və sıx olmuşdu. Beləliklə, mümkün olduğu qədər daha uzağa nəzər sala bilərik sə, biz dumanın elə səpələnmiş vəziyyətdə olduğu nəticəsinə gəlirik ki, biz onun varlığını belə yalnız çox çətinliklə fərz edə bilərik.

Gerşelin özünün güclü teleskopları ilə xüsusi diqqətlə tədqiq etdiyi duman ləkələrininin ilkin vəziyyəti əslində belədir, o, bu ləkələrdən yalnız birini izləməmişdi; bu proqress yalnız yüzilliklərdən sonra, onların toplumu üçün bizə aydın ola bilər; bu ona bənzəyir ki, böyük bir meşədə müxtəlif yaşlı ayrı-ayrı ağaclarda ağacların böyüməsi izlənilir. O, duman materiyasını əvvəlcə Göyün müxtəlif hissələrində uzun bir sahədə ayrı-ayrı topalar şəklində səpələnmiş kimi müşahidə etmişdi. O görmüşdü ki, bu materiya bəzi topalarda bir və ya bir neçə, az parlayan nüvələr ətrafında sıxlaşmışdır. Digər duman ləkələrində bu nüvələr onları bürümüş dumanla müqayisədə daha çox parıldayır. Əgər bəzi ayrı-ayrı nüvələrin atmosferləri sonrakı sıxlaşma nəticəsində ayrılırlarsa, onda hər biri atmosferlə əhatə olunmuş, bir-birinə çox yaxın yerləşmiş parlaq nüvələrdən ibarət mürəkkəb duman ləkələri əmələ gəlir: bəzən, duman materiyası müntəzəm sıxlaşaraq, *planet ləkələri* adlanan duman ləkələrini əmələ gətirirdi. Nəhayət, olduqca böyük sıxlaşma bu duman ləkələrini ulduzlara çevirir. Bu fəlsəfi nöqteyi-nəzərə əsasən, duman ləkələrinin təsnifi onların gələcəkdə ulduzlara çevriləcəyini və mövcud ulduzların əvvəldə duman vəziyyətində olmasını göstərir. Aşağıdakı mülahizələr bu analogiyalardan çıxarılmış isbatların sübutudur.

Adi gözlə görünən bəzi ulduzların xüsusi düzülüşü müşahidəçi filosofları çoxdan təəccübləndirirdi. Metçel artıq qeyd etmişdi ki, məs., Ülkər bürcünün ulduzlarının, yalnız təsadüfün şansları nəticəsində bu ulduzlar yerləşən çox böyük olmayan fəzanı belə sıx doldura bilməsi, çox az ehtimallıdır; buradan o, belə nəticə çıxarır ki, ulduzların bu qruplaşması və belə qruplaşmaya oxşar digərləri də, təbiətin ümumi bir qanununun bir başlanğıc-ilkin səbəbinin nəticəsidir. Bu qruplaşma bir neçə nüvəli duman ləkələrinin sıxlaşmasının zəruri nəticəsidir; çünki aydındır ki, duman materiyası müxtəlif nüvələrlə daima cəzb olunduğundan, onlar zaman ötdükcə Ülkər qrupuna oxşar ulduzlar qrupu yaratmalıdırlar. Eynilə də, iki nüvəli duman ləkələrinin sıxlaşması, bir-birinə çox yaxın yerləşən və biri o birisinin ətrafında fırlanan ulduzları əmələ gətirir, belə ulduzlar –

hərəkətləri Gerşelin müşahidə etdiyi ulduzlara oxşar ulduzlardır. Altmış birinci ulduz və bu ulduzun ardınca gələn Qu bürcünün ulduzları da belədir: Bessel onların məxsusi hərəkətlərinin çox az fərqləndiklərini və olduqca mühüm olduqlarını qeyd etmişdir, bu isə bu ulduzların yaxın olduğuna və onların ümumi ağırlıq mərkəzi ətrafında hərəkət etdiklərinə kiçicik belə şübhə qoymur. Beləliklə, duman materiyasının sıxlışması proqresindən biz belə nəticəyə gəlirik ki, Günəş əvvəllər nəhəng atmosferlə əhatə olunmuş imiş, necə ki, biz gördük ki, Günəş sisteminin təzahürlərinin öyrənilməsi belə bir nöqteyi-nəzərə gətirir. Bir-birilə üst-üstə düşən belə gözəl izah Günəşin əvvəlki vəziyyətinin belə olduğu izahına gerçəyə çox yaxın olan ehtimal verir.

Lakin Günəş atmosferi planet və peyklərin öz oxu ətrafında fırlanma hərəkətlərini nə cür təyin etmişdir? Əgər bu cisimlər bu atmosferin dərinliyinə keçə bilsəydilər, onda atmosferin müqaviməti onların Günəş üzərinə düşməsinə səbəb olardı. Bu isə planetlərin Günəş atmosferinin ardıcıl hüdudlarında əmələ gəldiyi ehtimalının böyük olduğunu düşünməyə sövq edir, guya atmosfer soyuduqca sıxlaşaraq, özünün ekvator müstəvisində buxarlar zolaqlarını ayırmalı idi ki, bunlar öz növbəsində molekullarının qarşılıqlı cazibəsi nəticəsində müxtəlif sferoidlərə çevrilməliydilər.

Mənim «Kainat sisteminin Şərhim»də mən bu hipotezi çox geniş inkişaf etdirmişəm və mənə belə gəlir ki, bu hipotez bu sistemdə rast gələn bütün fenomenlərlə uzlaşır.

Bu hipotezə görə kometlər, planet sisteminə nə isə yad olan cisimlərdir. Onların yaranmasını duman ləkələrinin yaranması ilə əlaqələndirərək, onlara, ayrı-ayrı Günəş sistemlərindən digərlərinə təsadüfi dolaşma hərəkəti edən, nüvələri olan, çox da böyük olmayan duman ləkələri və bütün kainatda hər tərəfə yayılmış duman materiyasının sıxlaşması nəticəsində yaranmış cisimlər kimi baxmaq olar. Beləliklə, necə ki, aerolitlər Yerə nəzərən yad cisimlərdir, kometlər də bizim sistemə nəzərən yad olmalıymışlar. Bu ulduzlar bizə göründükləri zaman onların duman ləkələrinə elə tam oxşar olduğu təsəvvürünü yaradır ki, onları çox vaxt ayırd edə bilmirlər; və yalnız onların hərəkətləri üzrə və Göyün müəyyən hissəsində görünən bütün duman ləkələri məlum olduğundan, onları bir-birindən fərqləndirmək mümkün olur. Bu fəziyyə, insanları düşündürən böyük cazibəni və Günəşə yaxınlaşdıqca kometlərin quyruqlarını və həmçinin, bu quyruqların hədsiz seyrəkləşməsini çox yaxşı izah edir, həmin o quyruqların ki, özlərinin çox böyük qalınlığına baxmayaraq, onlardan sayrışaraq görünən ulduz parıltılarını heç də zəiflədə bilmir.

Çox da böyük olmayan duman ləkələri Günəşin cazibəsinin çox olduğu fəza hissəsinə çatdıqda, biz bu hissəni bu ulduzun *təsir sferası* adlandıracağıq, bu sfera onları elliptik və ya hiperbolik orbitlər cızmağa məcbur edir. Lakin onların sürətləri bütün istiqamətlər üzrə bərabərimkanlı olduğundan, onlar bütün istiqamətlər üzrə və ekliptikaya bütün mümkün meyllilikləri ilə ixtiyari qaydada hərəkət etməlidirlər; bu da müşahidələrlə uzlaşır.

Komet orbitlərinin böyük ekssentrisiteti də əvvəlki hipotezdən alınır. Doğrudan da, əgər bu orbitlər elliptik formaya malikdirlərsə, onda bunlar çox uzun formalı olmalıdırlar, çünki onların böyük oxları ən azı Günəşin təsir dairəsinin radiusuna bərabərdir. Lakin bu orbitlər hiperbolik formada da ola bilər və əgər bu hiperbolaların oxları Günəşin Yerdən orta məsafəsi ilə müqayisədə çox böyük olmazsa, bu orbitləri cızan kometlərin hərəkətləri hiss olunacaq qədər hiperbolik formada görünəcəkdir. Bununla belə, elementləri artıq məlum olan yüz kometdən, məlum olduğu kimi, hər biri hiperbola üzrə hərəkət etmir; aydındır ki, hiperbolanın görünməsini yaradan şanslar əks şanslarla müqayisədə olduqca nadir olmalıdırlar.

Kometlər o qədər kiçikdirlər ki, onlar yalnız perigelidə onların birbirindən məsafələri çox olmadıqda görünə bilinirlər. Bu vaxta qədər bu məsafə Yer orbitinin diametrinin iki mislindən çox olmamışdı, əksinə, tez-tez bu orbitin radiusundan kiçik olurdu. Belə yaxın məsafədə Günəşə yaxınlaşmaq üçün onların təsir sferasına daxil olduqları andakı sürətləri, aydındır ki, dar hüdudlarda olan qiymətə və istiqamətə malik olmalıdırlar. Ehtimalların analizi vasitəsilə, bu hüdudlar çərçivəsində, görünən hiperbola verən şansların parabola ilə qarışıq salına bilinən orbit verən şanslara nisbətini təyin edərək, mən tapdım ki, Günəşin təsir sferasına daxil olan və müşahidə oluna bilinən duman ləkəsinin ya olduqca uzun formalı ellips və ya hiperbola cızması üçün bir şansa qarşı ən azı altı min şans vardır, hiperbola isə öz oxunun uzunluğuna görə müşahidə olunan hissədə parabolaya olduqca yaxınlaşır. Odur ki, heç də təəccüblü deyildir ki, bu vaxta qədər hiperbolik hərəkət tanınmamışdı.

Planetlərin cazibəsi, həm də ola bilər ki, efir mühitinin müqaviməti, bir çox komet orbitlərini böyük oxu Günəşin təsir radiusundan kiçik olan ellipslərə çevirməli idi, bu isə elliptik orbitlərin şanslarını artırır. Belə hesab etmək olar ki, belə dəyişiklik 1759-cu ilin kometi və dövretmələri müəyyən olunmuş digər bəzi kometlər üçün baş vermişdi.

İndi isə mən, Yer və onu örtən mayelərə baxacağam. Yer qatlarının düzgünlüyünü ən çox işıqlandıra bilən – onun üzərində ağırlığın dəyişilməsidir. Bu dəyişiklik eyni bir rəqqasın müxtəlif yerlərə keçirilməsilə təyin olunur, məlum zaman intervalında rəqqasın rəqsləri sayılır; yaxud saniyə

rəqqasının uzunluğunun bilavasitə ölçülməsi ilə təyin olunur. Bu sınaqlar asandır və indi olduqca dəqiq aparıla bilinər. Yer nəzəriyyəsi üçün bunlar mühüm olduğundan, onlar xüsusilə dəniz səyyahlarına tövsiyə oluna bilinər. Baxmayaraq ki, daha yaxşı nəticələr də ola bilərdi, bununla belə, artıq aparılmış sınaqlar böyük bir düzgünlüyü və ən sadə dəyişilmə qanununa yaxınlaşmanı, yəni en dairəsinin sinusunun kvadratı qanununu aşkar edir; Şimal və Cənub yarımkürələri bu mənada o qədər də fərqlənmirlər, ən azı elə bir fərq yoxdur ki, onu müşahidə xətalarına aid etmək mümkün olmasın. Əgər ölçü vahidi kimi ekvatorda saniyə rəqqasının uzunluğu götürülərsə, onda bütün bu müşahidələr, nəticə etibarilə, en dairəsinin sinus'unun kvadratına mütənasib həddin əmsalı üçün on mində əlli dörd ədədini verəcəkdir. Bu nəticəyə mənim ehtimal düsturlarımın tətbiqi nəticəsində bir şansa qarşı iki min şansdan artıq şansın olduğu alınır, bu isə onu göstərir ki, əsl əmsal beş mində birlə altı mində bir arasındadır. Əgər Yer fırlanma ellepsoidini təmsil edirsə, onda biz yüzmində 875-dən cazibə qanununun əmsalını çıxaraq, onun sıxlığını öyrənirik; beləliklə, beş mində bir əmsalı – 1/272 sıxılmasına uyğundur. Deməli, Yerin sıxılmasının bu kəsrdən kiçik olması üçün bir şansa qarşı dörd min şansdan artıq şans vardır. Yerin bircinsliyinə uyğun Yer sıxılması və Yer qatlarının sıxlığının bu planetin mərkəzinə yaxınlaşdıqca artması üçün bir şansa qarşı miyardların milyonu qədər şans olacaqdır. Yerin səthində ağırlığın müntəzəmliyi göstərir ki, bu qatlar mərkəz nöqtəsi ətrafında simmetrik yerləşmişlər. Maye vəziyyətin qaçılmaz bu iki şərti, bütün Yerin ilk əvvəl bu vəziyyətdə, – onun yalnız qeyri-adi istilik nəticəsində düşdüyü vəziyyətdə olduğunu olduqca doğruyaoxşar edir; bu isə Göy cisimlərinin yaranması haqqında bizim təsdiq etdiyimiş hipotezi təsdiqləyir.

Elmlər Akademiyasının təklifinə görə keçən yüzilliyin əvvəlində Brestdə altı il ərzində ardıcıl surətdə qabarma və çəkilmələr üzrə müşahidələr aparılmışdı. Bu növ müşahidələr üçün bu portun seçilməsi olduqca əlverişli idi. Bu port dənizlə çox böyük reydlə qurtaran kanala birləşir, bu reydin ən içəri hissəsində port salınmışdır. Beləliklə, dəniz hərəkətindəki düzgün olmamazlıqlar bu porta çatana kimi olduqca zəifləyir, gəminin düzgün olmayan hərəkəti nəticəsində barometrin borusunun daralması ilə barometrdə rəqslərin zəifləməsi kimi. Bundan başqa, Brestdə qabarma və çəkilmələr olduqca çox olduğundan, küləkdən asılı təsadüfi dəyişikliklər bu prosesə az təsir göstərir; qabarma və çəkilmələr üzərində müşahidələrdə burada elə böyük bir düzgünlük müşahidə olunur ki, onu bu portun reydində itib-batan kiçik bir çay heç bir vəhclə poza bilməz. Bu düzgünlüyə heyrətlənərək, mən dövlətə belə bir xahişlə müraciət etdim ki, Ay orbitinin düyünlərinin bütün hərəkəti dövründə Brestdə bir sıra yeni müşahidələr

aparılsın, bu xahişim isə yerinə yetirildi. Bu müşahidələrə 1806-nın iyunun 1-dən başlanıldı və indiyə qədər onlar fasiləsiz davam olunur, odur ki, bu müddət mənim qeyd etdiyim dövrün yarısını da ötür. Bu müşahidələr, mənim ehtimal düsturlarımı təbiətin ən möhtəşəm təzahürlərindən birinə tətbiq etmək üçün olduqca əlverişli şərait yaratdı və mən bundan istifadə etməyə bilməzdim. Mən tapdım ki, bunlar Ayın fazalarından, ilin fəsillərindən və Ay və Günəşin Yerdən olan məsafəsindən asılı olaraq, qabarma və çəkilmələr arasındakı müddətlər və hündürlüklərin qanunlarını böyük ehtimalla müəyyənləşdirirdi. Bu mənada bu müşahidələr ən mükəmməl surətdə yüz il əvvəl aparılmış müşahidələrlə uzlaşır. Bunlar ümumdünya cazibə qanunu ilə də elə bu dərəcədə uzlaşırlar; bu qanunu elə bu müşahidələrin köməyilə də kəşf etmək olardı.

Göy mexanikasının dördüncü kitabında bu qanunla uzlaşan, mənim verdiyim qabarma və çəkilmə nəzəriyyəsi dinamikanın bir prinsipinə əsaslanır və bu prinsip portun yerli, hesablanılması olduqca çətin şərtlərdən, bu nəzəriyyənin asılı olmamazlığını və olduqca sadə olmasını təmin edir. Ümumdünya cazibəsi, doğrudan da, dəniz qabarmaları və çəkilmələrinin əsl səbəbləridirsə, bu prinsipin köməyilə bu şərtlər bu müşahidələri bu surətdə ifadə edən analizin nəticələrinə ixtiyari sabitlər kimi daxil olur. Bir çox digər təzahürlərə də tətbiq olunan bu prinsip belədir: *cisimlər sisteminin vəziyyətində başlanğıc-ilkin hərəkət şərtləri, bu sistemin məruz qaldığı müqavimətlər nəticəsində yox olmuşlarsa, sistemin vəziyyəti, onda təsir göstərən qüvvələr kimi, periodik olaraq yenidən bərpa olunur.* Bu prinsipi çox kiçik dəyişikliklərin birgə mövcud olması prinsipinə birləşdirərək, mən qabarma və çəkilmənin hündürlüyü üçün ifadə tapdım, bu ifadədə ixtiyari sabitlər portun yerli şərtlərinin təsirini özündə ehtiva edir. Qabarma və çəkilmələrdəki çoxsaylı müxtəlifliklər və bu şərtlər nəticəsində onlardakı dəyişikliklərin hamısı bu ifadədə dəqiqliklə ifadə olunmuşdur. Bu qəbildən olan ən gözəl dəyişikliklərdən biri – sizigiya və kvadratur anlarında ən böyük və ən kiçik qabarmalar və çəkilmələrdə bir gün yarım müddət ərzində gecikmədir. Qeyd olunan ifadə göstərir ki, bu gecikmə yerli şərtlərlə əlaqədar olaraq, okeana təsir edən ulduzun hərəkət sürətindən asılıdır; həmin bu səbəb isə Brestdə Günəş və Ayın təsirinin nisbətində artım əmələ gətirir. Analiz, bu artımı təyin etmək üçün, müşahidələrin köməyilə müxtəlif üsullar verir və nəticədə bu artım təxminən əsl nisbətin səkkizdə birinə bərabərdir.

Günəş və Ayı okeandan ayıran bizim atmosferdə şübhəsiz olaraq onların göstədikləri təsir qabarma və çəkilmə təzahürlərinə oxşar dəyişikliklərə səbəb olur; lakin bu dəyişikliklər çox zəif olduqlarından onları atmosfer hərəkətləri çoxluğundan seçib ayırmaq mümkün olmadığından, qeyri-

requlyar atmosfer dəyişikliklər mühüm olmayan ekvatorda, əsas etibarilə, çox gözəl barometrlər vasitəsilə olduqca çox saylı bir sıra müşahidələr aparmaq zəruridir.

Mənim qabarma və çəkilmələr nəzəriyyəmin əsası olan prinsipimi qeyri-sabit səbəblər də qoşulan bütün təzahürlərin düzgün qanunlarına tabe olduğu hala da ümumiləşdirmək olar. Bu səbəblərin təsiri çoxsaylı təzahürlərin nəticələrində eyni bir qanuna tabe fərqlənmələr əmələ gətirir, bunu isə ehtimalların analizinin köməyilə aşkar etmək olar. Təzahürlərin sayı artdıqca bu fərqlənmələr artan ehtimalla aşkar olunur və əgər təzahürlər sayı sonsuz olsaydı, bu ehtimal yəqinliklə qovuşardı. Bu teorem, mənim sabit səbəblərin təsiri haqqında əvvəllər inkişaf etdirmiş olduğum teoremə analojidir. Beləliklə, biz gördükdə ki, gedişatı düzgün olan səbəb məlum növ hadisələrə təsir göstərə bilər, biz müşahidələri çoxaldaraq, bu səbəbin təsirini öyrənməyə cəhd göstərə bilərik və bizə belə gələrsə ki, bu təsir aşkar olunur, onda ehtimalların analizi onun varlığının və onun yəqinliyinin ehtimalını təyin edir. Odur ki, gündüzdən gecəyə keçdikdə temperatur dəyişməsi atmosfer təzyiqini və həm də deməli, barometrin hündürlüyünü dəyişə bildiyindən, təbii olaraq düşünmək olar ki, bu hündürlük üzərində Günəş istisinin təsiri aşkar olunmalıdır. Əslində də ekvatorda bu təsir, məncə göründüyü kimi lap çox olduğundan, barometrin bir günlük çox da böyük olmayan rəqsi artıq çoxdan müəyyən olunmuşdu, bu rəqsin *maximumu* səhər saat doqquza yaxın radələrdə, *minimumu* isə axşam saat dördə yaxın olur. İkinci *maximum* axşam saat onbirə yaxın, ikinci *minimum* isə səhər saat dördə yaxın olur. Bu dəyişikliklər iki millimetr arasında baş verdikdə, gecə vaxtı bunlar gündüzə nisbətən az olur. Bizim iqlimin qeyri-sabitliyi bu dəyişiklikləri bizim müşahidəçilərimizin nəzərindən yayındıra bilmədi, baxmayaraq ki, bu dəyişikliklər burada tropiklər arasındakından da azdır. Son bir neçə ardıcıl illər ərzində Ramondun apardığı çoxsaylı dəqiq müşahidələrə ehtimal düsturlarını tətbiq edərək, biz görürük ki, bunlar bu təzahürün mövcudluğunu olduqca ehtimallı edir. Bu müşahidələr ona ilin fəsillərindən asılı olan barometrin daha bir dəyişikliyini aşkar etməyə imkan yaratdı. O, qış Günəş qarşıdurmasından dərhal sonra, barometrin birinci orta aylıq hündürlüyünün *maximumunu*, birinci *minimumun* isə apreldə olduğunu tapır; ikinci *maximum* yay Günəş qarşıdurmasına yaxın vaxtda, ikinci *minimum* isə sentyabrda baş verir. Analiz bu nəticələrin doğruyaoxşar nəticələr kimi qeyd olunduğunu bizə göstərir. Bundan başqa bunlar digər müşahidələrlə də təsdiq olunur. Zaman göstərəcəkdir ki, müxtəlif iqlimlərdə eyni bir aylarda ən böyük və ən kiçik hündürlük olur. Barometrin illik və birgünlük dəyişiklikləri, şübhəsiz ki, passatlar və mussonlar kimi Yerin fırlanma

hərəkəti ilə əlaqədar Günəş istisindən asılıdırlar. Lakin bu dərəcədə mürəkkəb təzahürləri hesablamaq, demək olar ki, qeyri-mümkündür.

Ehtimalların analizi məlum səbəblərin mövcudluğunu və ya təsirini yoxlamaq üçün də tətbiq oluna bilinər, bizə belə gəlirdi ki, bu səbəblər mütəşəkkil canlılarda da nəzərə çarpır. Təbiətin nəzərə çarpmayan qüvvələrini dərk etmək üçün bizim tətbiq edə biləcəyimiz vasitələrdən ən həssası sinirlərdir, xüsusilə də, hansısa xüsusi səbəblər onların həssaslığını artırarsa. Bunların köməyilə, iki müxtəlif cinsli metalların bir-birinə toxunmasından zəif elektrikin yaranması kəşf olduqdan sonra fizik və kimyaçılar qarşısında tədqiqatçılar üçün geniş meydan açıldı. Bəzi insanlarda sinirlərin qeyri-adi həssaslığından yaranan özünəməxsus təzahürlər, hansısa yeni bir agentin, *canlı maqnetizm* adlandırılan agentin varlığı barədə müxtəlif fikirlər yaratdı, bu maqnetizmin adi maqnetizm və bəzi əsəb üzüntüləri olduqda Günəş və Ayın təsiri nəticəsində yarandığı; nəhayət, metalların və axar suyun yaxınlığından təəssüratlar təsiri nəticəsində yarandığı fərz olunurdu. Bu səbəblərin təsirinin çox zəif olduğunu və bu təsirin təsadüflər nəticəsində asanlıqla pozula biləcəyini düşünmək təbiidir, odur ki, bəzi hallarda hətta bu təsir aşkar olunmadıqda belə onun varlığını inkar etmək olmaz. Biz təbiətin bütün qüvvələrindən və onların müxtəlif təzahürlərinin bilgisindən o qədər uzağıq ki, hazırda yalnız bizim biliklərimiz çərçivəsində onların izah olunmadığı səbəbindən onları inkar etmək heç də elmi olmazdı. Onları fərz etmək nə qədər çətin olsa da, biz onları yalnız çox diqqətlə və hərtərəfli tədqiq etməliyik; məhz burada, ehtimalların hesablanması ona görə zəruri olur ki, müşahidələr və ya sınaqlar bunlarda aşkar olunan ehtimalların nə dərəcədə yaxşı olmasını müəyyən etmək üçün elə münasib vaxtda dayandırılmalıdır ki, bu ehtimallar digərlərini qəbul etməmək üçün olan əsaslardan üstün ola bilsin.

Elmlərdə tətbiq olunan, gümanlara əsaslanan metodların üstün və çatışmayan cəhətlərini ehtimalların hesablanılması ilə qiymətləndirmək olur. Məs., hər hansı bir xəstəliyin müalicəsində artıq tətbiq olunan metodlardan hansının ən yaxşı olduğunu bilmək üçün bu metodlardan hər birini eynilə oxşar şərtlərdə, eyni sayda xəstələr üzərində yoxlamaq kifayətdir; xəstələrin sayı çox olduqca, ən əlverişli metodun üstünlüyü getdikcə aşkar olunacaqdır; hesablama isə onun üstünlüyünün uyğun ehtimalını və digərlərilə müqayisədə üstünlüyünü ifadə edən münasibəti verir.

Ehtimal hesabının mənəvi elmlərə tətbiqi

Biz indicə, səbəbləri məlum olmayan və ya olduqca mürəkkəb olduğundan təsirlərini hesablamaq mümkün olmayan təbii təzahürlərin qanunlarını axtardıqda, ehtimalların analizinin faydalı olduğuna əmin olduq. Bu, mənəvi elmlərin demək olar ki, bütün obyektlərinə də aiddir. İnsan təsisatlarına gözlənilməz və ya gizli və ya qiymətləndirilməsi mümkün olmayan o qədər səbəblər təsir göstərir ki, onların nəticələri haqqında *a priori* fikir yürütmək mümkün deyildir. Zamanın hökmü ilə baş verən bir sıra hadisələr bu nəticələri açıqlayır və bunlardan zərərlilərinin qarşısını almaq üçün vasitələr də göstərir. Bu mənada mütəmadi olaraq, müdrik qanunlar tərtib olunurdu; lakin bu zaman motivlərin qorunub-saxlanılmasına etinasızlıqdan onların bir çoxu faydasız kimi hesab olunaraq ləğv olunmuşdu və bu qanunların bərpası üçün, onların zəruriliyini hiss etmək üçün acı təcrübə yaranmalıydı. Deməli, ictimai idarəetmənin hər bir sahəsində dövlətlərin böyük miqyasda keçirdikləri sınaqların uyğun sayından ibarət, tətbiq edilən müxtəlif vasitələrlə həyata keçirilən effektlərin dəqiq reyestrinin tərtib olunması olduqca mühümdür. Müşahidə və hesablamalara əsaslanan, təbii elmlərdə çox yaxşı xidmət göstərmiş metod siyasi və mənəvi elmlərə də tətbiq oluna bilinir. Maariflənmənin inkişafının qaçılmaz nəticələrinə, əksər hallarda səmərəsiz və təhlükəli olan müqaviməti göstərməyəcəyik, amma biz, yalnız olduqca ehtiyatla, bizim təsisatlarımızı və artıq çoxdan vərdiş etdiyimiz adətlərimizi dəyişdirəcəyik. Biz keçmişin təcrübəsinə görə yaxşı bilirik ki, bunlar nə qədər narahatlıqlar yaradır, lakin bununla belə biz bilmirik ki, bunların dəyişdirilməsinin verdiyi ziyan nə dərəcədə böyük ola bilər. Belə qeyri-müəyyənlikdə ehtimal nəzəriyyəsi hər cür dəyişkənlikdən yan keçməyi tövsiyə edir: xüsusilə də, gözlənilməz dəyişkənliklərdən qaçmaq lazımdır, belə ki, bunlar həm mənəvi, həm də fiziki surətdə heç bir zaman canlı qüvvənin böyük itkisi olmadan baş vermir.

Ehtimal hesabı mənəvi elmlərin bir çox predmetlərinə müvəffəqiyyətlə tətbiq olunurdu. Mən burada onun əsas nəticələrini verəcəyəm.

Şahid ifadələrinin ehtimalı haqqında

Bizim mülahizələrimizin böyük əksəriyyəti şahid ifadələrinin ehtimalına əsaslandığından, bu ehtimalı hesablamaq səyi olduqca mühümdür. Bu doğrudur ki, əksər hallarda, çətin olduğundan onların şahidlik etdikləri müşayiətedici faktorların, şəraitlərin çox saylı olması səbəbindən şahidlərin doğruçuluğunu qiymətləndirmək mümkün olmur. Lakin, əksər hallarda, qarşımıza çıxan suallarla böyük oxşarlığı olan məsələləri həll etmək mümkün olur və bunların həllinə, bizi düzgün

olmayan qərarlar verməyə sövq edən səhvlər və təhlükələrdən qoruyan və istifadə üçün yararlı bir yaxınlaşma kimi baxıla bilinər. Belə bir yaxınlaşma, əgər yaxşı yerinə yetirilmiş olarsa, ən doğruyaoxşar nəticələr sayılanlarla müqayisədə üstünlük verməlidir. Bu məqsədə çatmaq üçün bir neçə ümumi qaydanı verməyə cəhd edək.

İçərisində min ədəd kürəcik olan urndan bir nömrə çıxarılmışdır. Bu çıxarılmaya şahid olanlardan biri 79 №-li kürəciyin çıxdığını elan edir; bu nömrənin çıxma ehtimalı nəyə bərabərdir? Fərz edək ki, təcrübədən bizə məlumdur ki, bu şahid hər on dəfədən birində yalan söyləyir, odur ki, onun şahidlik ehtimalı 9/10-a bərabərdir. Belə hadisə qeyd olunmuşdur: şahid təsdiq edir ki, № 79 çıxmışdır. Bu hadisə aşağıdakı iki hipotezin nəticəsində baş verə bilər: məhz, şahid doğru söyləyir, ya da ki, o yalan söyləyir. Müşahidə olunmuş hadisələrdən çıxarılmış səbəblərin ehtimalları üçün bizim şərh etdiyimiz prinsipə görə, əvvəlcə hər bir hipotezə nəzərən bu hadisənin ehtimalı *a priori* təyin olunmalıdır. Birinci hipotezdə şahidin № 79-u elan etməsi ehtimalı eyni zamanda bu nömrənin çıxması ehtimalıdır, yəni $1/1\,000$ -dir. Bu ehtimal şahidin doğru söyləməsi ehtimalı 9/10-a vurulmalıdır; deməli, bu hipotezdə müşahidə olunmuş hadisənin ehtimalı $9/10\,000$ olacaqdır. Əgər şahid yalan söyləyirsə, onda № 79 çıxmamışdır; bu halda ehtimal $99/1\,000$ -a bərabərdir. Lakin bu nömrənin çıxdığını elan etmək üçün şahid onu çıxmamış 999 nömrə içərisindən seçməlidir; lakin şahidin nömrələri seçərkən birinə digərlərilə müqayisədə üstünlük verməsinə heç bir səbəbi olmadığından, onda onun № 79-u seçməsi ehtimalı 1/999-ə bərabərdir; bu ehtimalı əvvəlkinə vurduqda, ikinci hipotezdə şahidin № 79-u elan edəcəyi ehtimalı üçün $1/1\,000$ ədədini alırıq. Daha sonra, bu ehtimal hipotezin özünün ehtimalı 1/10-a vurulmalıdır və nəticədə bu hipotezdə bu hadisənin ehtimalı üçün $1/10\,000$ ehtimalı alınır. Əgər surəti – birinci hipotezdəki ehtimal, məxrəci – hər iki hipotezlərdəki ehtimallar cəmi olan kəsr yazarıqsa, onda altıncı prinsipə əsasən, birinci hipotezin ehtimalını almış olarıq ki, bu ehtimal da 9/10-a bərabər olardı, yəni şahidin doğruçuluğunun həmin ehtimalı alınardı. Bu ehtimal – həmçinin № 79-un çıxması ehtimalıdır. Şahidin yalan söyləməsi, № 79-un çıxmadığı ehtimalı isə 1/10-ə bərabərdir.

Əgər şahid aldatmaq istəyərək, çıxmayan nömərələr arasında № 79-un seçilməsində hər hansı cür maraqlı olsaydı; əgər o, belə hesab etsəydi ki, məs., bu nömrə üçün oyuna böyük məbləğ ortaya qoymaqla bu nömrənin çıxması ilə o, öz kreditini artıracaq, onda onun bu nömrəni seçməsi ehtimalı, əvvəlki kimi, 1/999 olmayacaqdır; bu ehtimal onun bu nöm-

rənin elan olunmasında nə dərəcədə maraqlı olmasında asılı olaraq, 1/2, 1/9 və s. ola bilər. Bu ehtimalın 1/9 olduğunu fərz edərək, onu $999/1\,000$ ehtimalına vuraraq, yalan hipotezlə müşahidə olunmuş hadisənin ehtimalını almaq üçün o, 1/10-ə də vurulmalıdır; onda ikinci hipotezdə bu hadisənin ehtimalı üçün $11/10\,000$ qiyməti alınır. Birinci hipotezin ehtimalı və ya № 79-un çıxması, onda, əvvəlki qaydaya görə, 9/120-ə bərabər olur. Deməli, № 79-un çıxdığını elan edən şahidin marağı nəzərə alınarsa, bu ehtimal olduqca kiçiləcəkdir. Doğrudur, həmin bu maraq, əgər № 79 çıxarsa, şahidin doğru söyləməsi ehtimalı 9/10-u artırır. Lakin bu ehtimal vahidi və ya 10/10-u aşa bilməz; beləliklə, № 79-un çıxması ehtimalı 10/121-dan artıq ola bilməz. Sağlam düşüncə bizə təlqin edir ki, bu maraq inamsızlıq doğurmalıdır, hesablama isə bu marağın təsirini qiymətləndirir.

Şahidin elan etdiyi nömrənin ehtimalı, *a priori* olaraq, bir bölünmüş urndakı nömrələr sayına bərabərdir; bu ehtimal, şahidliyə əsasən şahidin doğruçuluğunun özünə çevrilir; deməli, bu şahidliyin özü ilə ehtimal azala da bilinər. Əgər, məs., urnda yalnız iki nömrə olarsa, № 1-in çıxmasının *a priori* ehtimalı 1/2 olur; əgər № 1-in çıxdığını elan edən şahidin doğru elan etməsi ehtimalı 4/10-ə bərabərdirsə, onda buna əsasən, № 1-in çıxması az ehtimalla olur. Əslində, aydındır ki, bu halda həqiqətdən çox yalana meylli şahid özünün şahid ifadəsi ilə şahidlik göstəriləcək faktın ehtimalını hər dəfə, bu ehtimal 1/2-ə bərabər olduqda və ya onu aşdıqda, kiçiltməlidir. Lakin, əgər urnda üç nömrə olarsa, № 1-in çıxmasının *a priori* ehtimalı doğruçuluğu 1/3-i aşan şahidin ifadəsi ilə artır.

Fərz edək ki, urnda 999 qara və bir ağ kürəcik vardır və urndan kürəciyi çıxaran şahid ağ kürəcik çıxdığını elan edir; müşahidə olunan hadisənin birinci hipotezə nəzərən *a prori* ehtimalı, burada əvvəlki sualdakı kimi $9/10\,000$-a bərabərdir. Lakin fərz olunarsa ki, şahid yalan söyləyir, ağ kürəcik çıxmamışdır, bu halın ehtimalı $999/1\,000$-a bərabərdir. Bu ehtimal yalan ehtimalı 1/10-ə vurulmalıdır, onda ikinci hipotezlə müşahidə olunan hadisənin ehtimalı $999/10\,000$ olur. Bu ehtimal əvvəlki məsələdə yalnız $1/10\,000$-ə bərabər idi: belə böyük fərqin olması ondan asılıdır ki, qara kürəcik çıxdıqda, aldatmaq istəyən şahid üçün, əgər o, ağ kürəciyin çıxmasını elan etmək istəyirsə, çıxmayan 999 kürəcikdən seçim etmək şansı qalmır. Əgər surətləri – hər bir hipotezdəki ehtimallar, ümumi olan məxrəcləri – bu ehtimalların cəminə bərabər iki kəsrə baxılarsa, birinci hipotezin və ağ kürəciyin çıxması ehtimalı $9/1\,008$, ikinci hipotezin və qara kürəciyin çıxması ehtimalı $999/1\,008$ olardı. Bu sonuncu ehtimal yəqinliyə olduqca yaxınlaşır; o, yəqinliyə daha çox yaxınlaşar və

999 999/1 000 008 -a bərabər olardı, bu şərtlə ki, urnda milyon kürəcik və bunlardan yalnız biri ağ olsaydı, odur ki, ağ kürəciyin çıxması, bu halda daha çox qeyri-adi hadisə olardı. Buradan görünür ki, faktın özü daha da qeyri-adi olmağa başladıqca yalan ehtimalı da necə artır.

Bu vaxta qədər biz fərz edirdik ki, şahid heç vaxt səhv etmir; lakin, əgər onun səhv edə biləcəyi fərz olunarsa, onda qeyri-adi fakt daha da güman edilməz olur. Onda iki hipotez əvəzinə aşağıdakı dörd hipotez irəli sürülür, məhz: şahid yalan söyləmir və özü də səhv etmir; şahid yalan söyləmir və səhv edir; şahid yalan söyləyir və səhv etmir; və nəhayət, şahid yalan söyləyir və səhv edir. Bu hipotezlərdən hər birində müşahidə olunan hadisənin ehtimalını *a priori* təyin edərək, altıncı prinsipə əsasən tapırıq ki, göstərilən faktın yalan olduğu ehtimalı: surəti – urndakı qara kürəciklər sayının şahidin aldatmaması və səhv etməsi və ya da ki, aldatması və səhv etməməsi ehtimalları cəminə hasili olan, məxrəci – bu surət ilə şahidin aldatmaması və səhv etməməsi və ya da ki, aldatması və bununla yanaşı səhv etməsi ehtimallarının cəminə bərabərdir. Buradan aydındır ki, əgər urnda qara kürəciklərin sayı olduqca çox olarsa, ağ kürəciyin çıxması qeyri-adi hadisə olacaqdır, qeyd olunan faktın mövcud olmaması ehtimalı isə yəqinliyə olduqca yaxınlaşacaqdır.

Bu nəticənin bütün qeyri-adi faktlara şamil olunmasından belə nəticə çıxır ki, səhv ehtimalı və ya şahidin yalanı ehtimalı, baxılan fakt nə qədər qeyri-adi olarsa, o qədər böyük olur. Bəzi müəlliflər əksini iddia edirdilər, onlar ona əsaslanırdılar ki, qeyri-adi faktın forması adi faktın formasına tamamilə oxşar olduğundan, eyni bir motivlər bizi şahidə bu faktlardan hansı birinin olduğunu iddia etməsindən asılı olmayaraq, eynilə inandırmağa sövq etməlidir. Sadə sağlam düşüncə belə qəribə iddianı qəbul etmir; lakin ehtimal hesabı sağlam düşüncənin göstərişlərini təsdiq edərək, qeyri-adi faktorlar haqqında şahidlik ifadələrinin doğruyaoxşar olduğunu daha çox qiymətləndirir.

Təkid etmək və belə fərz etmək olar ki, inanılan iki şahiddən biri ifadə verir ki, o, adamı iki həftə əvvəl ölü görmüşdür, digəri isə onu dünən sap-sağlam görmüşdür. Bu faktorlardan heç biri doğruyaoxşar olmayan heç bir şeyi ifadə etmir. Birlikdə götürülən bu faktların nəticəsi bu adamın dirilməsidir; bu şahid ifadələri birbaşa o adama birbaşa təsir etmədiyindən, nəticənin qeyri-adiliyi bu faktlara göstərilən inamı heç bir vəhclə azaltmamalıdır (Encyclopédie, art. Certitude).

Lakin, əgər şahid ifadələrindən çıxarılan nəticə qeyri-mümkün olsaydı, onda onlardan biri hökmən yalan olmalıydı; qeyri-mümkün nəticə isə səhv doğruyaoxşarolmamazlığın limiti olduğu kimi, qeyri-adi nəticə – qeyri-adi

nəticələrin limitidir; qeyri-mümkün nəticə halında şahid ifadəsinin qiyməti sıfra bərabər olduğundan, qeyri-adi nəticə halında bu qiymət olduqca azalmalıdır və bu da əslində ehtimal hesabı ilə təsdiq olunur.

Bunu göstərmək üçün, birində (A-da) milyon ağ kürəcik, ikincisində (B-də) milyon qara kürəcik olan urna baxaq. Bunlardan birindən bir kürəcik çıxararaq, onu ikinci urna qoyub, sonra bu urndan bir kürəcik götürülür. İki şahiddən biri – birinci tiraja şahidlik edən, ağ kürəcik çıxdığını gördüyünü bəyan edir. Verilən ifadələrdən hər biri ayrı-ayrılıqda doğruyaoxşardır və aydındır ki, haqqında ifadə verilən faktın ehtimalı şahidin özünün doğruçuluğunu ifadə edir. Lakin şahid ifadələrindən belə nəticə çıxır ki, birinci tirajda A urnundan ağ kürəcik çıxmışdır və sonra bu ağ kürəcik B urnuna qoyulduqdan sonra, o, yenidən ikinci tirajda çıxmışdır, bu isə olduqca qeyri-adi bir nəticədir, belə ki, bu ikinci urnda bu halda bir ağ, milyon qara kürəcik olur, ona görə də, bu urndan ağ kürəcik çıxması ehtimalı $1/1\,000\,001$-ə bərabər olur. Hər iki şahid ifadələrinin ehtimallarının nəticə etibarilə zəiflənməsini təyin etmək üçün, biz qeyd etməliyik ki, burada müşahidə olunmuş hadisə, bu şahidlərdən hər birinin ağ kürəcik çıxdığının gördüyünü iddia etməsidir. Fərz olunur ki, 9/10 şahidin doğru ifadə verməsi ehtimalıdır; bu indiki halda o zaman mümkündür ki, şahid aldatmır və səhv etmir və o aldıdarsa, onda həm də səhv edir. Aşağıdakı dörd fərziyyəni irəli sürmək olar.

1) Birinci və ikinci şahid doğru ifadə vermişlər. Bu halda ağ kürəcik əvvəlcə A urnundan çıxarılmışdır və bu hadisənin ehtimalı 1/2-ə bərabərdir, çünki birinci tirajda çıxarılmış kürəcik iki urndan birindən çıxarıla bilinər. Sonra, A urnundan çıxarılmış və B urnuna qoyulmuş kürəcik yenidən ikinci tirajda çıxarıldı; bu hadisənin ehtimalı – $1/1\,000\,001$-ə bərabərdir; buna görə də, göstərilən faktın ehtimalı – $1/2\,000\,002$-ə bərabərdir. Bu ehtimalı 9/10 və 9/10 ehtimallarının hasilinə vuraraq, $81/200\,000\,200$ ehtimalını – birinci hipotezdə və şahidlərin 9/10 ehtimalı ilə doğru ifadə verdikləri halındakı ehtimalı almış oluruq.

2) Birinci şahid doğru, ikinci şahid yalan ifadə verir, ikinci şahidin doğru ifadə verməməsi ya onun aldatması və səhv etməməsi və ya da onun aldatmaması və səhv etməsi ilə bağlı ola bilər. Deməli, birinci tirajda ağ kürəcik çıxmışdır və bu hadisənin ehtimalı 1/2-ə bərabərdir. Sonra bu kürəcik B urnuna qoyulduqdan sonra, bu urndan qara kürəcik çıxarılmışdır: bu hadisənin ehtimalı $1\,000\,000/1\,000\,001$-a bərabərdir; deməli, mürəkkəb hadisənin ehtimalı $1\,000\,000/2\,000\,002$-a bərabər olur. Bu ehtimalı, birinci şahidin 9/10 ehtimalı ilə doğru, ikincinin 1/10 ehtimalı

ilə yalan ifadə verdikləri halında 9/10 və 1/10 ehtimallarının hasilinə vuraraq, ikinci hipotezdə müşahidə olunmuş hadisənin ehtimalı üçün 9 000 000/ 200 000 200 qiymətini alırıq.

3) Birinci şahid doğru ifadə vermir, ikincisi isə doğru ifadə verir. Deməli, qara kürəcik birinci tirajda B urnundan çıxmışdır, sonra isə o, A urnuna qoyulmuş və A urnundan ağ kürəcik çıxarılmışdır. Bu hadisələrdən birincisinin ehtimalı 1/2-ə, ikincisinin ehtimalı – 1 000 000/1 000 001-a bərabərdir; deməli, mürəkkəb hadisənin ehtimalı 1 000 000/ 2 000 002-a bərabərdir. Bu ehtimalı birinci şahidin 1/10 ehtimalı ilə yalan və ikinci şahidin 9/10 ehtimalı ilə doğru ifadə verdikləri halında, 1/10 və 9/10 ehtimallarının hasilinə vuraraq, uyğun hipotezdə müşahidə olunmuş hadisənin ehtimalı üçün 9 000 000/ 200 000 200 ehtimalını alırıq.

4) Nəhayət, hər iki şahid yalan ifadə verir. Deməli, birinci tirajda qara kürəcik B urnundan çıxarılmışdır, sonra o, A urnuna qoyulduqdan sonra, o, ikinci tirajda A urnundan çıxarılır. Bu mürəkkəb hadisənin ehtimalı 1/ 2 000 002-ə bərabərdir. Şahidlərin hər birinin 1/10 və 1/10 ehtimallarının hasilinə vuraraq, bu hipotezdə müşahidə olunan hadisənin ehtimalı üçün 1/ 200 000 200 ehtimalını alırıq.

İndi isə iki şahid ifadəsinin ehtimalını, yəni hər bir tirajda ağ kürəcik çıxması hadisəsinin ehtimalını müəyyən etmək üçün birinci hipotezə uyğun ehtimal dörd hipotezin hamısına uyğun ehtimallar cəminə bölünməlidir və nəticədə bu ehtimal üçün olduqca kiçik kəsr – 81/ 18 000 082 ədədi alınır.

Əgər iki şahiddən birincisi ağ kürəciyin A və B urnundan birindən çıxarıldığını; ikincisi də ağ kürəciyin oxşar surətdə A və B urnlarından birindən çıxarıldığını təsdiq etsəydilər, hər iki şahidin ifadələrinin ehtimalı onların şahidlik ehtimallarının hasilinə və ya 81/100-ə bərabər olardı: deməli, bu ehtimal, heç olmasa, yüz səksən min dəfə əvvəlki ehtimaldan çox olardı. Buradan aydın görünür ki, iki şahid ifadəsinin qeyri-adi nəticəsi – birinci tirajda ağ kürəcik çıxdığı halda, birinci haldakı kimi ikinci tirajda ağ kürəciyin çıxması kimi qeyri-adi nəticə, – iki şahid ifadəsinin əhəmiyyətini nə dərəcədə azaldır.

Biz, yüz zərin atılmasında bütün zərlərin eyni üzlə düşməsinə şahidlik edən bir şəxsə inanmazdıq: əgər biz özümüz bu hadisənin şahidi olsaydıq, biz öz gözlərimizlə gördüyümüzə inanardıq, yalnız bundan sonra bütün şərtləri diqqətlə yoxlayardıq və bundan sonra da hər hansı bir şəxsi də şahidlik etməyə dəvət edərdik ki, gördüyümüzə tamamilə əmin olaq ki,

burada heç bir qallyusinasiyalara, heç bir fokusa yol verilməmişdir; amma bütün bunlardan biz, tərəddüd etmədən, bu hadisənin fövqəladə qeyri-doğruyaoxşar olmasına baxmayaraq, onu qəbul edərdik və heç bir kəs onun izahı məqsədilə görmə qanunlarının inkar olunmasına cəhd belə göstərməzdi. Buradan biz nəticə çıxarmalıyıq ki, təbiət qanunlarının sabitliyinin ehtimalı bizim üçün qeyd olunan hadisənin baş verə bilməyəcəyi ehtimalından üstündür, o ehtimaldan ki, o, öz növbəsində şübhə doğurmayan əksər tarixi faktların ehtimalından üstündür. Buna əsaslanaraq, şahid ifadələrinin nə dərəcədə olduqca böyük çəkiyə malik olması barədə mühakimə yürütmək olar, çünki sonra təbii qanunların pozulduğunu etiraf etmək mümkün olsun və bu halda tənqidin adi qaydalarının pozulduğunu etiraf etmək mümkün olsun və bu halda tənqidin adi qaydalarının tətbiqi sui-istifadə kimi qiymətləndirilə bilinsin. Belə ciddi şahid ifadələrini təqdim etməyənlərin hamısı bu qanunlara zidd olan və onların nümayiş etdirdikləri hadisələri müdafiə edirlər, əslində isə onların tələqin etmək istədiklərinə inam artmaq əvəzinə zəifləyir, çünki bu halda bu hekayələr bu müəlliflərin səhvə yol verdiklərini və ya yalanını çox ehtimallı edir. Maariflənmiş insanların inamını azaldan nə varsa, həmişə möcüzə gözləyən qara camaatın inamını əksər hallarda çoxaldır.

Elə şeylər var ki, onların qeyri-doğruyaoxşarlığını heç bir şey şübhə altına qoya bilməz; lakin hökmran baxışların təsiri altında bu qeyri-doğruyaoxşarlıq o dərəcədə zəif ola bilər ki, şahid ifadələrinin ehtimalından kiçik görünə bilinər; bu baxışlar dəyişdikdə, o əsrdə bir səslə qəbul olunmuş, bu baxışın doğurduğu cəfəngiyat məhz sonrakı əsrlər üçün ən yaxşı əqllərə ümumi fikrin böyük təsirinin yeni sübutu kimi görünəcəkdir. XIV Lyudovik əsrinin iki dahi şəxsi – Rasin və Paskal buna olduqca gözəl nümunədir. İnsan qəlbinin gözəl rəssamı və bütün şairlərdən ən mükəmməli Rasinin, Port-Royal abbatlığının keçmiş pansioneri və Paskalın bacısı qızı (qardaşı qızı) gənc Peryenin guya ki, çox yaxşı sağalması haqqında nə cür canfəşanlıqla danışdığını görmək təəssüf doğurur; bu haqda Paskalın mülahizələrini oxumaq çox ağırdır, o, bu mülahizələrilə isbat etməyə çalışır ki, bu möcüzə din üçün zəruri idi ki, bu abbatlığın o zamanlar iyezuitlərin təqibinə məruz qalmış rahibə qadınların doktrinasına haqq qazandıra bilsin. Gənc Perye artıq üç il yarım idi ki, göz yaşının fistulasından əziyyət çəkirdi, o, öz xəstə gözü ilə guya ki, Xilaskarın çələng tikanı olan müqəddəs tütyaya toxunduğu anda özünü sağalmış hiss etmişdi. Bir neçə gündən sonra həkimlər və cərrahlar sağalmanı təsdiq etmişdilər, onların fikrincə bu hadisədə nə təbiətin, nə dərmanların iştirakı olmamışdır. 1656-da baş vermiş bu hadisə çox böyük səs-küyə səbəb olmuşdu; Rasinin dediyi kimi, «bütün Paris» «Port Royala axışdı». Hər gün insan axını çoxalırdı və

belə təəssürat yaranırdı ki, bu kilsədə baş verən möcüzələr sayının çoxluğu xalqın mömünliyini artırmaq üçün elə Allahın özünə də xoş idi. Hələ o vaxtlar möcüzələr və sehrbazlıq inanılmaz görünmədiyindən və bunlara təbiətdəki bütün qəribəliklər şübhə edilmədən şamil olunduğundan, onları başqa cür izah edə bilmirdilər.

Qeyri-adi təzahürlərə bu baxışa XIV Lyudovik əsrinin ən gözəl əsərlərində təsadüf olunur, hətta müxtəlif razılaşmaları nəzərdə tutan, müdrik Lokk insan idrakı haqqında «Təcrübə» əsərində deyir ki: «ümumi təcrübə və şeylərin adi axarının insan əqlinə təsir göstərməyə tam əsası olduğuna baxmayaraq, bu razılaşmada nəyə inanmaq, nəyi isə inkar etməklə razılaşmağa onları sövq etmək üçün, bununla belə, elə hallar da olur ki, faktdakı qəribəlik bu faktın əsasına xidmət edən əsl şahidliyə bizim göstərəcəyimiz inamı heç də azaltmır. Əgər fövqəladə hadisələr verilən şəraitdə və verilmiş zamanda təbiətdə şeylərin axarını dəyişmək iqtidarında olan şəxsin qarşısına qoyduğu məqsədlərə uyğun olursa, onda bizim ağlımız, bunlara, bunlarla ziddiyyətin olması çoxaldıqca və ya bunlar adi müşahidələrdən də üstün olduqca, böyük inamla yanaşa bilər». Beləliklə, idrakın əsas etibarilə öz proqresinə səbəb olan şahid ifadələrinin ehtimallarının gerçək prinsipləri, filosoflar tərəfindən qəbul edilmədiklərindən, mən bu məsələ üçün hesablama nəticələrini geniş surətdə şərh etməyi özümə borc bildim.

Burada Paskalın məhşur arqumentini araşdırmaq yerinə düşərdi, bu arqumentə ingilis riyaziyyatçısı Kreq tərəfindən həndəsi forma verilmişdi. Bir neçə şahid belə ifadə verir ki, Allahın özü tərəfindən onlara ayan olmuşdur ki, hər hansı məlum şeylə razılaşaraq, bir və ya iki deyil, sonsuz sayda xoşbəxt günlərdən həzz almaq mümkündür. Şahid ifadələrinin ehtimalının kiçik olmasına baxmayaraq, əgər bu ehtimal sonsuz kiçik olmazsa, aydındır ki, bununla razılaşan kəslərin qazancı sonsuz böyükdür, çünki bu qazanc bu ehtimalın sonsuz mənfəətinə hasilidir: buna görə də, bu qazancı əldə etməkdə tərəddüd etmək belə olmaz.

Bu arqument Allahın adı ilə şahidlərin vəd etdikləri xoşbəxt günlərin sonsuz sayda olacağına əsaslanmışdı. Deməli, onların dedikləri yerinə yetirilməli idi, məhz ona görə ki, onlar öz vədlərində bütün hədləri, sağlam düşüncəyə zidd nəticəni aşırdılar. Hesablama isə bizə göstərir ki, vədlərin məhz belə şişirdilməsi, şahid ifadələrinin ehtimalını o qədər zəiflədir ki, bu şişirtmə ehtimalı sonsuz kiçik edir və ya sıfra çevirir. Əslində bu hal ona gətirir ki, bu halda şahid çoxlu nömrələr olan urndan yalnız bir nömrə çıxarıldıqda onun ən böyük nömrə olduğunu elan etsin; digər tərəfdən bu şahidin bu nömrənin çıxmasını elan etməsində çox maraqlı olduğu da məlumdur. Biz əvvəl gördük ki, onun maraqlılığı bu şahidliyin qiymətini nə

dərəcədə azaldır. Şahid əgər yalan söyləyirsə, 1/2-lə onun ən böyük nömrəni götürəcəyi ehtimalını qiymətləndirərək, biz hesablamadan sonra alarıq ki, onun elan etdiyinin ehtimalı – surəti vahidə, məxrəci isə vahid üstəgəl *a priori* baxılan və ya elan ediləndən asılı olmayaraq, yalan ehtimalının nömrələr sayına hasilinin yarısına bərabər olan kəsrdən kiçikdir. Bu hal ilə Paskalın arqumenti aid olan hal arasında müqayisə aparmaq üçün urnun nömrələrini xoşbəxt həyatların bütün mümkün ədədlərilə göstərmək kifayətdir, nəticədə bu nömrələrin sayı sonsuz olur və qeyd olunmalıdır ki, əgər şahidlər yalan ifadə verirlərsə, bununla onlar üçün ən əlverişli hal əbədi səadət vəd etməkdir, çünki onda onlar öz yalanlarını sənədləşdirmiş olurlar. Onların verdiyi ifadələrin ehtimalının ifadəsi bu halda sonsuz kiçik olur. Bu ehtimalı vəd olunmuş xoşbəxt günlərin sonsuz sayına vurduqdan sonra, sonsuzluq hasildə itir, yox olur, bu hasil bu vəddən doğan mənfəəti ifadə edir ki, bu da Paskalın arqumentini alt-üst edir.

İndi isə müəyyən bir fakta aid bir neçə şahid ifadələri toplusunun ehtimalına baxaq. Müəyyənlik üçün fərz edək ki, bu fakt – içərisində yüz nömrə olan urndan yalnız bir nömrə çıxarılmasıdır. Bu tirajın iki şahidi elan edir ki, № 1 çıxmışdır və bu şahid ifadələrindən alınan ehtimal təyin olunmalıdır. Aşağıdakı iki hipotezi fərz etmək olar: şahidlər doğru söyləyirlər və şahidlər yalan söyləyirlər. Birinci hipotezdə № 1 çıxmışdır və bu hadisənin ehtimalı 1/100-ə bərabərdir. Bu ehtimalı 9/10 ehtimalı ilə doğru söyləyən şahidin və 7/10 ehtimalı ilə doğru söyləyən digər şahidin doğruçuluq ehtimallarına vurmaq lazımdır: beləliklə, bu hipotezdə müşahidə olunan hadisənin ehtimalının 63/10 000 olduğunu alırıq. İkinci hipotezdə № 1 çıxmamışdır və bu hadisənin ehtimalı 99/100-a bərabərdir. Onda şahidlərin razılaşdırılmış ifadələri belə tələb edir ki, aldatmaq üçün onların hər ikisi çıxmamış 99 nömrədən № 1-i seçmişlər: bu seçimin ehtimalı 1/99 kəsrinin özünə hasilinə bərabərdir; sonra bu iki ehtimalı bir-birinə vurduqdan sonra, bu hasili də şahidlərin aldatma ehtimalları 1/10 və 3/10-ə vurmaq lazımdır, beləliklə də, ikinci hipotezdə müşahidə olunmuş hadisənin ehtimalı üçün 1/330 000 qiymətini alırıq. Birinci hipotezə uyğun ehtimalı hər iki hipotezə uyğun ehtimalların cəminə bölərək, şahidlik olunan faktın və ya № 1-in çıxması ehtimalını tapırıq. Bu ehtimal, beləliklə, 2 079/ 2 080 olacaqdır, nömrənin çıxmaması ehtimalı və şahidlərin yalan ifadələri ehtimalı isə 1 / 2 080 olacaqdır.

Əgər urnda yalnız 1-ci və 2-ci nömrələr olsaydı, onda biz həmin bu qayda ilə № 2-nin çıxması ehtimalının 21/22 olduğunu və deməli, şahidlərin yalan ifadələri üçün 1/22 ehtimalını almış olardıq, bu ehtimal

əvvəlki ehtimaldan heç olmasa doxsan dörd dəfə böyükdür. Buradan aydın olur ki, şahidlərin yalan ifadə vermələri ehtimalı, onların şahidlik edəcəkləri fakt özlüyündə az ehtimallı olduqda, necə kiçilir. Əslində, aydındır ki, əgər şahidlər aldadırlarsa, şahid ifadələrinin öz aralarında razılığı, əgər onlar bir-birilə şərtləşməmişdirlərsə və biz bu halı burada fərz etmədiyimizi də nəzərə alarıqsa, az ehtimal olunan haldır.

Əvvəlki halda, urnda yalnız iki nömrə olduqda və buna görə də, göstərilən faktın ehtimalı *a priori* 1/2 olduğundan, şahid ifadələri nəticəsində alınan ehtimal – şahidlərin doğruçuluqları ehtimallarının hasilinin, bu hasil ilə onların uyğun yalan ehtimallarının hasilinin cəminə nisbətinə bərabərdir.

Bundan sonra biz kimlərinsə verdikləri bir sıra şahid ifadələrinin faktların ehtimalına zamanın etdiyi təsirə baxmalıyıq. Şahid ifadələrinin bu sırası uzandıqca, aydındır ki, bu ehtimal azalmalıdır. Əgər fakt özü-özlüyündə tamamilə ehtimal olunmayandırsa, onda bu faktın şahid ifadələrindən sonra alacağı ehtimal, şahidlərin doğruçuluq ehtimallarının hasili ilə birlikdə, azalır. Əgər fakt özü-özlüyündə ehtimala malikdirsə, əgər, məs., bu fakt – içərisində sonlu sayda nömrələr olan urndan, yəqinliklə, bir nömrənin çıxması məlum olduqda № 2-nin çıxması faktı olarsa; kimlərinsə verdiyi şahid ifadələrinin bu ehtimalla verə biləcəyi əlavə ilə bu hasil bu ehtimal ilə azalırsa və bu hasilin birinci vuruğu urndakı nömrələr sayından bir vahid az olan ədədin həmin nömrələr sayına nisbətinə bərabər; digər vuruqlardan hər biri, hər bir vuruq isə hər bir şahidin doğruçuluq ehtimalının, onun yalanı ehtimalının urndakı nömrələr sayından bir vahid əskik ədədə nisbəti qədər az olan ədədə bərabərdirsə, onda faktın ehtimalının limiti, *a priori* və ya şahid ifadələrindən asılı olmayaraq, baxılmış bu faktın limitidir, bu ehtimal bir bölünmüş urndakı nömrələr sayına bərabərdir.

Buna görə də, zamanın göstərdiyi təsir tarixi faktların ehtimalını aramsız olaraq azaldır, necə ki, zamanın təsiri ən möhkəm abidələrdə belə öz izini qoyur. Doğrudur, bu təsiri şahid ifadələrini və onların söykəndiyi abidələri qoruyaraq və çoxaldaraq yavaşıtmaq olar. Bu məqsəd üçün ən möhtəşəm vasitə – bədbəxtlikdən, qədim dövr insanına məlum olmayan kitab nəşridir. Kitab nəşrinin yaratdığı sonsuz saylı üstünlüklərə baxmayaraq, Yer səthinin zamanın qaçılmaz təsiri ilə həmişəlik məruz qaldığı fiziki və mənəvi inqilablar onunla nəticələnəcəkdir ki, minilliklər ötdükcə indi yəqin görünən tarixi faktlar şübhə doğuracaqdır.

Kreq xristian dininin dəlillərinin tədricən zəifləməsini hesablamağa cəhd göstərmişdi: o fərz etmişdi ki, dünyanın sonu o vaxt baş verəcəkdir ki, bu din öz ehtimalını itirmiş olsun, o tapır ki, bu onun hesablamasından 1454 il

sonra baş verəcəkdir. Lakin onun analizi, dünyanın varlığının davamı haqqındakı hipotez qəribə olduğu qədər səhvdir.

Seçkilər və iclasların qərarları haqqında

Hər hansı iclasın qərarlarının ehtimalı bu iclası təşkil edən üzvlərin səs çoxluğundan, onların maariflənmiş olub-olmadığından və onun üzvlərinin qərəzsizliyindən asılıdır: bu qərarlara o qədər xüsusi maraq və istəklərin təsiri olur ki, bu ehtimalı hesablamaq mümkün olmur. Bununla belə, sadə sağlam düşüncə və hesablanma ilə təsdiq olunmuş bir neçə ümumi nəticələr vardır. Məs., əgər iclasda baxılan məsələ ilə əlaqədar onun üzvləri az məlumatlı olarsa, bu məsələ üçün çox incə mülahizələr tələb olunarsa və ya bu bənddə həqiqət məlum mühakimələrə ziddirsə, səs verən hər bir kəsin həqiqətdən yayınması bir şansa qarşı birdən çox şansın olması ilə baş verərsə, onda əksər çoxluğun qərarının çox pis olacağı güman olunur, bu mənada gözlənilən təhlükə iclas üzvlərinin sayı çox olduqca daha da doğru sayılacaqdır. İctimai maraq xatirinə iclasda, yalnız onun üzvlərinin böyük əksəriyyəti üçün anlaşılan məsələlərə baxılmalıdır; olduqca mühümdür ki, maariflənmə hər tərəfli olsun və ağla, təcrübəyə əsaslanmış yaxşı kitablar özükimilərin taleini həll edənləri və ya onları idarə edənləri düzgün istiqamətləndirsinlər və onları yalnış baxışlardan və cahil əqidələrdən qorusunlar. Alimlər tez-tez müşahidə edirlər ki, ilk təəssürat çox vaxt aldadıcı olur və həqiqət, gerçək olan, həmişə doğruyaoxşar olmur.

İclas üzvlərinin fikir müxtəlifliyi halında iclasın iradəsini öyrənmək və müəyyənləşdirmək çətin olur. Adi iki hala baxaraq, qeyd etdiyimizə nəzərən bir neçə qaydanı verməyə çalışaq: bir neçə namizəd arasında seçim və eyni bir mövzuya aid olan bir neçə təklif arasında seçim.

Bir və ya bir neçə eyni tip yerə namizəd olan bir neçə nəfər arasında iclas seçim etməlidirsə, səs verən şəxsin namizədlərin adlarını onların layiq olduğu qayda ilə yazması ən sadə üsul hesab oluna bilinər. Əgər fərz edilərsə ki, o, bu adları siyahıda vicdanla yerləşdirir, onda bu siyahılar olan vərəqlərə baxdıqda, namizədlərin öz aralarında hansı üsulla müqayisə olunmasına baxmayaraq, seçkinin nəticələri aşkar olunacaqdır, odur ki, yeni seçkilər bu baxımdan heç bir şeyi dəyişdirməyəcəkdir. Bundan sonra üstünlük qaydası müəyyən olunmalıdır, bu qayda namizədlər üçün siyahıları müəyyənləşdirir. Fərz edək ki, hər bir seçiciyə içərisində sonsuz sayda kürəcik olan urn verilmişdir, bu kürəciklər vasitəsilə o, namizədlərə aid olan bütün cəhətləri qeyd edə bilir; bir də fərz edək ki, o, öz urnundan hər bir namizədin üstün cəhətinə mütənasib sayda kürəcik çıxarır və fərz edək ki, ədəd siyahı vərəqində namizədin adının yanında yazılmışdır. Aydındır ki,

hər bir namizədin hər bir siyahı vərəqindəki adının qarşısındakı ədədlərin hamısının cəmi təyin olunduqdan sonra, ən böyük cəmi almış namizəd iclasın layiq bildiyi namizəd olacaqdır və ümumiyyətlə, namizədlərin üstünlüyü qaydası onlardan hər birinə aid olan cəmlərin düzülüşü qaydası olacaqdır. Lakin siyahı vərəqlərində hər bir seçicinin namizədlərə verdiyi kürəciklər sayı qətiyyən qeyd olunmur; bunlarda, yalnız, birinci namizədin ikincidən çox, ikinci namizədin üçüncüdən çox və s. kürəcik saylarının qeyd olunduğu göstərilir. Deməli, əgər baxılan siyahı vərəqində birinci namizədin qarşısında hər hansı kürəciklər sayı yazılarsa, onda əvvəlki şərtləri ödəyən kiçik ədədlərin bütün birləşmələri eyni cürə mümkündür; beləliklə, biz hər bir kombinasiyanı təşkil edən bütün ədədlərin cəmini təyin edərək və onu bütün kombinasiyalar sayına bölərək hər bir namizədin kürəciklərinin sayını alarıq. Çox sadə analiz göstərir ki, hər bir vərəqdə sonuncu adın, sonuncudan əvvəlki adın və s. yanında yazılmalı olan ədədlər 1, 2, 3, … ədədi silsiləsinin hədlərinə mütənasibdirlər. Biz hər bir vərəqdə bu silsilənin hədlərini bu qayda ilə yazsaq və hər bir namizədə bu vərəqlərdəki hədləri əlavə etsək, onda müxtəlif cəmlər özünün qiyməti ilə namizədlər arasında müəyyən olunacaq üstünlük qaydasını göstərəcəkdir. Ehtimal nəzəriyyəsinin göstərdiyi seçki üsulu belədir. Əgər hər bir seçici öz vərəqində namizədlərin adını bu namizədlərin layiq olduğu üstünlüklərinə görə sıra ilə yazsaydı, bu üsul, şübhəsiz ki, ən yaxşı üsul olardı; lakin xüsusi maraqlar və üstünlükləri nəzərə almayan bir çox yad mülahizələr bu qaydanı pozacaqdır və bəzən belə məcburiyyət yaranacaqdır ki, üstünlük verilən namizəd axırıncı yerdə olacaqdır, bu isə ən təhlükəli hala – orta üstünlüyü olan namizədlərə olduqca böyük üstünlük verilməsinə səbəb olacaqdır. Buna görə də, belə təcrübənin qəbul edildiyi müəssisələrdə bu qaydadan imtina olundu.

Səslərin tamamilə böyük əksəriyyəti üzrə aparılan seçkilər bu əksəriyyətin səs vermədikləri namizədlərdən heç birinin keçə bilməyəcəyi ilə yanaşı belə bir üstünlüyü də ifadə edir ki, bu əksəriyyət iclasın iradəsini ifadə edir. Seçkilər yalnız iki namizəd olduğu halda əvvəlki üsulla həmişə üst-üstə düşür. Doğrudur, bunlar elə namünasiblik yaradır ki, seçkiləri sonsuz edir, lakin bununla belə təcrübə göstərmişdir ki, bu namünasiblik yox olur və seçkilərə son qoymaq üçün ümumi bir arzu bir namizəd ətrafında səslərin əksəriyyətini birləşdirir.

Hər hansı bir əşyaya aid olan bir neçə təklifdən birinin seçilməsi, belə çıxır ki, bir neçə namizəd arasında seçimin qaydaları kimi olmalıdır. Lakin bu iki hal arasında fərq vardır, belə ki, bir namizədin üstün cəhətləri onun rəqiblərinin üstün cəhətlərini istisna etmir; amma bir-birinə zidd

təkliflərdən birini seçdikdə, bir təklifin doğruluğu digərlərin doğruluğunu istisna edir. Bu halda məsələyə aşağıdakı kimi baxılmalıdır.

Hər bir seçiciyə bir urn verək; bu urn içərisində sonsuz sayda kürəcik vardır və fərz edək ki, o, bu kürəcikləri müxtəlif təkliflər arasında bunlara verdiyi ehtimallara uyğun olaraq, mütənasib surətdə paylayır. Aydındır ki, kürəciklərin hamısının sayı yəqinliyi ifadə edirsə, seçici isə fərz olunduğuna görə əmindirsə ki, təkliflərdən biri doğrudur, o, bu ədədi (sayı) təkliflər arasında paylaşdırır. Beləliklə, məsələ kürəciklərin yerləşdirilməsi üçün birləşmələr sayının təyin olunmasına gətirilir ki, bu halda siyahı vərəqində birinci təklif üçün kürəciklər ikincidən, ikinci üçün, üçüncü üçün olduğundan daha çox olmalıdır; bu ona görədir ki, bu müxtəlif birləşmələrdə hər bir təklifə aid bütün kürəciklər sayının cəmini təyin etmək, bu cəmi bu birləşmələrin sayına bölmək üçün: alınan nisbətlər hər hansı siyahı vərəqindəki təklifə aid göstərici kimi yazılan ədədi ifadə edəcəkdir. Analizin köməyilə biz tapırıq ki, axırıncı təklifdən başlayaraq, birinciyə çatmaq üçün bu nisbətlər bir-birilə aşağıdakı kəmiyyətlər kimi nisbətdə olur: 1) vahid bölünmüş təkliflərin sayı; 2) bir vahid artırılmış əvvəlki kəmiyyət bölünmüş bir vahid az təkliflər sayı; 3) bir vahid artırılmış bu ikinci kəmiyyət bölünmüş iki vahid az təkliflər sayı və s. Bu kəmiyyətləri hər bir vərəqdə onların aid olduqları təkliflərin yanında yazaraq, müxtəlif vərəqlərdəki eyni bir təklifə aid bütün kəmiyyətləri toplayaraq, iclasın bu təkliflərə verdiyi üstünlüyü və öz qiyməti ilə qaydanın göstəricisi olan cəmi almış oluruq.

İclasları yeniləşdirmək, yəni müəyyən olunmuş bir neçə ildən sonra onları tamamilə dəyişdirmək haqqında bir neçə söz deyək: bu yeniləşmə birdən-birə olmalıdırmı və ya bu illər ərzində həyata keçirilməlidirmi? İclas, bu qaydaya görə, o vaxtlar hökmran olan müxtəlif fikirlərin təsiri altında təşkil olunmalıydı, onda bu iclasda hökmran olan rəy, bütün bu fikirlər arasında çox güman ki, orta bir fikir olardı. Beləliklə, zaman ötdükcə, iclas onun üzvlərinin təmsil etdiyi ərazinin bütün hissələrində seçkilərin təşviqatının ona verə biləcəyi qədər üstünlük əldə edə bilərdi. Əgər onu nəzərə alarıqsa ki, təcrübə də çox yaxşı göstərmişdi ki, seçkilər həmişə hökmran baxışların ən şişirdilmiş mənasında istiqamətlənir, onda biz bu baxışların bəzilərini digərlərilə qismən yeniləşdirməklə onları cilovlamağın necə də faydalı olduğunu görərdik.

Məhkəmə qərarlarının ehtimalı haqqında

Sadə sağlam düşüncənin bizə təqlin etdiyi analiz də sübut edir ki, məhkəmənin tərkibi çoxsaylı və hakimlər daha maarifli olduqca məhkəmə

qərarlarının yumşaqlığı daha çox ehtimallı olur. Buna görə də, apellyasiya məhkəmələrinin bu iki şərti ödəmələri məqsədəuyğun olardı. Məhkəmənin müttəhimə daha yaxın olan birinci instansiyaları ehtimal olunan ilkin hökmün xeyri barədə onları xəbərdar edir və onlar çox vaxt ya razılığa gəlirlər, ya da ki, öz iradlarından əl çəkirlər. Lakin əgər məhkəmə çəkişməsinin mövzusunda inamsızlıq və onun mühümlüyü iddiaçını apellyasiya məhkəməsinə müraciət etmək məcburiyyətində qoyursa, iddiaçı böyük ehtimalla ədalətli hökm, öz sağlamlığı üçün böyük təhlükəsizlik, yeni prosesin doğuracağı görüləsi işlər və məsrəflər üçün təzminat almağa nail olmalıdır. Məhz bu, dairə məhkəmələrinin (tribunaux de département) qarşılıqlı apellyasiya institutunda yerinə yetirilmirdi, bu institut, buna görə də, vətəndaşların maraqlarına çox ziyan verirdi. Bəlkə də, ehtimalların hesablanması ilə, apellyasiya məhkəmələrində aşağı məhkəmənin hökmünü ləğv etmək üçün, heç olmasa iki səs çoxluğunu tələb etməyi razılaşdırmaq lazım idi. Əgər cüt sayda hakimlərdən ibarət apellyasiya məhkəmələrində səslərin bərabərliyi halında qərar qüvvədə qalsaydı, onda bu nəticə alına bilinərdi.

Mən xüsusən cinayət işləri üzrə qərarlara baxacağam.

Şübhəsiz ki, müttəhimi cəzalandırmaq üçün hakimlər onun törətdiyi cinayəti sübut edən ən güclü dəlillərə malik olmalıdırlar; lakin mənəvi isbat həmişə yalnız fərziyyədir və təcrübə olduqca yaxşı göstərmişdir ki, hətta ən ədalətli sayılan cinayət hökmlərində nə cür səhvlər ola bilir. Ölüm hökmünün ləğvinə tərəfdar olan filosoflar üçün bu səhvləri düzəltmək mümkünlüyü ən əsas arqumentdir. Beləliklə, biz riyazi aşkarlığı gözləməli olsaydıq, məhkəmə təxirə salınmalı idi. Cinayətin cəzasızlığı ilə baş verə bilən təhlükə isə bizi mühakimə etməyə vadar edir. Bu məhkəmə, mən səhv etmirəmsə, aşağıdakı məsələnin həllinə gətirilir: müttəhimin təqsirinin sübutu zəruri olan ən böyük ehtimala malikdirmi ki, vətəndaşlar məhkəmənin səhvlərilə: əgər ittiham olunan şəxs günahsızdırsa və cəzalandırılmışdırsa, əgər o günahkardırsa və bəraət qazanmışdırsa, onun cəzalandırılması onun yeni cinayətlərinə və bundan nümunə götürən bədbəxtlərin də cinayətlərinə səbəb ola biləcəyi kimi hallarla daha az üzləşsinlər. Bu məsələnin həlli çox böyük çətinliklə dərk olunan bir çox elementlərdən asılıdır: cinayətkar cəzasız qalarsa, cəmiyyəti qorxuya salan təhlükənin sovuşmadığı gündəmdə olur. Bu təhlükə bəzən o qədər böyük olur ki, magistrat cəzasızlığı qorumaq üçün düşünülmüş surətdə müəyyən olunmuş formalardan imtina etmək məcburiyyətində qalır. Söhbəti gedilən bu məsələni, demək olar ki, həllolunmaz edən amil – müttəhimin mühakimə olunması üçün zəruri olan ehtimalı təyin etməyin və müqəssirin törətdiyi əməlin ehtimalını dəqiq qiymətləndirməyin mümkünsüzlüyüdür. Hər bir hakim belə hallarda öz taktına müraciət etməlidir: o, müxtəlif şahid ifadələrini

və cinayətin müşayiət olunduğu vəziyyətləri öz mülahizələri və öz təcrübəsinin nəticələri ilə müqayisə edərək, öz fikrini qərarlaşdırır; bu halda ifadə almaqda və müttəhimlərin mühakimə edilməsində qazanılan uzun təcrübə, çox vaxt bir-birinə zidd ifadələr arasında gerçəyi aşkar etmək üçün böyük üstünlüklər verir.

Bundan başqa, əvvəlki məsələ cinayətə verilən cəzanın ölçüsündən asılıdır, belə ki, aydındır ki, ölüm hökmü üçün dəlil-sübutların bir neçə aylıq həbs qərarına görə lazım ola bilən dəlil-sübutlardan daha tutarlı olması tələb olunur. Bu, cəzanın cinayət ilə müvafiqliyi lehinə səbəbdir, belə ki, yüngül cinayətə verilən ağır cəza bir çox günahkara bəraət vermək zərurətinə səbəb olacaqdır. Cinayət ehtimalının onun ağırlıq ölçüsünə hasili təhlükə ölçüsüdür, bu ölçü cəmiyyəti cinayətkara bəraət vermək məcburiyyətinə sövq edə bilər, onda belə qənaətə gəlmək olar ki, cəza bu ehtimaldan asılıdır. Bu bilavasitə məhz məhkəmələrdə yerinə yetirilir, bu məhkəmələrdə müttəhim müəyyən müddət saxlanılır; bu şəxsin əleyhinə tutarlı dəlillər olur, lakin bunlar onun məsuliyyətə cəlb olunması üçün yetərli olmur. Yeni dəlil-sübutlar toplamaq niyyəti ilə, onu heç də həmən öz əhatəsindəki vətəndaşların arasına qaytarmırlar, çünki o, öz çevrəsi üçün yenidən narahatlıq yarada bilərdi. Lakin bu ölçünün ixtiyariliyi və ondan sui-istifadə fərdi azadlığa böyük dəyər verən ölkələrdə bu ölçünü atmağa məcbur etmişdi.

Belə olan halda, yalnız böyük çoxluqla cəzalandıra bilən məhkəmənin qərarının ədalətli olacağı ehtimalı nəyə bərabərdir, yəni bu qərar yuxarıda qoyulmuş sualın düzgün həllinə uyğun olacaqmı? Bu mühüm məsələnin yaxşı həll olunması müxtəlif məhkəmələri bir-birilə müqayisə etməyə bir vasitə olardı. Məhkəmənin çoxsaylı tərkibi halında çoxluq yalnız bir səslə ifadə olunduqda, baxılan məsələ ən azı şübhə doğurur. Bu halda müttəhimin məsuliyyətə cəlb olunması onun günahsızlığını qoruyan humanizm prinsiplərinə zidd olardı. Hakimlərin həmrəyliyi ədalətli hökm üçün ehtimalın çox böyük olmasına səbəb olardı; lakin belə qərarın məcburiliyi çox günahkarın bəraət almasına da səbəb ola bilərdi. Buna görə də, ya əgər onların həmrəyliyi arzuolunandırsa, hakimlərin sayı azaldılmalı və ya məhkəmə üzvlərinin sayı çox olduğu halda məsuliyyətə cəlb etmək üçün zəruri sayda hakimdən ibarət çoxluq artırılmalıdır. Mən hesablanmanı bu məsələyə tətbiq etməyə çalışacağam, belə ki, sağlam düşüncənin bizə verdiyi məlumatlar əsasında həmişə bu hesablanmanın ən yaxşı nəticə verəcəyinə əminəm.

Hər bir hakimin fikrinin ədalətli olduğu ehtimalı bu hesablamaya başlıca element kimi daxil olur. Bu ehtimal, aydındır ki, hər bir işdə nisbidir. Əgər min bir hakimdən ibarət məhkəmədə beş yüz bir nəfər bir fikirdə və beş yüz

nəfər isə əks fikirdə olarsa, onda aydındır ki, hər bir hakimin fikrinin ədalətli olduğu ehtimalı 1/2-dən çox da böyük olmayan kəmiyyət qədər artıq olur, çünki onun olduqca böyük olduğu fərz olunarsa, bir səs fərqi hadisəsi qeyri-mümkün hadisə olardı. Əgər bütün hakimlər bir-birilə razı olarlarsa, bu onu göstərir ki, dəlillər o qədər güclüdür ki, bunlar inam doğurur: bu halda hər bir hakimin fikrinin ehtimalı vahidə və ya hər hansı ümumi ehtiraslar və ya qabaqcadan yaranmış yalnış fikirlər hakimlərin hamısının eyni zamanda səhvə yol verməsinə səbəb olmazsa, gerçəkliyə çox yaxın olur. Bu hallardan başqa, müttəhimin lehinə və əleyhinə səslərin nisbəti, yalnız bu nisbət, bu ehtimalı təyin etməlidir. Beləliklə, mən fərz edirəm ki, bu ehtimal 1/2-dən vahidə qədər dəyişə bilər, lakin o, 1/2-dən az ola bilməz. Əgər bu belə olmasaydı, onda məhkəmənin qərarı püşkatma qədər az əhəmiyyət kəsb edərdi; lakin bu qərar dəyərlidir, belə ki, hakimin qərarı qabaqcadan yalnış fikrə gəlməkdən həqiqətə daha çox yaxındır. Müttəhim üçün əlverişli səslərin (lehinə) əlverişli olmayan səslərə nisbəti vasitəsi ilə mən hakimin fikrinin doğru olması ehtimalını təyin edirəm.

Məlum olan səs çoxluğu ilə mühakimə edən məhkəmənin qərarı doğru verməsi ehtimalının ümumi ifadəsinə malik olmaq üçün bu verilənlər kifayətdir. Səkkiz hakimdən ibarət məhkəmədə müttəhimin mühakimə olunması üçün beş səs kifayət edərdi, qərarın düzgün olmasında mümkün ola bilən səhvin ehtimalı 1/4-dən artıq olardı. Əgər məhkəmənin tərkibi altı üzvdən ibarət olardısa, bunlar isə yalnız dörd səs çoxluğu ilə mühakimə edə bilərdilərsə, mümkün ola bilən səhvin ehtimalı 1/4-dən az olardı: deməli, müttəhim üçün məhkəmə üzvlərinin sayının azaldılması əlverişli olardı. Hər iki halda tələb olunan artıq səs eyni olub, ikiyə bərabərdir. Beləliklə, sabit qalan artıq səs hallarında səhvetmə ehtimalı hakimlərin sayı artdıqca artır: tələb olunan artıq səs, əgər eyni olarsa, bu səs çoxluğunun neçə olmasından asılı olmur. Əgər arifmetik nisbətə bir qayda kimi baxılarsa, onda müttəhim məhkəmə tərkibində üzvlərin sayı çoxaldıqca, getdikcə daha az əlverişli vəziyyətdə olacaqdır. Belə fikirləşmək olardı ki, hakimlərin sayı ixtiyari olduqda, on iki səsdən çoxunun tələb olunduğu məhkəmədə azlığın səsləri çoxluğun bu sayda səslərini neytrallaşdıra bilərdi, İngiltərədə müttəhimin cəzalandırılması üçün zəruri olan qalan on iki səs on iki nəfərdən ibarət məhkəmə iclasçılarından ibarət məhkəmə üzvlərinin həmrəy olduğunu göstərmiş olardı; lakin bu böyük səhv olardı: sağlam düşüncə bizə onu göstərir ki, iki yüz on iki hakimdən ibarət məhkəmənin qərarına görə onlardan yüz on iki nəfəri müttəhimi günahkar bilərsə, yüz nəfəri ona haqq qazandırarsa, bu məhkəmənin qərarı ilə on iki hakimdən ibarət, cəzalandırmaq qərarında həmrəy olan məhkəmə qərarı arasında fərq vardır. Birinci halda müttəhim üçün əlverişli olan yüz səs,

bizə belə düşünməyə haqq verir ki, dəlillər hələ o dərəcədə deyildir ki, qərar üçün əminlik doğursun; ikinci halda hakimlərin həmrəyliyi onların bu dərəcəyə çatdıqlarına bizə inanmağa əsas verə bilir. Lakin bu iki halda səhv ehtimalının son fərqini qiymətləndirmək üçün yalnız sağlam düşüncə heç də kifayət etmir; onda hesablama aparmaq olar və nəticədə, birinci halda səhv ehtimalı üçün təqribən beşdə bir, ikinci halda bu ehtimal üçün yalnız 1/8192 qiyməti alınacaqdır ki, ikinci haldakı ehtimal birincinin mində birinə belə bərabər deyildir. Bu belə bir prinsipi təsdiq edir: hakimlərin sayı artırıldıqda müttəhim üçün arifmetik nisbət əlverişli deyildir. Əksinə, bir qayda kimi həndəsi nisbət götürəriksə, hakimlərin sayı artdıqca, qərarın səhv olması ehtimalı azalır. Məs., yalnız səslərin üçdə ikisinin əksəriyyəti ilə cəza verildiyi məhkəmələrdə mümkün ola bilən səhvin ehtimalı hakimlərin sayı altı olduqda təqribən dörddə birə bərabərdir; əgər hakimlərin sayı on ikiyə çatarsa, bu ehtimal 1/7-dən az olur. Beləliklə, əgər biz səhv ehtimalının heç bir halda müəyyən kəsrdən nə yuxarı, nə aşağı olmasını istəmiriksə, nə arifmetik, nə həndəsi nisbətlərdən istifadə etməməliyik.

Onda hansı kəsri götürməli? Məhz bu halda özbaşınalıq başlanır və məhkəmə müəssisələri bu mənada çox müxtəlifliklə fərqlənirlər. Müttəhimin cəzalandırılması üçün səkkiz səsdən beşinin yetərli olduğu xüsusi məhkəmələrdə (tribunaux spéciaux), hökmün yumşaq olmasına görə qorxu ola bilərsə, səhv ehtimalı 65/256-ya bərabərdir və ya 1/4-dən çoxdur. Bu kəsrin qiyməti dəhşət doğurur: buna baxmayaraq, bir tərəfdən belə bir mülahizə adamı onunla razılaşdırır ki, hakim çox hallarda təqsirkara bəraət qazandırarkən, ona günahsız kimi baxmır: o, yalnız onun mühakimə olunması üçün onun əleyhinə kifayət qədər dəlil olmadığını elan edir. Xüsusilə də, adamı sakitləşdirən odur ki, burada mərhəmət hissi özünü göstərir, bu isə təbiətin insan qəlbinə verdiyi bir hissdir və insan əqli bu hissin təsiri ilə müttəhimin məhkəməsində onun təqsirkar olduğunu yalnız çətinliklə görə bilir. Bu hiss, cinayət qərarları vermək səriştəsi olmayan kəslərdə daha canlı olur, məhkəmə iclasçılarının səriştəsizliyi ilə əlaqədar nöqsanları əvəzləyir. Cəza verilməsi üçün əksəriyyəti səkkiz səs tələb olunan, on iki nəfərdən ibarət məhkəmə iclasçısı olan məhkəmədə səhv etmə şübhəsi olduqda, səhvin ehtimalı $1\,093 / 8\,192$ -ə bərabərdir və ya səkkizdə birdən bir az çoxdur; əgər əksəriyyət doqquz səsdən ibarət olarsa, bu ehtimal təqribən 1/22-ə bərabərdir. Qərarda hamı həmrəy olduqda mümkün ola bilən səhv ehtimalı $1 / 8\,192$ -ə bərabərdir, yəni bu ehtimal bizim məhkəmə iclasçılarından ibarət məhkəmələrindəkindən min dəfədən də az olur. Burada fərz olunur ki, hamının həmrəyliyi ilə verilən qərar yalnız müttəhim üçün əlverişli və ya əlverişsiz dəlil-sübutlar nəticəsində verilir;

lakin məhkəmə iclasçılarının apardığı məhkəmədə bu qərarın verilməsi hökm üçün zəruri şərt kimi qoyulduqda, tamamilə kənar motivlər bu qərarın verilməsinə səbəb ola bilər. Onda iclasçıların temperamentindən, xasiyyətindən və vərdişlərindən asılı olan bu qərarlar, bəzən, yalnız dəlil-sübutlara əsaslanan iclasçılar əksəriyyətinin qəbul etdiyi qərarlara zidd olur; məncə, bu üsulla mühakimənin böyük çatışmamazlığı bununla əlaqədardır.

Bizim məhkəmə iclasçılarımızdan ibarət məhkəmələrdə qərarların ehtimalı olduqca zəifdir, mənim fikrimcə, günahsızlığı kifayət qədər qorumaq üçün, heç olmasa on iki səsin doqquzu səs çoxluğu kimi tələb olunmalıdır.

Ölüm cədvəlləri və ömrün, nigahların və hər hansı assosiasiyaların orta yaşama müddətləri üçün cədvəllər

Ölüm cədvəllərini tərtib etmək qaydası olduqca sadədir. Vətəndaş aktlarından doğumu və ölümü göstərilən adamların çox saydası götürülür. Bunlar arasında ömrünün birinci ilində, ikinci ilində və s. ölənlərin sayı təyin olunur. Hər ilin əvvəlində sağ qalmış şəxslərin sayı əvvəlkinə əsasən təyin olunur və bu ədəd cədvəldə il yazılmış ədədlə yanaşı yazılır. Beləliklə, sıfırla yanaşı doğum sayını göstərən ədəd, 1-ci il ilə yanaşı bir yaşı tamam olmuş uşaqların sayı yazılır; 2-ci il ilə yanaşı iki yaşı tamam olan uşaqların sayı yazılır və s. Uşaqların həyatının ilk iki ili ərzində ölüm halları olduqca çox olduğundan, bu ilk yaşlarda hər yarımilliyin sonunda sağ qalan uşaqların sayı böyük dəqiqlik üçün göstərilməlidir.

Ölüm cədvəlində yazılan bütün bu şəxslərin yaşadıqları ömürlərin cəmini, bu şəxslərin sayına böldükdə, bu cədvələ uyğun olaraq, orta ömür müddəti alınar. Buna görə də, 0 və 1-ci illərlə yanaşı yazılmış şəxslərin saylarının fərqinə bərabər olan ədədi – ilk bir il ərzində ölənlərin sayını yarım ilə vurmaq lazımdır: çünki, onların ölüm halları bütün il üçün paylanmalı idi, onda onların orta ömür müddəti yalnız yarım ildir. İkinci il müddətində ölənlərin sayı il yarıma vurulmalı, üçüncü il ərzində ölənlərin sayı iki il yarıma vurulmalıdır və s. Bu hasillərin cəmini doğum sayını göstərən ədədə böldükdə, orta ömür müddəti alınacaqdır. Onda belə nəticə alınır ki, cədvəldə hər ilin qarşısında yazılmış ədədlərin cəmini taparaq, onu doğum sayına bölərək və alınmış nisbətdən onun yarısını çıxdıqda, bu orta ömür müddəti alınır; bu zaman bir il vahid kimi götürülür. Hər hansı yaşdan başlayaraq, qalan orta ömür müddəti də bu qayda ilə təyin olunur, bu isə bu yaş həddinə çatmış şəxslərin sayları üzərində, yuxarıda doğum saylarını göstərən ədədlər üzərində aparılan həmin əməliyyatların köməyilə təyin olunur. Orta ömür müddəti anadan olduğu andan deyil, insan ilk uşaqlıq çağlarındakı təhlükələri adladıqdan sonra çox olur və bu halda orta

ömür müddəti təxminən qırx üç yaşa bərabərdir. Verilən yaş həddindən sonra hər hansı yaşa çatma ehtimalı – bu cədvəldə bu yaş həddindəki şəxslərin saylarını göstərən iki ədədin nisbətinə bərabərdir.

Bu nəticələrin dəqiqliyi üçün tələb olunur ki, cədvəllər tərtib olunarkən doğum saylarını göstərən ədədin olduqca böyük olması nəzərdə tutulsun. Analiz bu halda bu cədvəllərdə göstərilmiş gerçək ədədlərdən yayınmaların çox sıx sərhədlər arasında olduğu ehtimalının qiymətləndirilməsi üçün çox sadə düsturlara gətirir. Bu düsturlardan aydın olur ki, doğum sayını göstərən ədəd daha böyük olduqca bu sərhədlər arasında məsafə azalır, ehtimal isə artır; odur ki, əgər hesaba alınan doğum saylarını göstərən ədəd sonsuz olsaydı, onda cədvəllər əsl ölüm qanununu dəqiq ifadə etmiş olardı.

Deməli, ölüm cədvəli insan ömrünün ehtimal cədvəlidir. Hər bir ilin qarşısında yazılan şəxslər sayının doğum sayını göstərən ədədə nisbəti yeni doğulmuş uşağın bu ilə qədər yaşadığı ehtimalını ifadə edir. Gözləmənin ədədi qiyməti hər bir gözlənilən faydanın bu faydanın alınması ehtimalına hasillərinin cəmlərinin alınması vasitəsilə alındığı kimi, orta ömür müddətini də hər bir ildəki ilin əvvəlindən sonuna qədər yaşamaq ehtimalları cəmlərinin yarısına hasillərin cəmlənilməsi yolu ilə almaq olar, bu isə əvvəl tapdığımız nəticəyə gətirir. Lakin orta ömür müddətinə belə yanaşmanın belə bir üstünlüyü vardır ki, əhalinin sayı sabit qaldıqda, yəni doğum halları sayı ölüm halları sayına bərabər olduqda, orta ömür müddəti, məhz əhalinin sayının illik doğum sayına nisbətidir; belə ki, əhali sayı sabit qalarsa, cədvəlin iki ardıcıl ili arasındakı yaşa malik şəxslərin sayı illik doğum sayının bu yaş həddinə qədər yaşama ehtimallarının cəminin yarısına hasilinə bərabərdir. Bütün bu hasillərin cəmi bütün bu əhalinin sayı olacaqdır. Lakin asanlıqla inanmaq olur ki, illik doğum sayına bölümüş bu cəm, orta yaşama müddəti ilə üst-üstə düşür; bu, bizim tərifimizlə də belədir.

Ölüm cədvəlinin köməyilə, sabit fərz olunan əhali sayı üçün də uyğun cədvəli asanlıqla tərtib etmək olur. Buna görə sıfır və bir yaş, bir və iki yaş, iki və üç yaş və s.-yə uyğun ölüm cədvəlindəki ədədlərin ədədi ortası götürülür. Bütün ədədi ortaların cəmi, məhz, bütün əhalinin sayıdır; bu ədəd sıfır yaşı ilə yanaşı yazılır. Bu cəmdən birinci ədədi orta çıxılır, alınan qalıq bir yaş və ondan böyük şəxslərin sayıdır; alınan bu ədəd 1 yaş ilə yanaşı yazılır. Bu birinci qalıqdan ikinci ədədi orta çıxılır; bu ikinci qalıq iki yaş və ondan böyük şəxslərin sayıdır; o, 2 yaş ilə yanaşı yazılır və s.

Ölüm hallarına təsir edən qeyri-sabit o qədər səbəblər olur ki, ölüm cədvəlləri yerinə və zamanına görə tərtib olunmalıdır. Bu cəhətdən həyatın müxtəlif vəziyyətləri, hər bir vəziyyətlə ayrılmaz olan təhlükələr və

çətinliklərə görə olduqca fərqli olurlar, bu yaşama müddəti üçün hesablamalarda hökmən nəzərə alınmalıdır; lakin bu fərqlər kifayət qədər araşdırılmamışdır; nə vaxtsa bu olunacaqdır: o vaxt ki, hər bir ixtisasın insan həyatından hansı qurbanı verməsinin tələb olunması məlum olsun, onda təhlükələrin azaldılması üçün bu bilikdən istifadə olunacaqdır.

Çox və ya az dərəcədə sağlam torpaq, ərazinin hündürlüyü, onun temperaturu, sakinlərin xasiyyətləri və dövlətin tədbirləri ölüm hallarına böyük təsir göstərir; müşahidə olunan fərqlərin səbəbinin axtarılmasından əvvəl bu səbəbin hansı ehtimalla ola biləcəyini təyin etmək lazımdır. Məs., müşahidələrə görə, Fransada iyirmi səkkiz tam üçdə birə qədər artmış illik doğum sayı əhalinin sayına nisbətdə, əvvəlki Milan hersoqluğunda heç iyirmi beşə belə çatmır. Doğum saylarının böyük qiymətləri əsasında təyin olunmuş hər iki nisbət Milanda ölüm hallarının xüsusi bir səbəbinin varlığına şübhə doğurmur və bu səbəbi bu ölkənin dövləti axtarmalı və aradan qaldırmalıdır.

Bəzi təhlükəli və çox yayılmış xəstəliklərin qarşısını nisbətən almaq və ya onları aradan qaldırmaq mümkün olardısa, əhali sayının doğum sayına nisbəti daha artmış olardı. Çiçək xəstəliyi ilə əlaqədar bu alındı və bu zaman bu xəstəliyin peyvənd olunması sayəsində, daha sonra bunu daha uğurlu üsul – vaksinanın peyvəndi üsulu ilə almaq mümkün oldu, bu üsul Cennerin əvəzolunmaz ixtirası olub, onu insanların sağlamlığına töhfələrdən biri etdi.

Çiçək xəstəliyinin xüsusiyyətlərindən biri odur ki, eyni bir adam bu xəstəliyə ikinci dəfə tutulmur və bu hallar nadir olduğundan, onları nəzərə almamaq olar. Vaksinanın kəşfinə qədər bir çoxları ondan qorunmağa çalışsalar da, bu xəstəlik ölümlə nəticələnir və ona tutulmuş xəstələrdən təqribən hər yeddi nəfərdən biri məhv olur. Bəzən bu xəstəlik yüngül formada da keçir və təcrübə göstərmişdir ki, sağlam adamları peyvənd etmək yolu ilə (ilin əlverişli bir mövsümündə, yaxşı rejimlə hazırlanmış şəxslərə) bu xəstəliyin yüngül formada keçməsini təmin etmək olar. Onda bu xəstəlikdən ölənlərin sayının peyvənd olunanların sayına nisbəti hətta üç yüzdə birə belə çatmır. Peyvəndin üstün olan bu xüsusiyyəti və onun xarici görkəmi dəyişməməsi, onun natural çiçəyin fəsadları olan xoşagəlməz nəticələrinin olmaması, bir çoxlarını onu qəbul etmək məcburiyyətində qoydu. Onun tətbiqi olduqca tövsiyə olunurdu; narahatlıq yaradan hər bir şeylə olduğu kimi, bu tövsiyə də qızğın tənqidlərə məruz qaldı. Bu mübahisədə Daniil Bernulli peyvəndin orta yaşama müddətinə təsirinin ehtimalını hesablamağı qarşısına məqsəd kimi qoymuşdu. Müxtəlif yaş hədlərində çiçəkdən ölənlərin sayı haqqında məlumatı olmadığından, o fərz etmişdi ki, bu xəstəliyə tutulmaq təhlükəsi və ondan ölmək bütün yaş

hədləri üçün eynidir. Bu fərziyyələrin köməyi və incə analiz yolu ilə o, adi ölüm cədvəlini elə cədvəllər şəklinə sala bildi ki, əgər çiçək xəstəliyi mövcud olmasaydı və ya olduqca az saylı xəstələr üçün ölümlə nəticələnən olsaydı, bu cədvəllər yarana bilinərdi; o, belə nəticəyə gəldi ki, çiçəyə qarşı peyvənd aparılması orta ömür müddətini heç olmasa üç ilə qədər uzatmış olardı və ona belə gəlirdi ki, belə tədbirin görülməsinin faydalı olduğuna heç bir şübhə yeri qalmır. Dalamber Bernullinin bu analizinə qarşı çıxırdı, birincisi bu iki hipotezin doğru olmadığına görə, ikincisi onun kifayət qədər yetərli olmamasına görə, belə ki, bu analizdə gələcəkdə baş verə biləcək təhlükə ilə müqayisə nəzərə alınmırdı, peyvənd nəticəsində baş verə biləcək ölüm təhlükəsi çox böyük olmasa da, onun natural çiçəkdən baş verə biləcək daha böyük ölüm təhlikəsi ilə müqayisəsi nəzərə alınmırdı. Bu mülahizə adamların sayı çox olduqda nəzərdən qaçdığına görə, dövlətlər üçün əhəmiyyətsiz olur və onlar üçün peyvəndetmənin faydalı olduğu fikri qüvvədə qalır; lakin bu mülahizə ailə başçısı üçün mühümdür, o, öz övladlarını peyvənd etdirərkən qorxmalıdır ki, o, tez bir zamanda onun üçün həyatda ən qiymətli övladının ölümünü görə bilər və bu ölümün səbəbkarı olmuş olar. Bir çox valideynlər bu qorxu hissinə görə peyvəndetmədən çəkinirdilər, lakin xoşbəxtlikdən vaksinanın kəşfi bu qorxunu aradan qaldırdı. Bu təbiətin bizə bəxş etdiyi bir çox sirlərdən biridir; vaksina da arı zəhəri kimi qoruyucu bir vasitədir; bundan başqa, onun heç bir təhlükəsi yoxdur, heç bir xəstəlik törətmir və çox az qayğı tələb edir; buna görə də, o, tezliklə geniş surətdə yayıldı və onun, ümumiyyətlə, qəbul olunması üçün yalnız xalqın onu təbii surətdə qəbul etməsinə nail olunmalıdır ki, bu da daima diqqət mərkəzində olmalıdır, hətta o hallarda da ki, o, xalqın ən ümdə maraqlarına belə aid olsun.

Hər hansı bir xəstəliyin yox edilməsi nəticəsində alınan mənfəətin hesablanmasının ən sadə üsulu ondan ibarətdir ki, müşahidələr yolu ilə məlum yaş həddi bu xəstəlikdən ölən adamların sayını təyin edib, alınan bu ədədi bu yaşda ölən bütün adamların sayından çıxmaq lazımdır. Bu fərqin verilən yaşdakı bütün adamların sayına nisbəti, əgər bu xəstəlik olmasaydı, bir il ərzində bu yaşda ölən adamların ehtimalı olardı. Deməli, anadan olan gündən müəyyən yaş həddinə qədər belə hesablanmış ehtimalların cəmini hesablayıb, bu cəmi vahiddən çıxdıqda, alınmış fərq, bu xəstəlik yox edildikdə, bu yaş həddinə qədər yaşamağın ehtimalı olacaqdır. Bu hipotezə görə hesablanmış belə ehtimallar sırası ölüm cədvəli olacaqdır və bu cədvələ görə, əvvəlkinə əsasən, orta yaşama müddətini təyin etmək olur. Dyuvilar bu üsulla təyin etdi ki, vaksinanın peyvənd olunması nəticəsində orta ömür müddəti heç olmasa üç il artıq olur. Bu dərəcədə mühüm artım əhalinin olduqca böyük artımına

səbəb olardı, əgər, digər tərəfdən, bu artım yaşamaq imkanlarının uyğun azalması ilə məhdudlaşmasaydı.

Yaşamaq imkanlarının çatışmamazlığı əsas etibarilə əhalinin artım hərəkatını gecikdirir. Heyvanların və bitkilərin bütün növlərində təbiət fərdlərin sayını o vaxta qədər artırmağa çalışır ki, bu say yaşamaq imkanları səviyyəsində olsun; insan nəslində mənəvi səbəblər əhaliyə çox təsir göstərir. Əgər torpaq onun asan becərilməsi sayəsində yeni nəsilləri çoxlu qida məhsulları ilə təmin edərsə, çoxuşaqlı ailələri təchiz etmək inamı nigahları dəstəkləyir və onların daha erkən və çoxuşaqlı olmasını alqışlayır. Belə yanaşmada əhalinin və doğumların sayının hər ikisi həndəsi silsilə kimi artmalıdır. Lakin torpağın şumlanması daha çətin və nadir hallarda aparıldıqda, əhalinin artımı azalır: bu artım yaşamaq imkanlarının dəyişkən vəziyyətinə onun ətrafında dəyişərək, aramsız surətdə yaxınlaşır; bu rəqqasın rəqsinə bənzəyir, onu yavaş təsirlə hərəkətə gətirdikdən sonra o, asıldığı nöqtə ətrafında öz ağırlığının təsiri ilə rəqs edir. Əhalinin artımının *maximumunu* təyin etmək çətindir. Bəzi müşahidələrə görə insan nəsli, belə görünür ki, əlverişli şəraitdə hər on beş ildə iki dəfə arta bilərdi. Fərz olunur ki, Şimali Amerikada belə iki dəfə artma dövrü iyirmi iki ilə bərabərdir. Belə vəziyyətdə əhali, doğumlar, nigahlar, ölüm – hamısı həndəsi silsilə kimi artır, bu halda ard-ardınca gələn hədlərin sabit nisbəti iki dövr ərzində illik doğumlar üzərində müşahidələrdən alınır.

Ölüm cədvəli insan ömrünün ehtimalını göstərdiyindən bu cədvəlin köməyilə nigahların nə qədər davam etməsini təyin etmək olur. Sadəlik üçün fərz edək ki, ölüm hər iki cins üçün eynidir; əgər biz elə kəsrlər siyahısı tərtib etsək ki, onların ümumi məxrəci ailə qurmuş şəxslərin yaşlarına uyğun cədvəlin iki ədədinin hasili, surəti isə bu yaşlara uyğun bir il, iki, üç və s. il artırılmış ədədlərin ardıcıl hasilləri olsun, onda bu nigahların bir il, iki il, üç il və s. davam edəcəyi ehtimalını alarıq. Əgər bir il vahid kimi götürülərsə, bu kəsrlərin cəmlərini bu cəmlərin yarısı qədər artırdıqda, alınmış ədəd nigahın orta davam müddəti olacaqdır. Bu qaydanı üç və ya daha çox nəfərdən ibarət birliyə tətbiq etdikdə, bu birliyin orta davam müddətini də təyin etmək olar.

Müəssisələrdə baş verən hadisələrin ehtimalları əsasında verilən mənfəətlər haqqında

Biz burada gözləmə haqqında dediklərimizi xatırlayaq. Biz gördük ki, bir neçə – bəzilərinin mənfəət, digərlərinin ziyan gətirdikləri bir neçə sadə hadisə səbəbindən mənfəət alınması üçün, hər bir əlverişli hadisənin ehtimalının onun gətirdiyi gəlirə hasillərini toplayıb, bu cəmdən hər bir

əlverişsiz hadisənin ehtimalının bu hadisə ilə bağlı ziyana hasillərinin cəmini çıxmaq lazımdır. Bu cəmlərin fərqləri ilə ifadə olunan gəlirin necə olmasından asılı olmayaraq, bu sadə hadisələrdən ibarət bir mürəkkəb hadisə hələ əsl ziyan qorxusunu aradan qaldırmır. Aydındır ki, bu mürəkkəb hadisə təkrarlandıqda bu qorxu hissi də azalmalıdır. Ehtimalların analizindən aşağıdakı ümumi teorem alınır.

Mənfəət gətirən sadə və ya mürəkkəb hadisənin təkrar olunmasından əsl mənfəət getdikcə daha çox ehtimallı olur və aramsız olaraq artır; təkrarlanmalar sayının sonsuz olması fərz olunduqda, bu mənfəət gerçəkləşir; bu mənfəəti təkrarlanmalar sayına böldükdə, nisbət və ya hər bir hadisənin orta mənfəətini alırıq, bu isə riyazi gözləmə və ya bu hadisəyə müvafiq mənfəət olacaqdır. Əgər hadisə əlverişsiz olarsa, ziyan halı üçün də belə olur, bu ziyan da get-gedə yəqinliyə çevrilir.

Mənfəət və ziyanlar haqqında bu teorem sadə və ya mürəkkəb hadisələrin qeyri-müəyyən surətdə təkrarlanmasında meydana çıxan nisbətlər haqqında bizim əvvəldə verdiyimiz teoremlərə analojidir; və bu teoremlərdə olduğu kimi bu teorem də isbat edir ki, düzgünlük sonda hətta *təsadüf* adlandırdığımıza ən çox tabe olunan şeylərdə də özünü göstərir.

Analiz gerçək mənfəətin müəyyən sərhədlər arasında olması ehtimalı üçün daha bir olduqca sadə ifadə verir, bu ifadə ehtimallar haqqında ümumi qanuna daxildir, bu qanun isə hadisələr sayının qeyri-müəyyən surətdə artırılmasından alınan ehtimallar haqqında biz danışarkən, bizim tərəfimizdən yuxarıda verilmişdir.

Ehtimallara əsaslanan müəssisələrin davamlılığı, bundan əvvəlki teoremin doğruluğundan asılı olur. Bu ehtimalları bu müəssisələrə tətbiq etmək üçün onlar müəssisələrin sayını artırmaqla əlverişli hadisələri çoxaltmalıdırlar.

İnsan həyatına aid ehtimallar əsasında müxtəlif təsisatlar qurulmuşdur, məs., ömürlük rentalar və tontinlər belə təsisatlardandır. Bu təsisatların mənfəət və məsrəflərinin ən ümumi və ən sadə hesablanılma metodu – onları kapitalların müasir dəyərinə müvafiqləşdirməkdən ibarətdir. Vahidin illik artımı – *faiz məzənnəsi* adlandırılan kəmiyyətdir. Hər ilin sonuna hər bir kapital (vahid plyus faiz məzənnəsi) qədər vuruğa malik olur; bu kapital, deməli, həndəsi silsilə şəklində artır, bu nisbətdə məxrəc həmin bu vuruğa bərabər olur. Əgər, məs., faiz məzənnəsi 1/20-ə və ya yüzdə beşə bərabər olarsa, onda kapital təxminən on dörd ildən sonra iki dəfə, 29 ildən sonra dörd dəfə artır və üç yüz ildən sonra o, iki million dəfə artır.

Belə heyrətamiz artım onu dövlət borcunun ödənilməsi üçün istifadə etmək fikrini yaratdı. Əgər ilk ödəmə fondu faizlərilə birlikdə daima yaradılaraq, ictimai müəssisələrə yerləşdirilərsə, xüsusilə də, endirilmə

anlarında və əgər dövlətin ehtiyacları üçün borc tələb olunduğu hallarda, onun bir hissəsi isə ödəmə fondunun artırılması üçün verilərsə, onda aydındır ki, bu əməliyyat bu fondun artması və kreditin və ictimai müəssisələrə dəstək olmaq üçün ikiqat mənfəət əldə edəcək və ödəmə xəzinəsi zaman ötdükcə dövlət borcunun böyük bir hissəsini ödəyə biləcəkdir. Uğurlu təcrübələr bu mənfəəti tamamilə təsdiq etdi. Lakin belə müəssisələrin uğurları üçün olduqca zəruri olan öhdəçiliklərdə dürüstlüyə və möhkəmliyə, yalnız, qanuni hakimiyyəti bir neçə, bir-birindən asılı olmayan hakimiyyətlərə bölünmüş dövlət tərəfindən tamamilə zəmanət verilə bilinər. Bu hakimiyyətlərin qaçılmaz yarışmalarının doğurduğu etibar, dövlətin əzəmətini ikiqat artırır və dövlət başçısı qanuni hakimiyyətdən, özhakimiyyətliliklə müqayisədə itirdiyindən, daha çox qazanmış olur.

Əvvəlkilərdən belə nəticə alınır ki, yalnız məlum qədər illər keçdikdən sonra, ödənilən miqdara bərabər kapitalın müasir dəyəri – bu miqdarın bu müddət ərzində ödənilməsi ehtimalına hasilinin (1 + faiz məzənnəsi)-nin bu illərin sayına bərabər qüvvət üstünə nisbətinə bərabərdir.

Bu prinsipi bir və ya bir neçə şəxs üçün ömürlük rentalara, əmanət xəzinələri və hər növ sığortalara da tətbiq etmək olar. Fərz edək ki, verilən ölüm cədvəli üzrə biz ömürlük renta cədvəli tərtib etmək istəyirik. Beş il keçdikdən sonra ödəniləcək ömürlük renta, məs., həm də müasir dəyərlərlə hesablanılacaq renta, bu prinsipə görə aşağıdakı iki kəmiyyətin hasilinə, məhz: rentanın (1 + faiz məzənnəsi)-nin beşinci dərəcə qüvvət üstünə nisbəti ilə bu faiz məzənnəsinin ödənilməsi ehtimalına hasilinə bərabərdir. Faiz məzənnəsinin ödənilmə ehtimalı – renta təyin ediləcək şəxsin beş il artıq götürülmüş yaşı qarşısında cədvəldəki şəxslər sayının tərs nisbətinə bərabərdir. Məxrəcləri – renta təyin olunacaq şəxs yaşındakı və hələ həyatda olan şəxslərin ölüm cədvəlində göstərilən şəxslər sayının ardıcıl götürülən qüvvət üstlü (1 + faiz məzənnəsi)-nə hasillərinə, surətləri – rentanın həmin yaşdakı və ardıcıl olaraq bir yaş, iki yaş və s., artıq götürülmüş hələ sağ olan şəxslər sayına hasillərinə bərabər kəsrlər sırası tərtib edərək, bu kəsrlərin cəmi ilə ifadə olunan, bu yaşda ömürlük renta üçün tələb olunan kapitalı alırıq.

Fərz edək ki, hər hansı bir şəxs, ömürlük renta vasitəsilə öz varislərini onun öldüyü ilin sonunda ödəniləcək kapitalla təmin olunmasını arzu edir. Bu rentanın miqdarını təyin etmək üçün, belə fərz etmək olar ki, bu şəxs hər hansı bir xəzinədən (1 + faiz məzənnəsi)-nə bölünmüş kapitalı ömürlük borc götürür və onu həmin xəzinəyə daimi faizlərlə yerləşdirir. Aydındır ki, bu kapital bu xəzinənin bu şəxsin varislərinə onun öldüyü ilin sonunda ödəyəcəyi borcu alacaqdır; lakin xəzinə hər il yalnız ömürlük faizlərin

daimi faizlərdən qalan artıq hissələri ödəyirdi. Ömürlük renta cədvəllərində bu şəxsin hər il nə qədər ödəməsi göstərilir və bu da onun ölümündən sonra bu kapitalın xəzinədə olmasını təmin edir.

Dəniz sığortaları, yanğınlardan və fırtınalardan sığortalar və ümumiyyətlə, bu növ sığortalar həmin prinsiplərə əsasən hesablanır. Tacirin dənizdə gəmiləri vardır və o, bunların dəyərini və bu gəmilərdəki yüklərin dəyərini onların məruz qala biləcəkləri təhlükələrdən qorunmaq üçün sığortalamaq istəyir; bu məqsədlə o, hər hansı cəmiyyətə – onun gəmiləri və yükünün dəyərinə görə qiymətə müvafiq cavabdeh cəmiyyətə məlum məbləği ödəyir. Gəmilər və yükün bu dəyərinin sığorta mükafatı kimi ödəniləcək ödəniş miqdarına nisbəti gəmilərin məruz qaldıqları təhlükələrdən asılıdır və bu ödəniş miqdarı portdan yola düşən həmin marşrutla hərəkət edən gəmilərin taleyi ilə bağlı çoxsaylı müşahidələr vasitəsilə və yalnız bu yolla qiymətləndirilə bilinər.

Əgər sığortalanmış şəxslər sığorta cəmiyyətinə yalnız ehtimalların hesablanmasından alınan məbləği ödəsəydirlər, onda bu cəmiyyət onun müəssisəsi ilə bağlı xərclərin öhdəsindən gələ bilməzdi, buna görə də, onların daha yüksək sığorta mükafatı vermələri zəruridir. Belə olan halda onların mənfəəti nədədir? Burada qeyri-müəyyənliklə bağlı mənəvi mənfəətsizliyə baxmaq zəruriliyi yaranır. Aydındır ki, ən ədalətli oyun mənfəətsiz olursa, biz əvvəldə gördüyümüz kimi, oyunçu oyuna qoyduğu etibarlı sayılan məbləği etibarsız uduşa dəyişdiyi üçün etibarsızlığı etibarlılığa dəyişdirilən sığorta mənfəətli olmalıdır. Bu isə, həqiqətən də, mənəvi gözləmənin tərifi üçün bizim yuxarıda verdiyimiz qaydadan bir nəticə kimi alınır, bundan əlavə görünür ki, mənəvi gözləmənin sığorta cəmiyyətinə verə biləcəyi qurban, mənəvi mənfəəti qorumağa davam etməklə nə qədər uzana bilər. Deməli, bu mənfəəti təmin edərək və özü də böyük gəlir əldə edərək, cəmiyyət bunu həyata keçirə bilər, bu şərtlə ki, cəmiyyətin yaşamasının möhkəmliyi üçün zəruri şərt – sığortalanmış şəxslərin sayı olduqca çox olsun. Bu halda cəmiyyətin mənfəəti yəqin olur, riyazi gözləmə isə mənəvi gözləmə ilə üst-üstə düşür; belə ki, analizdən aşağıdakı ümumi teorem alınır: əgər gözlənilən faydaların sayı olduqca çox olarsa, onda hər iki gözləmə daima bir-birinə yaxınlaşır və nəhayət, bu faydaların sayı sonsuz böyük olduqda onlar üst-üstə düşür.

Riyazi və mənəvi gözləmələrdən danışdıqda, biz fərz etmişdik ki, gözlənilən mənfəət riskinin ayrı-ayrı hissələrə paylaşdırılmasında mənəvi mənfəət vardır. Məs., hər hansı uzaq bir portdan müəyyən bir məbləği keçirmək üçün onu bir gəmiyə yerləşdirməkdənsə, bir neçə gəmi arasında paylaşdırmaq daha yaxşıdır. Buna isə qarşılıqlı sığortanın köməyilə nail olunur. Əgər iki müxtəlif gəmidə eyni bir portdan çıxmış, eyni bir yerə

yollanmış eyni məbləğə malik iki şəxs, onların alacaqları bütün pulları bərabər bölməyə razı olarlarsa, onda aydındır ki, bu razılaşmaya görə bu şəxslərdən hər biri onların gözlədikləri məbləği hər iki gəmi üçün bərabər paylaşdırır. Lakin qeyd etmək lazımdır ki, bu növ sığorta hələ də hansı itkinin ola biləcəyi barədə suala cavab verməmişdir. Lakin bu məlumatsızlıq ən az iştirakçıların sayının artması ilə əlaqədar olaraq azalır: mənəvi qazanc get-gedə artaraq, nəhayət, özünün təbii sərhədi – riyazi mənfəətlə üst-üstə düşür. Bunun sayəsində qarşılıqlı sığorta şirkətləri çox sayda şəxsdən ibarət olduqda, bu şirkətlər sığortaçılar üçün mənəvi mənfəətdən aldıqları gəlir riyazi gözləmədən həmişə az olan sığorta şirkətlərindən daha əlverişli olur. Bütün bu nəticələr, biz əvvəldə gördüyümüz kimi, mənəvi mənfəəti ifadə edən qanundan asılı deyildirlər.

Azad bir xalqa, üzvləri öz əmlakları üçün qarşılıqlı öhdəçiliklər götürən, bu öhdəçiliklər üzrə mütənasib xərclər çəkən böyük bir qurumlar kimi baxmaq olar. Bir neçə xalqın konfederasiyası bu xalqlardan hər birinə, cəmiyyətdə yaşayan hər bir insanın ala bildiyi dəyərlər kimi dəyərlər verərdi. Onların nümayəndələrindən ibarət konqress hamı üçün eyni dərəcədə mühüm məsələləri müzakirə edə bilərdi, onda fransız alimlərinin təklif etdikləri çəki, ölçü və pul vahidləri sistemi şübhəsiz ki, bu konqress tərəfindən kommersiya münasibətlərində təklif olunmuş tədbirlərdən ən səmərəlisi kimi qəbul olunardı.

İnsan həyatına aid ehtimallara əsaslanan müəssisələrdən ən yaxşıları – öz ehtiyacları üçün vəsaitin çatmayacağı qorxusu olduğu müddət ərzində öz gəlirinin kiçik bir hissəsini istifadə edərək, özü və öz ailəsini təmin edə bilən müəssisələr hesab olunur. Oyun nə dərəcədə mənəviyyatsız olarsa, bu müəssisələr mənəviyyatı o dərəcədə yaxşılaşdırır, ən zəif təbii vərdişlərə əlverişli mühit yaradır. Buna görə də, dövlət bu müəssisələri dəstəkləməlidir və ictimai nailiyyətlərdəki yanlışlıqlara göz yumulmamalıdır, çünki onların təqdim etdikləri gözləmələr uzaq gələcəyə aid olduğundan, onların möhkəmliyi yalnız hansısa təhlükədən qorunduqları halda inkşaf edə bilər. Təmsiledici idarənin üstün cəhətlərindən biri ondan ibarətdir ki, o, bu zəmanəti verir.

İstiqrazlar haqqında bir neçə söz deyək. Aydındır ki, daimi istiqraz üçün hər il kapitalın faiz məzənnəsi hasilinə bərabər məbləğ ödənilməlidir. Lakin bu kapitalı müəyyən illər ərzində bərabər miqdar məbləğlə ödəmək olar, – bu ödəmələr a n n u i t e t l ə r adlanır və onların miqdarı belə alınır: hər bir annuiteti hazırki vəziyyətə gətirmək üçün qüvvət üstü bu annuitetin ödənilməsi üçün keçən illərin sayına bərabər (vahid + faiz məzənnə)-sinə bölünməlidir. Birinci həddi (vahid + faiz məzənnə)-sinə bölünmüş bu annuitet, sonuncu həddi isə qüvvət üstü bu annuitetin

ödənilməsi üçün keçən illərin sayı bərabər (1 + faiz məzənnə)-sinə bölünmüş bu annuitet olan həndəsi silsiləni quraraq, bu silsilə cəminin borc alınmış kapitala bərabər olduğunu almış oluruq. Əgər ömürlük istiqraz arzu olunarsa, onda görmək çətin deyildir ki, sadə uyğunluq onu göstərəcəkdir ki, kapital borc götürülən şəxsə nə qədər renta ödənilməlidir, bu halda nəzərə alınmalıdır ki, ömürlük renta cədvəllərində ixtiyari yaş həddinə uyğun ömürlük rentanı təyin etmək üçün zəruri kapital göstərilmişdir. Bu prinsiplərin köməyilə istiqrazların bütün mümkün növlərini hesablamaq olur.

Ehtimalların qiymətləndirilməsində illüziyalar haqqında

Əqlin görmə hissi kimi öz illüziyaları vardır; lamisə görmə hissində düzəliş etdiyi kimi, mülahizə və hesablama əqldə düzəlişlər edir. Gündəlik təcrübəyə əsaslanan və ya qorxu və ümidlə artan ehtimal bizi böyük, lakin hesablamanın sadə nəticəsi olan ehtimaldan daha çox təəccübləndirir. Məs., biz, fransız lotereyasında kvin çıxması ehtimalından daha az ehtimallı təhlükələrə öz həyatımızı məruz qoyaraq, cüzi mənfəət almaqdan heç də qorxmuruq; bunula belə, bu kvin çıxdığı halda həyatını itirmək əminliyi olduqda, heç bir kəs bu mənfəəti əldə etmək istəməzdi.

Bizim ehtiraslarımız, bizim xurafat və hökmran baxışlarımız bunlar üçün əlverişli ehtimalları artırıb, əlverişli olmayan ehtimalları azaldaraq, təhlükəli illüziyaların çoxsaylı mənbələrini təşkil edir.

Əsl pislik və onu doğuran səbəb bizə, əks olan səbəbin doğurduğu pislik barədə xatirələrdən daha güclü təsir edir; bu isə bizə onun və ya o birisinin çatışmamazlıqlarını və bizi bunlardan qoruya biləcək vasitələrin ehtimalını ədalətlə qiymətləndirməkdə mane olur. Bu da növbə ilə despotizmə və anarxiyaya sürükləyir, düzgün vəziyyətdən çıxan xalqlar həmişə yalnız uzun və qəddar həyəcanlardan sonra yenə həmin vəziyyətə qayıdırlar.

İştirak etdiyimiz hadisələrdə hiss etdiyimiz canlı təəssürat, başqalarının müşahidə etdikləri əks hadisələri görməkdən bizi yayındıraraq, bizim kifayət dərəcədə qoruna bilinmədiyimiz səhvetmələrimizin əsas mənbələrindən biridir.

Oyunda əksər hallarda belə olur ki, illüziyalar ümid verir və bu ümidi əlverişsiz şanslar əleyhinə dəstəkləyir. Lotereyada iştirak edən insanların əksəriyyəti onların xeyrinə və əleyhinə nə qədər şans olduğunu bilmir. Onlar yalnız oyuna qoyduqları kiçik məbləğin böyük uduş gətirəcəyini, onların gözündə bu məbləği ala bilmə ehtimallarının çox olacağı kimi uşaq təxəyyülünün fərziyyələrini nəzərdə tuturlar: xüsusilə də, kasıb, daha yaxşı qismətə çatacağı həvəsi ilə, bu oyunun ona böyük mənfəət gətirəcəyi

ümidilə ən əlverişsiz variantlardan belə yapışaraq, özü üçün zəruri olan hər şeyi təhlükəyə məruz qoyur. Şübhəsiz ki, əgər oyuna qoyulmuş olduqca böyük məbləğin uduzulduğunu bilsəydilər, onda bu hamını qorxudardı; lakin əksinə olaraq, uduşlar barədə daha çox məlumat verilərək, çox zəruri bu oyuna həvəsi artırmaq üçün səylər göstərilir.

Fransız lotereyasında hər hansı bir nömrə uzun müddət çıxmırsa, kütlə bu nömrəyə qoyulan məbləği artırır. Kütlə belə fikirləşir ki, uzun müddət çıxmayan nömrə digərlərindən daha çox şansla ən yaxın tirajda çıxmalıdır. Belə ümumi səhvə, məncə, illüziyalar nəticəsində yol verilir, bu səhv bizi hadisələrin başlanğıcına qaytarır. Məs., «*gerb və şəbəkə*» oyununda *gerb* üzünün on dəfə ardıcıl düşməsi çox az doğruyaoxşardır. Bu doğruyaoxşar-olmamazlıq onuncu dəfə də *gerb* üzünün düşdüyü halda belə, bizi təəccübləndirsə də, bizi onuncu dəfə *şəbəkə* üzünün düşəcəyi fikrindən çəkindirmir. Lakin müşahidə göstərirsə ki, *şəbəkə* üzünün düşməsindən çox *gerb* üzünün düşməsinə böyük meyllilik vardır, onda bu, hadisələrdən ikincisinin daha çox ehtimalla baş verəcəyini göstərir: bu, biz gördüyümüz kimi, xaç üzünün növbəti dəfə düşməsi ehtimalını artırır. Belə illüziya çoxlarını belə nəticəyə götirir ki, lotereyada çox güman ki, udmaq mümkündür, buna görə də, nömrənin çıxmasına qədər həmin nömrəyə oyuna qoyulan bütün məbləğlər cəmindən artıq məbləğ qoyulmalıdır. Lakin, əgər belə alverlər onların dəstəklənməsi qeyri-mümkün olduğuna görə davam etdiyindən, bunlar, hər halda alverçilərin itkilərinin riyazi gözləməsini azaltmazdı və onların itkilərinin mənəvi gözləməsini artırmış olardı, çünki hər bir tirajda alverçilər hər dəfə öz varidatının böyük hissəsini oyuna qoymuş olardılar.

Mən görmüşəm ki, oğlu olmasını həddən artıq arzu edən şəxslər, ata olacağı ayda oğlan uşaqlarının doğulduğunu kədərlə qarşılayırdılar. Onların təsəvvürünə görə doğulan oğlan uşaqlarının sayının qız uşaqlarının sayına nisbəti ixtiyari ayın sonunda eyni olmalıdır, onlar belə hesab edirdilər ki, doğulan oğlanlar yaxın zaman ərzində qızların doğulacağı ehtimalını daha da çoxaldır. Məs., içərisində məhdud sayda ağ və qara kürəciklər olan urndan ağ kürəciyin çıxarılması, bu verilən mənada, növbəti tirajda qara kürəciyin çıxarılması ehtimalını artırır. Lakin bu halı bu doğumlar halına oxşatmaq üçün fərz olunmalıdır ki, urndakı kürəciklər sayı qeyri-məhdud olsun, onda belə hal yaranmır. Əgər hər hansı ay ərzində oğlanlar qızlardan daha çox doğulmuş olsaydı, onda belə şübhələnmək olardı ki, onların mayalanma zamanına yaxın bir vaxtda oğlan mayalanmasına hər hansı ümumi səbəb əlverişli şərait yaratmışdır və nəticədə yaxın müddətdə oğlan doğumunu daha ehtimallı etmişdir. Lotereya oyununda, hər tirajda nömrələrin çıxması şansını tamamilə eyni etmək məqsədilə

bütün nömrələr qarışdırıldığından, təbiətdə düzgün olmayaraq, baş verən təzahürlər lotereyada nömrələrin çıxması ilə dəqiqliklə müqayisə edilə bilinmir. Bu təzahürlərdən birinin tezliyi, onun baş verməsinə səbəb olan, müəyyən müddət təsir göstərmiş səbəbi guya göstərir və bu da onun gələcəkdə təkrar olunacağı ehtimalını artırır; və onun uzun müddət davamlı olaraq təkrar olunması, məs., uzun sürən yağışlı günlərin olması, bu təzahürlərdəki dəyişikliklərin naməlum səbəblərini aydınlaşdıra bilər, odur ki, hər bir gözlənilən təzahürdə, lotereyanın hər bir tirajında olduğu kimi, baş verəcək hadisə baxımından biz eyni bir qeyri-müəyyənlik vəziyyətinə qayıtmırıq. Bununla belə, bu təzahürlər üzərində müşahidələr çoxaldıqca bu nəticələrin lotereya nəticələri ilə müqayisəsi daha da dəqiqləşir.

Əvvəlkilərə əks olan illüziyalara görə, Fransız lotereyasında aparılmış tirajlarda ən çox təsadüf olunan nömrələr axtarılır, bu isə oyuna qoyulan məbləği faydalı surətdə yerləşdirmək üçün bu nömrələrdən birləşmələr qurmaq məqsədilə edilir. Lakin bu lotereyada nömrələrin yerləşdirilməsi üsuluna görə keçmişin gələcəyə heç bir təsiri olmamalıdır. Hər hansı bir nömrənin daha tez-tez çıxması yalnız təsadüfün anomaliyasıdır; bu hallardan əksəriyyəti üçün mən hesablamalar apardım və mən bu hesablamalardan həmişə tapırdım ki, bütün nömərələrin çıxmaları eyni imkanlı olduğu fərz olunduğu hesablama nəticələri göstərirdi ki, hər hansı nömrənin tez-tez çıxması elə sərhədlər arasında yerləşir ki, bu sərhədlərin doğruyaoxşar olmadığını hesab etmək olmaz.

Eyni cür hadisələrin uzun bir sırasında yalnız təsadüfün şansları bəzən bu xoşbəxtlik və ya bədbəxtliklərin qəribə zolağının səbəbi ola bilir, oyunçuların əksəriyyəti də bu şansları hər hansı bir qismətin təzahürü kimi nəzərdə tutmayacaqdır. Eyni zamanda təsadüfdən və oyunçuların məharətindən asılı olan oyunlarda, bir çox hallarda belə olur ki, uduzan şəxs, özünün uduzmasından pərt olaraq, başqa bir halda etmədiyi təsadüfi gedişlər edərək, vəziyyətdən çıxmaq istəyir; bu üsulla o, öz bədbəxtliyini daha da dərinləşdirir və onun daha da çox davam etməsinə səbəb olur. Halbuki məhz onda ağıl zərurətə çevrilir və ona inanmaq gərəkdir ki, əlverişsiz şanslarla əlaqədar itkinin mənəvi gözləməsi bədbəxtliyin özü nəticəsində artır.

Özünü təbiət tərəfindən xüsusi qayğı ilə əhatə olunan predmet hesab edən insan, uzun müddət özünü kainatın mərkəzi saydığından doğan hiss, hər bir ayrıca şəxsi özünü çox və ya az geniş dairənin mərkəzi hiss etməyə, düşünməyə və inanmağa meyl etməyə sövq etdirir ki, təsadüf onu daha çox qiymətləndirəcəkdir. Bu baxışla dəstəklənən oyunçular bir çox hallarda oyunlarda olduqca böyük məbləği oyuna qoyurlar, baxmayaraq ki, bu oyunlardakı şanslar, onlara məlum olduğu kimi əlverişsizdir. Həyatda belə baxış bəzən öz üstünlüklərinə malikdir, lakin əksər hallarda bu başlanacaq

çox ziyanlı işə gətirir. Burada və hər şeydə olduğu kimi illüziyalar təhlükəlidir və yalnız həqiqət həmişə faydalıdır.

Ehtimal hesabının böyük xidmətlərindən biri odur ki, o, ilk təəssüratlara inanmamağı öyrədir. Bu təəssüratları hesablamaq mümkün olan hallarda belə aydın olur ki, bu təəssüratlar əksər hallarda aldadıcı olur, odur ki, belə nəticə çıxarılmalıdır ki, digər hallarda da yalnız son dərəcə ehtiyatla bunlara inanmaq olar. Bunu misallarla göstərək.

Urnda dörd ağ və ya qara kürəciklər vardır, lakin bunların hamısı eyni rəngdə deyildir. Ağ rəngdə bir kürəcik çıxarılmışdır; bu kürəcik urna qaytarılır və yenidən belə tiraja başlanılır. Sual olunur ki, dörd növbəti tirajda yalnız qara kürəcik çıxması ehtimalı nəyə bərabərdir?

Əgər ağ və qara kürəciklərin sayı eyni olsaydı, bu ehtimal – qara kürəcik çıxması ehtimalı – 1/2-in dördüncü dərəcəsinə bərabər olardı; deməli, bu ehtimal 1/16 olardı. Lakin birinci tirajda ağ kürəcik çıxmışdırsa, bu belə bir təəssürat yaradır ki, urnda ağ kürəciklər çoxdur; çünki, urnda üç ağ və bir qara kürəcik olsaydı, onda urndan ağ kürəcik çıxması ehtimalı 3/4 olardı; əgər iki ağ və iki qara kürəcik olsaydı, bu ehtimal 2/4-yə bərabər olardı; nəhayət, urnda üç qara və bir ağ kürəcik olsaydı, bu ehtimal 1/4 olardı. Təcrübədən alınmış səbəblərin ehtimal prinsipinə əsasən, bu üç fərziyyənin ehtimalları öz aralarında 3/4, 2/4, 1/4 kimi münasibətdədir; deməli, bu fərziyyələrin ehtimalları 3/6, 2/6, 1/6 ədədlərinə bərabərdirlər. Beləliklə, qara kürəciklərin sayı az olarsa və ya ən çoxu ağların sayına bərabər olarsa, bir şansa qarşı beş şans olur. Belə fikirləşmək olar ki, birinci tirajda ağ kürəcik çıxmasına görə ardıcıl dörd ağ kürəciyin çıxması ehtimalı – hər iki rəngdən eyni sayda olduğu halındakı ehtimaldan kiçik olmalıdır və ya on altıda birdən az olmalıdır. Halbuki, bu belə deyildir və olduqca sadə hesablama ilə tapırıq ki, bu ehtimal on dörddə birdən çoxdur. Əslinə qaldıqda, bu ehtimal urndakı kürəciklərin rənginə görə əvvəlki birinci, ikinci və üçüncü cümlələrə görə 1/4, 2/4, 4/3-ün dördüncü dərəcəsinə bərabər olmalı idi. Hər bir qüvvətə yüksəldilmiş bu ədədləri uyğun fərziyyə ehtimalına vurduqda, yəni 3/6, 2/6, 1/6 ehtimallarına vurduqda, bu hasillərin cəmi ardıcıl olaraq dörd qara kürəciyin çıxarılması ehtimalına bərabər olacaqdır. Beləliklə, bu ehtimal üçün 1/14-dən böyük olan 29/384 ehtimalını alırıq. Bu ziddiyyət izah oluna bilinir, əgər biz nəzərə alsaq ki, birinci tirajın ağ kürəciklərin qara kürəciklərdən üstünlüyünü göstərməsi təəssüratı qara kürəciklərin ağlar üzərində üstünlüyünü istisna etmir, – o üstünlüyü ki, o, bu və ya o biri rəngli kürəciklərin eyni sayda olması fərziyyəsini istisna edir. Bu üstünlük, az doğruyaoxşar olmasına baxmayaraq, qara kürəciklərin verilmiş sayda ardıcıl çıxması

ehtimalını böyütməlidir, nəinki, son fərziyyə yerinə yetdikdə, əgər verilən ədəd böyük olarsa; və biz görürük ki, dörddən başlayaraq, belə də olur.

İçərisində bir neçə ağ və qara kürəcik olan bir urn halına da baxaq. Əvvəlcə fərz edək ki, bu urnda yalnız bir ağ və bir qara kürəcik vardır. Onda bərabər şanslarla mərc gəlmək olar ki, bir tirajda ağ kürəcik çıxacaqdır. Lakin görünür ki, mərcin bərabərliyi üçün, ağ kürəciyin çıxmasına mərc gələn şəxsə, əgər urnda iki qara və bir ağ kürəcik olduğu halında iki tirajda iştirak etməyə imkan verilməlidir; əgər urnda üç qara və bir ağ kürəcik olarsa, üç tiraj imkanı yaradılmalıdır və s; fərz olunur ki, hər bir tirajdan sonra çıxarılmış kürəcik yenidən urna qaytarılır.

Lakin asanlıqla əmin olmaq olur ki, bu ilk təəssürat səhvdir. Əslinə qaldıqda, bir ağ kürəcik və iki qara kürəcik olduğu halda, iki tiraj aparıldıqda iki qara kürəciyin çıxması ehtimalı 2/3-nin ikinci dərəcəsinə və ya 4/9-ə bərabərdir; lakin iki tirajda ağ kürəciyin çıxması ehtimalı ilə toplanmış bu ehtimal yəqinliyə və vahidə bərabərdir, çünki yəqinliklə məlumdur ki, iki qara kürəcik çıxmalıdır və ya heç olmazsa bir dəfə ağ kürəcik çıxmalıdır; buna görə də, bu sonuncu halın ehtimalı 5/9-ə – 1/2-dən böyük olan bir kəsrə bərabərdir. Urnda beş qara və bir ağ kürəcik olan halda beş tirajda ağ kürəciyin çıxmasına mərc gəlmək əlverişli olardı; bu sonuncu mərc hətta dörd tirajda belə faydalıdır; bu halda bu mərc bir zərin dörd dəfə atılmasında altı xalının düşməsi üçün mərcə gətirilir.

Paskalın dostu – ehtimal hesabının təməlini qoymuş Kavaler de Mere, bu böyük həndəsəçini bu sahədə məşğul olmağa sövq edərək ona deyirdi ki: «aşağıdakı səbəbə görə o, ədədlərdə düzgün olmamazlığı tapmışdır: bir zərin dörd dəfə atılmasında altı xalının düşməsi üçün 671:625 nisbətində əlverişli şanslara malik olmaq olar». Əgər iki zəri atdıqda 12 almaq məqsədi qarşıya qoyularsa, onda 24 dəfə atmaq hüququ əlverişsiz şanslar verir. Bununla belə, 24 ilə iki zərin bütün üzləri cütlərinin sayı 36-nın olduğu nisbət, 4-ün bir zərin üzləri sayı 6-ya nisbəti ilə eynidir. «Belədir, – Paskal Fermata yazırdı, keçirdiyi böyük təəsüf hissi onu cəsarətlə belə söyləməyə vadar etdi: bu teoremlər dəyişməz deyildirlər və arifmetika özü-özünə ziddiyyətlidir…. O, dərin əqlə malikdir, lakin o, həndəsəçi deyil, bu isə siz bildiyiniz kimi böyük çatışmamazlıqdır». Kavaler de Mere, yalnış analogiya ilə səhvə yol verərək, fərz edirdi ki, mərcə gələnlərdə bərabərlik olarsa, zəratmalar sayı bütün mümkün ola bilən şansların sayına mütənasib olaraq artmalıdır, bu isə dəqiq olmasa da, bu say böyük olduqca dəqiqliyə daha çox yaxınlaşır.

Soyadlarını davam etdirəcək oğul arzusunda olan ataların ümumi arzusu ilə oğlan uşaqlarının qız uşaqlarından çox doğulduğunu izah etməyə cəhd

göstərdik. Məs., eyni miqdarda, sonsuz sayda ağ və qara kürəciklər olan urn olduğunu təsəvvür edib, fərz edərək ki, çox saylı insanlardan hər biri bu urndan kürəcik çıxarır və tiraj ağ kürəcik çıxana qədər davam etdirilir; belə düşünürdülər ki, bu məqsəd çıxarılan ağ kürəciklər sayının qara kürəciklər sayından çox olmasını göstərəcəkdir. Əslində, bütün tirajlardan sonra, bu üstünlük, insanlarda ağ kürəciklər sayının hökmən heç olmasa insanların sayına bərabər olduğunu təmin edəcəkdir; və ola bilər ki, bu tirajlarda qara kürəcik heç olmasın. Lakin asanlıqla görmək olar ki, bu nöqteyi-nəzər illüziyadan başqa bir şey deyildir, çünki əgər biz fərz edəriksə ki, birinci tirajda bütün insanlar urndan hamısı birdən bir kürəcik çıxarır, onda aydındır ki, onların məqsədlərinin bu tirajda çıxarılan kürəciklərin rənglərinə heç bir təsiri olmayacaqdır. Bu tirajın yeganə nəticəsi – birinci tirajda ağ kürəcik çıxarmış şəxslərin ikinci tiraja buraxılmamasıdır. Oxşar surətdə, aydındır ki, yeni tirajda iştirak edən şəxslərin məqsədlərinin bu tirajda çıxacaq kürəciklərin hansı rəngdə olmasına heç bir təsiri olmayacaqdır və növbəti tirajlarda bu belə olacaqdır. Deməli, bu məqsəd bütün tirajlarda çıxan kürəciklərin nə rəngdə olacağına tamamilə təsir etməyəcəkdir; bu hər bir tirajda iştirak edəcək şəxslərin çox və ya az olmasına səbəb olacaqdır. Çıxarılan ağ kürəciklərin sayının qara kürəciklərin sayına nisbəti, beləliklə, vahiddən çox az fərqlənəcəkdir. Buradan belə nəticə alınır ki, insanların sayının olduqca çox olduğunu fərz edərək, əgər müşahidə də çıxarılan kürəciklərin rəngləri arasında vahiddən çox az fərqlənən nisbəti verərsə, onda vahid və urndakı ağ kürəciklərin qara kürəciklərin nisbəti arasındakı həmin fərqin mövcudluğu, demək olar ki, olduqca ehtimallıdır.

Mən, ehtimal hesabından sıraların cəmlənməsində Leybints və Daniil Bernullinin etdikləri tətbiqi illüziya hesab edirəm. Əgər biz, surəti vahid, məxrəci isə vahid plyus dəyişən olan kəsri bu dəyişənin qüvvət üstünə görə sıraya ayırsaq, onda asanlıqla görmək olar ki, dəyişəni vahidə bərabər götürdükdə, kəsr 1/2-ə bərabər olur, sıra isə *plyus vahid, minus vahid, plyus vahid, minus vahid* və s.-yə çevrilir. Bu sıranın ilk iki həddini, sonra növbəti iki həddini və s. toplayaraq, bu sıranı başqa bir sıraya çeviririk ki, alınmış bu sıranın hər bir həddi sıfra bərabərdir. İtalyan iyezuiti Qrandi buradan yaratmanın mümkünlüyü barədə nəticə çıxarmışdar; sıra həmişə 1/2-ə bərabər olduğundan, o fərz edir ki, bu kəsr sonsuz sayda sıfırlardan əmələ gəlir və ya heç nədən. Eyni şey Leybnitslə baş vermişdi: O, belə fikirləşirdi ki, oxşar yaranmaları onun ikilik arifmetikasında da görmək olar, o, burada yalnız iki işarədən istifadə edirdi: sıfır və vahid. O, belə düşünürdü ki, vahid Allahı, sıfır isə heç nəyi ifadə edə bilərdi, düşünürdü ki, Ali Varlıq bütün olanları heç nədən yaratmışdır, necə ki, vahid və sıfır hesab sistemində bütün ədədləri ifadə edə bilir. Bu ideya Leybnit-

sin o qədər xoşuna gəlmişdir ki, o, bu düşüncələrini Çində riyaziyyat kafedrasının nümayəndəsi, iyezuit Qrimaldi ilə bölüşərək, ümid bəsləyir ki, bu yaranma emblemi elmləri xüsusilə sevən o vaxtkı imperatoru xristianlığı qəbul etməyə sövq edər. Mən bu cəhəti xüsusilə vurğulayıram ki, göstərəm ki, uşaqlıq xurafatı ən böyük şəxsiyyətləri belə nə dərəcədə yalnış düşündürə bilir.

Leybnits, hələ də qəribə və olduqca sərbəst metafizikanın təsiri altında belə hesab edirdi ki, *plyus vahid, minus vahid, plyus vahid, minus vahid* və s. sırası hədlərinin sayı cüt və ya tək olmasından asılı olaraq, sıfır və ya vahidə bərabər olur; və buna görə də, sonsuzluqda cüt ədədə tək ədəddən üstünlük verməyə heç bir səbəb olmadığından, ehtimal qaydalarına görə nəticələrin bu iki növə ədədlərə aid – sıfır və vahid bərabər olan nəticələr götürülməlidir ki, bu da sıranın ədədi qiyməti üçün 1/2-i verir. Daniil Bernulli sonra bu mülahizəni periodik hədlərdən ibarət sıraların cəmləri üçün genişləndirmişdi. Lakin bütün bu sıraların, əslinə qaldıqda, ədədi qiyməti yoxdur: bu sıralar üçün ədədi qiymətlər yalnız onların hədlərini vahiddən kiçik hər hansı dəyişənin ardıcıl qüvvət üstünə vurduqda alınır. Bu halda bu sıralar, dəyişən və vahid arasındakı fərz olunan fərqin nə qədər kiçik olmasından asılı olmayaraq, həmişə yığılır; və çox asanlıqla isbat etmək olur ki, ehtimal nəzəriyyəsi əsasında Bernullinin təyin etdiyi ədədi qiymətlər, məhz, sıraları əmələ gətirən kəsrlərin ədədi qiymətləridir, bu halda bu kəsrlərdəki dəyişənin vahidə bərabər olduğu fərz olunur. Bu ədədi qiymətlər, həm də, dəyişən vahidə yaxınlaşdıqca sıraların get-gedə daha yaxınlaşdıqları limitlərdir. Lakin dəyişən nə vaxtsa vahidə bərabər olursa, bu sıralar artıq yığılan olur, onlar bu sıraların sonlu sayda hədlərini götürdükdə ədədi qiymətlər alır. Periodik sıraların ədədi qiymətllərinə ehtimal hesabının bu tətbiqinin gözəl münasibəti fərz edir ki, bu sıraların hədləri dəyişənin bütün ardıcıl qüvvət üstlərinə vurulmuşdur. Lakin bu sıralar sonsuz sayda müxtəlif kəsrlərin ayrılışlarından da alına bilinər; bu kəsrlərdə bu yerinə yetir. Məs., *plyus vahid, minus vahid, plyus vahid, minus vahid* və s. sırası, surəti – vahid plyus dəyişən, məxrəci – dəyişənin kvadratı qədər artırılmış bu surətə bərabər olan kəsrin ayrılışından da yarana bilinər. Dəyişənin vahid olduğunu fərz etdikdə, bu ayrılış verilən sıraya çevrilir və yaradıcı kəsr 2/3-yə bərabər olur; onda ehtimal qaydaları yanlış nəticələr verərdi, bu isə onu sübut edir ki, xüsusilə də, öz metodlarının dəqiqliyi ilə yüksək dərəcədə fərqlənən riyazi elmlərdə belə mülahizələri tətbiq etmək nə dərəcədə təhlükəli olardı.

Biz, təbii olaraq, belə düşünməyə meylliyik ki, Yer üzündə hər şey gördüyümüz kimi, yeniləşir və bu qayda həmişə olmuşdur və olacaqdır. Əslində, kainatın hal-hazırdakı vəziyyəti tamamilə əvvəl yaranmış olduğu

vəziyyətinə oxşasaydı, onda o, öz növbəsində oxşar vəziyyət yaratmış olardı. Onda bu vəziyyətlərin əvəz olunması əbədi olardı. Ümumdünya cazibə qüvvəsinə analizin tətbiqi ilə mən öyrəndim ki, planet və peyklərin fırlanma hərəkətləri və kükrəntilər və onların orbitləri və ekvatorlarının vəziyyətləri yalnız periodik bərabərsizliklərə tabedirlər. Ayın əsri tənliyi nəzəriyyəsini qədim Aytutulmaları ilə müqayisə edərək, mən tapdım ki, Hipparx dövründən bəri günün uzunluğu, hətta saniyənin yüzdə biri qədər belə dəyişməmişdir və Yerin orta temperaturu yüzdə bir dərəcə belə azalmamışdır. Beləliklə, hazırki vəziyyətin sabitliyi elə bil ki, eyni zamanda nəzəriyyə və müşahidələrlə pozulur, bu səbəblərə diqqətlə baxıldıqda bu dəyişiklik nəzərə çarpır və bu səbəbləri hesablamaq belə mümkün olmur.

Okeanın, atmosferin və meteorların təsirləri, zəlzələlər və vulkan püskürmələri Yer səthini daima dəyişikliklərə məruz qoyur və zaman ötdükcə bunlar Yer səthində mühüm dəyişikliklər yaradacaqdır. İqlim temperaturu, atmosferin həcmi və atmosferi təşkil edən qazların hansı nisbətdə olması hiss olunmayacaq tərzdə dəyişə bilinər. Yeniləşən alətlərin və bu dəyişikliklərin müəyyənləşdirilməsi üçün yararlı vasitələrin olmasına baxmayaraq, müşahidələr bu mənada bu vaxta qədər heç bir nəticəyə gətirə bilməmişdir. Bununla belə olduqca az doğruyaoxşardır ki, bizim havanı təşkil edən qazların udulması və bərpası səbəbləri onların uyğun miqdarlarını dəqiqliklə saxlamış olsun. Uzun əsrlər sırası bütün bu elementlərin məruz qaldıqları, mütəşəkkil varlıqların qorunub saxlanılması üçün olduqca mühüm dəyişiklikləri dərk etmək imkanını verir. Tarixi abidələrin ən qədim dövrlərə aid olmamasına baxmayaraq, bunula belə təbii səbəblərin yavaş və davamlı təsirləri nəticəsində onlar məruz qaldıqları olduqca böyük dəyişikliklərin olduğunu göstərir.

Yerin dərinliklərinə baş vuraraq, nə vaxtsa mövcud olmuş və hazırkı təbiətdən tamamilə fərqli olan çoxsaylı təbiət qalıqları kəşf olunur. Bundan başqa, əgər, göründüyü kimi, hər şey necə ki, bütün Yerin əvvəlcə maye şəklində olduğunu göstərirsə, onda aydındır ki, onun bu vəziyyətdən indiki olduğu vəziyyətə keçidində onun səthi nəhəng dəyişikliklərə məruz qalmalı idi. Hətta Göy, öz hərəkətlərindəki qaydaya baxmayaraq, dəyişməz deyildir. İşığın və digər efir mayelərin müqaviməti və ulduzların cazibəsi, olduqca çox əsrlər keçdikdən sonra planetlərin hərəkətlərini olduqca dəyişməlidir. Ulduzlarda və dumanların formalarında müşahidə olunmuş dəyişikliklər bu nəhəng cisimlər sistemində zamanın edəcəyi dəyişiklikləri hiss etməyə bizi məcbur edir. Kainatın ardıcıl vəziyyətlərini absisi zamanı, ordinatları bu müxtəlif vəziyyətləri ifadə edə bilən əyri şəklində təsvir etmək olardı. Bu əyrinin hər hansı bir elementini bildikdə, biz onun başlanğıcına çata biləcəyimiz mümkünlüyündən uzağıq və əgər təxəyyülü

maraqlandıran təzahürlərin səbəbləri barədə bilgisizliyin hələ də doğurduğu təşvişdə olan təxəyyülə istirahət vermək üçün hansısa vəziyyətləri irəli sürməyə risk edilərsə, onda bunlar ən azı olduqca hərtərəfli düşünərək, ağılla təklif olunmalıdır.

Ehtimalları qiymətləndirdikdə illüziyaların bir növü vardır ki, o, xüsusən ağlın quruluşu qanunlarından asılı olub, bu illüziyaların təsirindən qorunmaq üçün bu qanunları dərinliklə sınaqdan keçirməlidir. Gələcəyə baş vurmaq arzusu və bəzi qəribə hadisələrə, astroloqların, falçıların və kahinlərin öngörülərinə, hissetmələrə və yuxulara, xoşbəxt və ya bədbəxt sayılan ədədlərə və günlərə münasibət, hələ indi də, çox yayılmış olan çoxsaylı xurafatı yaratmışdı. Heç bir hiss yaratmayan və ya nəzərdən yayınmış və ya naməlum qalmış bir-birilə uzlaşmayan çoxsaylı hallar haqqında düşünən heç yoxdur; bununla belə, bunları bilmək o dərəcədə zəruridir ki, bir-birilə üst-üstə düşən belə halların səbəblərinin ehtimallarını qiymətləndirmək mümkün olsun. Bu qiymətləndirmə, şübhəsiz ki, bu xurafatlara görə bizim əqlimizin diktə etdiyini təsdiq etmiş olardı. Məs., ən qədim filosoflardan birinə Allahın məbəddə qüdrətinin tərifini Göylərə qaldırmaq üçün, bu Allaha *ex-voto* səcdə edərək xitab edən, gəmi qəzasından xilas olanları göstərərək, onların bu xilasının Allaha yalvarmaları və inamının nəticəsində baş verdiyini misal çəkənlərə o, ehtimal hesabı ilə uzlaşan belə fikri söyləmişdi: o, yalvaran, dua edən və bu qəzada ölmüş şəxslərin adlarını görmür. Siseron bütün bu xurafatları böyük ağılla və gözəl natiqliyi ilə, özünün fala baxma haqqında Traktatında təkzib edərək, sonda belə yazmışdı: çünki onlar keçmiş filosoflarda dünyəvi əqlin cəhətlərini tapmağı sevirlər, elə bir əqlin ki, o, özünün nuru ilə bütün xurafatları alt-üst edərək, insani qanunların yeganə əsasına müraciət edəcəkdir.

Roma natiqi belə deyir: – «Yuxulara görə falabaxma və bütün oxşar xulafatlar rədd olunmalıdır». Hər yerdə mövhumat ağılların çox hissəsini məhkum etmiş və insan zəifliyinə nail olmuşdu. Məhz bunu, Allahların təbiəti haqqında kitablarımızda, biz inkşaf etdirirdik, xüsusilə də, bu əsərdə, çünki biz inanırdıq ki, əgər biz xurafatı darmadağın edə bilsək, başqalarına və özümüzə fayda gətirəcəyik. Lakin (və mən xüsusilə arzu edirəm ki, bu anlamda mənim fikrim yaxşı anlaşılsın) xurafatı darmadağın etməklə, mən, dinə toxunmaq fikrindən uzağam. Ağıl bizə Allahlara sitayişə aid olan, bizim əcdadlarımızın adət və ənənələrini və təsisatlarını dəstəkləməyi təlqin edir. Bundan başqa, kainatın gözəlliyi və Göy təzahürlərindəki qayda, bizi insan övladının qeyd edə biləcəyi və səcdə edəcəyi hansısa ali təbiətin varlığının olduğunu qəbul etməyə məcbur edir. Təbiətin dərk olunması ilə bağlı olan dini yaymaq nə qədər münasibdirsə, xurafatın yerli-dibli aradan qaldırılması üçün də o qədər səy göstərilməlidir, çünki bunlar bizə iztirab

verir, sizi əsir edir və hər yerdə sizi daima izləyir. Əgər siz falçıdan və ya kahindən məsləhət istəsəniz, əgər siz qurban versəniz, əgər siz quşun uçuşuna baxsanız, əgər siz heyvanların daxili orqanlarına görə falçını və ya gildanini (1. Qədim Babilistan övladlarında yaşamış Gildani xalqına mənsub adam; 2. xaldlar – rus. халды – Van gölü həvalisində yaşamış və miladdan əvvəl XIV-VII əsrlərdə Urartu dövlətində hakimiyyət sürmüş tayfa, – H. M.) qarşılayarsınızsa, əgər ildırım çaxırsa, əgər Göy guruldayırsa, əgər tufan qopursa, nəhayət, əgər hər hansı müdhiş bir nəhəng doğulur və ya yaranırsa, – bütün bu hadisələrdən çox vaxt hansı biri hökmən baş verirsə; onda sizə hakim kəsilmiş xurafat sizə rahatlıq verməyəcəkdir. Hətta insanların ağır anlarında və zəhmətlərində dinclik tapdıqları yuxu belə, onların öz günahları isbatından onlar üçün yeni bir narahatlıq və qorxu predmetinə çevrilir».

Onların təlqin etdikləri bütün bu xurafatlar və qorxu hissi fizioloji səbəblərdən asılıdır ki, bunlar bəzən, ağlımız bizi səhvlərimizi görməyə yönəltdikdə belə, sonradan güclü təsir etməkdə davam edir. Lakin bizim mövhumatımıza zidd olan əhvalatların təkrar olunması bunları həmişə darmadağın edə bilər. Bunu aşağıdakı mülahizələrimiz sübut edəcək.

Gözlə görünən fiziologiya sərhədində bu fiziologiyadan çoxsaylı təzahürləri ilə fərqlənən digər fiziologiya başlayır, bu təzahürlər özlərinin uyğun qanunlarına tabedirlər ki, bunları bilmək olduqca mühümdür. Bu fiziologiya, onu biz *psixologiya* adlandıracağıq, şübhəsiz ki, gözlə görünən fiziologiyanın davamıdır. Lifləri itib-batan sinirlər xaricdəki əşyalardan aldıqları təəssüratları beyin maddəsinə bütün beyin üzrə paylaşdırır və orada daimi təəssüratları saxlayır və bunlar bizə məlum olmayan şəkildə sensorium və ya fikrin yerini dəyişir.

Xarici hisslər bizə bu dəyişikliklərin təbiəti üzrə heç bir şey öyrədə bilmir; özlərinin sonsuz müxtəlifliyi, bir-birindən fərqlənmələri və onları özündə yerləşdirmiş kiçik bir fəzada qayda saxlamalarına görə bu dəyişikliklər barədə işıq və elektrikin hədsiz rəngarəngliyi bizə müəyyən anlayış verir. Lakin bu dəyişiklikləri duymağa təkcə qadir ola biləcək daxili hisslər üzərində müşahidəyə xarici hisslər üzərində müşahidələrdə istifadə olunan metodu tətbiq edərək, insan idrakı nəzəriyyəsinə, natural fəlsəfənin digər sahələrinə daxil olunmuş eyni dəqiqliyi də daxil etmək olar.

Psixologiyanın bəzi prinsipləri[1] artıq qəbul olunmuşdur və müvəffəqiyyətlə inkişaf etdirilmişdir. Oxşar orqanizmli bütün varlıqların öz aralarında harmoniya təsbit etmə cəhdi belədir. *Simpatiya* təşkil edən bu cəhd, hətta müxtəlif növ heyvanlarda belə vardır: onların orqanizmləri bir-

[1] Mən burada *prinsip* sözü ilə təzahürlərin ümumi münasibətlərini adlandırmışam.

birinə az oxşadıqca, bu cəhd azalacaqdır. Eyni orqanizmli varlıqlar içərisində bəziləri bir-birilə başqalarından daha tez yaxınlaşırlar. Qeyri-üzvü təbiətdə belə hadisələr məlumdur: eyni bir altlıq üzərinə çox az fərqlə işləyən iki – divar və ya cib saatı qoyulduqda sonda bunlar tamamilə eyni cür işləməyə başlayır; səsli simlərin sistemində bir simin rəqsi bütün harmonik rəqslərin həmahəng səslənməsinə səbəb olur. Səbəbləri yaxşı məlum olan bu hadisələr üzərində hesablamalar aparılmış və nəticədə məlum olmuşdur ki, bu hesablamalar daha da mürəkkəb səbəblərdən asılı olan bu anlamdakı simpatiya haqqında doğru anlayış verir.

Xoşagəlmə hissi, demək olar ki, simpatiyadakı dəyişməni həmişə müşayiət edir. Heyvan növlərinin əksəriyyətində ayrı-ayrı fərdlər bu tərzdə bir-birilə qovuşur və toplumlar kimi birləşirlər. İnsan nəslində güclü şəxslər zəiflər üzərində hakimlikdən əsl xoşbəxtlik duyur və zəiflər isə öz növbəsində onlara tabe olduqlarından özlərini heç də az xoşbəxt hiss etmirlər. Simpatiya hissi eyni zamanda çoxsaylı insanda həyacan doğurduqda, qarşılıqlı reaksiya nəticəsində artmağa başlayır; necə ki, bunu teatrda müşahidə etmək mümkündür. Bu hissdən doğan zövq, oxşar baxışlı insanları bir-birinə yaxınlaşdırır, onlar birləşdikdə bu hal onları bəzən fanatizmə qədər belə alovlandırır. Beləliklə də, sektalar yaranır, bunların oyatdığı meyllər və onların yayılması sürətlənir. Tarixdə bunlar simpatiya hissinin hakim kəsilməsinə ən heyrətamiz və ən ziyanlı misallardır. Tez-tez elə hal müşahidə olunur ki, simpatik təsirlər necə də asanlıqla, heç bir digər səbəb olmadan bu təsirə duçar olanlara yalnız onunla əlaqədar olaraq sirayət edir, məsələn, gülüş kimi. Sensoriuma simpatiyanın təsiri, şübhəsiz ki, olduqca güclüdür: simpatiyaının sensoriuma verdiyi vibrasiyalar, çox güclü olduqları halda, heyvani qənaətə təsir göstərəcək, qeyri-adi təsirlər oyadır, bunlar xurafat əsrlərində fövqəltəbii qüvvələrə aid olunmuş və öz müstəsnalığı ilə müşahidəçilərin diqqətini cəlb etmişdir.

Rəhmdillik, xeyirxahlıq və bir çox digər hisslər simpatiyadan yaranmışdır. Bu hissin təsiri altında özgə iztirabını hiss etmək və yardım göstərilmiş bədbəxt bir kəsin sevincini bölüşdürmək olur. Lakin mən burada yalnız psixologiyanın prinsiplərini, onların nəticələrinin inkişafına varmadan, şərh etmək istəyirəm.

Bu prinsiplərin hamısından ən məhsuldar olan biri – sensoriumda eyni zamanda və ya düzgün ardıcıllıqla mövcud olan bütün şeylərin əlaqə prinsipidir, elə əlaqənin ki, bu şeylərdən biri qayıtdıqda, digərlərini də qaytarır. Mürəkkəb, mücərrəd və ümumi ideyaların yaranması və analizindən ötrü və mühakimə yürütmək üçün hisslər, duyğular və ideyalar doğurmaq məqsədilə işarələr və dillərin istifadəsi bu prinsipə aiddir. Bir

çox filosoflar bu predmeti yaxşı inkişaf etdirmişlər və o, indiyə qədər metafizikanın real hissəsini təşkil edir.

Hətta müəyyən etmək olur ki, psixologiya prinsipi kimi, eyni bir predmetdən müxtəlif hisslərdə tez-tez təkrar olunan təəssuratlar, sensoriumu elə dəyişirlər ki, predmetdən yalnız bir hissə alınan xarici təəssurata uyğun daxili təəssürat əvvəl olduğundan olduqca fərqlənir. Bu prinsipi aydınlaşdırmaq məqsədilə kor doğulmuşa görmə qabiliyyətinin verildiyi hala baxaq. Onun gözünün tor qişasında əşyanın həkk olunmuş obrazı, onun sensoriumunda təəssürat yaradır, mən onu birincidən fərqləndirmək üçün və onun təbiəti barədə heç bir fikir söyləmədən, onu *ikinci obraz* adlandıracağam. Bu ikinci obraz, əvvəlcə, əşyanın düzgün obrazı deyildir; lakin hiss etmə vasitəsilə əşyadan yaranan təəssüratların görmə qabiliyyətindən yaranan təəssüratlarla adətə görə müqayisəsi, sensoriumu dəyişdirərək, nəhayət, elə hal yaradır ki, ikinci obraz hissetmə ilə doğru ötürülmüş gerçəkliklə uzlaşır. Tor qişada həkk olunmuş obraz dəyişmir, lakin onun yaratmış olduğu daxili obraz görmə qabiliyyəti bərpa olunmuş kor doğulmuş bir çoxları üzərində aparılan təcrübələrin göstərdiyi kimi o cür qalmır.

Sensorium bu dəyişikliklərə, əsas etibarilə, uşaqlıqda məruz qalır. Uşaq görmə və hissetmə orqanları ilə eyni bir əşyadan aldığı təəssüratları daima müqayisə edərək, görmə təəssüratlarında düzəlişlər edir. O, öz sensoriumunu gördüyü əşyalara təəssüratları ilə sıx bağlı, bunların həmişə doğurmuş olduğu hiss təəssüratlarının ona təlqin etdiyi formanı verməyə öyrədir. Onda görünmüş əşyalar, hiss olunmuş kimi eyni gerçəkliklə təsvir oluna bilinir. Görmə üçün işıq şüası hissetmə üçün çubuğun yaratdığını etmiş olur. Bu hisslərdən birincisi bu qayda ilə özünün təəssüratlar obyektləri oblastlarını ikincisindən daha da çox genişləndirə bilir. Hətta təsəvvürümüzdə səyyarələrin bərkidilmiş olduğu Göy qübbəsi hələ çox məhdud sayılmışsa da, biz yalnız uzun-uzadı aparılan müşahidələr və hesablamalar yolu ilə bu Göy cisimlərinin olduqca böyük uzaq məsafələrdə olduğunu dərk edə bilmişik və onların ucsuz-bucaqsız fəzada, bir-birindən qeyri-müəyyənliklə aralı yerləşdiklərini öyrənə bilmişik.

Heyvanların bir çox növləri, ehtimal ki, sensoriumun məsafələrini qiymətləndirmək qabiliyyətinə malikdirlər. Lakin təbiət instinkt hissini insanda, demək olar ki, hər barədə ağılla əvəz etmişdir və insan instinkt əvəzinə müşahidələrə və müqayisələrə ehtiyac duyur və bunlar onun əqli qabiliyyətini təəccüb doğuracaq qədər inkişaf etdirir və bu inkişaf sayəsində onun Yerin hakimi olmasını təmin edir.

Daxili obrazlar, buna görə də, yalnız səbəbin təsiri ilə yaranmır; bunlar ya eyni zamanda eyni bir və ya müxtəlif hiss orqanları ilə alınmış

təəssüratlardan, yaxud yaddaşın yaratdığı daxili təəssüratlardan yaranır. Bu təəssüratların qarşılıqlı təsiri – zəngin nəticələri olan psixoloji prinsipdir. Bundan əsaslarını açıqlayaq.

Müşahidəçi tam qaranlıqda, eyni bir diametrli iki işıq saçan kürəciyi müxtəlif məsafələrdən görür: bunlar ona eyni ölçülü kimi görünməyəcəkdir. Bunların daxili obrazları gözün tor qişasında həkk olunmuş uyğun təsvirlərə mütənasib olacaqdır. Lakin işıqda, o, əgər kürəciklərlə bütün aradakı fəzanı da görərsə, onda bu görüntü daha uzaqdakı kürəciyin daxili obrazını böyüdür və onu digər kürəciyin obrazı ilə sanki bərabər edir. Bundan da belə alınır ki, iki və üç metr məsafədən görünən adam, bizə eyni ölçülü görünür: onun daxili obrazı, gözün tor qişasındakı təsvirlərdən birinin digərindən iki dəfə çox olmasına baxmayaraq, dəyişmir. Eynilə də, aralıqdakı əşyalardan yaranan təəssüratlar sayəsində üfüqdə Ay zenitdəki Aydan böyük görünür. Biz gözə yaxın budaq üzərində əşyanı uzaq məsafədəki kimi qəbul etdiyimizdən o, çox böyük görünür. Sonra, biz o əşyanı budaqla birləşdirən əlaqəni öyrənirik: biz bu əlaqəni anlayan kimi o, daxili təsviri dəyişərək, onun olduqca kiçik ölçülərdə olduğunu müəyyən edir. Bütün bunlar bəzi metafiziklərin fikirləşdikləri kimi sadəcə mülahizələr deyildir; bu eyni bir əşyadan bir neçə hiss orqanında, xüsusilə də, hiss və görmə orqanlarında, sensoriumda yaranan təəssüratların, adət olunmuş müqayisə yolu ilə aldığı bacarıqlardan doğan fizioloji effektlərdir.

Kənardakı əşyalardan doğan təəssüratlara yaddaşın qoyduğu izlərin təsiri bir çox hallarda özünü göstərir. Uzaqdan hərflər görünür, lakin bu hərflərlə hansı sözün yazıldığını müəyyən etmək olmur. Əgər kimsə bu sözü tələffüz edərsə və ya hansısa bir səbəb bu sözü onun yadına salarsa, onda həmin an bu tərzdə yeniləşmiş şəkildəki bu hərflərin daxili təsviri, əgər mən belə ifadə edə bilərəmsə, xarici işarələrin təəssüratından yaranan, aydın olmayan təsvir üzərinə həkk olunur və onu aydınlaşdırır. Hərflərin şəkli onlara uyğun səslərin izlərini yaradır; bu izlər isə səsin aydın olmayan sədaları ilə qarışaraq, onları fərqləndirməyə imkan verir. Qorxu, çox vaxt bu tərzdə, olduqca zəif işıqda ayırd edə bilmədiyimiz əşyaları, onlara oxşar qorxunc əşyalar kimi görməyə səbəb olur. Bu sonuncu (eybəcərləşmiş şəkildəki) əşyaların sensoriumda qorxudan olduqca güclü şəkildə həkk olunmuş təsvirinin, xaric əşyaların təəssüratlarından yarandığı fərz olunur. Yalnız çox zəif təəssürat doğuran təzahürlərin müşahidələrindən çıxarılan nəticələrdə illüziyaların bu səbəbindən özünü qorumaq vacibdir: planet və peyklər üzərində işığın azalmasının müşahidəsi belədir və bundan isə onların atmosfer sıxlığının varlığı və onların fırlanma hərəkətləri haqqında nəticələr çıxarılmışdı. Bir çox hallarda daxili obrazların bu təəssüratları

özünə oxşadacağından qorxmaq lazımdır: biz hisslərdən alınmış təəssüratlarla təsvir tapmış belə şeylərin varlığına inanmağa meylliyik.

Bu gözəl meyllilik xüsusi xarakterdən asılıdır, xaricdən alınan bu təəssüratlar təxəyyülün yaratdığı və ya yaddaşın doğurduğu izlərdən bu xarakter vasitəsilə fərqləndirilir. Sensorium və ya orqanlarda, onlara təsir edən pozulmalar nəticəsində, bəzən bu izlər xaric təəssüratların xarakteri və canlılığını almış olur. Gecənin qaranlığı və sakitlik bu illüziyalara əlverişli şərait yaradır, bunlar yuxu mərhələsində bütövləşir və yuxugörmələri doğurur; biz nəzərə alarıqsa ki, qaranlıqda bizim təxəyyülümüzdə təsvir olunan əşyaların izləri yuxu ərəfəsində böyük gərginliyə malik olur, onda bunlar haqqında bizdə doğru təsəvvür yaranacaqdır.

Hamıda belə fikir formalaşmışdır ki, lunatiklərdə (somnambul) bəzi hisslər oyaq olur. Məs., əgər, xaric əşyalara toxunmadan yaranan hissiyyat az da olsa qalmışsa, onda əşyalardan yaranan sensoriuma ötürülən zəif təəssüratlar, lunatikin yuxu obrazları ilə birlikdə onları dəyişə bilir və onun hərəkətlərini idarə edə bilir. Mən bu mülahizələri nəzərə alaraq, lunatiklərin etdikləri qeyri-adi şeylər haqqında yaxşı yoxlanılmış hekayətləri tədqiq etdikdə, mənə belə gəlir ki, bunlara sadə izah vermək mümkündür.

Bəzən gələcəyi görən (bəsirətli) adamlara belə gəlir ki, onlar təsəvvür etdikləri adamların danışdığını eşidirlər və onlar bu adamlarla əlaqəli söhbət aparırlar; həkimlərin əsərləri bu növ faktlarla doludur.

Bonne, tez-tez müşahidə etdiyi ana babasını – «qocanı» misal gətirərək, belə deyir: «tam sağlam olan bu «qoca», heç bir xaric təəssürat olmadan, zaman-zaman, qarşısında kişi, qadın, quş, ekipaj, tikili və s. kimi obrazlar görür. O, bu obrazların müxtəlif hərəkətlərlə dəyişdiklərini, bir-birinə yaxınlaşdıqlarını, bir-birindən uzaqlaşdıqlarını, yüyürdüklərini, ölçülərdə kiçilib və böyümələrini, gözə görünüb-yox olmalarını və yenidən göründüklərini görür. Lakin o, bu görüntülərin tamamilə gerçək olduğunu qəbul etmir; onun ağlı bunlarla məzələnir. O bilmir ki, hər bir növbəti anda gözünə hansı görüntü görünəcəkdir. Onun ağlı – səhnələr göstərən, özü də ki, tamaşaçı üçün çox qəribə olan, onun tamamilə görmədiyi səhnələr göstərən bir teatrdır». Janna D'Arkın tarixçəsini oxuduqca, biz bu qeyri-adi qızın təmiz qəlbli bəsirətli bir insan olduğunu qəbul etməyə bilmirik; onun cəsarətli, comərd eksaltasiyası Fransanın düşmənlərdən azad olunmasına səbəb olmuşdu. Olduqca mümkündür ki, özlərinin bilgilərinin fövqəltəbii varlıqdan alındığını iddia edən bu bəsirətli adamlardan bir çoxu öncənigörən adamlar idi: onlar özlərinin əmin olduqlarına digərlərini də inandırmağa çalışırdılar. Onların dinlə əlaqələndirdikləri yalanlara və güclü

vasitələrə, onların insanlar üçün zəruri həqiqət hesab etdiklərini yaymaq məqsədilə onların özləri tərəfindən də bəraət qazandırılırdı.

Bizim xaric əşyalardan yaranan təəssüratlarımızın yaddaşla doğurulan izləri təxəyyül məhsullarından xüsusi xarakterlə fərqləndirilir. Biz bu əşyaların bizim yaddaşımızın təyin etdiyi qaydada keçmişdə mövcud olduğunu sanki instinktlə qəbul etməyə meylliyik. Daima aparılan təcrübələr bizim davranışımız üçün buradan çıxarılan nəticələrin doğruluğunu təsdiq edir və bu meylliliyi möhkəmlədir. Sensoriumun bu əməliyyatında bizim mülahizələrimizi müəyyən edən mexanizm necədir? Biz onun haqqında heç nə bilmirik və yalnız onun təsiri nəticələrini görə bilirik. Bu mexanizmin köməyilə yaddaşın zəif izləri belə onların ilkin gücünü qiymətləndirməyə bizə imkan verir, beləliklə də, biz bu gücü ətrafımızdakı əşyalardan yaranan oxşar təəssüratlarla müqayisə edə bilirik. Beləliklə, bizə belə gəlir ki, öncə gördüyümüz işıq hal-hazırda gözümüzə görünən işıqdan daha parlaqdır.

Yaddaşdakı izləri müqayisə edən təəssüratlar, bizə, onların səbəblərini xatırlatmağa kömək edir. Bizə nə barədə isə danışılmış xatirəyə, bu hekayəti söyləyən şəxsə bizim inam hissimizin xatirəsi də əlavə olunduqda, əgər həmin şəxsin adını xatırlaya bilmiriksə, biz danışdığımız adamların adlarını bizə bu inamı təlqin etmiş şəxsin adına çatana qədər bir-bir xatırlayırıq.

Ətrafdakı bizim əvvəldə gördüyümüz əşyalar onlarla əlaqədar olan bizim ilk gördüyümüz şeylərin izlərini canlandırır. Bu izlər isə eyni tərzdə digər əşyaların izlərini canlandırır və s., odur ki, hər hansı ətrafdakı şey haqqında, biz onları sonsuza qədər xatırlaya bilərik və onlardan hansılarına baxmaq istədikdə, diqqətimizi o anda bunlar üzərində saxlayırıq.

Uşaqlıqda bizdə təlqin olunmuş təəssüratlar insanın ən qoca dövrünə qədər qorunub saxlanılır və hətta ahıl yaşda ən güclü təəssüratlar silinmiş olduqda belə bunlar canlanır. Sensoriumda dərin həkk olunmuş ilk təəssüratlar, sanki yenidən canlanmaq üçün yaşla və ya xəstəliklə sonrakı təəssüratların yalnız zəifləməsini gözləyirlər, necə ki, gündüz işığının görünməz etdiyi ulduzlar gecə və ya Günəş tutulmalarında görünürlər.

Yaddaşın izləri zamanın təsiri və bizim xəbərimiz olmadan gərginlikdə yaranır. Bizim axşam öyrəndiyimiz nəsə, sensoriumda yuxu zamanı yaddaşda həkk olunur və bu qayda ilə asanlıqla yaddaşda qalır. Mən dəfələrlə müşahidə etmişəm ki, mən ən mürəkkəb məsələlər haqqında bir neçə gün fikirləşmədikdə, bunlara mən yenidən nəzər saldıqda, onlar mənə asan görünürdü.

Əgər biz, öz ölçüsü ilə bizi heyrətləndirmiş əşyanı, onunla bircins olan daha böyük əşyaları tez-tez müşahidə etdikdən uzun müddət sonra yenidən görürüksə, o əşyaların doğurduğu təəssürat, bu əşyanın ölçüsünün kiçik olduğu təəssüratını yaratdıqda, onda biz bu təəssüratların fərqli olmasına təəccüblənirik.

Bəzi adamlar heyrətamiz yaddaşa malikdirlər. Eşitdikləri uzun söhbətləri onların dəqiqliklə təkrar etməsi bizi təəccübləndirir. Lakin insanların əksəriyyətinin yaddaşında hər şeyin qorunub qaldığı haqqında düşündükdə, yaddaşın bir-birilə qarışmadan nə qədər şeyi özündə saxlamasına daha da çox təəccüblənirsən. Səhnədə müğənniyə nəzər salın: onun yaddaşı onun rolunun hər bir sözünü, bunların ölçüsünü və hansı hərəkətlərlə müşayət ediləcəyini ona xatırladır. Əgər yeni rol birinci roldan sonra gəlirsə, onda birincisi sanki yaddaşdan silinir, yaddaş ikinci rolun bütün hissələrini lazimi şəkildə bərpa edir və müğənninin öyrənmiş olduğu bütün müxtəlif rolları oxşar şəkildə bərpa edə bilir. Sayı olduqca çox olan bu izlər və ya heç olmasa bu izləri doğura bilən hal, onun sensoriumunda bir-birinə qarışmadan mövcuddur və aktyor öz arzusu ilə bunları canlandıra bilir. Mən burada təkrar etməliyəm ki, *iz*, *obraz*, *dəyişikliklər* (rus. колебание) və s. sözləri ilə mən, yalnız, sensoriumun hallarını ifadə etmək istəmişəm və onların təbiəti və onların səbəbləri barədə heç bir mülahizə yürütmək fikrində olmamışam; bunu mexanikada effektlərin yalnız *güc*, *cazibə*, *oxşayış* və s. sözlərlər ifadə edilməsinə analoq kimi hesab etmək olar.

Sensoriumun təsirləri və sensoriumun yerinə yetirmək üçün məcbur etdiyi hərəkətlər daha da yüngül və tez-tez təkrar olunduğundan təbii olur. Bu psixoloji prinsipdən bizim vərdişlərimiz yaranır. Simpatiya ilə müxtəlif cür birləşərək, o, özünəməxsus vərdişlər və adətlər, xüsusiyyətlər əmələ gətirir. Bu prinsipə əsasən hər hansı bir xalq digəri üçün ümumqəbul olunan nəyəsə dəhşətlə baxır. Romalıların ehtirasla sevdikləri qladiator döyüşləri və insan qurbanları vermə tamaşaları – xalqlar salnamələrini ləkələyən belə tamaşalar – bizə dəhşətli görünərdi. Hindistanda qulların acınacaqlı vəziyyətlərinə, parilərin alçaldılmasına, bizim bütün hisslərimizin dəlillərinə və ağlımıza zidd olan çoxsaylı etiqadların mənasızlığına baxdıqda, kədər hissi ilə görürsən ki, köləlik və xurafat insanları nə dərəcədə alçalda bilir.

Sensoriumun tez-tez təkrar olunmalar yolu ilə gələ bildiyi bu vəziyyət, insan orqanizmindən asılı olan meyllərdən yaranmış adətlərin fərqləndirilməsini olduqca çətinləşdirir; çünki, təbii olaraq, fikirləşirsən ki, heyvanlarda olduqca yayılmış və möhtəşəm olan instikt, insanlarda da tamamilə itmir və ananın övladına bağlılığı da məhz bu instikt nəticəsindədir. Adət və simpatiyanın ikiqat təsiri bu meylləri dəyişir və çox vaxt bunları

möhkəmlədir; bəzən o, bunları o dərəcədə dəyişdirir ki, onlar özlərinə əks olanları ilə əvəz olunurlar. İnsanlar və heyvanlar üzərində aparılan və davamlı olaraq, aparılması böyük maraq kəsb edən bəzi müşahidələr, adətən, bizi belə fərz etməyə sövq edir ki, adətlərin sensoriuma böyük dayanıqlılıq vermiş olduğu dəyişikliklər atalarından övladlarına, bir çox üzvü bacarıqların keçilməsi kimi, nəsildən nəslə keçir.

Daimi təmrinlərin orqanlara sirayət etmiş olduğu asanlıqla şəklini dəyişmə xüsusiyyəti nəticəsində, bu orqanlar, iradə vasitəsilə ötürülmüş hərəkətləri özü-özünə yerinə yetirməkdə davam edir. Biz yolu getdiyimiz zaman, beynimiz hər hansı bir fikirlə məşğul olduğu halda, bizim hər bir andakı hərəkətimizi yeniləşdirən səbəb, bizim iradəmizin iştirakı olmadan təsir göstərir və biz bu barədə hətta heç düşünmürük. Belə hallar olmuşdur ki, yol getdiyi zaman yuxuya dalmış adamlar öz yollarına, yalnız hər hansı maneə ilə qarşılaşana qədər davam edirlər. Belə görünür ki, sanki belə gediş, hərəkət sisteminə yol getmək istəyi verən vəziyyətlə əlaqədar baş verir, bu da spiral yayın burulması nəticəsində saatın işləməsinə bənzəyir. Heyvani qənaətcillikdə pozuntu belə vəziyyəti yarada bilər. Gəzmə hərəkəti iradədən asılı olmadan baş verən xəstəliyə duçar olmuş bir xəstəni müalicə edən çox savadlı bir həkimdən mən öyrəndim ki, xəstə yalnız tərpənməyən dayaq nöqtəsindən tutarsa, o, dayana bilər. Beləliklə, həkimlər öz məharətlərini və dəqiq kritik münasibət bildirən riyaziyyatın və ehtimallar haqqında elmin xüsusiyyətlərinin öyrənilməsi qabiliyyətini verən uzlaşan elmlərin bilgisini birləşdirdikdə, xəstəliklər üzərindəki müşahidələr psixologiyanı olduqca aydınlaşdıra bilər.

Sensoriumun izlərinin qarşılıqlı təsiri barədə bizim dediklərimizdən belə aydın olur ki, musiqi tez-tez təkrar olunması yolu ilə bizim hərəkətlərimizə öz ölçüsünün düzgünlüyü barədə məlumat verə bilər. Məhz bunu, biz, rəqslərdə və bu tərzdə tənzimlənən müxtəlif məşqlərdə hərəkətlərin bizə qeyri-adi görünən dəqiqliyini müşahidə edirik. Musiqi bu requlyarlığı ilə, adətən, bir çox adamın eyni zamanda yerinə yetirdikləri hərəkətləri yüngülləşdirir.

Olduqca gözəl psixoloji təzahür – diqqətin sensoriumun izlərinə güclü təsiridir. Bu təsir onların canlılığını artırır və kənardan olan müşayiətedici təəssüratları azaldır. Əgər biz əşyaya onun hansısa xüsusiyyətlərini fərqləndirmək məqsədilə çox diqqətlə baxırıqsa, onda bu diqqət bizi, gözün tor qişasına digər əşyalardan olan təəssüratlara qarşı hissiyyatsız edə bilir. Bu diqqətin köməyilə bizim müqayisə etmək istədiyimiz əşyaların obrazları yalnız onların münasibətlərinin bizim diqqətimizdə olması üçün zəruri güc əldə edir; o, bu müqayisəni edə biləcək yaddaş izlərini oyadır və bunun nəticəsində diqqət insan əqlinin möhtəşəm payına çevrilir.

Diqqət əşyaların hər hansı xüsusi bir keyfiyyətinə tez-tez yönəldikdə, o, orqanlara elə incə hissiyyat aşılayır ki, hər bir xüsusiyyət, hətta adi adam üçün sezilmədiyi halda belə, o, bu keyfiyyəti görməyə səbəb olur.

Bu prinsiplər mənzərələrin yaratdığı qəribə effektləri izah edir. Perspektiv qaydalara bunlarda yaxşı riayət olunmuşdursa, onda əşyalar gözün tor qişasında real olduğu kimi həkk olunur; onda tamaşa edən şəxs əşyaların reallıqda yarada bildiyi vəziyyətdəki vəziyətdə olur. Lakin perspektiv eyniliyin mükəmməl həddə çatması üçün kafi olan dəqiqliyə çata bilmir. Bundan başqa, kənar təəssüratlar, hətta zəifləri belə, perspektivin yaratdığı əsas təəssüratlara qarışaraq, əvvəlcə illüziyanı məhv edir. Mənzərəyə toparlanmış diqqət onları məhv edir; lakin bundan ötrü sensoriumun vəziyyətindən və mənzərənin mükəmməlliyindən asılı olaraq çox və ya az uzun zaman tələb olunur. Mənim gördüyüm bütün mənzərələrdə tam illüziya almaq üçün, zəruri olaraq, mənə bir neçə dəqiqəlik vaxt kifayət etmişdi.

Psixologiyanın növbəti prinsipi bu əsərin predmetinə birbaşa aidiyyatı olan təzahürlərin böyük əksəriyyətini izah edir: «Əgər sensoriumun xüsusi bir dəyişikliyindən yaranan hərəkətlər tez-tez təkrar olunarsa, onda onların bu orqana reaksiyası bu dəyişilməni yalnız artırmaq deyil, hətta bəzən onun səbəbi də ola bilir». Məsələn, sallanmış uzun bir zənciri tutan əlin hərəkəti zəncir boyunca onun axırıncı son nöqtəsinə qədər yayılır; və zəncir hərəkətsiz vəziyyətdə olduqdan sonra, onun bu ucunu hərəkətə gətirdikdə, zəncirdəki hərəkət ələ qədər qalxaraq, öz növbəsində onu hərəkət etdirəcəkdir. Bu qarşılıqlı hərəkətlər tez-tez təkrar olunduqda qarşılıqlı hərəkətlər yüngülləşir.

Bu prinsipin inama təsiri olduqca yaxşıdır. İnam və ya məlum təkliflə bizim razılığımız, adətən, aşkar-aydınlığa, hisslərin dəlillərinə və ya ehtimallara əsaslanır; bu sonuncu halda onun güc dərəcəsi ehtimalın nə dərəcədə olmasından asılıdır, bu isə öz növbəsində verilənlərdən – özünün mülahizə predmeti haqqında hər bir şəxsin malik ola bildiyi verilənlərdən asılıdır.

Biz tez-tez öz inamımızla həmahəng hərəkət edirik və onun dəlil-sübutlarını yada salmağa belə ehtiyac duymuruq. Deməli, inam sensoriumun dəyişilməsidir, bu dəyişilmə bu dəlil-sübutlardan asılı olmadan mövcuddur, hətta bunlar çox vaxt unudulmuş olur və bizi, onun təsir sonrası olan hərəkətləri yerinə yetirməyimizə sövq edir. Bizim indicə şərh etdiyimiz bu prinsipə görə bu hərəkətlərin tez-tez təkrar olunması bu dəyişilmələri yarada bilir, xüsusilə də, əgər bunlar çox sayda adamlar tərəfindən təkrar olunurlarsa, çünki, onların reaksiyalarının gücünə simpatiya üçün zəruri olan təqlidetmə hakimliyi birləşmiş olur. Bu hərəkətlər üzərimizə şərtlər qoyan bir öhdəçilik olduqda, onda bizim sağlamlığımız

üçün ən əlverişli vəziyyət almağa sövq edən heyvani qənaətcilliyə can atmaq, həm də bizi inamlı olmağa təhrik edir və bu inam nəticəsində biz bu hərəkətləri zövq hissi ilə yerinə yetiririk. Bütün bu səbəblərin təsiri altına düşməyən insanların sayı azdır.

Paskal öz fikirlərinin bir fəslində bu effektləri çox yaxşı açıqlamışdır; bu fəslin özünəməxsus başlığı vardır: *Allahın varlığını təbii dərketmə yolu ilə isbat etmək olduqca çətindir və bu yolda ən doğru olanı – Ona inanmaqdır*. O, etiqadsızlara xitabən öz fikrini belə ifadə edir: «Siz dinə qovuşmaq istəyirsiniz və ona aparan yolu bilmirsiniz; siz inamsızlıqdan yaxa qurtarmaq istəyirsiniz və buna bir çarə yolunu soruşursunuz. Siz bu çarəni sizin kimi olanlardan və hazırda dini etiqada heç bir şübhəsi olmayanlardan öyrənin. Onlar sizin getmək istədiyiniz bu yolu getmişlər və onlar sizin sağalmaq istədiyiniz bu xəstəlikdən sağalmışlar. Onların başladıqları kimi başlayın. Onların daxili vəziyyətində hələ ola bilmirsinizsə, onların xarici hərəkətlərini təqlid edin; sizi son dərəcə məşğul edən bu boş əyləncələri atın. Siz deyirsiniz ki, əgər mən inansaydım, bu əyləncələri o anda hökmən atardım. Mən isə sizə deyirəm ki, əgər siz bu əyləncələri atmış olsanız, siz onda həmin anda mənə inana bilərdiniz. Başlanğıc sizin tərəfdən qoyulmalıdır. Əgər mən bacarsaydım, mən sizə bu inamı verərdim; mən bunu edə bilmirəm və deməli, sizin dediklərinizin doğru olduğuna inanmağı bacarmıram; siz isə əyləncələri tamamilə ata bilər və sınaqdan keçirə bilərsiniz ki, mənim dediklərim doğrudur, ya yox».

«Çaşmaq lazım deyildir: biz nə dərəcədə cismani bədəniksə, o dərəcədə də ruhuq; buradan alınır ki, hər hansı bir əqidəyə qovuşma vasitəsi yalnız sübut-dəlillərdən ibarət deyildir. Nə qədər az şey isbat olunmuşdur! İsbatlar yalnız ağlı inandıra bilir; vərdişlər bizim isbatlarımıza böyük güc verir. Bunlar bizim ruhumuzu əyləndirən hisslərimizi bizdən xəbərsiz müxtəlif hallara salır. Kim isbat etmişdir ki, sabah gün olacaqdır ki, biz öləcəyik. Başqa elə bir şey varmı ki, ona olan inam daha çox yayılmış olsun? Deməli, bizi inandıran vərdişdir; bu nə qədər insanı türk və bütpərəst edir, bu vərdiş bəzilərini sənətkar, digərlərini əsgər və s. edir. Doğrudur, həqiqətə[*] qovuşmaq üçün ondan başlanılmamalıdır, lakin ağıl həqiqətin harada olduğuna inanmışdırsa, həmişə bizim nəzərimizdən yayınan bu inama qovuşmaq və onun dərinliyinə varmaq və nurlanmaq üçün bu vərdişlərə müraciət gərəkdir; belə ki, həmişə hazır şəkildə olan dəlil-sübuta malik olmaq olduqca çətindir. Ən yüngül etiqada yiyələnmək lazımdır, beləsi – adət olunmuş etiqaddır, bu etiqad zor tətbiq olunmadan, isbat olunmadan,

[*] burada Paskal unudur ki, o, elə indicə məsləhət görürdü ki, inama qovuşmaq üçün məhz xarici təsirlərdən başlanılmalıdır.

bacarıq tələb etmədən bizi nəyəsə inanmağa məcbur edir və bizim gücümüz bu etiqada sitayiş edir, odur ki, bizim ruhumuz təbii olaraq ona tabe olur. Əgər bizim hisslərimiz bizi əks istiqamətə yönəldirsə, yalnız inamın gücünə inanmaq kifayət deyildir. Ona görə də, bizim varlığımızın hər iki cəhəti işə salınmalıdır: ağıl – dəlillər vasitəsilə, o dəlillər ki, onları bir dəfə nəzərdən keçirmək kifayətdir və vərdişlər vasitəsilə, lakin hisslər bu zaman bu hisslərin zidd olanlara meyl etməsinə imkan verməlidir».

Paskalın etiqadsızları etiqada gətirmək üçün təklif etdiyi vasitə, uşaqlıqdan qazanılmış və vərdişdən asılı olaraq, kök salmış mövhumatı darmadağın etmək üçün müvəffəqiyyətlə tətbiq oluna bilinər. Mövhumatların belə növü çox vaxt fəal təsəvvürlərdə ən sadə boş səbəbdən yaranır. Fərz edək ki, hər hansı bir şəxs *sol* sözü ilə bədbəxtlik haqqında fikri əlaqələndirir, hər gün sağ və sol əlin görə biləcəyi işi sağ əli ilə görür; bu vərdiş bu işdə sol əldən istifadəyə nifrəti o dərəcədə artıra bilər ki, ağıl bu mövhumat qarşısında gücsüz ola bilər. Bir çox cəhətdən qeyri-adi ağıla malik Avqustun özünü bir zəif cəhətinə görə qınadığını fərz etmək olar: o, yarmarkadan sonrakı gündə yola çıxmağa cürət etmirdi və o, bu zəifliyindən xilas olmaq istəyirdi. Lakin o, bədbəxt sayılan bu günlərdən birində gəzintiyə çıxmaq təşəbbüsündə olduğu anda özü-özünə belə deyə bilərdi ki, gəzintini təxirə salmaq *daha təhlükəsiz* olardı, o, bu hissin təsiri altında olma vərdişi ilə bu tərzdə öz nifrətini daha da artırırdı. Bu mövhumatlara zidd hərəkətlərin tez-tez təkrarlanması, zaman ötdükcə onları zəiflətməli və tamamilə yox olmağa məcbur etməlidir.

Bizim çox vaxt minnətdar olduğumuz insanlara hiss etdiyimiz bağlılıq, bizim indicə inkişaf etdirdiyimiz prinsipdən alınır. Onların hərəkətlərinin tez-tez təkrarlanması təbii nəticəsi onların özü olan hissi onların xeyrinə çoxaldır və hətta bəzən də onu doğurur. Hər hansı bir şeyə meyllilik, bizi onu dəfələrlə təkrar etməyə məcbur edən hərəkətlər, bu meylliliyi bir ehtirasa çevirir.

Əvvəldə qeyd etdiklərimizdən görünür ki, bizim etiqadımız bizim vərdişlərimizdən nə dərəcədə asılıdır. Məlum növ ehtimallara əsasən hərəkət etməyə və mühakimə yürütməyə vərdiş etdiyimizdən, biz bu ehtimalları instiktiv olaraq dəstəkləyir və bunlar bizi mülahizə və ya hesablama nəticəsi olan daha yüksək sayılan ehtimallardan daha çox inandırır. Doğruyaoxşar olmayan şey bizi çox vaxt şübhələndirir: əgər o, bizim adət etdiyimiz ehtimallara zidd olursa, biz onu tərəddüd etmədən nəzərə almırıq. İllüziyaların bu səbəbini mümkün olduqca zəiflətmək üçün əqlə təsəvvür və hisslərin köməyi olmalıdır. Uyğun ehtimalları əyrilər şəklində təsvir edəriksə, biz bunların fərqini olduqca yaxşı hiss edə bilərik. Qeyri-adi faktı

möhkəmlədən şahid ifadəsinin ehtimalını təsəvvür edən əyri, bu faktın doğruyaoxşar olmağını təsvir edən əyri ilə yanaşı yerləşdirildikdə, bu şahid ifadəsinin səhv ehtimal olduğunu çox nəzərə çarpdırardı, necə ki, dağların hündürlüyü təsvir olunmuş şəkil, bu hündürlüklərin bir-birilə nə cür nisbətdə olduğu haqqında təsəvvür yaradır. Bu vasitə bir çox hallarda tətbiq oluna bilinər. Kainatın hüdudsuzluğunu hiss etmək üçün, millimetrin onda bir hissəsini Fransa ərazisinin ən böyük uzunluğu ilə – demək olar ki, çox kiçik bir kəmiyyətlə ifadə edək; Yerdən Günəşə qədər məsafə on dörd metrə bərabər olacaqdır; ən yaxın ulduza qədər olan məsafə bir milyon yarım metrdən də artıq olacaqdır, yəni ən yuxarı nöqtədən gözlə görünən ən geniş üfüqün radiusunun yeddi və ya səkkiz mislinə bərabər olacaqdır. Hətta bununla belə, ən parlaq ulduzlardan sonsuzluğa qədər uzanan kainatın böyüklüyünün yalnız ən zəif mənzərəsini ala biləcəyik. Lakin bu mənzərənin zəifliyinə baxmayaraq, bu kifayət edir ki, insanın bütün təbiət üzərində üstünlüyü haqqında təsəvvürlərinin – bu dərəcədə qəribə nəticələr çıxarılmış təsəvvürlərin mənasızlığını, hiss etməyə məcbur etsin.

Nəhayət, psixoloji prinsip kimi gümanların ehtiraslarla artmasını göstərək. Bizim ən çox qorxduğumuz və ya arzu etdiyimiz şey, bizə, məhz buna görə də, daha ehtimallı görünür. Sensoriumda onun güclü həkk olunmuş obrazı zidd gümanların təəssüratlarını zəiflədir və bəzən onları o dərəcədə hamarlaşdırır ki, bizi bu şeyin baş verdiyinə inanmağa belə məcbur edir. Mülahizələr və zaman, bu hisslərin canlılığını azaldaraq, əqlə hadisələrin ehtimallarının düzgün qiymətləndirilməsi üçün zəruri olan sakitliyi bərqərar edir.

Sensoriumdakı bütün dəyişikliklər, bütün hərəkətlər kimi dinamikanın qanunlarına tabedirlər və bunu təcrübə də sübut etmişdir. Bunların əzələ sisteminə ötürdüyü hərəkətləri bu sistem kənar cisimlərə ötürür, bu – yayın açılmasında olduğu kimi baş verir və bu hərəkətlər belədir ki, bizim bədənimizin və onun hərəkətə gətirdiklərinin ümumi ağırlıq mərkəzi tərpənməz qalır. Bu dəyişikliklər, mayedə dalğaların birləşdiyi kimi birbirilə qarışmadan yığılır. Səs verən cismin rəqsləri onun əhatəsindəki cisimlərə sirayət etdiyi kimi, bu dəyişmələr də insanlara sirayət edir. Mürəkkəb ideyalar sadələrdən yaranır, necə ki, dəniz qabarması Günəş və Ayın təsiri ilə yaranan hissəvi qabarmalardan yaranır. Bir-birinə əks olan niyyətlər arasındakı tərəddüd bərabər qüvvələrin tarazlığıdır. Sensoriumda yaranan ani dəyişikliklər müqavimətlə qarşılaşır, bu müqaviməti də maddi sistem oxşar dəyişikliklərə qarşı qoyur; və əgər biz sarsıntılara məruz qalmamaq və canlı qüvvəmizi itirmək istəmiriksə, onda elə bu sistemdəki kimi, hiss edilməyəcək keçidlər vasitəsilə hərəkət etməliyik. Gərgin və

davamlı diqqət sensoriumu əldən salır, necə ki, elektrik zərbələri dirəklərin voltlarını və ya elektrik cərəyanı balıqların orqanlarını zəiflədir. İntellektual şeyləri hiss olunan etmək üçün, maddi cisimlərdən bəhs etdiyimiz müqayisələlərin, demək olar ki, hamısı mahiyyət etibarilə eyniliklərdir.

Mən arzu edirəm ki, əvvəlki düşüncələrimiz, fikirlərimiz özünün mükəmməl olmamasına baxmayaraq, tədqiqatçı filosofların diqqətini sensoriumun qanunlarına və ya intellektual aləmə cəlb edəydi, – o qanunlara ki, onların məğzinə varmaq, fiziki aləmin qanunlarına varmaq kimi, bizim üçün o qədər də önəmlidir. Bu iki aləmin təzahürlərinin izahı məqsədilə müəyyən dərəcədə bir-birinə oxşar hipotezlər fikirləşmişlər; lakin bu hipotezlərin əsası bizim bütün tədqiqat və hesablama üsullarından yayındığına görə, bunlar haqqında Montenlə birgə belə söyləmək olar ki, *cahillik və hər şeyi öyrənmək həvəsinin olmaması – iki yumşaq yastıqdır ki, düşünə bilən başı uyutsun.*

Yəqinliyə yaxınlaşmanın müxtəlif üsulları

İnduksiya, faktlara söykənən və yeni müşahidələrlə həmişə yoxlamalara əsaslanan hipotezlərin analogiyası, bunların göstərişləri ilə təcrübənin hər dəfə müqayisə olunması ilə əsaslandırılan xoşbəxt təbii fakt, – budur gerçəkliyə qovuşmanın əsas vasitələri.

Əgər bircins əşyalara diqqətlə baxılarsa, onda bunlar arasında və onlardakı dəyişikliklərdə elə münasibətləri görmək olar ki, bu müşahidələri davam etdirdikcə, bunlar getdikcə daha çox aşkar olunur və bu münasibətlər daima daha çox yayılaraq və ümumiləşərək, sonda onların yaranmış olduqları prinsipə gətirir. Lakin əksər hallarda bu münasibətlər o qədər kənar təsirlərlə görünməz olur ki, bunları seçib ayırmaq və bu prinsipə gəlib çatmaq üçün həddən artıq ağıl tələb olunur: əsl elm dahisi bunlarla səciyyələnir. Analiz və natural fəlsəfə özünün mühüm kəşflərinə görə *induksiya* adlanan məhsuldar metoduna borcludur: Nyüton özünün binom haqqındakı teoremi və ümumdünya prinsipinə görə bu metoda borcludur. Ən sadə münasibətlərin mahiyyətcə ən adi münasibətlər olduğuna, analizdə alınan təsdiqlənmiş düsturlara və təbii proseslərdə, o cümlədən, kristallaşmada, kimyəvi birləşmələrdə tapdıqlarımıza əsaslanan induksiya nəticələrinin ehtimallarını qiymətləndirmək çətindir. Münasibətlərin belə sadəliyi, əgər nəzərə alınarsa ki, təbiətdə bütün baş verənlər, – çox olmayan dəyişməz qanunların riyazi nəticələrindən başqa bir şey deyildir.

Lakin elmin ümumi prinsiplərini kəşf etməyə imkan verən induksiya onların dəqiqliyini müəyyənləşdirmək üçün kifayət etmir. Bunlar hələ isbatlarla və ya son təcrübələrlə təsdiq olunmalıdır, belə ki, elm tarixi bizə göstərir ki, induksiya bəzən dəqiq olmayan nəticələrə gətirmişdir. Sadə ədədlər haqqında Fermatın bir teoremini misal çəkmək istəyirəm; bu dahi həndəsəçi bu ədədlərin nəzəriyyəsinə dərindən diqqət yetirərək, elə bir düstur axtarırdı ki, bu düstur yalnız sadə ədədlərlə ifadə olunaraq, əvvəlcədən verilən ixtiyari ədəddən böyük olan sadə ədədi bilavasitə tapmaq üçün istifadə oluna bilsin. İnduksiya onu belə fikrə gətirmişdi ki, ikinin qüvvət üstünə bərabər qüvvətə yüksəldimiş iki rəqəmi üzərinə vahid əlavə edildikdən sonra alınan ədəd sadə ədəddir. Məsələn, kvadrata yüksəldilmiş iki, üstəgəl vahid sadə ədəd – beşə bərabərdir; ikinin kvadratına yüksəldilmiş iki və ya on altı üstəgəl vahid onyeddiyə bərabərdir. O tapmışdı ki, bu, hətta, ikini səkkiz və onaltıncı dərəcədən qüvvətə yüksəlib, vahid əlavə etdikdən sonra alınan ədədlərin sadə ədədlər alınması ilə təsdiq olunan üsul – doğru üsuldur; və bu induksiya bir çox arifmetik mülahizələrə əsaslandığından bu nəticəyə, o, ümumi bir nəticə kimi baxmaq fikrinə gəlmişdi. Lakin o etiraf edir ki, o, bu nəticəni isbat etməmişdir. Əslində, Eyler tapmışdı ki, bu müddəa ikini ötuz dərəcədən qüvvət üstünə yüksəldib, vahid əlavə etdikdə yerinə yetmir, belə ki, alınan 4 294 967 297 ədədi sadə ədəd olmayıb, 641-ə bölünür.

Biz induksiyaya əsasən fikirləşirik ki, əgər, məs., müxtəlif hadisələr, hərəkətlər, uzun müddət ərzində sadə münasibətlə əlaqələnmiş şəkildə daima baş verirsə, onda onlar bu münasibətə həmişə tabe olaraq baş verəcəklər: buradan isə biz ehtimal nəzəriyyəsinə əsaslanaraq, belə nəticə çıxarırıq ki, bu münasibət təsadüfdən deyil, requlyar səbəbdən asılıdır. Beləliklə, Ayın dövr etmə və fırlanma hərəkətlərinin bərabərliyi, Ay ekvatorunun və orbitinin düyünlərinin hərəkətlərinin bərabərliyi və bu düyünlərin üst-üstə düşməsi; Yupiterin üç ilk peykinin hərəkətləri arasındakı xüsusi münasibət: – birinci peykin orta uzunluq dairəsi minus ikincinin orta uzunluq dairəsinin üç misli plyus üçüncünün uzunluq dairəsinin iki misli iki düz bucağa bərabərdir; Ayın meridiandan keçdiyi anlar arasındakı zamanın qabarma və çəkilmə arasındakı müddətlərin bərabərliyi; ən güclü qabarma və çəkilmələrin sizigiyalarla birlikdə ən kiçiklərinin isə kvadraturları ilə qayıtması, – bütün bunlar tətbiq olunmağa başlanıldığından dəyişməyən səbəblərin varlığını hədsiz doğruyaoxşarlıqla göstərir; və bu səbəbləri ümumdünya cazibə qanunu ilə əlaqələndirmək həndəsəçilərə müyəssər olmuşdur, bunu bilmək isə münasibətlərin qeyd olunan sabitliyini yəqinliyə çevirir.

Əsl fəlsəfi metodun fəal tərəfdarı və gözəl natiq – Kansler Bekon, olduqca qəribə tərzdə induksiyadan sui-istifadə edib ki, Yerin hərəkətsizliyini isbat etsin. O, özünün əsərlərindən ən dəyərlisi – *Novum organumda* belə mühakimə edir. Səyyarələrin şərqdən qərbə hərəkəti Yerdən uzaqlaşdıqca daha sürətli olur. Bu hərəkət ulduzlar üçün daha sürətlidir: Saturn üçün bu hərəkət bir az, Yupiter üçün bir az çox və s. yavaşıyır, Aya qədər və daha yüksəklikdəki kometlər üçün də bu belə davam edir. Bu atmosferdə də görünür, xüsusilə də, tropiklər arasında havanın molekulları ilə yaranan böyük dairələr nəticəsində; nəhayət, okean üçün bu, demək olar ki, görünmür; odur ki, bu hərəkət Yer üçün sıfra bərabərdir. Lakin bu induksiya yalnız onu sübut edir ki, Saturn və ondan aşağıdakı səyyarələr öz məxsusi hərəkətlərinə malikdirlər və bu hərəkətlər həqiqətdə olduğuna əks və ya Şərqdən Qərbə bütün Göy qübbəsini zəbt etmiş kimi görüntü və daha uzaq səyyarələr üçün daha yavaş hərəkət görüntüsünü verir və bu da optik qanunlarla uzlaşır. Əgər Yer hərəkətsiz olsaydı, səyyarələrin öz birgünlük dövrünü başa vurması üçün onların hərəkətlərinin sürətləri ağlasığmaz olmalıydı ki, bu da Bekonu heyrətləndirmiş olardı, əgər Yerin fırlandığı fərz olunardısa, o, bir-birindən olduqca uzaq cisimlərin – ulduzlar, Günəş, planetlər və Ayın bu fırlanmaya tabe olduqları kimi olduqca sadə izahına da çox təəccüblənmiş olardı. Okean və atmosferə gəldikdə, Bekon bunların hərəkətlərini Yerdən çox uzaq səyyarələrin hərəkətlərinə bənzətməməliydi, belə ki, hava və dəniz Yer kürəsinin bir hissəsi olduğundan, onun hərəkətini və ya hərəkətsizliyini paylaşmalıdırlar. Çox təəssüf doğurur ki, çox yüksək nöqteyi-nəzərlərə öz dühası ilə diqqət yetirən Bekon kainat haqqında Kopernik sisteminin möhtəşəm təsəvvürünə maraq göstərməmişdi. Əgər o, bu marağı göstərmiş olsaydı, bu sistemin xeyrinə ona məlum olan Qaliley kəşflərində güclü analoqlar tapa bilərdi. Həqiqəti tədqiq etmək üçün o, məsləhətlər verirdi, lakin misal göstərmirdi. Diqqətin müşahidə və təcrübələrə cəlb olunması üçün o, öz dəlil-sübutları və gözəl natiqlik qabiliyyəti ilə, məktəbin boş incəliklərdən imtina etməsi zəruriliyində təkid edərək və təzahürlərin ümumi səbəblərinə keçməyin əsl metodunu göstərərək, bu dahi filosof, ömrünü başa vurduğu o gözəl əsrdə, insan ağlının nail olduğu möhtəşəm uğurlara səbəb olmuşdu.

Analogiya belə ehtimala əsaslanır ki, oxşar şeylər bircins səbəblərdən baş verir və eyni nəticələrə malikdirlər. Bu oxşarlıq mükəmməl olduqca, bu ehtimal da o dərəcədə artır. Odur ki, biz şübhə etmədən belə qərara gəlirik ki, eyni orqanlara malik varlıqlar eyni hisslər keçirirlər və eyni istəklərlə hərəkət edirlər. Öz orqanları üzrə bizə yaxın heyvanların bizim hissiyyatımıza analoji hissiyata malik olması ehtimalı bizim növdən

fərdlərə aid ehtimaldan kiçik olsa da, hələ də olduqca böyükdür və bəzi filosofları, heyvanların sadə avtomatlar olduqlarını düşünməyə məcbur etmək üçün, bütün dini xürafatın təsiri lazım olmuşdu. Heyvanların orqanlarının bizim orqanlara oxşarlığı azaldıqda, onlarda hissiyyat olması da azalır; bununla belə, bu ehtimal hətta həşəratlar üçün çox böyükdür. Eyni növ həşəratların nəsildən-nəslə, tamamilə eyni tərzdə, olduqca mürəkkəb hərəkətlər yerinə yetirdiklərini görərək, biz onlardan öyrənməyərək, belə düşünməyə meylliyik ki, onlar məlum növ yaxınlığa görə hərəkət edirlər; bu – kristalların molekullarını yaxınlaşdıran yaxınlığa analogiyadır, lakin bu yaxınlıq bütün canlı orqanizmlərə xas olan hissiyyatla qarışaraq, kimyəvi birləşmələrə xas olan düzgünlüklə daha çox qeyri-adi birləşmələr yaradır: seçici yaxınlıq və hissetmənin bu qarışığını, bəlkə də, *heyvani oxşarlıq* adlandırmaq olardı. Bitki və heyvanların quruluşu arasında çoxlu analogiya olmasına baxmayaraq, mənə belə gəlir ki, bitkilərin hissiyata malik olduğunu düşünmək üçün bu kifayət etmir; lakin bunu istisna etməyə də heç bir şey bizə haqq vermir.

Günəş öz işığı və istisi ilə Yer üzündəki canlılara və bitkilərə yaxşı təsir etdiyindən, biz, analoji olaraq, belə düşünürük ki, o, digər planetlərə də belə təsir göstərir: belə ki, gördüyümüz kimi fəaliyyəti hərtərəfli inkişaf edən materiyanın Yupiter kimi böyük bir planetdə inkişafsız qaldığını düşünmək qeyri-təbii olardı; bu planetin Yer kürəsi kimi öz gündüzləri, öz gecələri və öz illəri vardır və burada aparılan müşahidələrə görə olduqca fəal qüvvələrin olduğu gümanı verən dəyişikliklər baş verir. Lakin buradan planetlərin və Yer sakinlərinin oxşarlığı barədə nəticə çıxarmaq analogiyanın olduqca genişləndirilməsi olardı. Nəfəs aldığı atmosferə və yaşadığı temperatura öyrənmiş insan, məncə, digər planetlərdə yaşaya bilməzdi. Bizim kainatın aləmlərinin müxtəlif şəraitlərinə uyğun orqanizmlərinin sonsuz bir çoxluğu mövcud ola bilməzmi? Əgər yalnız mühit və iqlimdəki fərq Yerin xəlq olunmuşlarına belə müxtəliflik verirsə, onda müxtəlif planetlərin və onların peyklərinin xəlq olunmuşları nə dərəcədə çox fərqlənməlidirlər? Ən güclü təsəvvür belə bunlar haqqında heç bir təsvir yarada bilməz; lakin onların mövcudluğu olduqca doğruyaoxşardır.

Güclü analogiya bizi ulduzlara, bizimkinə oxşar, kütləsinə mütənasib cazibə qüvvəsinə malik və məsafələrinin kvadratına isə tərs mütənasib olan günəşlər kimi baxmağa sövq etdirir. Çünki, bu qüvvə Günəş sisteminin bütün cisimləri və onların ən kiçik molekulları üçün isbat olunmuşdur, onun bütün materiyaya xas olduğu güman edilir. Bir-birinə yaxın olduğundan, *əkiz* adlandırılan kiçik ulduzların hərəkətlərindən artıq görünür ki: bunların qarşılıqlı cazibəsinin olduğunu heç bir şübhə altına almamaq üçün,

bunların bəzilərinin digərləri ətrafında dövretmə hərəkətini təsdiq edən, ən çoxu bir yüzillik, dəqiq müşahidələr aparılmalıdır.

Bizi hər bir ulduzu planet sisteminin mərkəzi kimi fərz etməyə sövq edən analogiya əvvəlki analogiyadan daha az güclüdür, lakin o, bizim ulduzlar və Günəşin yaranması barədə təklif etdiyimiz hipotezə əsasən doğruyaoxşar olur; çünki bu hipotezə görə hər bir ulduz, Günəş kimi, əvvəlcə geniş bir atmosferlə əhatə olunmuşdu, təbii olaraq, bu atmosferə də Günəşi əhatə etmiş atmosferdə baş verənləri şamil etmək olar və fərz etmək olar ki, bu atmosferin sıxılması nəticəsində planetlər və peyklər əmələ gəlmişdir.

Çoxlu elmi kəşflərə görə biz analogiyaya borcluyuq. Elektrik təzahürlərinin ildırım effektlərilə analogiyası atmosfer elektrikinin kəşfi kimi ən gözəl bir kəşfə səbəb oldu.

Həqiqət axtarışında ən doğru metod, – induksiyanın köməyilə hadisələrdən qanunlara, qanunlardan qüvvələrə keçməkdən ibarətdir. Qanunlar, məhz, ayrı-ayrı təzahürləri bir-birilə əlaqələndirən münasibətlərdir: bunlar yarandıqları qüvvələrin ümumi prinsipini açıqladığı zaman, əgər mümkünsə, bu prinsipi ya bilavasitə təcrübələrlə yoxlayırlar, ya da ki, o, məlum təzahürlərlə uzlaşdığını tədqiq edirlər; əgər ciddi analiz vasitəsilə bütün bunların ən kiçik xırdalıqlarına qədər bu prinsipdən alındığına əmin olurlarsa, əgər bundan başqa bunlar olduqca müxtəlif və çoxdurlarsa, onda elm ona müyəssər ola bilən mükəmməlliyi və ən yüksək dərəcəli yəqinliyi qazanmış olur. Ümumdünya cazibəsinin kəşfi astronomiyanın belə olmasına səbəb olmuşdur.

Elm tarixi göstərir ki, induksiyanın keçmiş olduğu bu çətin və uzun yol hər zaman kəşf edənlərin yolu olmamışdır. Səbəbləri müəyyənləşdirməyə səbrsizliklə tələsən təsəvvür, hipotezlər irəli sürməyi sevir; əksər hallarda onun irəli sürdüyü bu hipotezlərə faktları tabe etmək üçün o, bu faktları təhrif edir; onda bu hipotezlərin nəzərə alınması təhlükəlidir. Lakin bu təzahürlərin qanunlarını aydınlaşdırmaq üçün bu hipotezlərə yalnız onları birbirilə əlaqələndirən vasitə kimi baxılarsa, onlara reallığı şamil etməkdən yayınmaq istədikdə, onlar daima yeni müşahidələrlə düzəldilir, bunlar əsl səbəblərə çatdıra bilir və ya bizə, heç olmasa, müşahidə olunmuş təzahürlərdən verilmiş şəraiti doğuracaq təzahürləri müəyyən etmək imkanını yaradır.

Təzahürlərin səbəbləri barədə təklif ediləcək bütün hipotezləri biz yoxlasaq, biz xaricetmə yolu ilə doğru hipotezi müəyyən edə bilərik. Bu qayda uğurla tətbiq olunurdu: bəzən bütün məlum faktları eyni cürə yaxşı izah edən bir neçə hipotezlər müəyyən olunurdu və bunlar barədə alimlər o vaxta qədər fikir ayrılığında olurdular ki, həlledici tədqiqatlar doğru hipotezi müəyyən etmiş olsun. Onda insan ağlının tarixi üçün maraq kəsb

edən odur ki, bunların köməyilə çoxlu faktlar izah oluna bilinsin və təbiətlə uzlaşmaq üçün onların məruz qala biləcəkləri dəyişikliklər təyin edilə bilinsin. Beləliklə, bizə Göyün yalnız görə bildiyimizin təsvirini verən Ptolomey sistemi, planetlərin Günəş ətrafında hərəkət etdiyi hipotezinə gətirir, lakin bu halda Ptolomey, dairələri və episiklləri Günəş orbitinə bərabər və paralel götürürdü və bunları o, hər il qeydə almağa məcbur edirdi və bununla belə, o, bunların qiymətlərini qeyri-müəyyən saxlayırdı. Bu hipotezi dünyanın əsl sisteminə çevirmək üçün sonradan Günəşin gördüyümüz hərəkəti tərs mənada Yerə şamil olunmalıdır.

Bu müxtəlif üsullarla alınmış nəticələrin ehtimallarını hesablamaq, demək olar ki, həmişə mümkün olmur: bu, oxşar surətdə tarixi faktlar üçün də belədir. Lakin izah olunmuş təzahürlərin və ya sübutların toplusu bəzən elə olur ki, onların ehtimallarını qiymətləndirmək mümkün olmadıqda, onlar barədə hər hansı bir şübhəyə yol vermək əsassız olardı. Digər hallarda onları yalnız böyük bir ehtimalla soyuqqanlılıqla qəbul etmək məsləhətdir.

Ehtimal hesabının tarixi oçerki

Ən sadə oyunlarda oyunçular üçün əlverişli və ya əlverişsiz mümkün halların nisbətləri artıq çoxdan təyin olunmuşdu: oyuna qoyulan məbləğ və mərc bu nisbətlərə uyğun olaraq, müəyyən olunurdu. Lakin Paskal və Fermata (P. Fermat, 17-ci əsr) qədər bu predmetə hesablama metodları və prinsiplərini hələ heç bir kəs verməmişdi və bu növ heç olmasa bir neçə məsələlər həll olunmamışdı. Buna görə də, ehtimal haqqında elmin ilk elementləri bu iki dahi həndəsəçiyə şamil olunmalıdır, onun bir elm kimi kəşfi insan ağlına ən çox şərəf gətirmiş XVII əsri əlamətdar edən ən gözəl hadisələr arasında yer almalıdır. Onların müxtəlif yollarla həll etdikləri əsas məsələ, bizim əvvəldə gördüyümüz kimi, ondan ibarətdir ki, oyuna qoyulan məbləğ eyni bacarıqlı oyunçular arasında ədalətlə bölünsün və onlar oyun başa çatmamış partiyanı bir az tez qurtarmağı şərtləşsinlər; oyunun şərti ondan ibarətdir ki, partiyalarda uduş üçün birinci oyunçu verilən sayda xal toplamalıdır. Aydındır ki, bu bölüşdürülmə oyunçuların bu partiyanı udmalarının nisbi ehtimallarına mütənasib başa çatmalıdır; bu ehtimallar onlara udmaq üçün çatışmayan xallardan asılıdır. Paskal metodu çox incə bir metoddur və mahiyyət etibarilə, bu məsələnin xüsusi fərqlərlə tənliyi olub, oyunçuların uduş ehtimallarının ardıcıl təyin olunması üçün kiçik ədədlərdən sonra gələn ədədlərə keçirilərək tətbiq olunur. Bu metoda yalnız iki oyunçu halı üçün baxılmışdı: birləşmələrə əsaslanan Fermat metoduna ixtiyari sayda oyunçu üçün baxılmışdı. Paskal əvvəlcə belə fikirləşirdi ki, bu metod onun özününkü kimi yalnız iki oyunçu üçündür; buna görə də,

onlar arasında mübahisə yaranır, bu mübahisənin sonu – Paskalın, Fermat metodunun ümumi olduğunu etiraf etməsilə nəticələnir.

Hüygens artıq həll olunmuş müxtəlif məsələləri toplayaraq və yenilərini də əlavə edərək, bu predmet haqqında birinci traktatında onları da buraya daxil etmişdi; traktakt belə adlandırılmışdı: «*De Ratiociniis in Ludo alea*». Bundan sonra, bu məsələlərlə bir çox həndəsəçilər məşğul olmağa başladılar: Huds (Huddes) və Hollandiyada dahi pensionariy Vitt və İngiltərədə Halley hesablamaları insan həyatı ehtimallarına tətbiq etdilər və Halley, bu məqsədlə, ilk ölüm cədvəlini nəşr etdirdi. O ərəfədə Yakov Bernulli həndəsəçilərə ehtimallar haqqında müxtəlif məsələlər təklif etdi və sonradan onların həllərini də o, özü verdi. Nəhayət, o, «Ars conjectandi» adlı özünün gözəl bir işini yazdı ki, bu əsər 1706-da onun ölümündən yeddi il sonra işıq üzü gördü. Ehtimal haqqında elmə, burada Hüygensin işi ilə müqayisədə, daha dərinliklə baxılmışdı: müəllif burada birləşmələrin və cəmlərin ümumi nəzəriyyəsini verir və o, bu nəzəriyyəni təsadüflərlə əlaqədar bir çox çətin məsələlərə tətbiq edir. Bu iş özünün doğru-düzgünlüyü və nöqteyi-nəzərlərinin incəliyi ilə, bu qəbildən məsələlərdə binom düsturunun istifadə olunması və aşağıdakı teoremin isbatı ilə çox gözəldir: müşahidələr və sınaqlar qeyri müəyən sayda təkrar olunduqda, müxtəlif növ hadisələr nisbəti limitdə bu hadisələrin uyğun mümkünlükləri nisbətinə yaxınlaşır və bu müşahidələr və sınaqların sayı artdıqca onlar arasındakı fərq azalaraq, əvvəlcədən verilmiş bir ədəddən kiçik olmağa başlayır. Müşahidələrin, qanunların və təzahürlərin səbəblərinin dərk olunması üçün bu teorem olduqca yararlıdır. Bernulli haqlı olaraq, bu teoremin isbatına böyük əhəmiyyət verirdi; onun dediyinə görə o, bu isbatı iyirmi il ərzində təfərrüatı ilə düşünmüşdü.

Yakov Bernullinin ölümü ilə onun əsərinin nəşri arasındakı müddət ərzində Monmort və Moavr (Muavr) ehtimal hesabı haqqında iki traktat nəşr etdirdilər. Monmort əsərini «*Essai sur les geix de hazard*» adlandırmışdı: burada ehtimal hesabının müxtəlif oyunlara çoxsaylı tətbiqi verilirdi. Bu əsərin ikinci nəşrinə müəllif, Bernullinin bir çox çətin məsələlərinin incə və səlis həlləri verilən məktublarını əlavə etmişdi. Monmortun traktatından sonra çıxmış Moavrın traktatı, 1711-də, əvvəlcə «*Transactions philosophiques*»-də nəşr olunmuşdu. Sonradan müəllif onu ayrıca nəşr etdirmiş və üç ardıcıl nəşrlərdə onu mükəmməlləşdirərək dərc etdirmişdi. Bu iş, əsas etibarilə, binom düsturuna əsaslanmıışdı və buradakı məsələlər və onların həlləri olduqca ümumi xarakter daşıyır. Bu işin səciyyəvi cəhəti – qayıdışlı sıralar nəzəriyyəsi və onların bu sahədə tətbiqidir. Bu nəzəriyyə – sabit əmsallarlı, sonlu fərqlərlə xətti tənliklərin

inteqrallanmasıdır, elə bir inteqrallama ki, Moavr ona çox uğurlu bir üsulla nail olur.

Moavr öz əsərində çoxsaylı müşahidələrlə təyin olunmuş nəticələrin ehtimalları haqqında Yakov Bernulinin teoreminə yenidən müraciət edir. O, Bernulli kimi baş verəcək hadisələr nisbətinin onların uyğun mümkünlük nisbətlərinə sonsuz olaraq yaxınlaşdığı isbatı ilə kifayətlənmir; o, ehtimalın daha sadə və gözəl ifadəsini verir: bu iki nisbətlər arasındakı fərq verilən sərhədlər arasındadır. Buna görə o, binomun ayrılışındakı ən böyük dərəcəli ən böyük həddin onun bütün hədlərinin cəminə nisbətini və bu həddin yaxın hədlərdən artıq hissəsinin hiperbolik loqarifmini təyin edir. Bu halda ən böyük hədd çox sayda vuruqların hasili olduğundan, onun ədədi qiymətini təyin etmək mümkün olmur. Onun yığılan bir yaxınlaşmasını ala bilmək üçün Moavr, binomun yüksək dərəcəyə yüksəldilmiş orta həddi haqqında Stirlinq teoremini tətbiq edir; bu teorem onunla dəyərlidir ki, bu teorem çevrə uzunluğunun onun radiusuna nisbətinin kvadrat kökünü, məncə, bu transsendentliyə yad olan ifadəyə daxil edir. Moavr özü bu nəticəyə olduqca təəccüblənmişdi, Stirlinq bu nəticəni çevrənin ifadəsindən sonsuz hasillərin vasitəsilə ala bilmişdi; çevrə üçün bu ifadəni Vallis olduqca faydalı və maraqlı – müəyyən inteqrallar nəzəriyyəsinin rüşeymlərini tərkibində saxlayan xüsusi bir analizin köməyi ilə almışdı.

Bir çox alimlər, o cümlədən, *Déparcieux, Kersseboom, Wargentin, Dupré de Saint-Maur, Simpson, Sussmilch, Messéne, Moheau, Price, Baily* və *Duvillard,* əhali, doğum, nigah, ölüm haqqında çoxlu sayda dəyərli məlumatlar toplamışdılar. Onlar ömürlük təqaüd, tontin, sığorta ilə əlaqədar düsturlar və cədvəllər vermişdilər. Lakin mən, bu qısa yazımda, bu original ideyalara keçmək üçün mənim üçün faydalı olmuş işləri yalnız qeyd edə bilərəm. Riyazi və mənəvi gözləmələrin qiymətləndirilməsi, həm də mənəvi gözləmənin analizə tabe olması üçün Daniil Bernullinin vermiş olduğu incə prinsip belə işlərdəndir. Çiçək peyvəndlənməsinə ehtimal hesabının uğurlu tətbiqi də onların belə işlərindən biridir. Xüsusilə də, müşahidə olunmuş hadisələrdən alınmış hadisələrin mümkünlüklərinin bilavasitə baxılması bu original ideyalar sırasına aid olunmalıdır. Yakov Bernulli və Moavr bu mümkünlüklərin məlum olduğunu fərz edirdilər və gələcək sınaqların nəticəsinin onların ifadə oluna biləcəyi bir nəticəyə getdikcə yaxınlaşacağı ehtimalını axtarırdılar. Beyes (Bayes) 1763-ün «Transactions philosophiques»-ində aparılmış sınaqlar nəticəsində artıq alınmış olan mümkünlüklərin verilən sərhədlər arasında olduğu ehtimalını bilavasitə tapmaq istəyirdi və o, bu arzusuna bir az qarmaqarışıq olsa da, çox incə və səlis bir üsulla nail ola bildi. Bu predmet müşahidə olunmuş hadisələrdən

alına bilinən gələcək hadisələrin və səbəblərin ehtimal nəzəriyyəsinə, – mümkünlüklər arasında ola bilən bərabərsizliklərin təsviri haqqında qeydlə, bir neçə il sonra prinsiplərini şərh etdiyim nəzəriyyəyə yaxındır. Bu bərabərsizliklər üçün hansı hadisələrin əlverişli olduğunu bilmədiyimizə baxmayaraq, bu bilgisizlik əksər hallarda mürəkkəb hadisələrin ehtimalını artırmış olur.

Ehtimallarla əlaqədar məsələlərin və analizin ümumiləşdirilməsi məni sonlu xüsusi fərqlər hesabına gətirdi, sonradan Laqranj olduqca sadə metodun köməyilə bu sonlu xüsusi fərqlərə baxdı və bunlardan bu növ məsələlərə incə tətbiqlər edə bildi. Elə bu ərəfədə verdiyimiz doğuran funksiyalar (fonctions génératices) nəzəriyyəsi onun əhatə etdiyi predmetlər arasında bu predmetləri də əhatə edir və ehtimal haqqında ən çətin məsələlərə ən böyük ümumiləşmə ilə özü-özlüyündə tətbiq olunur. Bundan başqa, çox sayda hədlər və vuruqlardan ibarət funksiyaların ədədi qiymətlərini bu nəzəriyyə çox yaxşı yığılan yaxınlaşmalar vasitəsilə təyin edir və bu zaman aşkar edir ki, çevrə uzunluğunun radiusa nisbətinin kvadrat kökü bu qiymətlərə çox tez-tez daxil olur və göstərir ki, buna sonsuz sayda digər transsendentlər də daxil ola bilir.

Şahid ifadələrinin, səsvermələrin, seçici və müzakirə iclaslarının qərarlarının və məhkəmə qərarlarının ehtimallarını da hesablamaq mümkün olmuşdu. Bu predmetlərə aid məsələləri o qədər ehtiraslar, müxtəlif maraqlar və şəraitlər mürəkkəbləşdirir ki, bunları demək olar ki, həll etmək mümkün olmur. Lakin bunlara olduqca analoji olan daha sadə nəticələrin həlli bu çətin və mühüm məsələlərə aydınlıq gətirir, elə bir aydınlıq ki, o, məhz, hesablanmanın doğruluğuna ən doğruyaoxşar mülahizələrdən daha çox üstünlük verilir. Ehtimal hesabının ən maraqlı tətbiqlərindən biri orta qiymətlər tapılması ilə əlaqədardır ki, bunlar müşahidə nəticələrindən seçilməlidir. Bir çox həndəsəçilər bununla məşğul olmuşlar, Laqranj bu orta qiymətlərin tapılması üçün «Mémoires de Turin»-də müşahidə xətalarının qanunu məlum olduğu hal üçün gözəl bir metodu nəşr etdirmişdi. Mən bu məqsəd üçün hətta analizin başqa məsələlərində də səmərəli tətbiq oluna bilən, xüsusi bacarığa əsaslanan metod vermişəm və bu metod məsələnin növü üzrə məşdudlaşmış funksiyaların hər hansı bir uzun hesablanmasının bütün gedişi üzrə onu qeyri-müəyyən surətdə genişləndirməyə imkan verməklə yanaşı, o, məhdudiyyətlər nəticəsində son nəticənin hər bir həddində ola bilən dəyişiklikləri göstərir. Biz əvvəl görmüşdük ki, hər bir müşahidə birinci dərəcəli şərti tənlik verir və bu tənlik həmişə elə yazıla bilinər ki, onun bütün hədləri bir tərəfdə olsun, ikinci tərəfi isə sıfra bərabər olsun. Bu tənliklərin istifadə olunması, bizim astronomik cədvəllərin böyük dəqiqliyi üçün əsas səbəblərdən biridir, çünki bu üsulla gözəl müşahidələrin

əksəriyyətini onların elementlərinin müəyyənləşdirilməsinə yönəltmək mümkün ola bilərdi. Yalnız bir element təyin etmək tələb olunduğu hal üçün Qotes (Côtes) elə şərti tənliklər tərtib etməyi tövsiyə etmişdi ki, naməlum elementin əmsalı bu tənliklərdən hər birində müsbət olsun və bundan sonra son tənliyi almaq üçün bütün bu tənliklər cəmlənsin və bu son tənlikdən isə bu elementin ədədi qiyməti tapılsın. Qotes üsuluna bütün hesablama aparanlar riayət edirdilər; amma bir neçə elementi təyin etmək tələb olunduğu halda zəruri sonuncu tənliklərin alınması məqsədilə şərti tənliklərin birləşdirilməsi üçün heç bir müəyyən qayda yox idi; hər bir element üçün yalnız onun təyin olunmasına ən münasib müşahidələr seçilirdi.

Bu üsullardan hansının seçilməsini təyin etmək məqsədilə, Lejandr və Qauss şərti tənliklərin sağ hissələrinin kvadratlarını toplamağı və sonra bunların cəmini, hər bir naməlum element dəyişdikcə, minimumlaşdırmağı qərara aldılar; bu üsulla bilavasitə elementlərin sayı qədər son tənliklər alınır. Lakin belə sual yaranır ki, bu tənliklərlə alınmış ədədi qiymətlər digər üsullarla alına bilməyən bütün qiymətlərdən yaxşıdırmı? Bu suala cavabı ehtimal hesabı verə bilər. Mən ehtimal hesabını bu mühüm predmetə tətbiq edərək, incə analizin köməyilə elə bir qayda tapdım ki, bu qayda üzrə axtarılan elementlər müəyyən prosesin köməyilə alınır; bu qaydanın elə üstün cəhəti vardır ki, bu elementlər müşahidələr çoxluğundan şübhə doğurmayan olduqları ilə seçilir və bunların elə ədədi qiymətləri tapılır ki, bunlarda yalnız ən kiçik xətalar ola bilir.

Lakin aldığımız nəticələr bunlarda ola biləcək xətaların qanunu məlum olmadığı halda mükəmməl hesab oluna bilməz; bu xətaların verilən sərhədlər arasında olması ehtimalını göstərə bilmək zəruridir, bu isə nəticənin *çəkisi* adlandırdığım ehtimalın təyin olunmasına gətirir. Analiz bunlara aid ümumi və sadə düsturlara gətirir; mən bu analizi geodeji müşahidələrin nəticələrinə tətbiq etdim. Ümumi məsələ ondan ibarətdir ki, olduqca çox sayda müşahidə xətalarının bir və bir neçə xətti funksiyalarının ədədi qiymətlərinin hansısa sərhədlər arasında olduğu ehtimalı təyin olunmalıdır.

Müşahidə xətalarının qanunu bu ehtimalların ifadələrinə sabit kəmiyyətlə daxil olur, bu kəmiyyətin ədədi qiyməti isə demək olar ki, həmişə naməlum bu qanun haqqında bilgi olmasını sanki tələb edir. Bu sabit kəmiyyət xoşbəxtlikdən müşahidələrin özü ilə təyin oluna bilinər. Astronomik elementlərin axtarışlarında bu kəmiyyət hər bir müşahidə və hesablama arasında fərqlərin kvadratlarının cəmi ilə verilir. Güman olunan xətalar bu cəmin kvadrat kökü ilə eyni cür mütənasib olduqlarından, bu kvadratları müqayisə edərək, eyni bir ulduzun müxtəlif cədvəllərinin nisbi dəqiqliyini

qiymətləndirmək olar. Geodeji əməliyyatlarda bu kvadratlar hər bir üçbucağın üç bucağının müşahidə olunmuş cəmləri xətalarının kvadratları ilə əvəz olunur. Bu xətaların kvadratlarının müqayisəsi bucaqların ölçüldüyü alətlərin nisbi dəqiqliyi haqqında mühakiməyə imkan verir. Bu müqayisədən görünür ki, geodeziyada təkrar-təkrar müşahidələr alətlərlə müqayisədə nə cür üstünlüyə malikdir.

Müşahidələrdə tez-tez xətalara səbəb olan çoxlu mənbələr olur: məs., ulduzların vəziyyətini meridian borusu və dairə vasitəsilə təyin etdikdə, bunların hər biri xətalara məruz qala bilir və bu halda onların xəta ehtimalları qanununun eyni olduğu fərz olunmur; odur ki, bu hallarda yaranan elementlər də bu xətaları özündə daşıyır. Bu elementləri almaq üçün bizim tərtib etdiyimiz şərti tənliklərə hər bir alətin xətaları daxildir və bunların əmsalları müxtəlifdir. Təyin olunacaq elementlərin sayı qədər sonlu tənliklər tərtib etmək tələb olunduğundan, bu tənlikləri almaq üçün vuruqlar sistemi götürülür və uyğun olaraq, şərti tənliklərə vurulur; bu vuruqlar sistemi ən münasib sistem olub, hər bir şərti tənlikdə əmsallar sistemindən böyük olmur. Mənim tətbiq etdiyim analiz, xəta mənbələrinin sayından asılı olmayaraq, ən yaxşı nəticələr verən sistemə və ya elə vuruqlara gətirir ki, eyni bir xəta ixtiyari başqa bir sistemdə ola bilən xətadan daha az ehtimallı olur. Həmin analiz bu nəticələrin xəta ehtimallarının qanununu təyin edir. Bu düsturlarda xəta mənbələrinin sayı qədər naməlum sabitlər vardır və onlar bu xətaların qanunlarından asılıdırlar. Biz gördük ki, mənbə yeganə olduğu halda bu sabiti təyin etmək mümkündür: buna görə də, kvadratlar cəmi və hər bir şərti tənliyin qalıqları tərtib edilib, sonra elementlər üçün tapılmış ədədi qiymətlər bu şərti tənliklərdə yerinə yazılmalıdır. Belə bir proses, sabitlərin sayından asılı olmayaraq, ümumiyyətlə, bu sabitlərin ədədi qiymətlərini almağa xidmət edir, bu isə ehtimal hesabının müşahidə nəticələrinə tətbiqini tamamlayır.

Mən burada mühüm bir qeyd etməliyəm. Müşahidələr sayı bir o qədər də böyük olmadığı halda, mənim sabitlərin ədədi qiymətləri barədə indicə qeyd etdiklərim, müşahidələrə görə kiçik bir şübhə doğurur və analizin köməyilə təyin olunmuş ehtimalları bir qədər şübhəli edir. Lakin, demək olar ki, həmişə bilmək yetərlidir ki, alınmış nəticələrin kiçik bir aralıqda olması ehtimalı vahidə olduqca yaxındırmı və əgər bu belə deyildirsə, bilmək kifayətdir ki, alınmış nəticə barədə heç bir ağlabatan şübhə doğurmayan ehtimal üçün müşahidələr sayı nə vatxa qədər artırılmalıdır. Ehtimallar üçün analitik düsturlar bu məqsədə çatmaq üçün çox yaxşıdır və bu anlamda bunlara, xətalar ola bilən müşahidələr toplusuna əsaslanan elmlərə zəruri bir əlavə kimi baxmaq olar. Bunlar, hətta təbii və mənəvi elmlərdəki çox sayda məsələlərin həlli üçün olduqca zəruridir. Təzahürlərin

əksəriyyətinin baş vermə səbəbləri ya məlum olur və ya o dərəcədə mürəkkəbdir ki, onları hesablamaq çətindir; bundan başqa onların təsiri çox vaxt təsadüfi və dəyişən səbəblərlə pozulur; lakin bu təsirin izləri, bu səbəblərlə baş vermiş hadisələrdə həmişəlik qalır və bunlarda dəyişikliklərə səbəb olur ki, bu dəyişiklikləri müşahidələrin uzun sırası ilə müəyyənləşdirmək mümkün olur. Ehtimalların analizi bu dəyişiklikləri aydınlaşdırır və onların doğruyaoxşarlıq dərəcəsini təyin edir. Məs., atmosferdə həmişə dəyişikliklər yaradan daimi səbəblər arasında, gündüz gecə ilə və qış yay ilə əvəz olunduqda, günəş istisinin periodik olaraq dəyişməsi – bu nəhəng maye kütləsinin təzyiqində və barometrin uyğun hündürlük səviyyəsində bir günlük və illik dəyişikliklər yaradır və bunlar, bizim yəqinlik kimi qəbul etdiyimiz faktların ehtimalına ən azı bərabər olan ehtimalla çoxsaylı barometrik müşahidələrdən aydın olur. Eynilə də, bir sıra tarixi hadisələr cəmiyyəti hər mənada hərəkətə gətirən müxtəlif maraqlar və ehtiraslar arasında mənəviyyatın böyük prinsiplərinin daimi təsirinin olduğunu göstərir. Təqdirəlayiqdir ki, oyunların öyrənilməsi ilə təməli qoyulmuş elm insan biliyini ən mühüm predmetlər səviyyəsinə qədər yüksələ bilmişdir.

Mən bütün bu metodları özümün «Analitik ehtimal nəzəriyyəm»də topladım və burada qarşıma qoyduğum məqsəd – ehtimal hesabının ən ümumi şəkildə prinsiplərini və analizini, həmçinin, hesablama üçün maraqlı və ən çətin məsələlərin həllinə şərh etmək olmuşdu.

Bu əsərdən görünür ki, *ehtimal nəzəriyyəsi,* mahiyyət etibarilə, *hesablamaya gətirilmiş sağlam düşüncədir*: o, dürüst ağılların çox vaxt düşünmədən, sanki instinktlə hiss etdiklərini dəqiqliklə qiymətləndirməyə məcbur edir. Əgər bu nəzəriyyədən yaranmış analitik metodlar, onun əsası olan prinsiplərin doğruluğu, onun məsələlərinin həlli üçün tələb olunan incə və zəif məntiqi, bu nəzəriyyəyə əsaslanan ictimai faydanın təsisatı və mənəvi elmlər və natural fəlsəfənin ən mühüm məsələlərinə onu tətbiq etdikdə onun almış olduğu və hələ ala biləcəyi yayım nəzərə alınarsa; əgər, sonra, o da qeyd olunarsa ki, hətta hesablama tətbiq olunmayan oblastlarda belə, bu nəzəriyyə bizim mülahizə və mühakimələrimizdə bizi idarə edən ən doğru-düzgün baxışı təlqin edir və bizi çox vaxt yoldan sapdıran illüziyalardan qorunmağı öyrədir – biz görərik ki, elə bir elm yoxdur ki, bizim düşüncələrimiz, fikirlərimiz üçün ondan daha dəyərli qiymətli olsun və çox faydalı olar ki, bu nəzəriyyə xalq maarifi sisteminə daxil olunsun.

MÜNDƏRİCAT

Tərcüməyə ön söz.....11

Ehtimala nəzəriyyəsi fəlsəfəsinə baxış.....13
Ehtimal haqqında.....13
Ehtimalların hesablanmasının ümumi prinsipləri.....17
Gözləmə haqqında.....23
Ehtimalların analitik metodları haqqında.....25
Ehtimalların hesablanmasının tətbiqi. Oyunlar haqqında.....36
Bərabər fərz olunan şanslar arasında mümkün ola bilən naməlum qeyri-bərabərliklər haqqında.....37
Hadisələrin qeyri-müəyyən artması nəticəsində yaranan ehtimal qanunları haqqında.....39
Ehtimal nəzəriyyəsinin natural fəlsəfəyə tətbiqi.....45
Ehtimal hesabının mənəvi elmlərə tətbiqi.....62
Şahid ifadələrinin ehtimalı haqqında.....63
Seçkilər və iclasların qərarları haqqında.....72
Məhkəmə qərarlarının ehtimalı haqqında.....75
Ölüm cədvəlləri və ömrün, nigahların və hər hansı assosiasiyaların orta yaşama müddətləri üçün cədvəllər.....80
Müəssisələrdə baş verən hadisələrin ehtimalları əsasında verilən mənfəətlər haqqında.....84
Ehtimalların qiymətləndirilməsində illüziyalar haqqında..... 89
Yəqinliyə yaxınlaşmanın müxtəlif üsulları.....110
Ehtimal hesabının tarixi oçerki.....114

ОСНОВАНИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

СОЧИНЕНИЕ

В. Я. БУНЯКОВСКОГО,

ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК ОРДИНАРНОГО АКАДЕМИКА,
ПРОФЕССОРА С. ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА И
ДОКТОРА МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК ПАРИЖСКОЙ АКАДЕМИИ.

САНКТПЕТЕРБУРГ

В Типографии Императорской Академии Наук

1846.

V. Ya. Bunyakovski
(1804-1889)

Müntəxəbatın ikinci hissəsinin titul səhifəsi belədir.

«Müəllifdən» başlığı altında girişdə ehtimal nəzəriyyəsi üzrə bu ilk rus dərsliyinin müəllifi qarşısında duran məsələlər şərh olunmuşdur. Bundan əlavə, müasir oxucu, şübhəsiz ki, «Заключение» və «Краткий исторический очерк постепенного развития математической теории вероятностей» başlıqlı məqalələri də çox maraqla oxuyacaqdır. Bu hissələrin hər üçü o dövrün orfoqrafiyasına riayət olunaraq yazılmışdır. Dərsliyə daxil olan mövzuların müxtəlifliyini «В и МС. Э» adlı ensiklopediyada dərc olunmuş «Mündəricat»-da (bax, səh. 867-69) görmək olur, bu mündəricat originalda 13 səhifədən ibarət olub, müəllifin «Kitabın ətraflı mündəricatı»-nın qısaldılmış variantıdır.

MÜƏLLİFDƏN

Tətbiqi Riyaziyyat oblastına daxil olan Analitik Ehtimal nəzəriyyəsi, sırf analizin digər tətbiqlərindən olduqca fərqlənir. Həndəsədə və Natural Fəlsəfə predmetlərində, məs., ümumcazibə təzahürlərində, işıq, istilik, səs, elektrik və s. nəzəriyyələrdə bütün tədqiqatların bir hissəsi, həqiqətən də, mövcud olan və ya yalnız təsəvvür etdiyimiz müxtəlif kəmiyyətlər barədə bizim düşüncələrimizə əsaslanır, bir hissəsi – belə sınaqlardan çıxarılmış qanunlara və ya belə sınaqlar başlanğıcda yetərli olmadıqda az və ya çox doğruyaoxşar hipotezlərə əsaslanır. Əksinə, Ehtimal Analizi yalnız bizə tamamilə məlum olmayan səbəblərdən asılı təsadüfi hadisələri deyil, hətta bizim bilgisizliyimizə görə heç bir fərziyyə irəli sürə bilmədiyimiz halda belə hadisələri araşdırmağa və ədədi qiymətləndirməyə xidmət edir. Bu məqsədə gətirən dərin ağlın incə nəticələri, bütünlüklə şərtsiz gerçəkliyin aşkar edilməsinə ən etibarlı yolu göstərməsə belə, heç olmazsa, bu gerçəkliyə mümkün qədər yaxınlaşmağa imkan yaradır. Biz nə vaxt nəzərə alsaq ki, ehtimal haqqında riyazi nəzəriyyə özünün belə mühüm rolu ilə tətbiqlərində fiziki və mənəvi aləmin predmetlərini əhatə edə bilir, onda biz əminliklə deyə bilərik ki, bu nəzəriyyə – ağlın onu daha çox uca edə bilən məhsuludur və onun aşa bilməyəcəyi sərhədə aparan yolların sonunu sanki göstərə bilir.

İndi təklif edilən kitab, Rus dilində ilk əsər olub, ehtimal nəzəriyyəsinin riyazi əsaslarının, həm də onun ictimai həyata, Natural Fəlsəfəyə, eynilə də, Siyasi və Mənəvi Elmlərə mühüm tətbiqlərinin ətraflı şərhidir. Sonuncu, XII fəsil, Ehtimal Analizinin tədrici inkişafı barədə tarixi təfsilata həsr olunmuşdur. Kitabın sonunda sırf riyazi məzmunlu *on Qeyd* verilmişdir; bunlar bəzi oxucuları Ehtimal hesabında tez-tez təsadüf olunan müxtəlif nəzəriyyələri digər traktatlarda və ya memuarlarda axtarmaq

zəhmətindən azad edəcəkdir. Qeydlərdən sonra, mənim əsərimə əlavə olunmuş iki faydalı cədvəlin *İzahı* və nəhayət, sonda bir maraqlı məsələnin həlli şərh olunmuş *Əlavə* verilir. Bununla belə mən Mündəricata baxmağı məsləhət görürəm, burada kitaba daxil olmuş predmetlərə ətraflı göstərişi görmək olar.

Mən bu əsərimin tərtib olunması haqqında bir neçə söz deyəcəyəm. Laplasın burada istifadə olunmuş ölməz əsəri: «Théorie analitiques des Probabilités», analizin incəliyi, həmçinin mülahizələrin dərin mənalılığı ilə daima mənim üçün bir nümunə olmuşdur. Lakin, bununla yanaşı, onun yaratdığı bir çox nəzəriyyələri təklif etdikdə, mən həmişə imkan daxilində onların üslubunu və isbatını, eyni dərəcədə də analizin özünü asanlaşdırmağa çalışmışam. Cəsarətlə ümid edirəm ki, riyaziyyatçılar mənə o mənada haqq qazandıracaqlar ki, mən Laplasın bu kitabının öyrənilməsini olduqca asanlaşdırmışam, çünki bu kitab özünün yığcamlığına və predmetə xas olan xüsusi çətinliklərə görə olduqca az adamlar üçün başa düşüləndir. Digər məşhur həndəsəçilərin, xüsusilə də, *Eylerin, Laqranj* və *Puassonun* elmi araşdırmaları da mənim üçün çox faydalı olmuşdu. Mən Puassonun Mühakimə üsulunun riyazi nəzəriyyəsinin şərhindən iqtibas etmişəm. Mənim digər əsərlərim barədə mənim kitabımda yer almış bəzi tənqidi qeydlərə istinadlarla, eyni zamanda, bir çox düsturların çıxarılışında dəyişikliklərin və müxtəlif hallarda istifadə olunan analitik üsullarda etdiyim dəyişikliklərin faydalı olduğunu etiraf etməyimlə kifayətlənəcəyəm. VII və X fəsillərə xüsusilə diqqət yetirməyi məsləhət bilirəm. Oxucu mənim kitabımdakı bir çox məqalələri oxuduqda və bunları digər məşhur əsərlərdəki şərhlərlə müqayisə etdikdə bu dəyişiklikləri özü görəcəkdir. Məhz mənə aid daha hərtərəfli araşdırmalar mətnin özündə göstərişlərlə verilir. Daha bir qeyd edəcəyəm. Bu vaxta qədər bizdə Riyazi Ehtimal nəzəriyyəsi haqqında heç bir ayrıca əsər, hətta tərcümə belə olmadığından, bizim hələ ki, Rus dilində bu predmet haqqında heç bir üslub və ifadə tərzimiz olmadığından, mənim qarşımda bu predmet haqqında yazmaq problemi dururdu. Ümid edə bilmirəm ki, mən Ehtimal Analizi üçün özünün sadəliyi və təyinediciliyi ilə tamamilə mükəmməl bir ehtimal dili yarada bilmişəm; lakin hər halda, məndə belə əminlik hissi xoş bir duyğu yaradır ki, mən bu məqsədə çatmaq üçün imkan daxilində bütün səylərimi yerinə yetirə bilmişəm.

Sonda bir arzumu bildirmək istəyirəm; təklif etdiyim bu əsər, mənim həmvətəndaşlarım arasında sağlam düşüncə tərzinin və faydalı praktiki gerçəkliklərin yayılmasına xidmət edə bilsin. Və əgər mənim oxucularımdan bəzilərinin, Ehtimal haqqında Nəzəriyyənin predmetini təşkil edən bütün nəzəriyyələrin analitik şərhini izləmək üçün kifayət dərəcədə riyazi

təhsili olmazsa, hətta belələri üçün belə mənim kitabımın diqqətli mütaliəsi səmərəsiz olmayacaqdır. Onlar bu kitabdan olduqca müxtəlif, ümumtətbiqi nəticələrdən bəhrələnə biləcəklər və bu nəticələr onlara bizim ictimai həyatımızla əlaqədar bir çox maraqlı məsələ və gerçəklikləri əslində olduqları kimi göstərə biləcəkdir.

SON.
RİYAZİ EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİNDƏN ALINAN NƏTİCƏLƏR HANSI MƏNADA ANLAŞILMALIDIR

Ehtimal Analizinin riyazi əsaslarını və onun ictimai həyat məsələlərinə, Natural Fəlsəfəyə və Mənəvi Elmlərə əsas tətbiqlərini bu əsərdə ardıcıllıqla şərh edərək, biz artıq qısa şəkildə də olsa, bu nəzəriyyədən nəyi gözlədiyimizi və nə tələb etdiyimizi dərk edə bilirik; bu nəzəriyyə, ədalətlə düşünülərsə, bizim nəzəriyyələrimizin ən mühüm sahələri ilə bir sırada dura bilər. Olduqca çox da olmayan, insana miras qalmış, danılmaz həqiqətlərdən başqa təbiətdə və mənəvi aləmdə hər nə varsa, az və ya çox dərəcədə doğruyaoxşar gümanlara əsaslanmışdır; buna görə də, ehtimal haqqında nəzəriyyə, əslinə qaldıqda, əqli fəaliyyəti demək olar ki, bütünlüklə əhatə edir. Şübhəsizdir ki, bu elmin hərtərəfli rolu, bir tərəfdən fiziki və mənəvi təzahürlər üzərində müşahidələrdən alınmış məlumatların çatışmamazlığı və kafi olmaması ilə, digər tərəfdən, az dərəcədə də olsa, riyazi analizin mükəmməl olmaması ilə olduqca məhdudlaşır. Bununla belə, Ehtimal nəzəriyyəsində bu günə qədər nələrə nail olunmuşdursa, bunlar onu həqiqətin aşkar edilməsi və əşyalara səthi baxışda ağlın çox vaxt edə biləcəyi səhvlərdən qorunmaq üçün ən mühüm əqli bir vasitə səviyyəsinə qaldırır. Çox dərin ağıl bəxş olunmuş şəxsin yalnız öncədən təqribi nəticələri görə biləcəyini bu nəzəriyyə çox vaxt ədədlərlə ifadə olunmuş dəqiq nəticələrə gətirir. Adi Məntiqə sığmayan hər hansı fərz olunan həqiqətin etibarlılıq ölçüsünün qiymətləndirilməsində belə müəyyənlik, şübhəsiz ki, mütəfəkkirlərin tam diqqətinə layiqdir. Ehtimal nəzəriyyəsinin əsl ruhunu dərk etməmiş bəzi empiriklər kimi bu ədədi nəticələri qəti mənada qəbul etmək, şübhəsiz ki, düzgün olmazdı. Məs., hər hansı bir hadisə gerçəkliyə və ya onun ehtimalı vahidə çox yaxın olarsa, bundan belə nəticə çıxarmaq olmaz ki, bu hadisə hökmən baş verəcəkdir və ya da ki, əks halda, bu nəzəriyyə səhv nəticələrə gətirir. Belə nəticə başqa mənada anlaşılmalıdır, bu nəticə Yakov Bernullinin məşhur ümumi fikri ilə tamamilə təsdiq olunur. Hadisənin ehtimalının böyük olması yalnız onu sübut edir ki, əgər

biz, eyni şərtlər yerinə yetirilməklə sınaqları olduqca çox dəfə təkrar edə bilərik sə, onda hadisənin baş verməsi sayı onun baş verməməsi sayından xeyli çox olardı və baş vermə sayının baş vermə sayı ilə baş verməməsi sayının cəminə nisbəti ehtimal üçün tapılmış qiymətə qeyri-müəyyən surət-də yaxınlaşardı. Ehtimal Analizi şərtlərin qeyri-müəyyənliyi üzrə ayrıca bir sınaq haqqında heç bir müsbət nəticə verə bilmir, necə ki, bu, əvvəldə bu kitabın başlanğıcında da izah olunmuşdu.

Ümumiyyətlə, Ehtimal Analizinin müxtəlif nəticələrinin izahında Yakov Bernullinin teoremi ilə ifadə olunan qanun həmişə nəzərə alınmalıdır. Bizim izah edə bilmədiyimiz təsadüflərdən asılı hadisələrin təkrarlanması sayındakı düzgünlük (*qanunauyğunluq*; H. M.), yalnız olduqca çox saylı sınaqlarda yerinə yetir. Buna görə də, hər bir ayrıca baxılmış halda alınan hər bir nəticəyə yalnız *orta nəticə* kimi baxılmalıdır, bu nəticə bir çox hallarda əsl nəticədən olduqca fərqli ola bilər, bu nəticə isə baş vermiş hadisələrlə *a posteriori* aşkar olunur. Lakin həmin sınağı qeyri-müəyyən say dəfə eyni şərtləri yerinə yetirilməklə təkrar etmək imkanı olsaydı, onda alınmış orta nəticə, müxtəlif hadisələrin baş vermələri arasında axtarılan münasibətləri, sınaqların sayı çox olduğu haldakından daha yaxşı ifadə etmiş olardı.

Xülasə olaraq, biz oxuculara Riyazi Ehtimal Nəzəriyyəsinin tədrici inkişafının qısa tarixi oçerkini təqdim edirik.

RİYAZİ EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİNİN TƏDRİCİ İNKİŞAFININ QISA TARİXİ OÇERKİ

118. Ehtimal haqqında mücərrədlik nöqteyi-nəzərdən baxılan ilkin anlayışların aid olduğu dövr bizim bilik sahələrimizin əksərinin başlanğıcında olduğu kimi qeyri-müəyyəndir. Bu elmin riyazi nəzəriyyəsində hələ çox-çox əvvəl, oyunlarda, mərclərdə və s. müxtəlif əlverişli və əlverişsiz hallarda onların saylarının müqayisəsi ilə bu müqayisədən sonra çox və ya az uğurlu da olsa, nəticələr çıxarılırdı. Qədim filosofların əsərlərindəki oxşar mülahizələr və eynilə də, bəzi qaydalar, əlbəttə ki, təsadüflər haqqında elmlərə aiddir və hətta elə müsbət dəlillər vardır ki, ehtimala dair elmin bəzi çox gözəl tətbiqləri bizdən olduqca uzaq dövrlərdə də olmuşdur. Məs., Digestdə[*],

[*] *Digest* (və ya *Pandektlər*), məlum olduğu kimi, imperator Yustinianın əmri ilə Qanunlar küllüyatı kimi tərtib edilmiş görkəmli Roma Qanunvericilərinin qərarlar məcəlləsidir. Digestin nəşri 528-ci ilə aid olunur.

Q. Libri[*]-nin qeydində ərzaq haqqında məsələ ilə əlaqədar qanun verilmişdir və bu qanun çox aydın sübut edir ki, Romalılar müxtəlif yaşlarda orta yaşama müddətinin təyin olunması ilə məşğul olurdular. Daha sonra Q. Libri İtalyan Respublikalarında hələ orta əsrlərdə mövcud olmuş Dəniz Sığorta Cəmiyyətlərindən söhbət açır; məhz bu, fərz etməyə əsas verir ki, o dövrdə gəmi qəzalarının baş vermə ehtimallarını təyin edə bilirdilər. Eyni zamanda məlumdur ki, bir az sonra XVII əsrin başlanğıcında, görkəmli *Qaliley* ehtimal nəzəriyyəsinin – xətaların müəyyənləşdirilməsi və onların müşahidə nəticələrinə təsiri kimi olduqca mühüm məsələsi ilə məşğul olurdu. Əlbəttə ki, bu qədər çətin predmet üzrə onun araşdırmaları arzu edilən müvəffəqiyyətlə nəticələnə bilməzdi. Məncə, insan ömrü ilə bağlı ehtimallara əsaslanan ilk fikir ayrılığı XVII əsrin birinci yarısına aiddir. Neapollu *Lavrentiy Tonti* öz adı ilə indiyə qədər bağlı olan *tontin* (№ 73) adlanan bu növ xüsusi bir təsisat təklif etdi.

Burada indi qeyd olunmuş cəhdlərin, şübhəsiz ki, Ehtimal Analizinə aid olmasına baxmayaraq, bunların ardıcıl olmamaları və qeyri-mükəmməlliyi üzündən, onlar elmin tələblərinə cavab verə bilmirdilər. Təsadüflərin riyazi nəzəriyyəsinin əsasları Paskal və Fermat tərəfindən on yeddinci əsrin yarısında qoyulmuşdu. Onların həll etdikləri ilk məsələ – Paskala Kavaler de *Merenin* təklif etmiş olduğu – oyuna qoyulan məbləğın oyun başa çatmamış oyunçular arasında ziyansız bölüşdürülməsinə aid məsələ idi. Bu mövzu ilə ətraflı tanış olmaq istəyənlər bizim kitabın № 32 və № 38 bəndlərinə müraciət edə bilərlər. Beləliklə, ədalət naminə demək olar ki, Ehtimal hesabı, özünün ilkin əsasları və müstəqilliyinə görə, bu iki görkəmli şəxsiyyətə borcludur.

Paskal və Fermatın qeyd olunan cəhdlərindən dərhal sonra, onların müasiri *Hüygens* bu predmetlə məşğul olmağa başladı; o, özünə qədər artıq həll olunmuş məsələləri toplayıb və onlara öz araşdırmalarını da əlavə edərək, təsadüflərə məruz oyunlarda abstrakt mühakimə haqqında traktat yazdı. Ehtimal Nəzəriyyəsi üzrə ilk nəşr olunmuş bu əsəri *Şoten*, 1657-də özünün *Exercitationum mathematicarum* kitabında *De ratiocinus in Aleao Ludo* başlığı altında nəşr etdirmişdi. Hüygensin traktatı da *Ars conjectandi* kitabının birinci hissəsində şərh olunmuşdur, bu haqda aşağıda danışacağıq; bu traktat orada Yakov Bernullinin kommentariləri ilə zənginləşdirilmişdir.

Hüygensdən başqa XVII əsrin ikinci yarısında ehtimal nəzəriyyəsi ilə Sovör (Sauveur) də məşğul olmuşdur; o, 1679-da «*Journal des Savans*»-da oyunda, məs., bank və ya farao – *bassète* adlı oyunlarla əlaqədar, mümkün

[*] Revue des deux mondes, livraison du 15 Mai 1845; məqalə: Fermat, par M. Libri.

ola bilən halların təyin olunması barədə öz araşdırmalarını vermişdi. *Montyukl*, özünün «*Histoir de Mathématiques*» (1802, cild III, 391 səh.) əsərində «of the Laws of chance» başlıqlı bir traktatı da qeyd edir; qumar oyunları mövzusunda bu traktat müəllifin adı qeyd edilmədən 1692-də Londonda nəşr olunmuşdu. Montyukl fərz edir ki, bu əsər *Benjamin Motta* (Benjamin Motte) məxsusdur. *Van Hudden* (Van Hudden), Hollandiya pensionarisi *Vitt* (Witt) və *Halleyin* insan ömrü ehtimalları mövzusunda əsərləri XVII əsrin sonuna aiddir. Bizə məlum olan ölüm cədvəllərindən tarix etibarilə birincisini 1693-də Halley nəşr etdirmişdir [№ 60]. Onun tədqiqləri 1693-ün n^0 196-da *Philosophical Transactions*-da nəşr olunmuşdur.

Ehtimal Hesabının qeyd olunan dövrə aid çox da maraqlı olmayan digər nailiyyətləri üzərində dayanmadan, görkəmli *Yakov Bernullinin* əsərlərinə keçək. Artıq 1685-də *Journal des Savans*-da o, riyaziyyatçılara zər oyunu ilə bağlı olduqca çətin bir məsələ təklif edir. O, cavab almayıb, 1690-ın Leybtsiq Aktlarında özünün həllini isbatsız dərc etdirir. Bu hadisə Leybnitsi təklif olunmuş məsələ ilə məşğul olmağa təhrik etdi; o, bu məsələni təxirə salmadan həll edib, özünün həll üsulunun ətraflı şərhini elə həmin Leybtsiq Aktlarında nəşr etdirir. Lakin ehtimalın riyazi nəzəriyyəsinə Yakov Bernullinin göstərdiyi əsas xidməti, şübhəsiz ki, onun uzun illər boyu ətraflı düşünülmüş *Ars conjectandi* adlı gözəl əsəridir. Bu əsər 1713-də, Bazeldə müəllifin ölümündən yeddi il sonra, onun qardaşı oğlu *Nikolay Bernulli* tərəfindən nəşr olunmuşdu. Düzgün və incə ağıllı analitik üsulları ilə seçilən bu əsər dörd hissədən ibarətdir. Bundan əvvəl qeyd etdiyimiz birinci hissə, Hüygensin Traktatına izahedici qeydlərdən ibarətdir. İkinci hissəyə müxtəlif cür birləşmələrin geniş bir nəzəriyyəsi daxil olmuşdur. Üçüncü hissədə müxtəlif oyunlara aid bir çox məsələlərin həlləri verilmişdir. Nəhayət, sonuncu dördüncü hissə, birgə yaşamaq məsələlərinə mənəvi və siyasi elmlərə aid əvvəlki hissələrdə şərh olunmuş məsələlərdə qaydaların nə cür istifadə olunması və onlara əlavələr şərh olunmuşdur. Bu dördüncü bölmə xüsusilə diqqətəlayiqdir, belə ki, burada həll olunan məsələlərdə Ehtimal Hesabında olduqca mühüm rol oynayan Nyüton binomundan istifadə olunmuşdur. Bu dördüncü hissənin ən gözəl məqaləsi, şübhəsiz ki, bizim artıq neçə dəfə qeyd etdiyimiz, Yakov Bernullinin adını daşıyan məşhur teoremin isbatıdır. Bu məqalə barədə ətraflı məlumat bizim № 20, 22, 24, 25, 26, …, 117-ci bəndlərimizdə verilmişdir. Dördüncü hissənin ardınca, *sonsuz sıralar haqqında* traktat, əsərin sonunda isə «*Lettre à un amy sur les Parties du jeu de Paume*» başlığı ilə naməlum müəllifin maraqlı araşdırması şərh olunmuşdur.

Ars conjectandi-nin nəşrçisi Nikolay Bernulli özü bəzi uğurlarla Ehtimal nəzəriyyəsi ilə məşğul olurdu. O, 1709-da Bazeldə Hüquq Doktoru dərəcəsi almaq üçün Mühakimə üsuluna Ehtimal Hesabının tətbiqi təcrübəsi mövzusunda Dissertasiya müdafiə edir. Nikolay Bernullinin Dissertasiyası «*De Arte conjectandi in Jure*» başlığı ilə 1709-da nəşr olunmuşdur; burada həlləri ilə verilmiş maraqlı məsələlər arasında bir məsələ üçüncü hissənin mövzusudur, yəni: barəsində neçə il heç bir məlumat məlum olmayan şəxsi, qanun üzrə nə qədər müddətdən sonra ölmüş hesab etmək olar?

119. On səkkizinci yüzillik Sırf Riyazi Analizin olduqca parlaq müvəffəqiyyətləri ilə əlamətdar olub, Ehtimal Nəzəriyyəsində də mühüm təkmilləşmələrə səbəb oldu. Bu əsrin başlanğıcında Fransada *Monmort*, İngiltərədə Fransa əsilli *Moavr* xüsusi bir səylə Ehtimal Hesabı ilə məşğul olurdular. Monmort bu predmet haqqında «*Essai d'analyse sur les jeux de hasard*» başlığı ilə öz əsərini nəşr etdirir; burada o, müxtəlif növ kart, zər oyunlarına aid çoxsaylı maraqlı məsələlərin həllini verir. Bu kitabın bir çox cəhətdən düzəldilmiş və əlavələr daxil olunmuş ikinci nəşrində (1713) Yakov və İvan Bernulli qardaşlarının qardaşı oğlu Nikolay Bernulli ilə Monmortun çox maraqlı bir yazışması vardır. Bu yazışmada Nikolay Bernullinin 9 sentyabr 1713-də Monmorta məktubunda «*Peterburq məsələsi*» adlandırılmış məsələnin qoyuluşu və Nikolay Bernullinin bir çox məsələlərin düşünülmüş incə həlləri xüsusilə diqqətəlayiqdir. Bu mövzu ilə əlaqədar ətraflı yazı № 45-də verilmişdir. Monmortun çətin məsələlərin həlli ilə bağlı məşğul olduğu məsələlərdən biri kimi, – oyunun özünün şərtinə əsasən, onun nə vaxt başa çatacağı qeyri-müəyyən olduqda, oyuna qoyulan məbləğin nə cür bölünəcəyini təyin etmək məsələsini misal göstərmək olar. Bu mövzu ilə də elə Moavr məşğul olurdu; lakin həllərin mükəmməl olduğunu söyləmək olmazdı [№ 33 və 40].

Moavr ehtimal nəzəriyyəsi üzrə öz ilk əsərlərini London Krallığı Cəmiyyətinə təqdim edir; bu əsərlər *Philosophical Transactions*-da 1711-də «*De mensurâ sortis*» başlığı ilə verilmişdir. Bundan sonra Moavr öz tədqiqatlarını «*The doctrine of chances*» adlı ayrıca kitab şəklində nəşr etdirir; sonradan bu nəşr hər dəfə təkmilləşdirilərək 1716, 1738 və 1756-da 3 dəfə nəşr olunmuşdur. Bu əsər analitik üsul baxımından ondan əvvəlkilərdən olduqca üstün cəhətləri ilə seçilir. Ümumiyyətlə, buradakı məsələlər Nyüton binomundan istifadə olunaraq, böyük ümumiləşmələrlə həll olunmuşdur. Yakov Bernullinin teoreminə olduqca mühüm yeniliklər, məhz, – onların sadə ehtimallara münasibəti və onların həqiqətən təkrarlanma sayı münasibəti arasındakı fərqin verilmiş sərhədlər arasında olması ehtimalının təyin olunması əlavə olunmuşdur. Buna görə Moavr birinci

olaraq, *Stirlinqin* teoremindən istifadə etmişdir (№ 21). Lakin onun bu kitabı, onun özünün icad etdiyi *qayıdışlı sıralar* nəzəriyyəsinin burada şərhi ilə xüsusilə əlamətdardır. Əslində bu nəzəriyyədə, təsadüflər analizinə öz tətbiqləri üzrə çox məhsuldar olan bir üsul – sabit əmsallarlı, sonlu fərqlərlə tənliklərin inteqrallanması üsulu verilmişdir.

Bu dövrə yaxın bir ərəfədə çox və ya az uğurla da olsa, Ehtimal Nəzəriyyəsi ilə bir çox digər riyaziyyatçılar da məşğul olurdular; bunlardan *Meran* [№ 37], *Nikol*: 1730-un «*Histoire de l'Academie Royale des Sciences*»-də qeyri-bərabər bacarıqlı oyunçulardan bəzilərinin udduqları partiyalar artıqlaması ilə olduğu halda, bu oyunçuların taleinə aid müxtəlif məsələlərin həllərini nəşr etdirmişdilər.

XVIII əsrin ikinci yarısında bir çox alimlər böyük bir diqqətlə, ümumiyyətlə, əhaliyə, doğum sayına, nigahlara və s. aid müxtəlif məlumatları toplayırdılar. Bunlarla bağlı ədədi göstəricilər, tələb olunan tənqidi araşdırılmalardan sonra, insan ömrünün ehtimalları haqqında müxtəlif praktiki məsələlərin həlli üçün ömürlük gəlirlər, əmanət kassaları, tontinlər, ixtiyari növ sığortalar və buna bənzər tədavüllər haqqında olduqca faydalı bir çox cədvəllərin tərtib olunması üçün istifadə olunmuşdur. Bu mövzu ilə əlaqədar tarixi məlumatları oxucular, «*Histoire des Mathématiques, par Montucla*»-nın üçüncü cildində tapa bilərlər, burada alimlərin əsas əsərlərinə qısa göstərişlərlə kifayətlənəcəyik.

XVIII əsrin ortalarına yaxın bu predmet üzrə İngiltərədə *Foma Simpsonun*, Hollandiyada *Kersebooma* və *Strikin* (*Struyk*) və Fransada *Deparsyenin* əsərləri diqqətəlayiqdir. Deparsye 1746-da «*Essai sur la probabilitié de la dur la vie humaine*» başlığı altında əsərini nəşr etdirir. Stokholm Akademiyasının 1754-ün elmi məcmuələrində İsveç astronomu *Vargentinin* ölüm cədvəlləri haqqında maraqlı tədqiqatları da nəşr olunmuşdu. Bu predmetlə Almaniyada riyaziyyatçı *Lambert* [№ 60], *Eyler* və bəzi digər riyaziyyatçılar da məşğul olurdular.

Keçən əsrin son illərində Deparsye – indi qeyd etdiyimizin qardaşı oğlu, 1781-də «*Traité des annuités , accompagné de plusieurs tables*» başlığı ilə əsər nəşr etdirir. Bundan dərhal sonra *Dyuvilyar* [№ 60] müxtəlif növ maliyyə dövriyyələri haqqında «*Recherches sur les rentes, les emprunts, les remboursements, ets.* » adlı olduqca gözəl bir kitabını 1787-də nəşr etdirir. O vaxta yaxın bir dövrdə, 1783-də, İngiltərədə *Pris*, Siyasi Arifmetikanın müxtəlif predmetləri haqqında, ümumi marağa səbəb olmuş əsərlərini çap etdirir.

İndi isə XVIII əsr ərzində Ehtimal Hesabı sahəsində mühüm nailiyyətləri qısa şəkildə şərh edək.

İvan Bernullinin oğlu *Daniil Bernulli*, Ali Həndəsə və Mexanikanı öz kəşfləri ilə zənginləşdirmiş, riyazi gözləmə və mənəvi gözləmə arasındakı fərqi ilk olaraq təklif edib, mənəvi gözləmənin hələ indi də istifadə olunan ölçüsünü daxil etmişdir (FƏSİL IV). Demək olar ki, onunla eyni vaxtda məşhur Fransa Təbiətşünası Byüffon özünün «*Essai d'Arithmétique moralé*» əsərində bu predmetin özü haqqında öz fikirlərini şərh etmişdir [№ 42]. Oxucu «Ouvres complètes de Buffon, Paris, 1827, t. XIII p. 14» adlı kitabda Daniil Bernullinin 19 mart 1762-də Byüffona məktubu ilə tanış ola bilər; məktubla sübut olunur ki, Bernulli Byüffonun mənəvi ehtimala baxışının tamamilə əsaslandırılmış olduğunu qəbul etsə də, onun ölçüsünün tərifi ilə tam razılaşmır. Həmin kitabda Ehtimal Analizindən bir neçə məsələnin riyazi həlləri, insan həyatı, doğumlar, nigahlar, ölüm cədvəlləri və b. aid məsələlərə bu nəzəriyyənin tətbiqi də şərh olunmuşdur. Daniil Bernullinin əsərlərinə qayıdaq. Ehtimal Hesabında onun xidməti öz tətbiqi ilə olduqca məhsuldar olan original bir fikir ilə əlamətdardır: hadisələrin ehtimallarına *a posteriori*, yəni müşahidə olunan təzahürlər əsasında baxılır. Bu mövzu ilə bağlı düsturlar sonradan *Beyes* (Bayes) və *Pris* (Price) tərəfindən 1764 və 1765-in «Philosophical Transactions» nəşrində təklif olunmuşdu, daha sonra *Laplas* bunları lazımi qədər ümumiləşdirmişdir. Daniil Bernulli də Ehtimal hesabını çiçəyə qarşı peyvənd məsələsinə tətbiq etdi* [№ 64] və bu onunla *D'Alambert* arasında olduqca qızğın mübahisəyə səbəb oldu; *D'Alambertin* etirazları onun *Opuscules mathematiq* (II və IV cildlər) və eynilə də, onun *Mélanges de philosoplie* (V cild) əsərlərində dərc olunmuşdur. Bu gözəl əsərdə Ehtimal Analizinə aid, Kondorsetin ayrı-ayrı məqalələri də verilmişdir; bunlardan həcmi və məzmununa görə əsas məqalə burada *Probabilité* başlığı ilə verilmişdir. Bu elm üzrə Kondorsetin digər tədqiqləri 1781, 1782 və 1783-cü illərin Paris Akademiyasının Elmi məcmuələrində dərc olunmuşdur. Onun ən diqqətəlayiq əsəri səslər çoxluğu üzrə qərarlar haqqında geniş bir Traktatdır. Qeyd etdiyimiz bu əsər 1785-də «*Essai sur l'application de l'Analyse à la probablilité des décisions rendues à la pluralité des voix*» başlığı ilə dərc olunmuşdur. Bizim bu kitabın XI fəslində biz Kondorsetin bu əsərinin bəzi yerlərinə istinad etmişik.

Eyler sırf və tətbiqi Riyaziyyatın demək olar ki, bütün sahələrini zənginləşdirməklə yanaşı, Ehtimal Nəzəriyyəsinin müxtəlif hissələri üzrə də məşğul olurdu. Bu predmet üzrə onun memuarları olduqca çoxdur. Onun bəzi əsərlərini biz № 35, 65, 72-də göstərmişik. Onun dərc olunmuş

* Mèmories de l'Académie des Sciens, 1760.

tədqiqlərindən başqa, hələ dərc olunmamış əlyazmaları da vardır, məhz: «*Vera Estimatio sortis in Lulis*» və «*Reflexions sur une espèce singulière de loterie nommée Loterie Génoise*». Onun Prussiya Kralı II Fridrix ilə xüsusi növ lotereyalar* mövzusunda hələ heç yerdə dərc olunmamış yazışması da çox maraqlıdır. Lakin onun əsas xidməti İnteqral Hesabının təkmilləşdirilməsilə əlamətdardır ki, bu da Ehtimal Analizinin sürətlə uğurlara nail olmasına səbəb olmuşdur.

Laqranj xüsusi sonlu fərqlərlə tənliklərin inteqrallanması üçün çox sadə və rahat üsul təklif edərək, onun Ehtimal Hesabının çətin və eyni zamanda maraqlı məsələlərinin həllində tətbiqini göstərmişdir. Bu mühüm predmet haqqında bizim bu əsərimizdə III Fəsil və VII-nin Qeydlərində ətraflı yazılmışdır. № №78 və 79-da biz, müşahidələrin ən əlverişli nəticələrinin təyin olunmasına aid Laqranjın digər bir əsərini də qeyd etmişik.

Ehtimal nəzəriyyəsinə aid *Lakroanın* bir əsərini də qeyd edək. Paris Elmlər Akademiyası *dəniz təhlükələrindən sığortalanma* haqqında məsələ təklif edir. Qaneedici həllər almayan Akademiya iki dəfə müsabiqə elan edir və artıq üçüncü dəfə səkkiz cavab əsərini alır; bunlardan ikisi – biri Lakroanın, digər isə Bikileyin (Bicquilley) əsərləri verilən mükafatın yarısının təqdim olunması ilə qəbul edilir. Tam mükafatın məbləği 6000 frank iki müəllif arasında bölünür: Lakroa 1800, Bikiley isə 1200 frank alır. Bundan başqa, Lakroa olduqca yaxşı bir əsər nəşr etdirir: *Traité élémentair de Calcul de Probabilités*; bu əsər artıq Fransada üç dəfə nəşr olunmuşdu. Bikiley də bu elm haqqında «*Du Calcul de Probabilités*» başlığı ilə 1783-də kitab dərc etdirmişdi.

Biz *Lejandr* və *Qaussun* müşahidələrin ən ehtimallı nəticələri mövzusunda əsərləri üzərində dayanmayacağıq. Bu haqda bizim X Fəslimizdə [№ 92] yazılmışdır. Elə bu Fəsildə, şərti tənliklərin ən əlverişli toplusu haqqında digər ətraflı tarixi məlumatlar və yeri gəlmişkən, ingilis riyaziyyatçısı *Kotssun* üsulu da (№ 85-in sonunda) verilmişdir.

Lakin analitik Ehtimal Nəzəriyyəsi heç bir kəsə *Laplas* qədər borclu deyildir. Bizim kitabda onun əsərləri haqqında tez-tez söhbət etdiyimizdən,

* Bu əlyazmalar haqqında mənə məlumat vermiş İmperator Elmlər Akademiyasının daimi katibi P. N. Fussa olduqca minnətdaram. Məhz onda Eylerin müxtəlif riyazi predmetlər üzrə memuarları vardır. Ümid etmək olar ki, bu qiymətli əsərlər nə vaxtsa nəşr olunacaqdır.

biz özümüzə borc bilirik ki, bu böyük həndəsəçinin əsas xidmətlərini, ən qısa şəkildə də olsa, qeyd edək.

Laplasın Akademiyanın Elmi məcmuələrində analitik Ehtimal Nəzəriyyəsi haqqında dərc olunmuş çoxsaylı Memuarlarından başqa, 1812-də* ilk dəfə bu predmet haqqında onun bütün nəzəriyyəsini və onun bütün əsas tətdiqlərini əhatə edən dahi əsəri nəşr olundu. Laplasın heç bir əsərində, onun «*Théorie analytique des Probabilités*» əsərindəki kimi riyazi analizin əzəməti və baxışlarının incəliyi, dərin ağıl belə bir qüdrəti ilə əks olunmamışdı. Təsadüflər analizinin ən çətin məsələlərinin həllində, Laplas bu nəzəriyyəni ən mükəmməl səviyyəyə qaldırdı. Onun ehtimal haqqında nəzəriyyəni ən çox zənginləşdirmiş ən gözəl tədqiqlərindən biri kimi, xüsusi fərqlərlə tənliklərin inteqrallanması üçün doğuran funksiyalar nəzəriyyəsi xüsusilə qeyd olunmalıdır: Çox böyük ədədlərlə ifadə olunan müxtəlif inteqral düsturlarının yaxınlaşma yolu ilə hesablanması; belə düsturların xüsusi hallarına əvvəllər də təsadüf olunurdu, məs., ($\int_0^\infty e^{-x} x^n \, dx$ müəyyən inteqralı ilə dəqiq ifadə olunan) $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ [№ 21] hasili üçün *Stirlinq* təqribi düsturu. Müşahidələr üzrə *a posteriori* ehtimalları üçün ümumi düsturlar (Fəsil VII), bərabər mümkün ola bilən hallar kimi qəbul edilən, bərabər mümkün olmayan hallarda baş verə biləcək hadisələrin ehtimallarının hesablanması (Fəsil V). Ehtimal Hesabının Günəş sistemində müşahidə olunan təzahürlərə müxtəlif tətbiqləri; məs., bütün planetləri və onların peyklərini öz oxları ətrafında fırlanaraq və öz orbitləri üzrə qərbdən şərqə, yəni Günəşin fırlanma hərəkəti ilə bir istiqamətdə və demək olar ki, onun ekvatoru ilə bir müstəvidə hərəkətlərinin ilkin səbəbinin varlığının ehtimalının təyin edilməsi. Müşahidələrlə bağlı, elmlərə öz tətbiqləri ilə olduqca mühüm olan müşahidələrin ən əlverişli nəticələri nəzəriyyəsi (Fəsil X), özünün indiki mükəmməlliyi ilə Laplasa borcludur. Laplas geodeji təsirlərə onun tətbiqlərini göstərmiş və inkişaf etdirmişdir. Nəhayət, bu nəzəriyyənin ayrıca bir «*Essai philosophique sur les Probabilités*» adlı əsərində ehtimal analizinin nəzəriyyəsi və tətbiqindən düsturlarsız və hesablamalarsız həqiqətin şərhini və tam xülasəsini aşkar edirik.

Budur, Ehtimal Analizində Laplasın ən mühüm əsərlərinin qısa siyahısı. Burada söylənilənlərdən belə nəticəyə gəlmək olar ki, öz başlanğıcını Fransada Paskal və Fermatın işlərilə almış bu nəzəriyyə özünün sürətlə

* «Théorie analytique des Probabilités» əsəri ikinci dəfə 1814-də, üçüncü dəfə isə 1820-də nəşr olunmuşdur.

mükəmməl bir nəzəriyyəyə çevrilməsi ilə, həmçinin Fransız həndəsəçisinə də borcludur.

120. Laplasın və həm də Qauss və Lejandrın indicə qeyd etdiyimiz əsərlərindən başqa bir çox astronom və riyaziyyatçıların müxtəlif tədqiqləri də bizim yüzilliyimizə aiddir. *Bessel, Plana, Enke, Struve, Poasson* (Puasson; H. M.), *Lindenau, Bonenberger* və başqaları müşahidələrin ən əlverişli nəticələri haqqında məsələlər ilə nəzəri və pratiki cəhətdən məşğul olmuşlar (№ № 89, 91, 92, 95). № 94-də göstərilən əsərlərdən başqa, Poasson Ehtimal hesabı haqqında bir neçə digər Memuarlar nəşr etdirmişdi, o cümlədən: «*Mémoire sur la probabilité du tir à la cible*[*]». Çox maraqlı bu əsərdə Poasson, hədəfə atış ehtimalının riyazi nəzəriyyəsini şərh edərək, alınmış düsturlardan odlu silahların sərrastlığı və atıcıların bacarığı üzrə müqayisə üçün qaydalar alır. Fransız artilleriyaçılarının apardığı təcrübələr nəzəriyyəyə tamamilə haqq qazandırdı və alınmış düsturların praktiki cəhətdən faydalı olduğunu sübuta yetirdi. Poassonun bu elmə əsas xidməti – onun Mühakimə üsulunun riyazi nəzəriyyəsi haqqında: «*Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, 1917*» adlı ayırıca bir Traktatıdır. Bu əsər *beş* fəsildən ibarətdir; ilk dörd fəsil Ehtimal Hesabının ümumi əsaslarının və onun ən çox istifadə olunan tətbiqlərinin şərhinə, sonuncu isə yalnız Mühakimə üsulunun analitik nəzəriyyəsinə həsr olunmuşdur.

Elə bu kitabda Puasson Yakov Bernullinin bu teoremini dəyişə bilən mümkünlüklər halına genişləndirmiş və ümumi fikri *böyük ədədlər qanunu* adlandırmışdır. Bu barədə 35-ci səhifədə qeyd olunmuşdur.

Son illərdə ehtimal nəzəriyyəsi ilə məşğul olan adlarını çəkdiyimiz riyaziyyatçılardan başqa, bu predmet haqqında yazmış digərlərini də, o cümlədən: *Amper, Furye, Pyuissan, Hanzen, Ketle, Littrov, Mozer* və b. qeyd etmək olar.

Ehtimal nəzəriyyəsinin riyazi əsasları, əsas tətbiqləri və uğurlarının qısa xülasəsini ardıcıl Fəsillərdə şərh edərək, biz kitabımızı, insan biliyinin elmləri sırasında bu elmin mühüm əhəmiyyəti haqqında Laplasın[**] sözləri

---

[*] *Memorial de l'Artillerie, Paris*, 1837, n^0 IV. Artilleriya sənəti üzrə bu məqalələrin külliyyatının Brüssel nəşri 1839-da dərc olunmuşdur. Bu nəşrin n^0 III-də, həmçinin Poassonun: «*Formules de probabilités relatives au résultat moyen des observations, qui peuvent ètre utiles dans l'Artillerie*» başlıqlı məqaləsi də dərc olunmuşdur.

[**] «Essai philosophique sur les Probabilités» əsərinin sonunda.

Qeyd. Əsərə mündəricat rus variantında verilir. Səh. 378-388.

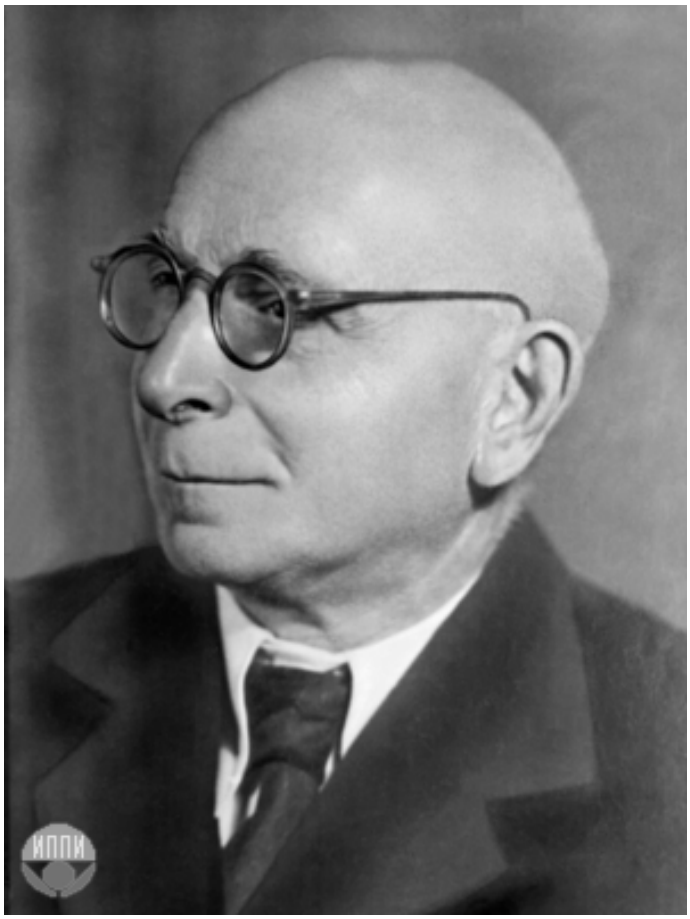
ilə tamamlayacağıq: «Bütün deyilənlərdən görünür ki, Ehtimal Nəzəriyyəsi, əslində, yalnız sağlam düşüncənin analitik düsturlara çevrilməsidir: o, hətta çox vaxt şüursuz olsa belə, düzgün ağlın gəldiyi qərarın dəqiq qiymətləndirilməsi üçün bir vasitədir». Əgər biz, bir tərəfdən bu nəzəriyyənin yaratdığı bütün analitik üsulları, onun əsası üçün başlanğıcların gerçəkliyini, müxtəlif məsələlərin həllində bunlardan çıxarılmış məntiqi nəticələrin incəliyi və ağıllılığını, digər tərəfdən, ehtimallar haqqında elm üzərində bərqərar olmuş ümumfaydalı təsisatları, onun hazırkı inkişafını və şübhəsiz ki, sonradan onun Natural Fəlsəfənin mühüm məsələlərinə və siyasi məsələlərə tətbiqini nəzərə alırıqsa; nəhayət, əgər biz, nəzərə alarıqsa ki, hesablanma aparılması mümkün olmayan predmetlərdə belə, həqiqətin aşkara çıxarılmasında o, bizi olduqca etibar ediləsi baxışlara gətirir, bizə ağlın yol verə biləcəyi səhvlərdən qorunmağı öyrədir, onda biz, bizim düşüncələrimizi ifadə edə bilən digər belə layiqli elmin olmadığı və onu ictimai təhsili təşkil edən nəzəriyyələr sisteminə daxil etmək olduqca faydalı olacağı nəticəsinə gəlirik».

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

АКАД. С. Н. БЕРНШТЕЙН

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО–ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1933 ЛЕНИНГРАД



S. N. Bernşteyn
(1880-1968)

XIX əsrin 30-cu illərindən Гостехиздат nəşriyyatı tərəfindən buraxılan «Современная математика» seriyasında akademik S. N. Bernşteynin «Современное состояние теории вероятностей» adlı kitabı 1933-də işıq üzü gördü; bu kitaba onun iki məruzəsi daxil olunmuşdur, onlara giriş aşağıda dərc olunmuşdur.

EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİNİN MÜASİR VƏZİYYƏTİ VƏ ONUN TƏTBİQLƏRİ

Moskvada 1927-də, Ümumrusiya riyaziyyatçılar qurultayında oxunmuş məruzə.

Təşkilat komitəsi mənə Qurultayda ehtimal nəzəriyyəsinin müasir vəziyyəti və onun tətbiqləri haqqında məruzə etməyimi təklif etdi. Siz bilirsiniz ki, bu mövzu çox geniş bir mövzudur və buna görə də, bizi maraqlandıran bütün oblastın tam analizini verməyi məndən gözləməməlisiniz, belə ki, buna görə bir neçə məruzəçi və mənə verilən vaxtdan qat-qat çox olan zamanın zəruriliyi tələb olunmalıydı. Belə şəraitdə qarşımda duran əsas çətinlik, materialın seçilməsi, şərtin təşkiledici prinsipinin seçilməsi idi.

Mən belə düşünürəm ki, bu halda mənim qarşımda duran əsas məsələ – ehtimal nəzəriyyəsinin ümumi riyazi problemlərini və onun mühüm tətbiqlərini metodoloji cəhətdən birləşdirən müəyyən bir sintezi verməyə cəhd etməkdir. Bu nöqteyi-nəzərdən mən yalnız xüsusi maraq kəsb edən bir çox riyazi tədqiqatlar haqqında susmağa məcburam və digər tərəfdən ehtimal nəzəriyyəsinin tətbiqlərinə baxarkən uyğun oblastda mühüm rol oynayan məsələlərdən çox prinsipial əhəmiyyəti olan məsələlər üzərində daha çox dayanmalı olacağam.

Çox uzaq keçmişdə deyil, keçən yüzilliyin ikinci yarısına qədər, ehtimal nəzəriyyəsinin bir elmi tədqiqat metodu kimi əhəmiyyəti olduqca məhdud idi; təbiətdə baş verən təzahürlərin öyrənilməsində bu nəzəriyyənin tətbiqinə Bernulli, Laplas, Puasson, Ketle və b.-nın adları ilə bağlı ayrı-ayrı cəhdlər olduqca zəif əsaslandırılmışdı və layiqli olaraq, tənqid hədəfinə çevrilmişdi və bu da 40 il bundan əvvəl Bertranın ehtimal nəzəriyyəsi kursuna yazdığı əsərinin məşhur giriş sözündə özünün ən parlaq ifadəsini tapmışdı.

Lakin Bertranın skeptisizmi, əgər belə ifadə etmək olarsa, ehtimal nəzəriyyəsinin elmin müxtəlif obastlarına sonrakı kortəbii tətbiqini nə yavaşıtmadı, nə də dayandırmadı. Artıq onun müasirləri Maksvell və Boltsmann molekulyar statistikanı fizikanın eksperimental əsaslandırılmış mühüm bölməsinə çevirirlər; digər tərəfdən Mendelin elementar varislik

qanununun kəşfi ilə əlaqədar, ehtimal nəzəriyyəsinin biologiyaya tətbiqi, yalnız mümkün olmayıb, eyni zamanda zərurətə çevrilir. Bu zaman bilik sahələrinin demək olar ki, hamısında – astronomiyada, meteorologiyada demoqrafiya və s.-də təsadüf və qanunauyğunluq arasında gizli bir əlaqənin olduğunu aşkara çıxaran geniş statistik material yığılır və bu əlaqənin, təsnifat problemlərinin və statistik sıraların xarakteristikalarının ehtimal nəzəriyyəsi əsasında analizi günün əsas məsələlərindən birinə çevrilir.

Hal-hazırda biz tam əminliklə deyə bilərik ki, insan biliyinin bundan sonrakı sistemləşdirilməsi və ya elmin inkişafı ehtimal nəzəriyyəsinin tətbiqi olmadan mümkün deyildir və buna görə də, ən əvvəl belə bir suala cavab verilməlidir: bu nəzəriyyəyə əsaslanan elm ikinci dərəcəlidirmi və ya elmin surroqatıdırmı?

Elə buna görə də, ehtimal nəzəriyyəsinin əlahiddə riyazi fənn kimi formal cəhətdən məntiqi əsaslandırılması xüsusi bir əhəmiyyət kəsb edir və bu fənn yalnız paradokslardan təmizləndikdən və aksiomatik qurulduqdan sonra, həndəsə kimi, ehtimal nəzəriyyəsindən də dəqiq obyektiv dərketmə metodu kimi istifadə etmək mümkündür və onun tətbiqi hər bir xüsusi halda eksperimental və riyazi yoxlamanı zəruri və mümkün edir.

Sırf riyazi ehtimal nəzəriyyəsində, riyazi ehtimal adlanan əmsalın, hər hansı subyektiv və ya obyektiv praktiki əhəmiyyətinin olub-olmadığı maraq kəsb etməyə bilər. Yeganə riayət olunmalı tələb – ziddiyyətlərin olmamasıdır, məhz: verilən şərtlər ödənilməklə və qəbul olunmuş aksiomların yerinə yetirilməsi şərtilə göstərilən əmsalın müxtəlif hesablanma üsulları eyni bir nəticəyə gətirməlidir.

Bundan başqa, əgər biz ehtimal nəzəriyyəsinin nəticələrinin sadəcə ağlın oyunu olmamasını və empirik yoxlanıla bilinməsini istəyiriksə, onda təkliflər və mülahizələrin yalnız elə toplularına baxmaq zərurudir ki, bunlar haqqında onların gerçək və ya yalnış olduğunu faktiki olaraq, müəyyənləşdirmək mümkün ola bilsin. Mahiyyət etibarilə bərpa olunmayan idrak prosesi məhz ondan ibarətdir ki, mümkün olan təkliflərdən bu və digərlərinin bizim qəbul edə bildiklərimiz gerçəkləşir, yəni baş verir və bu halda onların eyni zamanda inkar edilməsi yanlış və qeyri-mümkün olur.

Beləliklə, ehtimal nəzəriyyəsinin əlahiddə idrak metodu kimi qurulması tələb edir ki, təklifin gerçəkliyi, istisnasız olaraq, birqiymətli şəkildə vahidə bərabər götürülən riyazi ehtimalın müəyyən maksimal qiyməti ilə xarakterizə olunsun, təklifin mümkünsüzlüyü isə sıfra bərabər götürülən ən kiçik ehtimala adekvat olsun. Təkliflərin sonlu topluları üçün göstərilən tələblərə əməl etmək çətin deyildir, çünki onların qəti zəruriliyi kifayət

dərəcədə aydın etiraf olunmurdu, sonsuz toplulara baxdıqda isə paradokslar yaranır və yaranmaqda davam edir və mən bunlardan biri üzərində dayanmaq istəyirəm.

Mən məşhur bir məsələni nəzərdə tuturam: ixtiyari yazılmış bir kəsrin bölünməz olacağı ehtimalı nəyə bərabərdir? Bu məsələnin həlli Kroneker və Çebışevdən sonra, A. A. Markov tərəfindən onun klassik ehtimal hesabı kursunda verilmişdir.

TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR ARASINDA ASILILIQLAR HAQQINDA

Syurixdə 1932-də Beynəlxalq riyaziyyatçılar konqresində edilmiş məruzənin tərcüməsi.

1. Müasir elmin ən səciyyəvi xüsusiyyələrindən biri – onun ehtimal nəzəriyyəsi sxemlərinə ayırdığı böyük roldur. İlk baxışdan elmi mühakimələr metodunun başqa şəklə salınması klassik elmin determinizminə zidd təəssürat yaradır, belə ki, determinizm nöqteyi-nəzərindən, hər bir konkret təzahür – differensial, funksional və ya digər tənliklərlə əlaqələnən bəzi müşahidə olunan kəmiyyətlərin toplusu ilə birqiymətli təyin olunur və baxılan təzahürə bütün aləmin təsiri, tam mənası, ilə bu tənliklərin birqiymətli həll olunması üçün zəruri sərhəd şərtlərilə ifadə olunur.

Lakin bu determinist düstur – yalnız ümumi eksperimental yoxlanılması mümkün olmayan prinsipial bir deklarasiyadır, çünki tamamilə eyni şərtlərdə sınağı təkrar etmək mümkün deyildir; buna görə də, praktikada dəqiq elmlər həmişə bir qədər başqa düsturdan – yuxarıda qeyd olunanla yalnız təqribən mümkün ola bilən səbəbolma düsturundan istifadə edirlər. Məhz, real təzahür eyni kəmiyyətlərlə xarakterizə olunan abstrakt sxemlə əvəz olunur və fərz olunur ki, sərhəd şərtləri kainatın ümumi vəziyyətindən asılı olmadan çox və ya az dərəcədə eksperimental verilə bilinər.

Aydındır ki, bu səbəbolma prinsipi – praktiki cəhətdən faydalı, yeganə prinsipdir və o, determinizmin yuxarıdakı tam düsturuna zidd olmayaraq, mütləq və universal tətbiqə iddiada bulunmur; bundan başqa, gerçəkliyi asılı olmayan tamamilə dayanıqlı oblastlara ayırdıqda, bu prinsip, bununla da xüsusi bir məntiqi mühakimənin zəruriliyini aşkar edir və bu isə asılı olmayan kimi qəbul edilən təzahürləri başqa bir növ sistemdə birləşdirə bilərdi.

Məsələn, maddi nöqtənin hərəkətinin ox üzərində müsbət istiqamətin seçilməsindən asılı olmadığı haqqında fərziyyə riyazi şəkildə belə bir müddəa ilə ifadə olunur: sürətin hər iki işarəsi bərabər ehtimallıdır. Eynilə də,

verilən lotereya biletlərinin bərabər dəyərliliyi və ya simmetrikliyi və lotereya sahiblərinin tirajin istehsalından fiziki asılı olmamazlığı onu ifadə edir ki, hər bir şəxsin uduş ehtimalı onda olan biletlərin sayına mütənasibdir.

Əlbəttə ki, burada fərz olunan asılı olmamazlıq mütləq deyildir. Lakin stoxastik adlandırılan, bu tərzdə qurulan abstraktlaşdırılmış sxemlər müəyyən dərəcədə gerçəkliyə uyğun olur, necə ki, klassik elmin kazual sxemlərinin ətraf aləmdən asılı olmamazlığı fərz olunduğu kimi.

Sadə, ziddiyyətsiz aksiomatik bazaya əsaslanan Riyazi ehtimal nəzəriyyəsi, müşahidələr sayı olduqca böyük olduqda, praktiki cəhətdən adi deterministik sxemlərdən alınan, heç də az gerçək olmayan konkret görüntülərə gətirir və beləliklə, bu da, stoxastik sxemlər və onlarla təsvir olunan real təzahürlər arasında uyğunluğun olub-olmamasının sonsuz sayda üsullarını verir. Mən, burada mənim, gerçəkliyin hər hansı bir ümumi sxemə tamamilə gətirilə bilinməsinin qeyri-mümkünlüyü ilə on beş il əvvəl verdiyim bu aksiomatikanın prinsipləri üzərində dayanmayacağam.

Yalnız onu qeyd edəcəyəm ki, mənim nöqteyi-nəzərim, ümid edirəm ki, bu sonrakılardan kifayət qədər aydınlıqla aşkar olunacaqdır, empirik nöqteyi-nəzərdən – praktiklərin əksəriyyətinin sükutla üstündən keçdikləri, prof. Mizesin kurslarında sistematik tədris olunan, ehtimalı tezliklə eyniləşdirən nöqteyi-nəzərdən olduqca fərqlənir. Digər tərəfdən, mən, burada xüsusilə qeyd etməyi özümə borc bilirəm ki, ehtimal nəzəriyyəsinin real aləmə faktiki tətbiqi üçün eyni ehtimala malik bütün təzahürlərin məntiqi birqiymətliliyini postulatlaşdırmaq zəruridir və ya da kı, eynilə 1 ehtimal yalnız mütləq yəqinliyə uyğundur.

Belə halda biz, hesablama nəticələri kimi tətbiq üçün böyük ədədlər qanunu tipli mühüm teoremlər aldıqda, bunlara əsasən, hər hansı bir sınağın baxılan A nəticəsinin ehtimalı olduqca kiçikdir, $\frac{1}{N}$-dən də kiçikdir, burada N – olduqca böyük tam ədəddir; bu iddia sadəcə onu ifadə edir ki, baxılan sınağın A-ya obyektiv ekvivalent olan ən azı N sayda uyuşmayan nəticələri vardır (yəni elə nəticələr ki, bunlar arasında fərq yalnız sınağın gedişindən asılı olmayan əlamətlər və ya razılaşmalarla ifadə olunur) və bu nəticələrdən isə yalnız biri baş verir.

2. Bu ilkin qeydlərdən sonra, biz, elementar stoxastik sxemi elə ideallaşdırılmış sınaq kimi təyin edə bilərik ki, bu sınaqda dəqiq müəyyən olunmuş α şərtlər kompleksi ödənildiyi A hadisəsi ya baş verə bilər, ya baş verməz, həm də α şərtlər kompleksi və A hadisəsi arasında obyektiv əlaqə A hadisəsinin riyazi ehtimalı adlandırılan p skalyar kəmiyyəti ilə tam mənada xarakterizə olunur (verilən şərtlər ödənildikdə).

Bu sadə sxemə diqqətlə baxaq.

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА

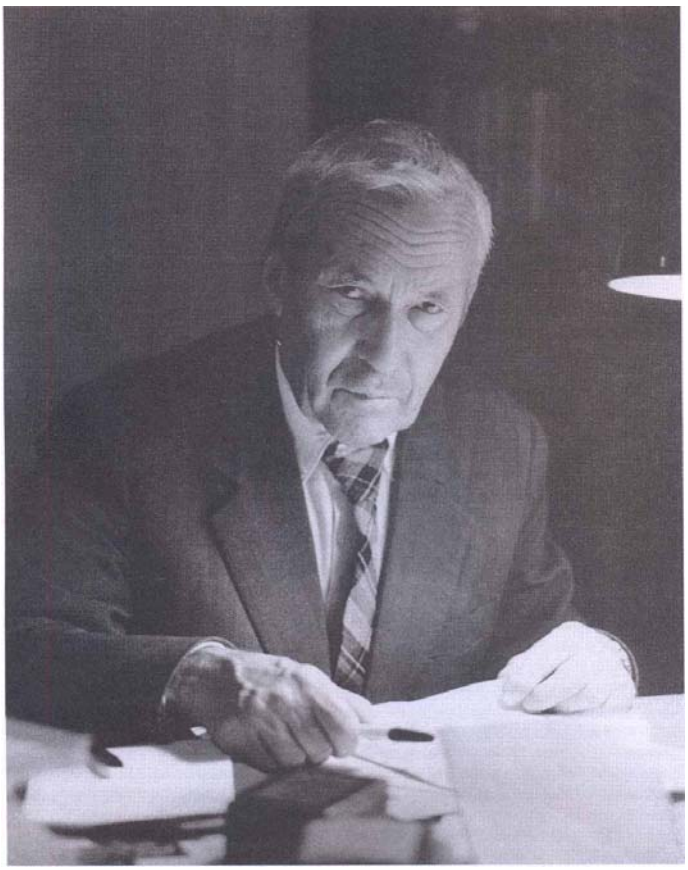
МАТЕМАТИКА,

ЕЕ СОДЕРЖАНИЕ, МЕТОДЫ И ЗНАЧЕНИЕ

ТОМ ВТОРОЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

МОСКВА 1956



A. N. Kolmogorov
(1903-1987)

1956-da «Издательство АН СССР» nəşriyyatında «Математика, ее содержание, методы и значение» adlı üç cildlik kollektiv əsər işıq üzü gördü. Girişdən bəzi parçalar belədir: «Bu kitabın tərtib olunmasında müəlliflər kollektivi sovet ziyalılarının olduqca geniş dairəsini ayrı-ayri riyazi fənlərin məzmunu və metodları ilə tanış etmək məqsədində olmuşlar … », «Oxucunun ilkin riyazi biliyinin minimum səviyyəsi üçün yalnız orta məktəb kursunu bilməsi fərz olunur, lakin bu materialın mənimsənilməsi nöqteyi-nəzərindən, üç cilddən hər biri digərindən fərqlidir … », «Kitabdan bütünlüklə, əsas etibarilə, yalnız riyazi analiz metodlarının tətbiqində bəzi vərdişlərə malik oxucular istifadə edə bilərlər … ».

Bu əsərin 2-ci cildi, XI fəsil – Ehtimal nəzəriyyəsi – akademik A. N. Kolmoqorov tərəfindən yazılmışdır və bu günə qədər təbiətşunaslıq və mühəndis mütəxəssisləri, riyaziyyat müəllimlərinin nümayəndələri üçün maraq doğurur.

§ 1. Ehtimal qanunauyğunluqları

Təbiət elmləri ilə müəyyən olunmuş ən sadə qanunauyğunluqlar – bizi maraqlandıran hər hansı hadisənin, doğrudan da, baş verib və ya baş verməməsi üçün şərtlərin təyin olunmasından ibarətdir; bu şərtlər aşağıdakı iki sxemdən biri ilə ifadə oluna bilinər:

1) əgər S şərtlər kompleksi yerinə yetirsə, onda A hadisəsi yəqinliklə baş verir;

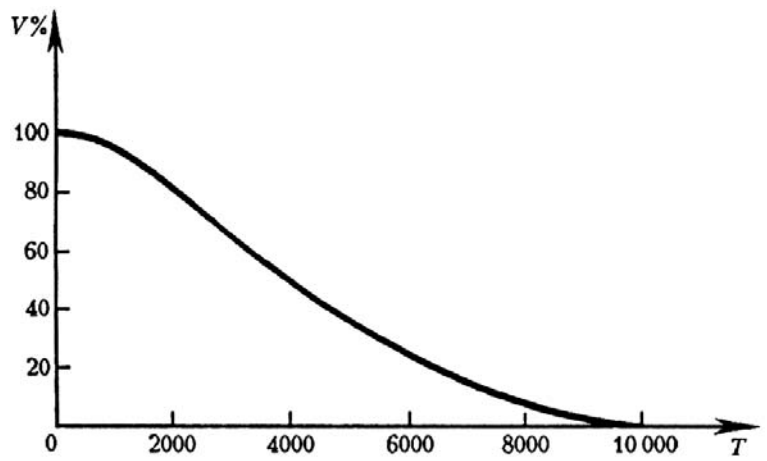
2) əgər S şərtlər kompleksi yerinə yetmirsə, onda A hadisəsi baş verə bilməz.

Birinci halda A hadisəsi S şərtlər kompleksinə nəzərən «yəqin» və ya «zəruri olan» hadisə, ikinici halda – «qeyri-mümkün» hadisə adlanır. Məs., atmosfer təzyiqi və $0^\circ < t < 100^\circ$ arasındakı t temperaturunda (S – şərtlər kompleksi) su, yəqinliklə, maye halında olur (A_1 yəqin hadisəsi), qaz və ya bərk halında isə ola bilməz (A_2 və A_3 qeyri-mümkün hadisələri).

S şərtlər kompleksi yerinə yetdikdə A hadisə bəzən baş verə bilirsə, bəzən isə baş verə bilmirsə, A hadisəsi bu şərtlər kompleksinə nəzərən *təsadüfi* hadisə adlanır. Belə bir sual yaranır: A hadisəsinin təsadüfiliyi – S şərtlər kompleksi və A hadisəsi arasında heç bir qanunauyğun əlaqənin olmadığı kimi anlaşılmalıdırmı? Fərz edək ki, məs., müəyyən olunmuşdur ki, müəyyən bir zavodun istehsal etdiyi müəyyən tip (S şərtlər kompleksi) lampalar bəzən 2 000 saatdan artıq yanır (A hadisəsi), bəzən isə bu müddətdən az vaxt ərzində sönərək, yararsız olur. Bununla belə zavodun

məhsulunun keyfiyyət xarakteristikası üçün lampaların $2\ 000$ saat işləməsi qabiliyyətini yoxlamaq məqsədilə sınaqlar aparılmalıdırmı? Bəlkə, lampaların praktik olaraq, hamısının fasiləsiz yanması və bütün lampaların sıradan çıxması üçün konkret müddətlə (uyğun olaraq, 500 saat və 10 000 saat) kifayətlənmək gərəkdir? Aydındır ki, lampaların işləmə müddətinin yalnız $500 \le T \le 10\ 000$ bərabərsizlikləri ilə xarakteristikası, istehlakçını az qane edəcəkdir. Əgər istehlakçıya lampaların təqribən 80% hallarında $2\ 000$ saatdan az işləməyəcəyi barədə deyilərsə, istehlakçı bu halda olduqca tam informasıya almış olur. T saatdan az olmayaraq işləyən lampaların, ixtiyari T qiymətində, $\nu(T)$ faizini göstərmək üçün heç olmasa şəkil 1-də təsvir olunmuş qrafikdə lampaların daha tam xarakteristikasını da vermək olar.

$\nu(t)$-nin əyrisi praktik olaraq, olduqca çox sayda $(100 - 200)$ lampadan ibarət sınaq partiyası ilə sınaqların köməyilə tapılır. Təbiidir ki, belə təyin olunmuş əyrinin yalnız o vaxt gerçək əhəmiyyəti olur ki, o, real qanunauyğunluğu yalnız baxılan sınaq partiyası üçün deyil, həm də materialların verilməsi keyfiyyətində və zavodda bərqərar istehsalat texnologiyasında istehsal olunan lampalar üçün düzgün əks etdirə bilsin, yəni digər sınaq partiyaları ilə aparılan sınaqlarda bu partiyalardakı lampalar da eyni şəraitdə istehsal olunmuşlarsa və sonda yaxın nəticələrə (yəni $\nu(t)$-yə yaxın əyrilərə) – birinci sınaq partiyası üçün sınaqlar



Şəkil 1

nəticəsində alınmış əyriyə gətirsin. Bu belə anlaşılmalıdır ki, sınaq partiyalarında $\nu(T)$ əyriləri ilə ifadə olunan *statistik* qanunauyğunluq – yalnız

lampanın işləmə müddətini, onun hazırlandığı materialların keyfiyyəti və onun hazırlanma texnologiyası ilə əlaqələndirən *ehtimal* qanunauyğunluğunu əks etdirən bir qanunauyğunluqdur.

Bu ehtmal qanunauyğunluğu $\mathrm{P}(T)$ funksiyası vasitəsilə verilir, burada $\mathrm{P}(T)$ – verilən şərtlərdə, ayrıca bir lapmanın T saatdan az yanmayacağı ehtimalıdır.

A hadisəsinin S şərtlərində müəyyən bir

$$P(A \mid S) = p$$

ehtimalının varlığı haqqında hökm belə ifadə olunur: olduqca uzun müxtəlif sınaqlar seriyalarında (yəni S şərtlər kompleksi yerinə yetirilməklə aparılan sınaqlar) A hadisəsinin baş verməsi üçün alınan

$$\nu_r = \frac{\mu_r}{n_r}$$

tezlikləri təxminən eyni olub, p-yə yaxın olur (burada n_r, – r-ci seriyadakı sınaqlar sayı, μ_r, – A hadisəsi baş verən sınaqların sayıdır).

Sınaqlar sayı çox olduqca, ν tezliklərinin, «ümumiyyətlə», daha yaxın ola bildiyi $p = P(A \mid S)$ konstantının varlığı haqqında hipotez (S şərtlər kompleksi və A hadisəsi arasında əlaqənin xarakteri ilə obyektiv şərtləşdirilmiş) təsadüfi hadisələrin geniş sinfi üçün özünü yaxşı doğruldur. Belə təsadüfi hadisələr təbii olaraq, *ehtimali – təsadüfi*[*] hadisələr adlandırılır. Yuxarıda baxılan məsələ kütləvi istehsalatın ehtimal qanunauyğunluqları oblastına aiddir. Belə qanunauyğunluqların reallığı heç bir şübhə doğurmur. Kütləvi məhsulun statistik seçimi nəzarətinin olduqca mühüm praktik üsulları bu qanunauyğunluqlara əsaslanır. Ehtimali qanunauyğunluqların yaranması cəhətdən ona yaxın oblast – atış nəzəriyyəsində əsas əhəmiyyət kəsb edən – mərmilərin səpələnməsinin ehtimal qanunauyğunluqları oblastıdır. Bu misal, ehtimal nəzəriyyəsi metodlarının texniki məsələlərə real tətbiqinə aid ilk misallardan biri olduğundan, biz atış nəzəriyyəsinin bəzi ən sadə məsələlərinə sonradan qayıdacağıq.

Sınaqların sayı n-in böyük qiymətlərində p ehtimalının ν tezliyinə «yaxınlığı» barədə yuxarıdakı mülahizələr bir qədər aydın deyildir; biz n-in bu və ya digər qiymətlərində $\nu - p$ fərqinin nə dərəcədə kiçik olması haqqında heç bir söz demədik. ν-nün p-yə yaxınlıq dərəcəsi

[*] Bəzən bunlar *stoxastik* adlandırılır.

§3-də kəmiyyətcə qiymətləndiriləcəkdir. Qeyd etmək maraqlıdır ki, bu sualla əlaqədar hər hansı bir qeyri-müəyyənliyi tamamilə istisna etmək olmaz. ν və p-nin yaxınlığı haqqında müddəa, sualın incələnməsində göründüyü kimi, yalnız ehtimali xarakter daşıyır.

§ 2. Elementar ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomları və əsas düsturları

Statistik qanunauyğunların böyük rolunun olduğu heç bir şübhə doğurmadığından, qarşıya bunların öyrənilməsi üçün metodlar haqqında məsələ çıxır. İlk əvvəl onların sırf empirik eksperimental mümkünlüyü haqqında fikir yaranır. Ehtimali qanunauyğunluq kütləvi proseslərdə aşkar olunduğundan, onun aşkar olunması üçün kütləvi eksperiment aparılması zəruridir.

Belə təsviretmə yalnız qismən doğrudur. Bəzi ehtimali qanunauyğunluqları eksperimental olaraq müəyyənləşdirib, bəzi ümumi fərziyyələr vasitəsilə məntiqi yolla və ya hesablama yolu ilə bunlardan yeni ehtimali qanunauyğunluqlar almaq olar. Bunu nə cür etmək üsulunu göstərməzdən əvvəl, biz ehtimal nəzəriyyəsinin bəzi əsas tərifləri və düsturlarını verməliyik.

Ehtimalın $\nu = \frac{m}{n}$ tezliyinin normal qiyməti kimi təsəvvüründən, $0 \le m \le n$ və $0 \le \nu \le 1$ olduqda, ixtiyari A hadisəsinin ehtimalı $\mathbf{P}(A)$-nın sıfır və vahid* arasında qiymət aldığını hesab etmək təbiidir, yəni

$$0 \le \mathbf{P}(A) \le 1 . \qquad (1)$$

S şərtlər kompleksi yerinə yetdikdə, hər ikisi eyni zamanda baş verməyən hadisələrə *uyuşmayan* hadisələr deyilir. Məs., oyun zərinin atılmasında cüt xalın düşməsi hadisəsi və üç xalının düşməsi uyuşmayan hadisələrdir. A_1 və A_2 hadisələrindən heç olmasa biri baş verdikdə baş verən A hadisəsinə, A_1 və A_2 hadisələrinin *birləşməsi* deyilir. Məs., oyun zərinin atılmasında A_1, – 1 və ya 2 xalının, A_2, – 2 və ya 3 xalının düşməsi hadisələri olarsa, A, – 1, 2 və ya 3 xalının düşməsi hadisəsidir. Aydındır ki, iki uyuşmayan A_1 və A_2 hadisələrinin və onların birləşməsi $A = A_1 \cup A_2$ hadisələrinin baş

* $\mathbf{P}(A|S)$ işarələnməsini qısalıq naminə $\mathbf{P}(A)$ ilə işarə edəcəyik.

vermə sayları, uyğun olaraq, m_1, m_2 və m olarsa, $m = m_1 + m_2$ bərabərliyi doğrudur, bu isə uyğun tezliklər üçün $\nu = \nu_1 + \nu_2$ bərabərliyini verir.

Bu – A_1 və A_2 uyuşmayan hadisələr, $A_1 \cup A_2$ onların birləşməsi olduqda aşağıdakı, ehtimalların toplanması aksiomunun:

$$\mathbf{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) \qquad (2)$$

bərabərliyi ilə ifadəsinin təbiiliyinə gətirir.

Daha sonra U yəqin hadisəsi üçün

$$\mathbf{P}(U) = 1 \qquad (3)$$

qəbul etmək təbiidir.

Bütün riyazi ehtimal nəzəriyyəsi (1), (2) və (3) tipli sadə aksiomlar üzərində qurulur. Sırf riyazi nöqteyi-nəzərdən, *ehtimal* – «hadisənin» elə ədədi funksiyasıdır ki, o, bir sıra aksiomatik qeyd olunmuş xassələrə malikdir. Əgər hadisə anlayışının, hadisələrin birləşməsi və aşağıda tərifi verilən hadisələrin *birgə baş verməsi* (rus. *совмещение событий*) kimi anlayışların özlərinin aksiomatizasiyasında israr olunmazsa, ehtimalın (1), (2) və (3) düsturları ilə ifadə olunan xassələri elementar ehtimal nəzəriyyəsi adlandırılan nəzəriyyənin qurulması üçün yetərli əsasdır. Bu nəzəriyyəni öyrənmək istəyənlər üçün «hadisə» və «ehtimal» terminlərinin anlaşılmasına inamla yanaşmaq faydalıdır, lakin onu bilmək də faydalıdır ki, bu anlayışların tam mənası ilə formalaşması çətin olduğundan onların real mənası ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomlaşdırılmış təmiz riyazi şərhinin tam formal və aydın surətdə anlaşılmasına təsir etmir.

İxtiyari sayda baxılan $A_1, A_2, ..., A_s$ hadisələrindən heç olmazsa biri baş verdikdə baş verən hadisəni bu hadisələrin birləşməsi adlandıracağıq. Onda ixtiyari sayda cüt-cüt uyuşmayan $A_1, A_2, ..., A_s$ hadisələri və onların birləşməsi A hadisəsi üçün toplanma aksiomundan

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \ ... \ + \mathbf{P}(A_s)$$

bərabərliyi alınır (ehtimalların toplanma teoremi adlandırılan).

Əgər bu hadisələrin birləşməsi yəqin hadisədirsə (yəni S şərtlər kompleksi hər dəfə yerinə yetdikdə A_k hadisələrindən biri hökmən baş verirsə), onda

$$\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \ ... \ + \mathbf{P}(A_s) = 1.$$

Bu halda $A_1, A_2, \ldots, A_s$ hadisələr sistemi – hadisələrin tam sistemi adlanır.

İndi, ümumiyyətlə, iki – uyuşan A və B [*] hadisələrinə baxaq. Əgər C hadisəsi A və B hadisələrinin hər ikisi baş verdikdə baş verən hadisədirsə, C hadisəsini A və B hadisələrinin eyni zamanda baş vermə (b i r g ə l i k, k ə s i ş m ə s i H. M.) hadisəsi adlandıracağıq ($C = AB$, $= A \cap B$; H. M.).

Məs., A – oyun zəri atıldıqda düşən xallar sayının cüt olması hadisəsi, B – düşən xalın 3-ə bölünən olması hadisəsi olarsa, onda C hadisəsi düşən xalın altıya bərabər olmasıdır.

Təkrarlanan n sayda (n – böyük fərz olunur) sınaqlarda A hadisəsinin m dəfə, B hadisəsinin l dəfə, lakin k dəfə A hadisəsi ilə birgə baş verdiyi fərz olunur. k/m nisbətini təbii olaraq, B hadisəsinin A şərtinə nəzərən şərti tezliyi adlandırmaq olar. $\frac{k}{m}, \frac{m}{n}$ və $\frac{k}{n}$ tezliklərini bir-birilə əlaqələndirən

$$\frac{k}{m} = \frac{k}{n} : \frac{m}{n}$$

düsturuna aşağıdakı tərifi vermək təbiidir.

A şərtində B hadisəsinin *şərti ehtimalı* – $\mathbf{P}(B \mid A)$, aşağıdakı nisbətə deyilir:

$$\mathbf{P}(B \mid A) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Əlbəttə, burada $\mathbf{P}(A) \neq 0$ olduğu fərz olunur.

Burada, əgər A və B hadisələri mahiyyətcə bir-birilə əlaqəli deyildirlərsə, təbii olaraq, belə fərz etmək olar ki, A hadisəsi baş verərsə, ümumiyyətlə, bütün sınaqlara baxıldığı halda B hadisəsinin nə çox, nə az dəfə baş verməsinin əhəmiyyəti yoxdur, yəni təqribən $\frac{k}{m} \sim \frac{l}{n}$ və ya

$$\frac{k}{n} = \frac{k}{m} \cdot \frac{m}{n} \sim \frac{l}{n} \cdot \frac{m}{n}.$$

---

[*] analoji olaraq ixtiyari sayda $A_1, A_2, \ldots, A_s$ hadisələrinin kəsişməsi – C hadisəsi, bütün bu hadisələr baş verdikdə baş verən hadisədir.

Sonuncu təqribi bərabərlikdə $\frac{m}{n} = \nu_A$, – A hadisəsinin tezliyidir, $\frac{l}{n} = \nu_B$, – B hadisəsinin tezliyidir, nəhayət, $\frac{k}{n} = \nu_{AB}$, – A və B hadisələrinin b i r g ə l i k (kəsişməsi) hadisəsinin tezliyidir.

Biz görürük ki, bu tezliklər

$$\nu_{AB} \sim \nu_A \cdot \nu_B$$

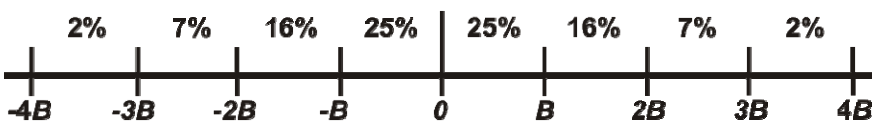
münasibəti ilə əlaqəlidirlər. Buna görə də, A, B və AB hadisələrinin ehtimalları üçün uyğun olaraq,

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \tag{4}$$

dəqiq bərabərliyini götürmək təbiidir.

(4) bərabərliyi A və B hadisələrinin *asılı olmamazlığının* tərifinin ifadəsidir.

İxtiyari sayda hadisələrin asılı olmamazlığının tərifini analoji vermək olar. Bundan başqa ixtiyari sayda sınaqların asılı olmamazlığının tərifini də vermək olar (bu kobud deyimdə belə anlaşılmalıdır ki, sınaqların bir hissəsinin bu və ya digər nəticəsi, digər sınaqların nəticəsinə heç bir tərzdə təsir etmir)*.



Şəkil 2

Asılı olmamazlıq anlayışının real mənasının müzakirəsinə biz §4-də bir daha qayıdacağıq.

İndi isə n sayda asılı olmayan sınaqlardan hər birində p ehtimalı ilə baş verən hər hansı A hadisəsinin k dəfə baş verməsi ehtimalı P_k-nı

* Dəqiq olaraq, *sınaqların asılı olmamazlığı* aşağıdakı kimi anlaşılır. n sayda sınağı hər hansı cür iki qrupa bölək: A – birinci qrupun bütün sınaqlarının əvvəlcədən verilmiş hər hansı nəticələrlə ifadə olunduğu hadisə, B – ikinci qrupun hər hansı əvvəlcədən verilmiş nəticələrlə ifadə olunduğu hadisə olsun. Əgər ixtiyari bölgüdə və nəticələrin ixtiyari cür verildiyi halında A və B hadisələri (4) mənasında asılı olmazlarsa, sınaqlar *asılı olmayan* (küllüyyatca) sınaqlar adlanır.

hesablayaq. $\overline{A}$ ilə A hadisəsi baş verməzdikdə baş verən hadisəni işarə edək. Aydındır ki,

$$\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A) = 1 - p\,.$$

Sınaqların asılı olmamazlığının tərifinə əsasən A hadisəsinin k dəfə baş verməsindən və $n-k$ dəfə A hadisəsinini baş verməməsindən təşkil olunan hər hansı müəyyən ardıcıllığın ehtimalı

$$p^k (1-p)^{n-k} \tag{5}$$

hasilinə bərabərdir.

Məs., $n=5$, $k=2$ olduqda nəticələrin $A\overline{A}A\overline{A}A$ ardıcıllığının ehtimalı, $-\ p(1-p)\,p(1-p)(1-p)$ olacaqdır.

Toplanma teoreminə əsasən A hadisəsinin k dəfə baş verməsi və $n-k$ dəfə baş verməməsi ehtimalı bütün ardıcıllıqların ehtimallarının cəmi P_k-ya bərabər olacaqdır, yəni (5)-ə əsasən, bütün belə ardıcıllıqlar sayının $p^k(1-p)^{n-k}$ hasilinə bərabər olacaqdır. Belə ardıcıllıqların sayı, aydındır ki, n elementdən k elementli birləşmələrin sayına bərabərdir, çünki k sayda əlverişli nəticə n sayda sınaqlar sırasında, ixtiyari k yerdə ola bilər.

Beləliklə, nəticədə

$$P_k = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}, \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots, n) \tag{6}$$

(binomial paylanma adlandırılan) münasibətini alırıq. Yuxarıda verilmiş tərif və düsturların nə cür tətbiq edildiyini görmək üçün atış nəzəriyyəsinə aid bir misala baxaq.

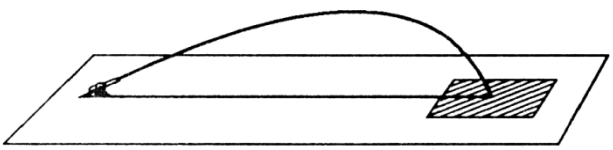
Hədəfin məhvi üçün hədəfə beş dəfə düşmə kifayətdir. Bizi belə bir sual maraqlandırır: 40 atəş nəticəsində zəruri olan beş dəfə düşməyə biz əmin ola bilərikmi? Bu məsələnin sırf empirik həll metodu aşağıdakı kimi ola bilərdi. Hədəfin verilmiş ölçüləri ilə verilən atış məsafəsində hər dəfə 40 atəş açmaq şərtilə çoxlu (məs., 200) atəş açılır və beş dəfədən az olmamaq şərtilə hədəfə düşmə üçün neçə dəfə atəş açılması təyin olunmalıdır. Əgər bu nəticə 200 atəşdən 195-ində alınmışdırsa, onda P ehtimalı təqribən

$$P = \frac{195}{200} = 0{,}975$$

qiymətini alır.

Araşdırmanın baxılan sırf empirik resepti üzrə biz, olduqca xüsusi bir məsələnin həlli üçün 8000 mərmi sərf etməli olardıq. Əlbəttə ki, praktikada belə hərəkət etmirlər. Əvəzində isə hədəfin ölçüləri nəzərə alınmadan verilən atış məsafəsində mərmilərin səpələnməsi araşdırılır. Əslində isə, məsafənin uzaqlığı üzrə yayınmalar və orta düşmə nöqtəsindən yan tərəflərə yayınmalar, tezlik anlamında təsadüf olunan müxtəlif ölçülü yayınmalır, şəkil 2-də təsvir olunan qanununa tabedirlər. Burada B hərfi ilə ehtimal yayınması kimi adlandırılmış yayınma işarə olunmuşdur. Ümumiyyətlə isə, ehtimal olunan yayınma, məsafə uzaqlığı üzrə yayınmalar və yan tərəflərə yayınmalar müxtəlifdir və atış məsafəsinin artırılması ilə o da artır. Hər bir silah və mərmi növü üçün müxtəlif uzaqlıq məsafələri üzrə ehtimal olunan yayınmalar artilleriya poliqonlarında sınaq atışları vasitəsilə empirik olaraq tapılır. Bundan sonra bu tip mümkün ola bilən, yuxarıda qoyulduğu kimi qoyulan xüsusi məsələlərin həlli hesablanma yolu ilə aparılır.

Sadəlik üçün fərz edək ki, bizi maraqlandıran hədəf – bir tərəfi atəş xətti boyu istiqamətlənmiş, uzunluğu isə uzaqlıq üzrə ehtimal olunan yayınmanın iki mislinə bərabər, digər tərəfi isə atəş xəttinə perpendikulyar, uzunluğu yan tərəflərə ehtimal olunan yayınmanın iki mislinə bərabər, düzbucaqlı şəklindədir. Daha sonra fərz edək ki, hədəf yaxşı atəşə tutulmuşdur və mərmilərin orta uçuş trayektoriyası hədəfin mərkəzindən keçir (şəkil 3).



Şəkil 3

Bir də fərz edək ki, yan tərəflərə yayınma və uzaqlıq üzrə yayınma birbirindən asılı deyildirlər[*]. Onda verilmiş mərminin hədəfə düşməsi üçün – onun uzaqlıq və yan tərəflərə yayınmalarının uyğun ehtimal olunan yayınmaları aşması zəruri və kafidir. Şəkil 2-yə uyğun olaraq, bu hadisələrdən hər biri, təxminən atılmış mərmilərin 50%-i üçün, yəni $1/2$ ehtimalı ilə müşahidə olunacaqdır. Bu hadisələrin ikisi də birlikdə atılmış mərmilərin 25%-i üçün baş verəcəkdir, yəni ayrıca bir mərminin hədəfə düşməsi ehtimalı –

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

[*] Asılı olmamazlılığın bu fərziyyəsi sınaqla təsdiq olunur.

ayrıca bir atəşdə hədəfə düşməməsi ehtimalı –

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

olacaqdır.

Hər biri ayrı-ayrı atəşlərdə hədəfə düşmələr asılı olmayan hadisələr olduğundan (6) binomial düsturunu tətbiq edərək, 40 atəşdə yalnız k dəfə hədəfə düşmə ehtimalının

$$P_k = C_{40}^k \, p^k \, q^{40-k} = \frac{40 \cdot 39 \cdot \ldots \cdot (39-k)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{40-k}$$

olduğunu alırıq. Onda bizi maraqlandıran, hədəfə beş dəfədən az olmamaq şərtilə düşmə hadisəsinin ehtimalı – $P = \sum_{k=5}^{40} P_k$ düsturu ilə ifadə olunacaqdır. Lakin bu ehtimalı $P = 1 - Q$, $Q = \sum_{k=0}^{4} P_k$ düsturu ilə hesablamaq daha münasibdir.

P_k ehtimallarını hesablamaq olur:

$$P_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^{40} \sim 0,00001,$$

$$P_1 = 40 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{39} \cdot \frac{1}{4} \sim 0,00013,$$

$$P_2 = \frac{40 \cdot 39}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{38} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \sim 0,00087,$$

$$P_3 = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{37} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \sim 0,0037,$$

$$P_4 = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{36} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \sim 0,0113,$$

və buradan

$$Q = 0,016, \quad P = 0,984$$

olduğunu alırıq.

P ehtimalı üçün aldığımız qiymət hətta vahidə yaxındır və o, qoyulan məsələnin yerinə yetirilməsini təmin edə biləcək mərmilər sayının təyin olunmasında atış nəzəriyyəsində, adətən, kafi sayılan ehtimaldan da çoxdur. Çox vaxt qoyulmuş məsələnin $0,95$ ehtimalı ilə yerinə yetəcəyini təmin edən mərmilər sayını göstərməyin mümkün olduğu hesab edilir.

Baxılan misal bir qədər sxematik olsa da, ehtimal hesablamalarının mühümlüyünü kifayət qədər inandırıcı nümayiş etdirir. Ehtimal olunan yayınmaların atış məsafəsindən asılılığının sınaqdan asılılığını poliqonda az da olsa, atışlar etməklə (bu kifayət edir) müəyyən etdikdən sonra, biz bəzi, çox da çətin olmayan hesablamaların köməyilə ən müxtəlif suallara cavab ala bilirik. Çoxsaylı təsadüfi faktorların birgə təsiri də digər bütün oblastlarda da statistik qanunauyğunluqlara gətirir. Kütləvi müşahidələrin bilavasitə işlənilməsindən sonra bu statistik qanunauyğunluqlardan yalnız ən sadələri aşkar olunur, yəni yalnız ilkin ehtimallar tapılır. Sonra ehtimal nəzəriyyəsinin qanunlarının köməyilə, bu ilkin ehtimallar əsasında daha mürəkkəb hadisələrin ehtimalları hesablanılır və bu hesablamalara əsaslanaraq, bizi maraqlandıran mürəkkəb təsadüfi hadisələri idarə edən statistik qanunauyğunluqlar haqqında nəticələr çıxarılır.

Bəzən ilkin ehtimallar olduqca inandırıcı simmetriya mülahizələrindən təyin oluna bilindiyindən, kütləvi statistik material toplamağa ehtiyac duyulmur. Məs., oyun zəri, yəni bircins maddədən hazırlanmış kub, olduqca yüksək hündürlükdən atıldıqda öz üzlərindən hər bir üzü üstə eyni – $1/6$ ehtimalla düşməsi haqqında ənənəvi nəticəyə, bu nəticənin doğruluğunu sübut etmək üçün kifayət edəcək qədər müşahidə materialının toplanılmasından xeyli əvvəl gəlinmişdir. Bu növ sistematik sınaqlar, ehtimal nəzəriyyəsi bir elm kimi formalaşdıqdan sonra, əsas etibarilə, ehtimal nəzəriyyəsi üzrə dərsliklərin müəllifləri tərəfindən XVIII–XX əsrlərdə aparılmışdı. Bu sınaqların nəticəsi qaneedici olsa da, belə fəaliyyətin yeni analoji hallar üçün genişləndirilməsi çətin ki, maraq doğursun. Məs., hələ ki, bizə məlum olduğuna görə, heç bir kəs tərəfindən bircins materialdan hazırlanmış düzgün oniki üzlünün atılması ilə bağlı olduqca geniş sınaqlar aparılmamışdır. Lakin əgər, məs., $12\,000$ belə eksperiment aparılsaydı, şübhəsiz ki, onikiüzlü hər bir üzü üstə təxminən min halda düşə bilərdi.

Simmetriya və ya bircinslik baxımından ilkin ehtimalların təyin olunması bir çox ciddi elmi məsələlərdə böyük rola malikdir, məs., heç bir qaydaya tabe olmadan (xaotik; H. M.) hərəkət edən qaz molekullarının və ya qalaktika ulduzlarının toqquşması və ya bir-birinə yaxınlaşması kimi bütün məsələlərdə belə ehtimalların təyin olunması kimi.

Əlbəttə ki, belə daha incə hallarda heç olmasa şərtləşdirilmiş razılaşmalar dolayısı ilə də olsa, bunlardan alınmış nəticələrin sınaqla müqayisəsi yolu ilə yoxlanılmalıdır.

§ 3. Böyük ədədlər qanunu və limit teoremləri

Sınaqların «böyük» seriyalarında hadisənin baş verməsi tezliklərinin onun ehtimalına «yaxın» olması haqqında müddəanın kəmiyyətcə dəqiqləşdirilməsinə ehtiyacın duyulması tamamilə təbiidir. Bu məsələnin məlum incəliyi aydın təsəvvür olunmalıdır. Ehtimal nəzəriyyəsi üçün ən tipik hallarda belə olur ki, olduqca uzun sınaqlar seriyalarında tezliyin hər iki «sərhəd» qiymətləri nəzəri olaraq mümkün olur, yəni

$$\frac{\mu}{n} = \frac{n}{n} = 1 \quad \text{və} \quad \frac{\mu}{n} = \frac{0}{n} = 0$$

qiymətləri. Buna görə də, sınaqlar sayı n-in qiymətindən asılı olmayaraq, məs., tam yəqinliklə hökm etmək olmaz ki,

$$\left| \frac{\mu}{n} - p \right| < \frac{1}{10}$$

bərabərsizliyi ödəniləcəkdir.

Məs., A – oyun zəri atıldıqda altı xalının düşməsi hadisəsidirsə, onda sınaqları n dəfə təkrar etdikdə, $\left(\frac{1}{6}\right)^n > 0$ ehtimalı ilə altı xalı həmişə alınacaqdır, yəni $\left(\frac{1}{6}\right)^n$ ehtimalı ilə altı xalının düşməsi tezliyinin *vahidə* bərabər qiyməti alınacaqdır, $\left(1-\frac{1}{6}\right)^n > 0$ ehtimalı ilə altı xalı heç bir dəfə də düşməyəcəkdir, yəni altı xalının düşməsi tezliyi *sıfra* bərabər olacaqdır.

Belə tip bütün məsələlərdə tezlik və ehtimal arasında yaxınlığın qeyri-trivial qiyməti tam yəqinliklə alınmır, bu, yalnız vahiddən kiçik ehtimalla

alınır. Məs., isbat etmək olur ki, asılı olmayan sınaqlarda* baxılan hadisənin ehtimalı sabit p ədədinə bərabərdirsə, onda $n = 10\ 000$, p isə ixtiyari olarsa $(0 < p < 1)$, $\frac{\mu}{n}$ tezliyi üçün

$$\left| \frac{\mu}{n} - p \right| < 0,02 \tag{7}$$

bərabərsizliyi

$$P > 0,9999 \tag{8}$$

ehtimalı ilə ödəniləcəkdir.

Burada biz ilk əvvəl onu qeyd etmək istəyirik ki, bu tərzdə verilmiş şərhdə $\frac{\mu}{n}$ tezliyinin p ehtimalına yaxınlığı yeni daxil olunmuş P ehtimalı ilə bağlıdır. (8) qiymətləndirilməsinin real mənası belədir: n sınaqdan ibarət N sayda seriyalar apardıqda (7) bərabərsizliyinin ödənildiyi seriyaların sayı M -i hesabladıqda, N -in olduqca böyük qiymətlərində

$$\frac{M}{N} \approx P < 0,9999 \tag{9}$$

münasibəti təqribən ödəniləcəkdir. Lakin biz (9) münasibətini $\frac{M}{N}$ -in P -yə yaxınlıq dərəcəsi cəhətdən, həm də etibarlılıq cəhətdən dəqiqləşdirmək istəsək, bu etibarlılıq baxımdan bu yaxınlığın olacağını hökm etmək olarsa, onda $\frac{\mu}{n}$ və p -nin yaxınlığına tətbiq etdiklərimizə analoji surətdə davranmalıyıq. Lazım gələrsə, bu mülahizənin qeyri-məhdud sayda təkrar etmək olar, lakin tamamilə aydındır ki, bu bizə son mərhələdə ehtimallara bu terminin primitiv kobud mənasında müraciət etmək zərurətindən tamamilə xilas olunmağa imkan yaradacaqdır.

Bu növ çətinliklərin ehtimal nəzəriyyəsinə xas olan bir xüsusiyyət olduğunu düşünmək olmaz. Real təzahürlərin riyazi öyrənilməsində biz onları həmişə sxemləşdiririk. Gerçək təzahürlərin nəzəri sxemdən yayınmalarını öz növbəsində riyazi cəhətdən öyrənmək olar. Lakin buna görə, yayınmaların özləri də hər hansı surətdə sxemləşdirilməlidir və bu sxemdən isə

* s. 151-dəki haşiyəyə bax, (8)-in isbatı 162-də verilir.

ondan asılı olmayan yayınmaların formal riyazi analizi olunmadan istifadə etmək olar.

Yeri gəlmişkən qeyd edək ki, n sınaqdan ibarət bir seriyaya

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<0,02\right\}>0,9999 \qquad (10)$$

qiymətləndirilməsini* real olaraq tətbiq etdikdə, biz eyni zamanda simmetriyanın hər hansı mülahizələrinə istinad edirik: (10) bərabərsizliyindən görünür ki, seriyaların böyük N qiymətlərində (7) münasibəti 99,99%-dən az olmayan hallarda ödəniləcəkdir; təbii olaraq, böyük əminliklə gözləmək olar ki, məsələn, (7) bərabərsizliyi n sınaqdan ibarət bizi maraqlandıran müəyyən bir seriyada ödəniləcəkdir, bu şərtlə ki, bu seriyanın digər seriyalar sırasında heç bir xüsusilə seçilən bir vəziyyəti olduğuna bizim heç bir əsasımız olmazsa.

Müxtəlif praktiki məsələlərdə nəzərə alınmayan ehtimallar müxtəlifdir. Yuxarıda qeyd olunmuşdu ki, mərmilərin nə qədər istifadə edilməsinin bu qoyulan məsələnin həllinə zəmanət verən hesablamalarında qoyulan məsələnin 0,95 ehtimalı ilə həllindəki mərmilər sayının norması ilə kifayətlənmək olur, yəni 0,05-i aşmayan ehtimallar nəzərə alınmır. Bu onunla izah olunur ki, yalnız 0,01-dən kiçik olan ehtimallar nəzərə alınmadıqda, aparılan hesablamalar bizi mərmilər sayının normasının böyük olmasına gətirərdi, yəni praktik olaraq, bir çox hallarda bu məsələnin həlli üçün verilmiş zaman ərzində onun həllinin qeyri-mümkünlüyü və ya mərmi ehtiyatının faktiki olaraq, istifadə oluna bilinəcəyi nəticəsinə gətirmiş olardı.

Bəzən, hətta eyni araşdırmalarda belə, 0,05-dən kiçik ehtimalların nəzərə alınmaması ilə hesablamalara əsaslanan statistik qaydalarla kifayətlənilir. Lakin bunu yalnız daha geniş material toplamaq çətin olduğu hallarda etmək olur. Belə qaydalara bir misal kimi aşağıdakı məsələyə baxaq. Fərz edək ki, hər hansı bir xəstəliyin müalicəsində müəyyən şərtlərlə istifadə olunan dərman 50% hallarda, yəni 0,5 ehtimalı ilə müsbət nəticə verir. Yeni dərman təklif olunur və onun köhnədən üstünlüyünü yoxlamaq üçün köhnə dərmanın effektivliyi müəyyən olunmuş 50% xəstələrdən qərəzsiz seçilmiş on nəfər üzərində onu yoxlamaq planlaşdırılır. Əgər on haldan səkkizində bu yeni dərman müsbət nəticə verərsə, onda onun üstün olduğu isbat olunmuş sayılır. Asanlıqla hesablamaq olar ki, belə qərar 0,05 tərtibdən ehtimalla səhv nəticə (yəni yeni dərmanın köhnəsi ilə eyni güclü və ya hətta

* (7) bərabərsizliyinin ehtimalı üçün (8) qiymətləndirilməsi belə yazılır.

ondan da pis olmasına baxmayaraq, onun üstün olduğu haqqında nəticə) almaq ehtimalının nəzərə alınmaması ilə əlaqədardır. Əslinə qaldıqda, on sınaqdan hər birində müsbət nəticənin ehtimalı p-yə bərabərdirsə, on sınaqda 10, 9 və 8 müsbət nəticə alınması ehtimalları, uyğun olaraq,

$$P_{10} = p^{10},$$

$$P_9 = 10p^9(1-p),$$

$$P_8 = 45p^8(1-p)^2$$

olacaqdır. $p = \frac{1}{2}$ halında bu ehtimalları cəmləyərək,

$$P = P_{10} + P_9 + P_8 = \frac{56}{1024} \sim 0,05$$

olduğunu alırıq. Beləliklə, biz yeni dərmanın köhnəsilə, doğrudan da, eynigüclü olduğunu fərz edərək, səhv qərar çıxarmaqla, yəni yeni dərmanın köhnəsindən, $0,05$ tərtibdən ehtimalla yaxşı olduğu haqqında qərar verməklə risk edirik. Bu ehtimalı sınaqlar sayı $(n=10)$ n-i artırmadan təqribən 0,01 tərtib ehtimala gətirmək üçün müəyyən olunmalıydı ki, yeni dərmanın üstünlüyü yalnız o halda sübut olunmuş sayılır ki, onun tərtibi on haldan doqquzunda müsbət nəticə vermiş olsun. Əgər bu tələb yeni dərmanın tərəfdarlarına olduqca sərt görünərsə, onda sınaqlar sayı n, 10-dan olduqca böyük götürülməlidir. Əgər, məs., $n=100$ olduqda yeni dərmanın üstünlüyü $\mu > 65$ olduğu hal üçün isbat olunmuş hesab edilərsə, onda səhv ehtimalı yalnız $P \approx 0,0015$ olacaqdır.

Əgər elmi tədqiqatlarda 0,05 ehtimalında norma açıqdan-açığa kifayət deyilsə, onda astronomik müşahidələr üzərində işlənilmələr qəbilindən olan akademik və ətraflı araşdırmalarda da 0,001 və ya 0,003 tərtib səhv ehtimalları da əksər hallarda nəzərə alınmır. Buna baxmayaraq, ehtimal qanunauyğunluqlarının tərtibinə əsasən elmi nəticələr, bəzən də olduqca böyük yəqinliyə (yəni olduqca kiçik ehtimallar nəzərə alınmadan qurulmuş) malik olurlar. Bu haqda bir qədər sonra.

Baxılan misallarda biz artıq (6) binomial düsturunun xüsusi hallarını, yəni hər bir sınaqda p ehtimalı ilə müsbət nəticə ola bilən, n sayda

asılı olmayan sınaqlarda yalnız m sayda müsbət nəticə hadisəsinin ehtimalı P_m üçün dəfələrlə

$$P_m = C_n^m p^m q^{n-m}$$

düsturunu tətbiq etmişik. Bu düsturun köməyilə bu paraqrafın əvvəlində

$$P = \mathbf{P}\left\{ \left| \frac{\mu}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} \tag{11}$$

ehtimalı haqında qoyulmuş suala qayıdaq, burada μ – müsbət nəticələrin faktiki sayıdır*. Aydındır ki, bu ehtimalı

$$\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \tag{12}$$

bərabərsizliyini ödəyən P_m ehtimallarının cəmi şəklində yazmaq olar, yəni

$$P = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_m \tag{13}$$

cəmi şəklində; burada m_1, – (12) bərabərsizliyini ödəyən m-lərdən ən kiçiyi, m_2 – belə m-lərdən ən böyüyüdür.

(13) düsturunu n-in çox böyük qiymətlərində bilavasitə istifadə etmək çox çətindir. $p = 1/2$ halı üçün Muavrın, ixtiyari p üçün ($0 < p < 1$) Laplasın kəşf etdikləri asimptotik düsturlar – P_m ehtimallarını olduqca sadəliklə tapmağa və n-in böyük qiymətlərində asimptotikanı öyrənməyə imkan yaratdı. Bu düstur aşağıdakı təqribi bərabərliklə ifadə olunur:

$$P_m \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n p(1-p)}} \; e^{-\frac{(m-np)^2}{2np(1-p)}}. \tag{14}$$

* μ, – $m = 0, 1, ..., n$ qiymətlərini P_m ehtimalları ilə alır, yəni $P\{\mu = m\} = P_m$.

Əgər p sıfra və ya vahidə çox yaxın olmazsa, onda 100 tərtibdən n qiymətlərində bu düstür artıq kifayət qədər dəqiq olur. Əgər

$$t = \frac{m - n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}} \tag{15}$$

işarələməsini götürsək, (14) düsturu aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$P \sim \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,n\,p\,(1-p)}}\; e^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{16}$$

(13) və (16)-dan (11) ehtimalı üçün aşağıdakı təqribi ifadəni almaq olar:

$$P \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^{T} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = F(T), \tag{17}$$

burada

$$T = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{p\,(1-p)}}. \tag{18}$$

(17)-nin sağ və sol tərəflərinin fərqi p-nin sıfır və vahiddən fərqli sabit qiymətlərində $n \to \infty$ olduqda, ε-a görə sıfra müntəzəm yığılır. $F(t)$ funksiyası üçün ətraflı cədvəllər tərtib olunmuşdur. Bunlardan bəziləri aşağıda verilir:

T	1	2	3	4
F	0, 68269	0, 95450	0, 99730	0, 99993

$T \to \infty$ olduqda $F(T)$ funksiyasının qiyməti vahidə yaxınlaşır.

(17) düsturunun köməyilə

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right|\right\} < 0,02$$

ehtimallarını $n = 10\ 000$ olduqda qiymətləndirək.

$T = \dfrac{2}{\sqrt{p(1-p)}}$ olduğundan,

$$P \approx F\left(\frac{2}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$$

olur. $F(T)$ funksiyası T artdıqca monoton artdığından, P-nin p-dən asılı olmayan qiymətləndirilməsində T-nin ən kiçik mümkün qiymətini (müxtəlif p qiymətlərində) götürmək lazımdır. T belə ən kiçik qiymətini $p = 1/2$ olduqda alır və o, 4-ə bərabər olur. Buna görə də, təqribi olaraq,

$$P \geq F(4) = 0,99993. \tag{19}$$

(19) bərabərsizliyində (17) düsturunun təqribilik xüsusiyyətilə yaranan xəta nəzərə alınmamışdır. Bu xəta ilə bağlı qiymətləndirmə apararaq, hər hansı $P > 0,9999$ olduğunu müəyyən etmək mümkündür.

(17) düstunun tətbiqi ilə baxılan misalla əlaqədar olaraq, qeyd etmək lazımdır ki, ehtimal nəzəriyyəsi üzrə elmi əsərlərdə (17) düsturunun qalıq həddi verilən qiymətləndirilmələr üçün uzun müddət qənaətbəxş hesab olunmurdu. Buna görə də, (17) və ona oxşar düsturların n-in çox da böyük olmayan və ya p ehtimallarının 0 və ya 1-ə çox yaxın qiymətlərində hesablamalarda tətbiqində (xüsusilə, böyük qiymətləri alan ehtimallar olduğu bir çox hallarda), çox vaxt mümkün ola bilən xətanın yəqinliklə müəyyən edilmiş qiymətləndirilmələrinə deyil, yalnız məhdud sayda misallar üçün belə növ nəticələrin yoxlanılması təcrübəsinə əsaslanırdılar. Bundan başqa, daha ətraflı araşdırmalar göstərdi ki, yuxarıda verilmiş asimptotik düsturların praktiki sayılan bir çox mühüm hallarda qalıq həddinin yalnız qiymətləndirilməsinə deyil, eyni zamanda dəqiqləşdirilməsinə ehtiyac vardır (belə ki, qalıq həddi dəqiqləşdirilmədikdə çox böyük olur). Hər iki istiqamətdə ən tam nəticələr S. N. Bernşteynə aiddir.

(11), (17) və (18) münasibətlərini

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < t\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right\} \sim F(t) \tag{20}$$

münasibəti şəklində yazmaq olar. t-nin olduqca böyük qiymətlərində (20) düsturunun sağ tərəfində n yoxdur və o, vahidə, yəni tam yəqinliyə uyğun olan ehtimal qiymətinə olduqca yaxındır. Beləliklə, bizə aydın oldu ki,

bir qayda olaraq, $\frac{\mu}{n}$ *tezliyinin* p*-dən yayınması* $\frac{1}{\sqrt{n}}$ *tərtibdəndir.* Ehtimal qanunauyğunluqlarının müşahidələr sayının kvadratik kökünə belə mütənasib təsiri bir çox digər məsələlərdə də müşahidə olunur. Bəzən hətta bir qədər sadələşdirilmiş qaydada, populyarlaşdırma məqsədilə, «n-in kvadratik kökü qanunu» haqqında ehtimal nəzəriyyəsinin əsas qanunu kimi də söylənilir. Bu fikir böyük rus riyaziyyatçısı P. L. Çebışevin müxtəlif ehtimal məsələlərini cəmlər və «təsadüfi kəmiyyətlərin» ədədi ortaları üçün «riyazi gözləmələrin» və «dispersiyaların» hesablanmalarına sistematik gətirilmə metodunun istifadə olunmasını daxil etdikdən sonra tamamilə aydın oldu.

Verilmiş S şərtlərində müəyyən ehtimallarla müxtəlif qiymətlər alan kəmiyyətə *təsadüfi kəmiyyət* deyilir. Bizim üçün yalnız sonlu sayda müxtəif qiymətlər ala bilən təsadüfi kəmiyyətlərə baxmaq kifayətdir. Belə ξ təsadüfi kəmiyyətinin, ehtimal paylanmasını (belə deyilən kimi) göstərmək üçün onun mümkün ola bilən $x_1, x_2, ..., x_r$ qiymətlərini və

$$P_s = \mathbf{P}\{\xi = x_s\}$$

ehtimallarını göstərmək kifayətdir. ξ kəmiyyətinin bütün müxtəlif mümkün ola bilən qiymətləri üzrə bu ehtimalların cəmi həmişə vahidə bərabərdir:

$$\sum_{s=1}^{r} P_s = 1.$$

Təsadüfi kəmiyyətə misal kimi n sınaqda müsbət nəticələr sayı μ-nü (yuxarıda şərh olunmuş) göstərmək olar.

ξ təsadüfi kəmiyyətinin *riyazi gözləməsi* –

$$\mathbf{M}(\xi) = \sum_{s=1}^{r} P_s\, x_s$$

ifadəsinə, ξ kəmiyyətinin *dispersiyası*, – $\xi - \mathbf{M}(\xi)$ yayınmasının kvadratının riyazi gözləməsinə, yəni

$$\mathbf{D}(\xi) = \sum_{s=1}^{r} P_s\,(x_s - \mathbf{M}(\xi))^2$$

ifadəsinə deyilir. Dispersiyanın kvadrat kökünə –

$$\sigma_\xi = \sqrt{\mathbf{D}(\xi)}$$

ifadəsinə təsadüfi kəmiyyətin *kvadratik orta yayınması* deyilir.

Dispersiya və kvadratik orta yayınmaların ən sadə tətbiqləri aşağıdakı məhşur Çebışev bərabərsizliyinə əsaslanır:

$$\mathbf{P}\{\left|\xi - \mathbf{M}(\xi)\right| \le t\,\sigma_\xi\} \ge 1 - \frac{1}{t^2}. \qquad (21)$$

Bu bərabərsizlikdən görünür ki, ξ-nin $\mathbf{M}(\xi)$ riyazi gözləməsindən yayınmalarından σ_ξ-ni olduqca aşa bilən yayınması nadir hallarda ola bilər.

Təsadüfi kəmiyyətlərin

$$\xi = \xi^{(1)} + \xi^{(2)} + ... + \xi^{(n)}$$

cəmlərini başqa şəklə saldıqda, onların riyazi gözləmələri üçün

$$\mathbf{M}(\xi) = \mathbf{M}(\xi^{(1)}) + \mathbf{M}(\xi^{(2)}) + ... + \mathbf{M}(\xi^{(n)}) \qquad (22)$$

bərabərliyi həmişə doğrudur. Dispersiyalar üçün də analoji bərabərlik yalnız bəzi məhdudiyyətlərlə doğrudur, yəni

$$\mathbf{D}(\xi) = \mathbf{D}(\xi^{(1)}) + \mathbf{D}(\xi^{(2)}) + ... + \mathbf{D}(\xi^{(n)}). \qquad (23)$$

(23) bərabərliyinin ödənilməsi üçün kifayətdir ki, müxtəlif nömrəli $\xi^{(i)}$ və $\xi^{(j)}$ kəmiyyətləri öz aralarında «korrelyar» olmasınlar, yəni $i \ne j$ qiymətlərində aşağıdakı bərabərlik ödənilsin*:

---

* $\xi^{(i)}$ və $\xi^{(j)}$ kəmiyyətləri arasında *korrelyasiya əmsalı* aşağıdakı ifadəyə deyilir:

$$R = \frac{\mathbf{M}\{((\xi^{(i)} - \mathbf{M}(\xi^{(i)}))((\xi^{(j)} - \mathbf{M}(\xi^{(j)}))\}}{\sigma_\xi^{(i)}\,\sigma_\xi^{(j)}}.$$

Əgər $\sigma_\xi^{(i)} > 0$ və $\sigma_\xi^{(j)} > 0$ olarsa, (24) şərti $R = 0$ olması ilə eynigüclüdür.

Korrelyasiya əmsalı R təsadüfi kəmiyyətlər arasındakı asılılığı xarakterizə edir. Həmişə $|R| \le 1$; $R = \pm 1$ yalnız $\eta = a\xi + b$ $(a \ne 0)$ xətti asılılığı halında olur. Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üçün $R = 0$.

$$\mathbf{M}\left((\xi^{(i)} - \mathbf{M}(\xi^{(i)}))\,((\xi^{(j)} - \mathbf{M}(\xi^{(j)})\right) = 0. \qquad (24)$$

Əgər $\xi^{(i)}$ və $\xi^{(j)}$ asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər* olarsa, (24) bərabərliyi həmişə doğrudur. Beləliklə, qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üçün (23) bərabərliyi həmişə ödənilir.

$$\xi = \frac{1}{n}\,(\xi^{(1)} + \xi^{(2)} + \ldots + \xi^{(n)})$$

ədədi ortaları üçün (23)-dən

$$\mathbf{D}\,(\xi) = \frac{1}{n^2}\,(\mathbf{D}(\xi^{(1)}) + \mathbf{D}(\xi^{(2)}) + \ldots + \mathbf{D}(\xi^{(n)})) \qquad (25)$$

bərabərliyi alınır.

İndi isə fərz edək ki, bütün toplananlar üçün dispersiyaların hər biri hər hansı bir sabiti aşmır:

$$\mathbf{D}\xi^{(i)} \le C^2.$$

Onda (25)-dən

$$\mathbf{D}\,(\xi) \le \frac{C^2}{n}$$

və Çebışev bərabərsizliyinə əsasən ixtiyari t üçün

$$\mathbf{P}\left\{\left|\,\xi - \mathbf{M}(\xi)\,\right| \le \frac{t\,C}{\sqrt{n}}\right\} \ge 1 - \frac{1}{t^2}. \qquad (26)$$

(26) bərabərsizliyi Çebışevin verdiyi formada böyük ədədlər qanunu kimi adlandırılan qanunu özündə əks etdirir: əgər $\xi^{(i)}$ – qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə və məhdud dispersiyalara malikdirlərsə, onda n artdıqca, onların ədədi ortası, onların riyazi gözləmələrinin ədədi ortasından getdikcə az yayınacaqdır.

Daha dəqiq, *əgər* ξ *-nin uyğun ədədi ortaları üçün* və *ixtiyari* $\varepsilon > 0$ *qiymətində* $n \to \infty$ olduqda,

---

* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ və $y_1, y_2, \ldots, y_n$ qiymətlərini uyğun olaraq, ala bilən ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin asılı olmamazlığı tərifə görə onu ifadə edir ki, ixtiyari i və j qiymətlərində $A_i = \{\xi = x_i\}$ və $B_j = \{\eta = y_i\}$ hadisələri §2-də verilmiş tərif mənasında asılı deyildirlər.

$$\mathbf{P}\left\{ \left| \xi - \mathbf{M}(\xi) \right| \le \varepsilon \right\} \to 1 \qquad (27)$$

münasibəti ödənilərsə,

$$\xi^{(1)},\ \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(n)}, \dots$$

təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı böyük ədədlər qanununa tabedir, deyilir.

(26) bərabərsizliyindən (27) limit münasibətini almaq üçün

$$t = \varepsilon \frac{\sqrt{n}}{C}$$

əvəzləməsini aparmaq kifayətdir.

(27) limit münasibətinin tətbiqi şərtlərinin, yəni böyük ədədlər qanununun tətbiqi şərtlərinin mümkün olduqca çox genişləndirilməsi məsələsinə A. A. Markov, S. N. Bernşteyn, A. Ya. Xinçin və başqalarının çoxsaylı araşdırmaları həsr olunmuşdur. Bu araşdırmaların prinsipial əhəmiyyəti vardır. Lakin daha mühüm əhəmiyyət kəsb edən araşdırma, $\xi - \mathbf{M}(\xi)$ yayınmasının ehtimal paylanmasının tədqiqidir.

Ehtimal nəzəriyyəsində rus klassik məktəbinin böyük xidməti – olduqca geniş şərtlərlə

$$\mathbf{P}\{t_1\sigma_\xi < \xi - \mathbf{M}(\xi) < t_2\,\sigma_\xi\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2/2}\, dt \qquad (28)$$

bərabərliyinin asimptotik (yəni n qeyri-məhdud artdıqca daha böyük dəqiqliklə) doğru olması faktının müəyyənləşdirilməsidir. Çebışev, toplananlar məhdud və qarşılıqlı asılı olmadığı halda, bu düsturun, demək olar ki, tam isbatını vermişdir. Markov Çebışevin mülahizələrindəki çatışmayan cəhəti tamamlamış və (28) düsturunun tətbiqi şərtlərini genişləndirmişdir. Daha geniş şərtlər A. M. Lyapunov tərəfindən verilmişdir. S. N. Bernşteyn asılı toplananlar cəmi üçün (28) düsturunu xüsusilə hər tərəfli öyrənmişdi.

(28) düsturu olduqca çox sayda xüsusi məsələləri əhatə etmişdir, onu uzun müddət ehtimal nəzəriyyəsinin mərkəzi limit teoremi adlandırırdılar. Ehtimal nəzəriyyəsinin ən yeni inkişaf dövründə onun daha ümumi qanunauyğunluqlar sırasına aid olunmasına baxmayaraq, hal-hazırda belə, onun əhəmiyyətini qiymətləndirmək çətindir.

Əgər toplananlar asılı olmayandırlarsa və onların dispersiyaları eyni və bərabərdirlərsə, (25) münasibətini nəzərə aldıqda, (28) düsturunu aşağıdakı şəkildə yazmaq məqsədəuyğundur:

$$\mathbf{P}\left\{\frac{t_1\sigma}{\sqrt{n}} < \xi - \mathbf{M}(\xi) < \frac{t_2\sigma}{\sqrt{n}}\right\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2/2}\,dt. \qquad (29)$$

Göstərək ki, (29) münasibətindən bizim əvvəldə baxdığımız məsələnin, $\frac{\mu}{n}$ tezliyinin p etimallarından yayınmaları haqqında məsələnin həlli alınır. Bu məqsədlə aşağıdakı kimi təyin olunan $\xi^{(i)}$ təsadüfi kəmiyyələrini daxil edək:

$$\xi^{(i)} = \begin{cases} 0, & i-\text{ci sınağın nəticəsi mənfi olmuşdursa,} \\ 1, & i-\text{ci sınağın nəticəsi müsbət olmuşdursa.} \end{cases}$$

Asanlıqla yoxlamaq olur ki, bu halda

$$\mu = \xi^{(1)} + \xi^{(2)} + \ldots + \xi^{(n)}, \quad \frac{\mu}{n} = \xi,$$

$$\mathbf{M}(\xi^{(i)}) = p, \quad \mathbf{D}(\xi^{(1)}) = p(1-p), \quad \mathbf{M}(\xi) = p$$

və (29) düsturundan

$$\mathbf{P}\left\{t_1\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \frac{\mu}{n} - p < t_2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2/2}\,dt$$

münasibəti alınır və $t_1 = -t$, $t_2 = t$ olduqda bu münasibətdən yenə də (20) düsturu alınır.

§ 4. Ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışları haqqında əlavə qeydlər

Tezliklərinə dayanıqlılıq xas olan təsadüfi hadisələrdən, yəni məlum şərtlərlə təkrarolunma sayı böyük olduqda tezlikləri hər hansı *normal həddə* $P(A|S)$ ehtimalı ətrafında qruplaşmağa meylli təsadüfi hadisələrdən danışdıqda, biz §1-dəki şərhimizdə iki cəhətdən müəyyən bir qeyri-dəqiqliyə və qeyri-müəyyənliyə yol verdik. Yol verilmiş qeyri-dəqiqlikdən birincisi ondan ibarətdir ki, göstərmədik ki, tezliklərin dayanıqlılığının

aşkar olunması üçün sınaqlar seriyasının zəruri olan sayı n_r nə qədər böyük götürülməlidir və ayrı-ayrı seriyalardakı sınaqlar sayları $n_1, n_2, ..., n_r$ olduqda $\frac{\mu_s}{n_s}$ tezliklərinin bir-birindən və onların normal səddi p-dən mümkün ola bilən yayınmaları necədir. Belə qeyri-dəqiqlik yeni elmin anlayışlarının formalaşmasında qaçılmazdır. Bu nöqtənin və ya düz xəttin *fiziki* anlamda ən sadə metrik anlayışlarına xas olan məlum qeyri-müəyyənlikdən heç də çox deyildir. İşin bu tərəfi sonra §3-də dəqiqləşdirildi.

Bizim şərhimizdəki digər gizli mühüm qeyri-müəyyənlik – A hadisəsinin baş vermə tezliyinin dayanıqlılığını aşkara çıxaracaq seriyaların formalaş-dırılması qaydası ilə bağlıdır.

Biz artıq gördük ki, statistik və ehtimali araşdırma metodlarına hadisələrin gedişatının qabaqcadan dəqiq fərdi surətdə söylənilməsi mümkün olmadığı hallarda müraciət olunur. Mümkün olduqca sırf təsadüfi hadisələri süni surətdə yaratmaq məqsədilə, xüsusilə, elə edirlər ki, A hadisəsi onun baş verməsi üçün normal tezlikdən daha tez-tez baş verəcəyi halların əvvəlcədən heç bir mümkün vasitələrlə seçilib-ayrılması mümkün ola bilinməsin.

Məs., dövlət istiqrazlarının tirajları belə təşkil olunur. Əgər istiqrazların ümumi sayı N-ə bərabər tirajda M saydası uduşlu olmuşdursa, onda bir istiqrazın uduş ehtimalı – $p = \frac{M}{N}$ olacaqdır. Bu o deməkdir ki, tiraja qədər bütün istiqrazların sayı n-i olduqca böyük götürsək belə, biz praktik olaraq, əmin olmalıyıq ki, μ sayda uduşlu istiqrazların bütün istiqrazlar sayı n-ə nisbəti p-yə çox yaxın olacaqdır. Məs., cüt nömrəli istiqrazlar almağa üstünlük verən şəxslərin tək nömrəli istiqrazlar alan şəxslərdən heç bir sistematik üstünlüyü olmayacaqdır; eynilə də, istiqraz nömrələri sadə vuruğa ayrılan və ya nömrələri əvvəlki tirajdakı uduşlara düşən nömrələrin birləşmələrindən alınan nömrəli istiqrazlar almaq fikrində olanların da digərlərilə müqayisədə heç bir üstünlüyü olmayacaqdır və s.

Tamamilə eynilə, buraxılan məhsul üçün adi nəzarət keçmiş mərmilər normal qayda ilə götürüldükdə, yaxşı öyrədilmiş xidmət personalının verilən nümunədən qüsursuz silahdan atışında, biz təxminən bütün halların *yarısında* əvvəlcədən müəyyən olan B yayınmasından az olan – orta nöqtədən yayınmanı alacağıq. Bu mütənasiblik ardıcıl atəşlar sırası üçün də dəyişilməyəcəkdir, hətta bu hal cüt və ya tək saylı (zaman üzrə

növbələnmiş) atəşlər üçün B-dən kiçik yayınmaların sayını ayrıca hesabladıqda belə dəyişmir. Lakin biz xüsusilə bircins mərmiləri (onların çəkisi və s. görə) seçəriksə, biz yayınmanı bir qədər azalda bilərək, elə mərmilər seriyasını ala bilərik ki, bu seriya üçün standart B yayınmasından böyük olan yayınmalar bütün yayınmaların yarısından olduqca az olacaqdır.

Beləliklə, A-nın «ehtimali – təsadüfi» hadisə olduğunu söyləmək və ona

$$p = P(A \mid S)$$

ehtimalını qarşı qoymaq yalnız o halda mümkündür ki, sınaqlar seriyalarının formalaşdırılmasının mümkün üsullarının sinfi göstərilmiş olsun. Bu sinif göstərilərsə, onun S şərtlərinə də daxil olduğunu hesab edəcəyik.

Verilmiş S *şərtlərində* A-nın ehtimali – təsadüfi hadisə olması xassəsi və ehtimalının isə $p = P(A \mid S)$ olması, – S şərtləri və A hadisəsi arasında *obyektiv* xarakteri ifadə edir. Başqa sözlə, tamamilə təsadüfi hadisələr mövcud deyildir, hadisələr təsadüfi və ya zəruri o halda olur ki, onlara nə ilə əlaqədar baxılır, lakin müəyyən şərtlərdə hadisə tamamilə obyektiv olaraq təsadüfi ola bilər və onun bu xassəsi hər hansı müşahidəçinin bilik səviyyəsindən asılı olmur. Əgər belə bir müşahidəçinin olduğu fərz olunarsa ki, o, mərmilərin uçuşunun xüsusi hallarının fərqli xassələrini bütün təfsilatı ilə hiss edə bilir və beləliklə, o, bunlardan hər birinin orta trayektoriyadan fərdi yayınmalarını qabaqcadan söyləyə bilirsə, onda onun bu müşahidələrdə iştirak edib-etməməsinin mərmilərin ehtimal nəzəriyyəsinin qanunları ilə səpələnməsinə heç bir təsiri ola bilməyəcəkdir (əlbəttə, əgər atış bizim təsəvvür etdiyimiz müşahidəçinin göstərişi üzrə deyil, adi qaydada aparılarsa).

Bu barədə qeyd edək ki, yuxarıda müzakirə olunmuş – seriyaların formalaşdırılmasında tezliklərin normal qiymət – ehtimal ətrafında qruplaşma anlamında sabitliyə meyllilik aşkar olduqda da, bu meyllilik bizim müdaxiləmizdən tamamilə asılı olmayan real şəraitdə də baş verir. Məs., qazda molekulların hərəkətlərinin məhz ehtimali-təsadüfi xarakterliliyi çox kiçik vaxt müddətinə və qazın olduğu qabın divarının hər hansı bir sahəsinə və ya qaz içərisinə yerləşdirilmiş cisimlərin səthinə böyük dəqiqliklə mütənasib olur. Zərbələrin sayı böyük olmadığı hallarda bu mütənasiblikdən yayınmalar da ehtimal nəzəriyyəsinin qanunları ilə baş verir və Braun tipli təzahürlərə səbəb olur; bu haqda bir az sonra.

Asılı olmamazlıq anlayışının real mənasını izah edək. Xatırladaq ki, A hadisəsinin B hadisəsinə nəzərən şərti ehtimalı

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} \tag{30}$$

düsturu ilə təyin olunur. Eyni zamanda onu da xatırladaq ki, A və B asılı olmayan hadisələr o halda adlandırılırdı ki, əgər (4)-ə əsasən

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$$

bərabərliyi ödənilmiş olsun. A və B hadisələrinin asılı olmamazlığından və $\mathbf{P}(B) > 0$ şərtindən,

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A)$$

bərabərliyi alınır.

Asılı olmayan hadisələr haqqında ehtimal nəzəriyyəsinin bütün teoremləri, (4) şərtini ödəyən ixtiyari hadisələrə və ya çox sayda hadisələrin qarşılıqlı asılı olmamazlığı halına, onun ümumiləşmələrinə tətbiq oluna bilinir. Əgər bu tərif real asılı olmayan (səbəbi mənada) təsadüfi hadisələrin xassələrilə əlaqədar olmasaydı, bu teoremlər onda az maraq doğurardı.

Məsələn, aydındır ki, yeni doğulan uşağın oğlan olması ehtimalı olduqca dayanıqlı, $\mathbf{P}(A) = 22/43$ qiymətinə bərabərdir. Əgər B – doğumun Yupiterin Marsla görüşdüyü gündə baş verdiyi şərti olarsa və planetlərin vəziyyətlərinin fərdi insan talelərini təyin etmədiyi də fərz edilərsə, onda $\mathbf{P}(A \mid B)$ şərti ehtimalı, eyni $\mathbf{P}(A \mid B) = 22/43$ ehtimalına bərabər olacaqdır, yəni oğlan uşaqlarının doğulmasının faktiki tezliyi belə xüsusi astroloji şərtlərdə də, məhz $22/43$ tezliyinə gətirəcəkdi. Belə hesablama ola bilsin ki, heç bir kəs tərəfindən kifayət qədər geniş miqyasda aparılmadığına baxmayaraq, onun nəticəsinə şübhə etməyə heç bir əsasımız yoxdur.

Bizim, məzmun etibarilə bir qədər köhnəlmiş bu misalı çəkməkdə məqsədimiz o oldu ki, göstərək ki, insan idrakının inkişafı yalnız təzahürlər arasındakı əsl əlaqələrin müəyyən olunmasından deyil, həm də təsəvvür olunan əlaqələrin təkzib olunmasından, yəni baxılan hallarda təzahürlərin hansısa iki çevrələrin asılı olmamazlığı haqqında tezisin müəyyən olunmasından ibarətdir. Astroloqların bir-birilə bağlı olmayan iki təzahür çevrəsinin bir-birilə əlaqəli olduğunu göstərmək cəhdinin mənasızlığının sübutu belə klassik misallardan biri oldu.

Təbiidir ki, belə növ asılı olmamazlığı mücərrədləşdirmək olmaz. Məs., şübhəsiz ki, ümumdünya cazibə qüvvəsinə görə Yupiterin peyklərinin

yerini dəyişməsi, məs., artilleriya mərmisinin uçuşuna təsir edir. Lakin aydındır ki, praktikada biz bu təsirləri nəzərə almaya bilərik. Fəlsəfi nöqteyi-nəzərdən, ola bilər ki, asılı olmamazlıq əvəzinə baxılan konkret şəraitdə bu və ya digər asılılıqların əhəmiyyətsizliyi barədə danışmaq daha düzgün olardı; bu nöqteyi-nəzər elə nöqteyi-nəzərlərdən biridir ki, onlar ümumi nəzəriyyə ilə qovuşaraq, bu nəzəriyyələrə gətirir, bunun sayəsində bunlar əsl kəşf hesab olunurlar. Lakin bununla belə, hadisələrin asılı olmamazlığı termininin indi izah olunmuş konkret və nisbi anlamı – bütün təzahürlərin ümumi əlaqə prinsipilə, heç bir vəchlə, ziddiyyət yaratmır, o, yalnız bu prinsipin zəruri tamamlayıcısıdır.

Bu və ya digər hadisələrin asılı olmamazlığı haqqında fərziyyələrdən alınmış düsturlarla ehtimalların hesablanılması yalnız o halda real maraq doğurur ki, əvvəlcə asılı olmayan hadisələr bu hadisələrin gedişatı ilə sonradan bir-birilə əlaqəli olurlar. Məs., kosmik şüalanma hissəciklərinin onların keçdiyi mühit hissəcikləri ilə toqquşması ehtimalını, hissəciklərin hərəkətinin onların yaxınlığında sürətlə hərəkət edən kosmik şüalanma hissəciyinin görünməsinə qədər bu hissəciyin yerini dəyişməsindən asılı olmayaraq, baş verməsi fərziyyəsi şərtilə hesablamaq olar. Düşmən gülləsinin fırlanan pərin qanadına dəyməsi ehtimalını, pərin oxa nəzərən vəziyyətinin güllənin trayektoriyasından asılı olmaması fərziyyəsi şərtilə (əlbəttə ki, bu fərziyyə pərin fırlanması nəzərə alınmaqla propellerdən açılan atəşin məxsusi gülləsinə nəzərən səhv olardı) hesablamaq olar və s.; belə misalların sayını qeyri-məhdud davam etdirmək olar.

Hətta belə demək olar ki, harada ki, ehtimal qanunauyğunluqları olduqca aydın şəkildə baş verir, biz bir-birindən tam mənası ilə asılı olmayan çox saylı faktorların olmasa da, bu və ya digər bir-birilə zəif əlaqəli faktorların təsirini görürük.

Bu heç də belə anlaşılmamalıdır ki, bu və ya digər asılı olmamazlıqlar haqqında fərziyyələri hər yerdə tənqidsiz daxil etmək olar. Əksinə, bu belə bir məcburiyyət yaradır ki, birincisi, asılı olmamazlıq haqqında hipotezlərin yoxlanılması üçün olduqca mükəmməl kriterilər işlənilməlidir, ikincisi isə faktorlar arasındakı asılılığın nəzərə alınması zərurəti yarandıqda, lakin bu asılılıqlar ehtimali qanunauyğunluqların dəyişilmiş və mürəkkəb şəkildə aşkara çıxmasına səbəb olduqda baş verə bilən aralıq hallar, xüsusilə, mükəmməl surətdə araşdırılmalıdır. Yuxarıda artıq qeyd olunmuşdur ki, bu istiqamətlərdən ikincisində ehtimal nəzəriyyəsinin klassik rus məktəbi çox geniş araşdırmalar aparmışdı.

Asılı olmamazlıq məsələsinə baxılmasını yekunlaşdıraraq, qeyd edək ki, iki hadisənin asılı olmamazlığının (4) düsturu ilə tərifi kimi, bir neçə

təsadüfi kəmiyyətlərin asılı olmamazlığının formal tərifi, bir-birilə səbəbən bağlı olmayan təzahür çevrələrinə aidlik mənasında real asılı olmamazlıq anlayışından daha geniş anlam daşıyır.

Fərz edək ki, ξ nöqtəsi $[0, 1]$ parçasına elə düşür ki,

$$0 \le a < b \le 1$$

olduqda, bu nöqtənin $[a, b]$ parçasına düşməsi ehtimalı bu parçanın uzunluğu $b-a$-ya bərabərdir. Asanlıqla göstərmək olur ki, ξ nöqtəsinin absisinin onluq kəsrlərə

$$\xi = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{100} + \frac{\alpha_3}{1000} + \ldots$$

ayrılışında α_k işarələmələri öz mənşəi etibarilə bir-birilə əlaqəli* olsalar da, bir-birilə qarşılıqlı asılı deyildirlər. (Bu mülahizədən bir çox nəzəri və bir qədər də praktiki maraq kəsb edən nəticələr alınır).

Asılı olmamazlılığın formal tərifinin belə çevikliyi onun üçün qüsur sayılmamalıdır. Əksinə bu, asılı olmamazlıq haqqında bu və ya digər fərziyyələrlə müəyyən olunmuş teoremlərin tətbiq oblastının yalnız genişlənməsinə səbəb oldu. Bu teoremlər, asılı olmamazlıq real mülahizələrə əsaslandırılmaqla postulatlaşdırıldığı kimi, asılı olmamazlığı araşdırılan hadisələrin və təsadüfi kəmiyyətlərin ehtimal paylanmaları haqqında əvvəllər qəbul edilmiş fərziyyələrə əsaslanaraq, hesablama ilə isbat olunur.

Ümumiyyətlə, ehtimal nəzəriyyəsinin riyazi aparatının formal strukturunun tədqiqi maraqlı nəticələrə gətirmişdir. Belə aydın oldu ki, bu aparatın müasir riyaziyyatın əsas obyektlərinin, tədricən, nəzərdə tutulan təsnifatlaşdırılmasında tamamilə müəyyən və xüsusi yeri vardır.

Biz artıq iki A və B hadisələrinin birgə baş verməsi anlayışını (yəni AB) və birləşməsi anlayışını (yəni $A \cup B$) vermişik. Xatırladaq ki, A və B hadisələri, onların birgə baş verməsi mümkün olmadıqda, yəni $AB = N$ olduqda uyuşmayan hadisələr adlanır, burada N – qeyri-mümkün hadisənin işarələməsidir.

---

* ξ ədədinin

$$\xi = \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \frac{\alpha_3}{n^3} + \ldots$$

ayrılışında da n-in ixtiyari qiymətində α_k işarələmələri eyni şərtləri ödəyirlər.

Elementar ehtimal nəzəriyyəsinin əsas aksiomu: $AB = N$ olduqda

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$$

bərabərliyinin ödənilməsi müddəasıdır (bax, §2).

Elementar ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarının – təsadüfi hadisələr və onların ehtimallarının xassələri müstəvi fiqurları və onların sahələrinin xassələrinə tamamilə analojidir. Kifayətdir ki, AB – iki fiqurun kəsişməsi (onların ümumi hissəsi) kimi, $A \cup B$ – onların birləşməsi kimi, N – şərti daxil olunmuş «boş fiqur» kimi, $\mathbf{P}(A)$ isə A fiqurunun sahəsi kimi anlaşılsın və onda nəzərdə tutulmuş bu çərçivədə analogiya tam mənası ilə aydın olur.

Üçölçülü fiqurların həcmləri də bu xassələrə malikdir.

Hal-hazırda həcmlər və sahələr nəzəriyyələrini xüsusi hal kimi tərkibində saxlayan belə oxşar tip qurumların ən ümumi nəzəriyyəsi – *ümumi ölçü nəzəriyyəsidir*.

Yalnız qeyd etmək lazımdır ki, ehtimal nəzəriyyəsində ümumi ölçü nəzəriyyəsi və ya xüsusi olaraq, sahələr və həcmlər nəzəriyyəsi ilə müqayisədə bəzi spesifik cəhətlər vardır: ehtimal heç vaxt vahiddən böyük olmur. Bu maksimal ehtimalı zəruri baş verən U hadisəsi alır, yəni

$$\mathbf{P}(U) = 1.$$

Analogiya səthi anlam daşımır. Belə görünür ki, riyazi ehtimal nəzəriyyəsi formal cəhətdən bütünlüklə xüsusi bir fərziyyə irəli sürülməklə ölçü nəzəriyyəsi kimi qurula bilinər, bu şərtlə ki, buna görə «bütün U fəzasının» ölçüsü vahidə bərabər götürülməlidir*.

Məsələyə belə yanaşma riyazi ehtimal nəzəriyyəsinin formal olaraq qurulmasına tam aydınlıq gətirməklə yanaşı, ehtimal nəzəriyyəsinin tamamilə konkret proqresinə və bu nəzəriyyə ilə əlaqəli riyazi nəzəriyyələrin də formal olaraq qurulmasına səbəb oldu. Ehtimal nəzəriyyəsində həqiqi dəyişənli funksiyaların metrik nəzəriyyəsində işlənilmiş incə metodlar müvəffəqiyyətlə istifadə olundu. Ehtimal metodları, eyni zamanda, riyaziyyatın onunla əlaqəli oblastlarının məsələlərində «analogiyaya» görə deyil,

* Bununla belə, ehtimal nəzəriyyəsi həll olunan məsələlərinin mahiyyəti etibarilə müstəqil riyazi fənn olaraq qalır; ehtimal nəzəriyyəsi üçün əsas nəticələr (§3-də şərh olunmuşlara oxşar şəkildə) sırf ölçü nəzəriyyəsi nöqteyi-nəzərindən süni və lazımsız görünür.

onların yeni oblastlara formal olaraq ciddi şəkildə keçirilməsi yolu ilə tətbiq olundu. Ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomlarının tətbiq oluna bilindiyi hər yerdə, heç olmazsa baxılan oblastın real təsadüfiliklə heç bir ümumi cəhəti olmadıqda, bu aksiomların nəticələri də tətbiq oluna bilinir.

Aksiomlaşdırılmış ehtimal nəzəriyyəsinin mövcudluğu – ehtimalı «təyin etmək» üçün, onları təbii-elmi əminliklə bilavasitə birləşdirməyə üstünlük verərək və onlara əsaslanaraq, formal olaraq ciddi riyazi nəzəriyyə qurmağa xidmət edən üsulları seçmək kimi yanlış bir addıma yol verməkdən çəkindirir. Belə tərifl ər (ehtimal «təyin etmək» üçün; H. M.), təxminən, həndəsədə nöqtənin «tərifinin» («təyin edilməsinin»; H. M.) – fiziki cismi hər bir tərəfdən sonsuz dəfə kəsərək, onu hər dəfə kiçiltməklə, məs., onun diametrini hər dəfə iki dəfə azaltmaqla verilməsinə uyğun olardı.

Belə tərifl ərə – ehtimalın, sınaqların sayı qeyri-məhdud artırıldıqda tezliklərin limiti kimi baxılan tərifi də aiddir. Sınaqların ehtimali xarakterliliyi haqqında fərziyyə özü-özlüyündə (hər hansı bir təzahürün «təsadüfülüyü» haqqında fərziyyə kimi) yalnız bəzi şərtlər dəyişilmədən ödənildikdə doğru olur və bu şərtlər uzun müddət qeyri-məhdud olaraq və qeyri-məhdud dəqiqliklə dəyişilmədən yerinə yetə bilinmir. Buna görə də,

$$\frac{\mu}{n} \to p$$

limitə dəqiq keçilməsinin real mənası olmur. Belə limitə keçilmədə tezliklərin dayanıqlılıq prinsipinin ifadə oluna bilinməsi – sınaqların sonsuz ardıcıllıqlarının axtarışı üçün məqbul sayılan üsulların təyin olunmasını zəruri edir, bu isə yalnız riyazi fiksasiya oluna bilər. Əgər nəticədə elə bir özünəməxsus nəzəriyyənin qurulması alınsaydı ki, digər başqa yollarla onun ciddi əsaslandırılmasına müyəssər oluna bilinməzdi və belə olduqda, anlayışların belə ağırlaşdırılmasına ciddi yanaşmaya ehtiyac yaranardı. Lakin yuxarıda qeyd olunduğu kimi riyazi ehtimal nəzəriyyəsində ölçü nəzəriyyəsinin müasir vəziyyətində əsaslandırılması, sadəcə olaraq,

$$\mathbf{P}(U) = 1$$

şərtinin əlavə olunması ilə yerinə yetirilir.

Ümumiyyətlə, ehtimal anlayışının real analizində onun formal tərifinin verilməsinə heç də hökmən cəhd göstərmək zəruri deyilir. Mənə belə gəlir ki, ehtimal haqqında sırf formal nöqteyi-nəzərdən aşağıdakı şərhdən artıq olan heç bir şey söyləmək olmaz: $\mathbf{P}(A \mid S)$ *ehtimalı elə bir ədəddir ki, S şərtlərində və bu şərtlər ödənilməklə seriyaların formalaşdırılmasında tezliklər bu ədəd ətrafında qruplaşmağa meylli olurlar və bu seriyaların*

sayı ağlabatan qədər artdıqca və şərtlərin bircinsliyi də pozulmadıqda, bu meyl olduqca böyük bir aydınlıq və dəqiqliklə, baxılan konkret şəraitdə, seriyaların qəbul saylarında kafi ehtibarlılığa və dəqiqliyə çata-çata aşkar olunur.

Həqiqətən də, mühüm məsələ bu tərifin formal dəqiqləşdirilməsi deyil, şərtlərin mümkün olduqca geniş aydınlığıdır ki, bu şərtlərdə belə tip ehtimali təsadüfilik aşkar olunsun. Aydınlıqla anlaşılmalıdır ki, hər hansı bir təzahürün ehtimali xarakteri haqqında hipotez, yalnız olduqca nadir hallarda, statistik yoxlamaya bilavasitə əsaslana bilir. Yalnız ehtimal metodlarının hər hansı yeni oblastda ilk müdaxiləsində, iş çox vaxt onunla başlanılırdı ki, tezliklərin sabitliyi empirik olaraq qeyd olunurdu. §3-dəki deyilənlərə əsasən, tezliklərin sabitliyin ε dəqiqliyinə qədər statistik aşkar olunması üçün $n = 1/\varepsilon^2$ sınaqlarından ibarət seriyalardan istifadə etmək zəruridir. Məs., baxılan konkret məsələdə $0,0001$ dəqiqliyi ilə təyin olunacaq ehtimalı almaq üçün bu təxminən hər biri $100\ 000\ 000$ sınaqdan ibarət sınaqlar seriyaları ardıcıllığını aparmaq zəruridir. Ehtimali təsadüfi hipotez olduqca çox hallarda simmetriya mülahizələri əsasında və ya ayrı-ayrı təzahürlər sıralarının kəsişməsindəki praktiki asılı olmamazlıq mülahizələri əsasında daxil olunur və s. Sonra bu hipotez dolayı yolla yoxlanılır. Məs., sonlu həcmli qablarda qaz molekullarının sayı 10^{20} tərtib ədədlərlə ifadə olunduğundan və qazların kinetik nəzəriyyəsinin ehtimali nəticələrinə uyğun olan $\sqrt{n}$ ədədi çox böyük olduğundan, həqiqətən də, bu nəticələr böyük dəqiqliklə doğrudur. Məs., sakit havada, asılmış plastinkanın əks üzlərinə olunan təzyiq, hətta bizim gözümüz üçün mikroskopik sayılan ölçülər üçün belə ciddilikə eyni olur, hətta bu üzlərdən birinə olunan təzyiq digər üzə olunan təzyiqdən, sınağın müvafiq qoyuluşunda, faizin mində biri qədər artıq olduqda baxmayaraq belə, bu nəzərə çarpmaya bilinərdi.

§ 5. Determinik və təsadüfi proseslər

Bütün təzahürlərin səbəbi şərtləşdirilmə prinsipi, real proseslərin differensial tənliklərin köməyilə öyrənilməsi metodunda ən sadə riyazi ifadəsini tapır.

Öyrənilən sistemin t anında vəziyyətinin n sayda

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

parametrləri vasitəsilə təyin olunduğu fərz olunur. Bu parametrlərin dəyişilmə sürəti, məlum olduğu kimi zaman üzrə

$$\dot{x}_k = \frac{dx_k}{dt}$$

törəmələri ilə ifadə olunur.

Əgər bu sürətlər parametrlərin qiymətlərinin funksiyaları olarsa, onda biz aşağıdakı differensial tənliklər sistemini alarıq:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$$

.....

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Qalileyin cisimlərin düşmə qanunu ilə başlanan riyazi təbiətşünaslığın yaranması dövründə kəşf olunmuş təbiət qanunlarının böyük əksəriyyəti məhz bu şəkildə ifadə olunur. Qaliley öz kəşfini göstərilən standart formaya sala bilməmişdi, çünki o vaxt müvafiq riyazi anlayışlar hələ işlənilməmişdi. Bunu Nyüton etmiş oldu.

Mexanikada və fizikanın bir çox digər oblastlarında ikinci tərtib differensial tənliklərə prinsipial nöqteyi-nəzərdən müraciət heç bir yenilik gətirmir, belə ki, sürətləri yeni

$$v_k = \dot{x}_k$$

işarələmələri ilə götürdükdə, biz bu kəmiyyətlərin ikinci tərtib törəmələri üçün

$$\frac{d\,x_k}{d\,t^2} = \dot{v}_k$$

ifadəsini alırıq və n sayda $x_1, x_2, ..., x_n$ kəmiyyətləri üçün ikinci tərtib tənliklər $2n$ sayda $x_1, x_2, ..., x_n, v_1, v_2, ..., v_n$ kəmiyyətləri üçün birinci tərtib tənliklərə çevrilir. Misal kimi, ağır cismin Yer atmosferinə düşməsi məsələsinə baxaq. Fərz edərək ki, yalnız Yer səthindən çox da yuxarı

olmayan hündürlüklərə baxılır, mühitin müqavimətinin hündürlükdən deyil, yalnız sürətdən asılı olduğunu da fərz edəcəyik. Öyrənilən sistemin vəziyyəti iki parametrlə xarakterizə olunur: cismin Yer səthindən məsafəsi z və onun sürəti v ilə. Bu iki kəmiyyətin zaman üzrə dəyişməsi iki differensial tənliklə təyin olunur:

$$\left.\begin{aligned} \dot{z} &= -v, \\ \dot{v} &= g - f(v) \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

burada g – ağırlıq qüvvəsinin təcili, $f(v)$ – baxılan cisim üçün hər hansı «müqavimət qanunudur».

Əgər sürətlər çox da böyük olmazsa və cisim olduqca böyük həcmli olarsa, məs., orta ölçülü daş bir neçə metr hündürlükdən düşdükdə havanın müqavimətini nəzərə almamaq olar, (31) tənlikləri

$$\left.\begin{aligned} \dot{z} &= -v, \\ \dot{v} &= g \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

tənliklərinə çevrilir. Əgər t_0 başlanğıc anında z və v kəmiyyətlərinin qiymətlərinin z_0 və v_0 olduğu fərz olunarsa, onda (32) tənliklərini asanlıqla həll edərək, düşmə prosesini bütünlüklə təsvir edən

$$z = z_0 - v(t - t_0) - g\left(\frac{t - t_0}{2}\right)^2$$

düsturunu almaq olur. Məs., $t_0 = 0$, $v_0 = 0$ olduğunu fərz etsək, Qalileyin kəşf etdiyi

$$z = z_0 - \frac{g t^2}{2}$$

düsturunu alarıq.

Ümumi halda (31) tənliklərinin inteqrallanması bir qədər çətindir, lakin prinsipial nəticə ($f(v)$ funksiyaları üzərinə qoyulan olduqca ümumi məhdudiyyətlə) eyni olur: başlanğıc t_0 anında z_0 və v_0 qiymətləri üzrə cismin Yer səthinə düşdüyü t anına qədər (t də daxil olmaqla) bütün anlarda z və v-nin qiymətləri birqiymətli təyin olunur. Cismin z-in mənfi

qiymətlərində düşməyə davam etməsini fərz edərək, qeyd etdiyimiz məhdudiyyəti də istisna etmək olar. Bu tərzdə sxemləşdirilmiş məsələ üçün belə nəticə çıxarmaq olar: əgər $f(v)$ funksiyası v artdıqda monoton artırsa və $v \to \infty$ olduqda sonsuzluğa yaxınlaşırsa, onda cismin düşməsi məhdudiyyətsiz davam etdikdə, yəni t dəyişəni qeyri-məhdud artdıqca, v sürəti sabit c limitinə yaxınlaşır və c, –

$$g = f(c)$$

tənliyinin həllidir.

Qoyulmuş məsələnin riyazi analizindən alınmış bu nəticə belə baxdıqda aydındır: cismin düşmə sürəti, ağırlıq qüvvəsinin təcili havanın müqaviməti ilə tarazlaşana qədər, artır. Açıq paraşütlə tullanmada v stasionar sürəti – saniyədə beş metrə yaxın sürət, olduqca tez qərarlaşır*. Açılmamış paraşütlə uzun çəkən tullanmada havanın müqaviməti azdır və buna müvafiq olaraq, stasionar sürət çox olur və yalnız paraşütçü olduqca böyük məsafə qət etdikdən sonra bu sürət qərarlaşır.

Yüngül cisimlərin enməsində, məs., havaya atılmış lələk və ya tükün, başlanğıc vaxtda sürətli hərəkəti hiss olunacaq qədər çox olmur və buna görə də, bəzən bu hərəkət tamamilə görünməz olur. Enmənin stationar sürəti tez bir zamanda qərarlaşır və məlum yaxınlaşma ilə həmişə $v = c$ götürmək olar. Bu halda bir differensial tənlik

$$\dot{z} = -c$$

tənliyi qalır ki, o da asanlıqla inteqrallanır və nəticədə

$$z = z_0 - c(t - t_0)$$

tənliyi alınır. Tamamilə sakit havada tük belə enəcəkdir.

Bizim yuxarıda baxdığımız deterministik konsepsiya dinamik sistemlərin müasir nəzəriyyəsində tamamilə ümumi şəkildə şərh olunur; bu sahədə bir sıra mühüm işlər sovet riyaziyyatçıları – N. N. Boqolyubov, V. V. Stepanov və bir çox digər riyaziyyatçılar tərəfindən yerinə yetirilmişdir. Bu ümumi nəzəriyyə xüsusi halları və real təzahürlərin elə riyazi sxemlərini əhatə edir ki, bunlarda sistemin vəziyyəti, bir və ya bir neçə funksiyanın parametrlərinin sonlu sayı ilə təyin olunur, necə ki, bu məs.,

* burada nəzərdə tutulur ki, v sürəti özünün sabit limit qiyməti c-yə praktik olaraq, kifayət qədər yaxın olur.

kəsilməz mühit mexanikası üçün tipik haldır. Belə hallarda «sonsuz kiçik» vaxt ərzində vəziyyətin elementar dəyişilməsi qanunauyğunluqları adi differensial tənliklərlə deyil, xüsusi törəməli tənliklər və ya başqa vasitələrlə verilir. Lakin real proseslərin bütün riyazi determinik sxemlərində ümumi cəhət – birincisi, öyrənilən sistemin vəziyyəti o halda hərtərəfli surətdə təyin olunmuş hesab edilir ki, o, hər hansı ω riyazi obyekti ilə verilsin (n sayda həqiqi ədədlərin sistemin bir və ya bir neçə funksiya və s. ilə); ikincisi, $t > t_0$ anlarındakı ardıcıl qiymətlər başlanğıc t_0 anına uyğun ω_0 qiyməti ilə birqiymətli təyin olunur:

$$\omega = F\ (\ t_0,\ \omega_0,\ t\ ).$$

Biz artıq gördük ki, differensial tənliklərlə ifadə olunan proseslər halında F funksiyasının tapılması üçün $t = t_0$ olduqda $\omega = \omega_0$ başlanğıc şərtlərilə bu differensial tənliklər inteqrallanmalıdır.

Mexanistik materializmin nümayəndələri hesab edirdilər ki, təsvir olunmuş sxem real təzahürlərin determinikliyinin – səbəbiyyətin fiziki prinsipinin dəqiq və əsl ifadəsidir. Laplasın ideyasına əsasən, dünyanın baxılan anda vəziyyəti sonsuz sayda differensial tənliklərə tabe olan sonsuz sayda parametrlərlə təyin olunur. Əgər müəyyən bir «hərtərəfli ağıl» bütün bu tənlikləri yaza və onları inteqrallaya bilsəydi, onda o, Laplasın fikrinə görə, sonsuz zaman ərzində dünyanın bütün evolyusiyasını tam dəqiqliyi ilə əvvəlcədən söyləyə bilərdi.

Lakin əslində riyazi sonsuzluq kəmiyyətcə, gerçək aləmin keyfiyyətcə hərtərəfli ifadə olunması ilə müqayisədə, olduqca kobuddur. Nə parametrlərin sonsuz sayda daxil edilməsi, nə kəsilməz mühitlərin vəziyyətlərinin fəzanın nöqtəsinin funksiyası vasitəsilə təsviri, real proseslərin sonsuz mürəkkəbliyinin adekvat inikası deyildir.

Real proseslərin araşdırılması həmişə məsələyə daxil olunan parametrlər sayının artırılması istiqamətində aparılmır; ümumiyyətlə isə, baxılan proseslərin hesablamaları üçün istifadə olunan riyazi sxemdə «sistemin vəziyyətini» ayrıca təyin edən ω-nın xarakteristikasını hər dəfə mürəkkəbləşdirmək məqsədəuyğun deyildir. Tədqiqatçının məharəti əsas etibarilə ondan ibarətdir ki, o, elə sadə Ω faza fəzası* tapmalıdır ki (yəni ω qiymətlərinin elə çoxluğunu və ya sistemin mümkün vəziyyətlərinin

* Cisimlərin enməsinə dair yuxarıda verilmiş misalda Ω – iki ədədin (z, v) sistemidir, yəni müstəvidir.

çoxluğunu), bu fəza, real prosesi, bu fəzada ω nöqtəsinin determiniklənmiş yerdəyişmə prosesi ilə əvəz etdikdə, real prosesin bütün *mümkün* cəhətlərini nəzərə almağa imkan yaratmış olsun.

Lakin biz real prosesin mühüm cəhətlərini seçib, ayırd etdikdən sonra müəyyən bir qalıq alırıq ki, onun təsadüfi olduğunu qəbul etmək məcburiyyətində oluruq. Nəzərə alınmayan təsadüfi faktorlar prosesin gedişatına həmişə müəyyən bir təsir göstərir. Riyazi cəhətdən öyrənilən olduqca az proseslər mövcuddur ki, nəzəriyyə ilə müşahidələri müqayisə etdikdə, bunlar üçün nəzərə alınmamış təsadüfi faktorların təsirini görmək mümkün olmurdu. Planetlərin cazibə qüvvəsinin təsiri altında hərəkəti nəzəriyyəsi ilə vəziyyət ya belədir və ya sanki belədir: planetlər arasında məsafələr onların ölçüləri ilə müqayisədə o qədər böyükdür ki, onların maddi nöqtə kimi ideallaşdırılmış təsviri demək olar ki, həmişə tətbiq oluna bilinir; planetlərin hərəkət etdikləri fəza elə «seyrəklənmiş» materiya ilə doludur ki, onun müqaviməti itəcək qədər kiçikdir; planetlərin kütləsi o dərəcədə böyükdür ki, onların hərəkətində işıq təzyiqi demək olar ki, heç bir rol oynamır. Belə olduqca gözəl şərtlər belə bir nəticə çıxarmağa əsas verir ki, n sayda maddi nöqtədən ibarət sistemin hərəkəti haqqında məsələnin həlli $6n$ sayda parametrlərlə (sistemin «vəziyyətinin» parametrləri ilə)* təsvir olunur, vəziyyətin dəyişməsi yalnız cazibə qüvvəsi nəzərə alınaraq hesablanılır və bu da planetlərin hərəkətlərinin müşahidələri ilə olduqca yaxşı üst-üstə düşür.

Planetlərin hərəkəti halı ilə artilleriya mərmisinin uçuş halı bir qədər yaxındır, bu halda mərminin hərəkət tənliyinə havanın müqavimətinin daxil edildiyi fərz olunur. Bu – riyazi araşdırma metodunun olduqca tez və sürətlə böyük uğurlar qazanmış olduğu klassik oblastlardan biridir. Lakin burada təsiredici təsadüfi faktorların rolu olduqca böyükdür və mərmilərin səpələnməsi, yəni onların baxılan atəş üçün təyin olunmuş normal başlanğıc şərtlərə və atəş vaxtı atmosferin orta vəziyyətinə uyğun nəzəri trayektoriyadan yayınmaları, onlarla metrlərlə, böyük məsafələrdə isə hətta yüz metrlərlə ölçülür. Belə yayınmaların, qismən, başlanğıc istiqamətin və başlanğıc sürətin normadan təsadüfi yayınmaları nəticəsində, qismən, kütlənin və mərminin müqavimət əmsalından təsadüfi yayınmaları nəticəsində, qismən də, küləyin qeyri-sabitliyi və şiddətlənmələri və real Yer atmosferində hökmran olan dəyişkən və olduqca mürəkkəb rejimlə bağlı digər təsadüfi şəraitlər nəticəsində yaranır.

* Hər bir nöqtənin üç koordinatı və sürətin üç komponenti.

Mərmilərin səpələnməsi ehtimal nəzəriyyəsinin metodları ilə ətraflı surətdə öyrənilir və bu araşdırmaların nəticələri atəş praktikası üçün olduqca mühümdür.

Əslində təsadüfi təzahürlərin tədqiqi nə anlam daşıyır? Belə təsəvvür yaranır ki, təzahürün baxılan sxemləşdirilməsində təsadüfi «qalıq» o qədər böyük olmuşdur ki, onu nəzərə almamaq mümkün deyildir; bu halda yeganə mümkün ola bilən yol ondan ibarətdir ki, təzahürün təsviri yeni parametrlər daxil edilərək, mürəkkəbləşdirildikdən sonra, belə mürəkkəbləşdirilmiş sxemdə təzahür, determinə olunmuş təzahürlərin elə həmin riyazi sxemi üzrə, daha ətraflı tədqiq olunmalıdır.

Bu – bir çox hallarda praktik olaraq mümkün olmayan bir yoldur. Məs., maddi cismin enməsinin araşdırılmasında, onun qeyri-sabit şiddətli külək axını olan (adətən, turbulent axın adlandırılan) strukturlu atmosferdə enməsində iki – z və v parametrləri əvəzinə bu strukturun tam təsviri üçün tamamilə çox böyük bir riyazi aparat daxil etmək lazım gələrdi.

Lakin bu çətin yol, əslində yalnız o hallarda zəruri olur ki, bizim prosesin gedişatına qalıq «təsadüfi» faktorların təsvirini hərtərəfli və hər bir fərdi hal üçün nəyin hesabına olursa-olsun izləyə bilmək tələb olunsun. Xoşbəxtlikdən, həqiqətdə, bir çox hallarda bizim real tələbatlarımız tamamilə başqa bir şeylə bağlıdır: yalnız olduqca böyük zaman parçasında və ya öyrənilən prosesin olduqca çox dəfələrlə təkrar olunmasında təsadüfi faktorların təsirinin toplam effektini qiymətləndirmək zərurəti yarandığı hallarda.

Misal kimi qumun su axını ilə çayda və ya bu və ya digər süni hidrotexniki qurğuda yerini dəyişməsinə baxaq. Adətən, bu yerini dəyişmə elə baş verir ki, qum dənələrinin əksəriyyəti dibdə sakit vəziyyətdə olur və dibin yaxınlığında yalnız hərdənbir baş verən burulğanlar qum dənələrini yerindən qopararaq, elə həmin anda olduqca uzaq məsafəyə, hər hansı yeni bir yerdə gözlənilmədən dayanana qədər, apara bilir. Sırf nəzəri cəhətdən hər bir belə qum dənəsinin hərəkəti fərdi olaraq, hidromexanika qanunları ilə hesablanıla bilinərdi. Onda buna görə biz dibin başlanğıc halı və axın haqqında, hərtərəfli olaraq, hökmən məlumatlı olmalıyıq, qum dənəsinin hərəkətini addımbaaddım hesablamalıyıq, hər hansı sakit vəziyyətdə olan qum dənəsini hərəkəti gətirmək üçün tələb olunan təzyiq olunmuş anları qeyd edərək, yerindən tərpənmiş qum dənəciklərinin dayandığı ana qədər etdikləri yerdəyişmələri izləməliyik. Real elmi tədqiqat üçün bu məsələnin belə qoyuluşunun absurd olması aydındır. Lakin buna baxmayaraq, orta nəticələr və ya dibdəki nasosların su

axınları ilə yerini dəyişmələrinin statistik qanunauyğunluqları (belə deyiliş qəbul edilmişdir) tamamilə öyrənilə bilinir.

Çoxsaylı təsadüfi faktorların təsirinin tamamilə aydın statistik qanunauyğunluqlara gətirdiyi misalların sayını asanlıqla çoxaltmaq olar. Perspektivliyinin genişliyinə görə və eyni zamanda belə tip ən məşhur və ən maraqlı olan misallardan birinə kinetik qaz nəzəriyyəsinə baxılmışdır; bu misalda görünür ki, molekulların çoxsaylı təsadüfi toqquşmalarının birgə təsirindən elə dəqiq qanunauyğunluqlar yaranır ki, qazın bir tam kimi divarlara təzyiqi, bir qazın digər qazda diffuz yayılması və s. bu qanunauyğunluqlara tabedir.

§ 6. Markov tip təsadüfi proseslər

§5-də

$$\omega = F(t_0, \omega_0, t)$$

tənliyinin köməyilə yazılmış deterministik sxemi bilavasitə ümumiləşdirən ehtimali sxemin qurulması A. A Markovun xidmətidir. Düzdür, Markov yalnız belə bir hala baxmışdı ki, öyrənilən sistemin faza fəzası sonlu sayda vəziyyətlərdən ibarət idi, yəni $\Omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$; o, sistemin vəziyyətindəki dəyişiklikləri yalnız t-ni diskret addımlara ayıraraq öyrənirdi. Lakin o, olduqca sxemləşdirilmiş belə modeldə, bir sıra qanunauyğunluqları aşkar etməyə nail ola bilmişdi.

Markov, sistemin ω vəziyyətini $t > t_0$ anında onun t_0 anındakı ω_0 vəziyyətinə görə birqiymətli təyin edən F funksiyası əvəzinə

$$P(t_0, \omega_i; t, \omega_j)$$

ehtimallarını daxil edir; $P(t_0, \omega_i; t, \omega_j)$ – sistem t_0 anında ω_0 vəziyyətində olduqda, onun t anında ω_j vəziyyətində ola bilməsi ehtimalıdır. Markov bu ehtimalları –

$$t_0 < t_1 < t_2$$

münasibətini ödəyən ixtiyari üç t_0, t_1, t_2 anları üçün

$$P(t_0, \omega_i; t_2, \omega_j) = \sum_{k=1}^{n} P(t_0, \omega_i; t_1, \omega_k)\, P(t_1, \omega_k; t_2, \omega_j) \qquad (33)$$

münasibətilə əlaqələndirir; bu münasibəti Markov proseslərinin əsas tənliyi adlandırmaq olar.

Faza fəzası kəsilməz çoxobrazlı olduqda, (t_0, t) zaman parçasında ω_0 vəziyyətindən ω vəziyyətinə keçid üçün $p(t_0, \omega_0; t, \omega)$ *ehtimal sıxlıqlarının* varlığı olan hal ən tipik haldır. Bu halda t_0 və t anları arasındakı müddət ərzində ω_0 vəziyyətindən hər hansı ω vəziyyətinə keçid ehtimalı, $-\omega_0$ və ω, Ω faza fəzasının G oblastına aid olduqda,

$$P(t_0, \omega; t, G) = \int_G p(t_0, \omega_0; t, \omega)\, d\omega \tag{34}$$

düsturu şəklində yazılır, burada $d\omega$ – faza fəzasında həcm elementidir*. $p(t_0, \omega_0; t, \omega)$ ehtimal sıxlığı üçün (33) əsas tənliyi aşağıdakı kimi yazılır:

$$p(t_0, \omega; t_2, \omega_2) =$$

$$= \int_\Omega p(t_0, \omega_0; t_1, \omega_1)\, p(t_1, \omega_1; t_2, \omega_2)\, d\omega. \tag{35}$$

(35) tənliyini həll etmək olduqca çətindir, lakin məlum məhdudiyyətlərlə bu tənlikdən xüsusi törəməli tənliklər almaq olur və bunların öyrənilməsi asan olur. Bu tənliklərdən bəziləri çox da ciddi olmayan fiziki mülahizələrdən fizik Fokker və Plank tərəfindən alınmışdı. Stoxastik differensial tənliklər nəzəriyyəsi kimi adlandırılmış nəzəriyyə tam şəkildə sovet alimləri tərəfindən qurulmuşdu (S. N. Bernşteyn, A. N. Kolmoqorov, İ. Q. Petrovskiy, A. Ya. Xinçin və b.).

Biz bu tənliklər barədə burada yazmayacağıq.

Stoxastik differensial tənliklər metodu imkan yaradır ki, məs., sakit atmosferdə çox kiçik cismin orta enmə sürəti c, onun ölçüləri kiçik olduğundan, havanın molekullarının onun qarşı tərəflərinə zərbələri nəticəsində yaranan «Braun hərəkətinin» sürətindən çox kiçik olduğundan tamamilə

---

* Əslində, (34) bərabərliyi ehtimal sıxlığının tərifidir. $pd\omega$ kəmiyyəti – t_0-dan t anına qədər keçən müddətdə ω_0 vəziyyətindən həcm elementi $d\omega$-ya keçid ehtimalıdır (sonsuz kiçilən tərtib dəqiqliklə).

qərarlaşmadıqda, bu cismin hərəkəti haqqında məsələni asanlıqla həll etmək mümkün olur.

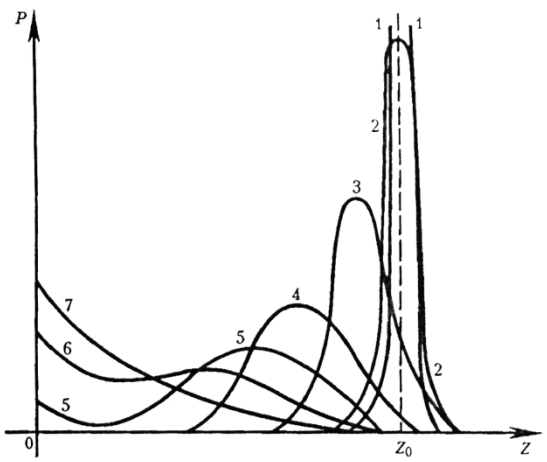
c – orta enmə sürəti, D – diffuziya əmsalı olsun. Əgər fərz edəriksə ki, hissəcik Yer səthində $(z=0)$ qala bilmir, yəni Yer səthinə çatan kimi Braun qüvvələrinin təsiri altında atmosferdə yenidən hərəkətini davam etdirir, t_0 anında hissəciyin z_0 hündürlüyündə olduğunu fərz edəriksə, hissəciyin t anında z hündürlüyündə olacağının ehtimal sıxlığı –

$$p(t_0, z_0; t, z) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi D(t-t_0)}}\left[e^{-\frac{(z-z_0)^2}{4D(t-t_0)}} + e^{-\frac{(z+z_0)^2}{4D(t-t_0)}}\right] e^{-\frac{c(z-z_0)}{2D} - \frac{c^2(t-t_0)}{4D}} +$$

$$+ \frac{c}{D\sqrt{5}} e^{-\frac{cz}{D}} \int_{\frac{z+z_0-c(t-t_0)}{2\sqrt{D(t-t_0)}}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz$$

düsturu ilə ifadə olunur.



şəkil 4

Şəkil 4-də t-nin ardıcıl anlarında $p(t_0, z_0; t, z)$ əyrilərinin nə cür dəyişməsi təsvir olunmuşdur.

Biz görürük ki, hissəciyin hündürlüyü orta qiymətcə azalır və onun vəziyyəti get-gedə qeyri-müəyyən (daha çox «təsadüfi») olur. Ən maraqlısı odur ki, ixtiyari t_0 və z_0 qiymətlərində və $t \geq 0$ olduqda

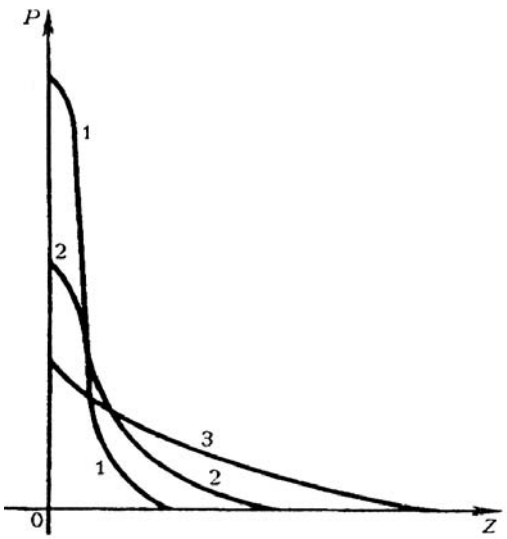
$$p\,(t_0,\, z_0;\; t,\, z) \;\to\; \frac{c}{D}\; e^{-\frac{c^2}{D}} \tag{36}$$

münasibəti ödənilir, yəni hissəciyin hündürlükləri üçün limit paylanması vardır və hissəciyin yerləşdiyi hündürlüyün riyazi gözləməsi t artdıqca müsbət limitə yaxınlaşır:

$$z^* = \frac{c}{D} \int_0^{\infty} z\, e^{-\frac{cz}{D}}\, d\, z = \frac{D}{c}. \tag{37}$$

Beləliklə, hissəcik yerdən yuxarıda olmasına baxmayaraq, ağırlıq qüvvəsinin təsiri altında həmişə aşağı enməyə meylli olur, o, bu prosesi qeyri-məhdud surətdə davam etdirdikcə (atmosferdə təsadüfi dolaşma hərəkəti edərək), orta hesabla müəyyən bir müsbət hündürlükdə olacaqdır.

Əgər biz başlanğıc z_0 qiymətini z^*-dan kiçik götürmüş olsaydıq, onda belə olacaqdı ki, olduqca böyük müddətdən sonra hissəciyin orta vəziyyəti başlanğıcdan hündür olacaqdır, necə ki, bu $z_0 = 0$ olduqda şəkil 5-də təsvir olunmuşdur.



şəkil 5

Ayrıca götürülmüş bir hissəcik üçün söhbət gedən z^* orta qiymətləri yalnız riyazi gözləmələrdir, lakin olduqca çox sayda hissəciklər üçün böyük ədədlər qanununa görə bunlar real olaraq alınacaqdır: bu növ hissəciklərin hündürlük üzrə yerləşməsi sıxlığı qeyd olunan qanunauyğunluqlarla baş verəcəkdir və xüsusilə də, kifayət qədər böyük zaman keçdikdən sonra (36) düsturu ilə uzlaşaraq stabilləşəcəkdir.

Bütün bu deyilənlərin hamısı c və D-nin atmosferin vəziyyəti ilə bağlı əvvəlcədən müəyyən edilmiş kəmiyyətlər olduğu fərz edildiyindən, yalnız havaya az konsentrasiyada qarışmış qazlara və tüstülərə tətbiq oluna bilinir. Lakin bəzi mürəkkəbləşdirilmələrlə bu nəzəriyyə atmosferi təşkil edən qazların qarşılıqlı diffuziyasına və bu diffuziya əsasında yaranan hündürlüklər üzrə sıxlıqların paylanmalarına tətbiq oluna bilinir.

Hissəciklərin öçüləri artdıqca $\frac{c}{D}$ nisbəti artır və buna görə də, onların yerlərini dəyişmə prosesi diffuzion xarakter əvəzinə §5-də baxılmış qanunlar üzrə qanunauyğun enmə xarakterinə malik olur. Nəzəriyyə sırf diffuziya hərəkəti və belə qanunauyğun enmə arasındakı bütün keçidləri izləməyə imkan verir.

Turbulent yerini dəyişmənin təsiri nəticəsində çəkili hissəciklərin atmosferdə hərəkəti məsələsi olduqca mürəkkəbdir, lakin prinsip etibarilə bu məsələ də analoji ehtimal metodlarına tabe oluna bilinər.

Ədəbiyyat

Populyar ədəbiyyat

Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я., Элементарное введение в теорию вероятностей, 3-е изд., М. – Л., 1952.

Müasir universitet kursları

Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 4-е изд., М. – Л., 1946,
Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 2-е изд., М. – Л., 1954.

Xüsusi monoqrafiya

Чандрасекар С., Перенос лучистой энергии, пер. с англ., М., 1953.
Эйнштейн А., Смолуховский М., Броуновское движение, пер. с нем., Сб. статей, М. – Л., 1936.

ENSİKLOPEDİK MƏQALƏLƏR

XIX əsrin əvvəllərinə qədər ensiklopediyalarda ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika məsələlərinə çox az yer ayrılmışdı. Bu mövzu üzrə ən ilkin (bəlkə də birinci) məqalə – X. Volfun (Ch. Wolff, 1716) «Stoxastika. Təkliflər məharəti», «Leksikona» (Mathematisches Lexicon) məqaləsi olmuşdu; bu məqalənin rus dilinə tərcüməsi «Математический энциклопедический словарь» (M., 1988, s. 776) adlı Ensiklopediyada dərc olunmuşdur. D. Didronun (D. Diderot) Ensiklopediyasında (Encyclopedie, P., 1751-80) və onun sistemləşdirilmiş nəşrində (Encyclopédie méthodique, P., 1782-1832) J. D'Alamber (J. D'Alembert) və M. Kondersenin (M. Condercet) ehtimal nəzəriyyəsi üzrə yazdıqları məqalələr dərc olunmuşdu; həcmi və məzmununa görə əsas məqalə – «Probabilité» M. Konderseyə məxsusdur.

XX əsrin əvvəllərinə qədər rus dilində nəşr olunmuş ensiklopediyalarda ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikaya bir o qədər də diqqət yetirilməmişdi, bu da görünür ki, elmlərin formalaşması ilə əlaqədar olmuşdu. Yalnız «Большая Советская энциклопедия» adlı ensiklopediyanın 1-ci nəşrində, 1936-da, xüsusilə də A. N. Kolmoqorovun bu redaksiyaya gəlişindən sonra, bu sahədə canlanma hiss olundu.

«Большая Советская энциклопедия»-nın 2-ci nəşrində nəzəri-ehtimali tematika olduqca layiqlə işıqlandırılmışdır. Məs., 18 məqalə A. N. Kolmoqorov tərəfindən yazılmışdır ki, bunlardan ən mühümləri aşağıda verilir.

BÖYÜK ƏDƏDLƏR QANUNU – elə bir ümumi prinsipdir ki, bu prinsipə əsasən çoxsaylı təsadüfi faktorların birgə təsiri, bəzi olduqca ümumi şərtlərdə, təsadüfdən asılı olmayan nəticəyə gətirir. Böyük ədədlər qanununun dəqiq ifadəsi və onun tətbiqi üçün şərtlər ehtimal nəzəriyyəsində verilmişdir. Böyük ədədlər qanunu – təsadüfilik və zərurilik arasındakı dialektik əlaqənin ifadələrindən biridir. Böyük ədədlər qanununun xüsusi halı, ilk dəqiq isbat olunmuş teorem Ya. Bernulliyə məxsusdur (1713-də ölümündən sonra dərc olunmuşdur). Bernulli teoremini Puasson ümumiləşdirmişdir və onun «Mülahizələrin ehtimalı haqqında tədqiqat» («Исследование о вероятности суждений», 1837)

əsərində «böyük ədədlər qanunu» termini ilk dəfə istifadə olunmuşdu. Bu terminin ən ümumi anlamı P. L. Çebışevin «Orta kəmiyyətlər haqqında» («О средних величинах») əsərində əsaslandırılmışdır. Bu müasir anlamda Böyük ədədlər qanununda iddia olunur ki, dəqiq göstərilən bəzi şərtlər ödənildikdə, olduqca böyük n qiymətlərində x_n təsadüfi kəmiyyətlərinin ədədi ortası –

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n},$$

vahidə olduqca yaxın ehtimalla öz riyazi gözləməsi $a = \mathbf{M}\,\bar{x}$ -dən olduqca az fərqlənir.

Çebışevin isbat etdiyi teoremin dəqiq ifadəsi belədir: əgər $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının elementləri cüt-cüt asılı olmayan və məhdud *dispersiyaları* olan, yəni

$$\mathbf{D}(x_k) = \mathbf{M}\{x_k - \mathbf{M}(x_k)\}^2 \le C$$

şərtini ödəyən təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda ixtiyari müsbət $\varepsilon > 0$ qiymətində $\left|\bar{x} - a\right| < \varepsilon$ bərabərsizliyinin ehtimalı $n \to \infty$ olduqda vahidə yaxınlaşır.

$\bar{x}$ ədədi ortasının və ya

$$X = x_1 + x_2 + ... + x_n = n\,\bar{x}$$

cəminin özünün uyğun riyazi gözləmələri a -dan və

$$A = \mathbf{M}(X) = n\,a$$

kəmiyyətindən yayınmalarının daha dəqiq xarakteri ehtimal nəzəriyyəsinin limit teoremlərində göstərilmişdir. $x - a$ yayınmalarının $\frac{1}{\sqrt{n}}$ tərtibdən, buna müvafiq olaraq, $X - A$ yayınmalarının isə $\sqrt{n}$ tərtibdən olduğu hal, ən tipik hal sayılır, baxmayaraq ki, a və A riyazi gözləmələri 1 və n tərtibdəndirlər. Məsələnin sadələşdirilmiş populyar şərtlərində bu münasibətlər bəzən «n-in kvadrat kökü qanunu» adlandırılır: asılı olmayan təsadüfi toplananların sayı artdıqca onların cəmi n-ə mütənasib olaraq artır, lakin bu qanunauyğun orta qiymətdən təsadüfi yayınmalar yalnız $\sqrt{n}$ -ə mütənasib olaraq artır. Bununla belə, məsələnin daha mürəkkəb anlaşılması üçün, daha dəqiq ifadələnmələrə müraciət etmək zəruridir; hər halda Böyük

ədədlər qanununun təsiri haqqında bu «kobud» təsəvvür, toplananların sayının nə dərəcədə böyük götürüləcəyi və Böyük ədədlər qanununun bundan sonra bu və ya digər hansı bir dəqiqliklə ödəniləcəyi haqqında mülahizə yürütməyə imkan yaradacaqdır.

Məs., əgər hər bir x_k toplananı yalnız iki: 1 və 0 qiymətlərini, $x_k = 1$ qiymətini p_k ehtimalı ilə və $x_k = 0$ qiymətini $1 - p_k$ ehtimalı ilə alarsa, asanlıqla hesablamaq olur ki,

$$a = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_m}{n}$$

olur, $\bar{x}$ isə $\frac{m}{n}$ tezliyinə çevrilir, burada m, $-\ k \le n$ nömrəli və 1-ə bərabər bütün r_k-ların sayıdır. Bu halda Böyük ədədlər qanunu onu ifadə edir ki, n-in böyük qiymətlərində $\frac{m}{n}$ tezliyi ehtimalların ədədi ortasına çox yaxın olur. Bu – Puasson Böyük ədədlər qanunudur. Puasson teoremi dəqiq belə ifadə olunur: əgər $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ – qarşılıqlı asılı olmayan təsadüfi hadisələrdirsə, m, $-\ k \le n$ nömrəli, həqiqətən də, baş verəcək A_k hadisələrinin sayı olduqda, $\frac{m}{n}$ tezlikləri üçün ixtiyari $\varepsilon > 0$ qiymətində

$$\left| \frac{m}{n} - a \right| < \varepsilon$$

bərabərsizliyin ehtimalı $n \to \infty$ olduqda vahidə yaxınlaşır. Puasson teoreminin ciddi isbatını P. L. Çebışev «Ehtimal nəzəriyyəsinin bir ümumi təklifinin elementar isbatı» («Элементарное доказательство одного общего предложения теории вероятностей», 1843) məqaləsində vermişdir. Bernulli teoremi Puasson teoreminin xüsusi halıdır, bu halda bütün p_k-lar eyni bir p ədədinə $(0 < p < 1)$ bərabər götürülür. Bernulli teoremində $a = p$ və bu halda böyük ədədlər qanununda hökm olunur ki, n-in böyük qiymətlərində, vahidə olduqca yaxın ehtimalla, $\frac{m}{n}$ tezliyi p ehtimalına olduqca yaxın olacaqdır.

Böyük ədədlər qanununun mənası və əhəmiyyəti haqqında təsəvvür aşağıdakı misaldan aydın olur. Qapalı qabda N sayda qaz molekulu vardır. Kinetik nəzəriyyəyə əsasən hər bir molekul qabın içərisində digər

molekullar tərəfindən və qabın divarlarından məruz qaldığı çoxsaylı zərbələr altında xaotik hərəkət edir. Seçilmiş zaman parçasının t saniyəsi ərzində qabın divarının hər hansı σ sahəsinə dəyən molekul bu sahəyə f_k impulsunu verir. f_k impulsu tipik təsadüfi kəmiyyətdir, baxılan qazın vəziyyəti yalnız bu impulsun

$$a = \mathbf{M}(f_k)$$

riyazi gözləməsini təyin etdiyindən, baxılan molekulun impulsunun faktiki qiyməti baxılan zaman parçasında ən müxtəlif qiymətlər (əgər baxılan molekul σ sahəsinə dəyməmişdirsə, sıfırdan başlayaraq) ala bilər. Bütün molekullardan baxılan müddət ərzində σ sahəsinə ötürülən impulsların cəmi –

$$F = \sum_{k=1}^{N} f_k ,$$

– riyazi gözləməsi $A = N\,a$ -ya bərabər təsadüfi kəmiyyətdir. Lakin burada böyük ədədlər qanununa əsasən (burada bu qanun N çox böyük ədəd olduğundan xüsusi bir dəqiqliklə aşkar olunur) F, həqiqətən də, ayrı-ayrı molekulların hərəkətində təsadüfi təsirlərdən, demək olar ki, asılı olmur, yəni, demək olar ki, dəqiqliklə öz riyazi gözləməsi A-ya bərabər olur. Kinetik nəzəriyyə nöqteyi-nəzərindən, bununla belə, bir fakt izah olunur: σ sahəsinə qazın təzyiqi praktiki olaraq, ciddi surətdə sabitdir və xaotik olaraq dəyişmir.

Çox vaxt böyük ədədlər qanununu, qaz molekulları ilə əlaqədar məsələdə olduğu kimi, təsadüfi toplananların sayı o qədər də böyük olmadığı halda tətbiq etmək məcburiyyəti yaranır; bu halda təsadüfi kəmiyyətlər cəminin bu cəmin riyazi gözləməsindən yayınmaları olduqca böyük ola bilər. Bu halda bu yayınmaları qiymətləndirməyi bacarmaq olduqca mühümdür. Məs., hər birində 100 ədəd hər hansı bir məmulat olan 1 000 partiyanın hər birindən ixtiyari 10 saydası sınaq üçün götürülmüşdür və yoxlanılmış 10 000 məmulatın 125-i qüsurlu olmuşdur. Əgər n_k ilə k-cı partiyadakı qüsurlu məmulatların sayını işarə edəriksə, onda qüsurlu məmulatların ümumi sayı –

$$n = \sum_{k=1}^{1\,000} n_k$$

olacaqdır; k -cı partiyadan sınaq üçün götürülmüş on məmulat arasında qüsurluların sayının (təsadüfi kəmiyyətdir) riyazi gözləməsi

$$S_k = \frac{10}{100} n_k$$

olacaqdır, hər birində 10 məmulat olmaqla 1 000 yoxlamada qüsurlu məmulatların ümumi sayının riyazi gözləməsi isə

$$S = \sum_{k=1}^{1\,000} S_k = \frac{1}{10} n$$

olacaqdır. Böyük ədədlər qanununa əsasən, $\frac{1}{10} \cdot n \sim 125$ götürmək təbiidir, yəni 100 000 məmulatdan ibarət bütün partiyalarda 1 250 qüsurlu vardır. Ehtimal nəzəriyyəsinin köməyilə daha dəqiq araşdırma belə nəticəyə gətirir: əgər hər bir partiyadan seçilmiş məmulatlar, doğrudan da, ixtiyari qaydada seçimdirsə, onda kifayət qədər əminliklə hökm etmək olar ki, faktiki olaraq, $1\,000 < n < 1500$, lakin $1\,100 < n < 1\,400$ götürülərsə, belə qiymətləndirilmə kifayət qədər etibarlı olmayacaqdır, $1200 < n < 1300$ qiymətləndirilməsi üçünsə heç bir ciddi əsas yoxdur. n üçün daha dəqiq qiyməti yalnız olduqca çox məmulatı sınaqdan keçirərək almaq olar.

Toplananların asılı olmamazlığı, əgər böyük ədədlər qanununun tətbiqlərinin əksəriyyətində yerinə yetirilirsə də, bu yalnız bu və ya digər yaxınlaşma ilə olur. Məs., qazın ayrı-ayrı molekullarının hərəkətinə aid birinci misalda bu hərəkətlərin bir-birindən asılı olmadığını iddia edə bilmərik. Buna görə də, a s ı l ı toplananlar halında böyük ədədlər qanununun tətbiq olunması üçün şərtlərin olduqca tam surətdə araşdırılmasının böyük əhəmiyyəti vardır. Bu istiqamətdə əsas riyazi işlər A. A. Markov, S. N. Bernşteyn və A. Ya. Xinçinə məxsusdur. Keyfiyyət etibarilə bu araşdırmaların nəticələrindən belə iddia etmək olar ki, əgər mühüm asılılıq yalnız bir-birilə qonşu və ya yaxın (nömrələrinə görə) toplananlar arasında olarsa, uzaq nömrəli toplananlar arasında asılılıq isə olduqca zəif olarsa, böyük ədədlər qanununu tətbiq etmək olar. Məs., temperatur və ya havanın təzyiqi üzərindəki meteoroloji müşahidələrin nəticələrinin sıralarında vəziyyət belədir. Buna görə də, baxılan bir bölgədə, ilin verilən bir anında temperatur və təzyiqlərin çoxillik orta qiymətləri baxılan ərazi üçün obyektiv xarakteristika olan və bunlar üçün hesablanmış riyazi gözləmələrə yaxın olur.

Böyük ədədlər qanunu ilə bağlı məsələlərin riyazi tərəfi «Ehtimal nəzəriyyəsini limit teoremləri» və «Ehtimal nəzəriyyəsi» məq.-də ətraflı işıqlandırılmışdır. Böyük ədədlər qanununun tətbiqlərində onun tətbiq olunması üçün şərtlərin nisbətən sadə riyazi ifadə olunmuşlarından istifadə etmək, adətən, kifayət edir, lakin onları real vəziyyətlə ədaqədar olaraq, olduqca diqqətlə yoxlamaq gərəkdir.

Əd.: Ч е б ы ш е в П. Л., О средних величинах, Полное собр. соч., т. 2, М. – Л., 1947; Б е р н ш т е й н С. Н., О работах П. Л. Чебышева по теории вероятностей, в кн.: Научное паследие П. Л. Чебышева [Сб. статей], в .1, М. – Л., 1945; Б е р н ш т е й н С. Н., Теория вероятностей, 4-е изд., М. – Л., 1946: К о л м о г о р о в А. Н., Роль русской науки в развитии теории вероятностей, «Ученые записи Московского гос. ун-та», 1947, в. 91, с. 53-64; Г н е д е н к о Б. В. и К о л м о г о р о в А. Н., Теория вероятностей в кн.: Математика в СССР за тридцать лет 1917-1947. Сб. статей под ред. А. Г. Куроша [и др.], М. – Л., 1948; Г н е д е н к о Б. В. и Х и н ч и н А. Я., Элементарное введение в теорию вероятностей, М. – Л., 2-е изд., 1950.

A. N. Kolmoqorov (БСЭ-2, 1950, том 5).

İNFORMASİYA – *kibernetikanın* əsas anlayışıdır. Bizim təfəkkürümüzün bizi maraqlandıran kəmiyyətlər və ya təzahürlər haqqında nəticə çıxarmaq üçün bu və ya digər «verilənlərdəki» informasiya üzərində işləməyə qadir olduğu barədə təsəvvürün hamı üçün anlaşılan olduğunu hesab etmək olar (məs., $x^2 = 1$ tənliyindəki informasiyanın, $x = \pm 1$ kimi nəticənin çıxarılmasında, baxılan gün ərzində meteoroloji stansiyalar şəbəkəsinin müşahidə nəticələrindəki informasiyanin qarşıdakı gün üçün hava proqnozunda). Kibernetikada belə növ təsəvvürlər ümumiləşdirilir və qəbul olunur, canlı orqanizm (şüurlu və şüursuz) və ya avtomatik işləyən maşınla yerinə yetirilən ixtiyari idarəetmə və ya tənzimləmə prosesində «giriş siqnallarındakı» informasiyanın yenidən işlənilib, «çıxış siqnal-larına» ötürülməsi baş verir. İnformasiya nəzəriyyəsi rabitə texnikasının ehtiyacları ilə bağlı yaranmışdı və o, teleqraf lentində tire və nöqtələrə, elektrik impulslarına və s. obyektlərə informasiya daşıyıcıları kimi baxır. Bütün bu hallarda informasiyanın m i q d a r ı, onun etibarlılığının çox və ya az tamlığı barədə danışmaq olar. İnformasiya haqqında bu anlayışın dəqiq tərifi və müxtəlif fikirlərin mənası barədə sual yaranırdı və çoxdan bəri müxtəlif xüsusi hallara tətbiq olunaraq, uğurla həll olunurdu. Bu qəbildən məntiqi problemlər bütün genişliyi ilə yalnız kibernetikada və

informasiya nəzəriyyəsində yaranır. informasiyaya onun 1) miqdarı, 2) məzmunu, 3) verilməsi üsulu nöqteyi-nəzərindən baxmaq olar.

Misal 1. Beşrəqəmli ədəd verildikdə ondakı minlik və onluqlar göstərildiyi haldakı informasiya, ondakı onluqların və vahidlərin göstərildiyi haldakı informasiya qədərdir və yalnız onun vahidləri göstərildiyi haldakı informasiyadan iki dəfə çoxdur. Ədədin yalnız vahidlərinin göstərildiyi haldakı informasiya, onun vahidlərinin və onluqların göstərildiyi informasiyanın tərkibində daşınır və o, bu sonuncunun yarısını təşkil edir.

Misal 2.

$$x^2 - y^2 = 0 \tag{1}$$

münasibətinin x və y məchulları barədə daşıdığı informasiya,

$$x - y = 0 \tag{2}$$

münasibətindəki informasiyanın tərkibində daşınır (çünki (2) (1)-dən alınır), lakin onunla üst-üstə düşmür [çünki (1) və (2) tənlikləri eyni güclü deyildirlər].

(1)-ə əsasən

$$x + y = 0 \tag{3}$$

olduğundan, (2) və (3) münasibətlərində daşınan informasiya

$$x = 0,\ y = 0 \tag{4}$$

bərabərlikləri ilə verilən informasiya ilə üst-üstə düşür [çünki (2) – (3) tənliklər sistemi (4) sistemi ilə eynigüclüdür]. (2) – (3) və (4) sistemlərində daşınan informasiya yalnız hansı formada verilməsi ilə fərqlənirlər.

Müxtəlif verilənlərin daşıdığı informasiyaların məzmun etibarilə üst-üstə düşməsi şərtləri barədə daha mürəkkəb məsələlər riyazi statistikada yaranmış və əsasən ingilis statistiki R. Fişer (1921) tərəfindən həll olunmuşdu. Statistika çoxsaylı müşahidə nəticələrilə iş görür və bunları tamamilə göstərmək əvəzinə, adətən, onların bəzi «sərbəst xarakteristikalarını» göstərir. Bəzən belə «əvəzləmədə» «informasiya itkisi» yaranır, lakin bəzi şərtlərdə yeni alınmış xarakteristikalar bütün verilənlərdə olan bütün informasiyanı daşıyır. Bu halda yeni alınmış xarakteristikaların məsələnin *məqbul statistikalar* sistemini əmələ gətirir.

İnformasiya miqdarını ölçmək üçün ümumi üsullar haqqında ilk dürüst təkliflər, məncə, R. Fişerə (riyazi statistikanın problemləri ilə bağlı) və

R. Hartliyə (informasiyanın rabitə kanalları ilə ötürülməsi və yaddaş qurğularında informasiyanın qorunub saxlanılması ilə bağlı) aiddir. Bu təkliflər öz axırıncı ifadəsini Amerika alimi K. Şennonun (1948) yaratdığı informasiya nəzəriyyəsində tapmış oldu.

Fərz olunur ki, əvvəlcədən məlumdur ki, a hadisəsi

$$a_1,\ a_2\ ,\ \dots\ ,\ a_m$$

variantlarından biri kimi baş verə bilər, bu barədə b məlumatı isə

$$b_1,\ b_2\ ,\ \dots\ ,\ b_n$$

tiplərindən biri ola bilər. İnformasiya nəzəriyyəsində fərz olunur ki, a və b birgə ehtimal paylanmasına malikdirlər:

$$P(a=a_i,\ b=b_j)\ =\ p\ (a_i,b_j)$$

və bu paylanma a və b-nin paylanmalarını ayrı-ayrılıqda təyin edir:

$$p(a_i)=\sum_j\ p(\ a_i,b_j\ ),$$

$$p\ (\ b_j\ )=\sum_i\ p(a_i,b_j\ ).$$

Şennona görə a hadisəsi barədə b-də olan informasiya miqdarı

$$\mathbf{I}(a\ ,\ b)=\sum_{i,j}\ p(a_i,b_j)\ \log_2\ \frac{p(a_i,b_j)}{p(a_i)p(b_j)} \tag{5}$$

düsturu ilə ifadə olunur (informasiya nəzəriyyəsində loqarifm 2 əsasına görə götürülür). Əgər hər bir b_j-yə yeganə bir a_i uyğun olursa və bu a_i üçün $p(a_i,b_j)$ ehtimalı müsbət olarsa, yəni a_i variantı b_j ilə birqiymətli təyin olunarsa, onda asanlıqla hesablamaq olur ki,

$$\mathbf{I}(a,\ b_j)=H(a)\ =\ \sum_i\ \ p(a_i)\ \log_2\ p(a_i)\ . \tag{6}$$

$H(a)$ kəmiyyəti $p(a_i)$ paylanmasının e n t r o p i y a s ı d ı r; $H(a)$, – a hadisəsinin baş verməsi üçün a_i variantlarından hansının baş verməsinin zəruriliyini dəqiq göstərmək üçün tam informasiya miqdarına bərabərdir. b_j-nin verilməsi a_i-ni birqiymətli təyin edə bilmədiyi bütün digər hallarda

$$\mathbf{I}(a, b) < H(a).$$

$$\mathbf{I}(a, b) \geq 0$$

münasibəti həmişə doğrudur;

$$\mathbf{I}(a, b) = 0$$

münasibəti, yalnız və yalnız, o halda doğru olur ki, a və b bir-birindən asılı olmasınlar, yəni

$$p(a_i, b_j) = p(a_i) \cdot p(b_j)$$

bərabərliyi ödənilsin. a hadisəsinin baş verməsi variantı birqiymətli göstərildiyi halda informasiya miqdarı aşağıdakı şərtlə təyin olunur:

$$\mathbf{I}(a, a) = H(a);$$

$$p(a_1) = p(a_2) = ... = p(a_m) = \frac{1}{m}$$

olduqda o,

$$H(a) = \log_2 m$$

maksimum qiymətini alır.

Bu nəticə informasiya miqdarının ehtimal nəzəriyyəsinə dəxli olmayan informasiya miqdarının digər mümkün ifadəsinə uyğundur. Əgər

$$2^{k-1} \leq m < 2^k$$

münasibəti ödənilərsə, onda

$$H(a) = \log_2 m \sim n$$

münasibəti təqribən ödənilir, burada n – ikilik işarələrinin (0 və ya 1) sayıdır və o, ixtiyari tam ədədin $1 \leq i \leq m$ sərhədlərində (yəni mümkün olan a_i qiymətlərinin nömrəsi i-nin) ikilik sistemində yazılışı üçün kifayət edir.

A. N. Kolmoqorov (БСЭ-2, 1958, том 51).

KORRELYASİYA (riy.), – təzahürlər (təsadüfi hadisə və ya proseslər) arasında əlaqədir. Korrelyasiya anlayışı funksional asılılıq anlayışından daha ümumidir. Məs., məlumdur ki, uca boylu valideynlərin uşaqları da kiçik boylu valideynlərin uşaqları ilə müqayisədə uca boylu olurlar. Bununla belə, ata və ananın boyu məlum olduğu halda hər bir ayrı-ayrı halda uşağın boyunu hesablamaq mümkün deyildir. İki təzahür arasında korrelyasiya iki halda yaranır: ya bu təzahürlərdən biri bu təzahürü təyin edən səbəblər arasında olduqda və ya hər iki təzahürə təsir göstərən ümumi səbəblər olduqda. İki təzahür arasında korrelyasiya haqqında mülahizənin obyektiv məna daşıması üçün zəruridir ki (funksional asılılıq kimi xüsusi hal istisna olunur), baxılan təzahürlər qeyri-məhdud dəfə təkrar oluna bilinsin və bu zaman baş verə biləcək kombinasiyaların *ehtimalları* haqqında danışmaq mümkün ola bilsin.

İki hadisə arasında korrelyasiya. İki – A və B hadisələrinə baxaq. A hadisəsinə əks olan hadisəni $\overline{A}$ ilə (yəni A hadisəsi baş vermədikdə baş verən hadisəni), B-yə əks hadisəni $\overline{B}$ ilə işarə edək. Əgər B hadisəsi A hadisəsi hər dəfə baş verdikdə baş verirsə və əksinə, A hadisəsi hər dəfə B hadisəsi baş verdikdə baş verirsə, onda A və B hadisələri bir-birilə *düz funksional asılılıqla* əlaqəlidirlər. Əgər A hadisəsi, yalnız və yalnız, B hadisəsi baş vermədikdə baş verirsə, onda A və B *tərs funksional asılılıqla* əlaqəlidirlər. Bu iki hal istisna olunmaqla, A və B hadisələri arasında asılılığı qiymətləndirmək üçün ehtimal anlayışından hökmən istifadə olunmalıdır. $P_A(B)$, – A hadisəsi baş verdiyi halda B hadisəsinin ehtimalı, $P_{\overline{A}}(B)$, – A hadisəsi baş vermədiyi halda B hadisəsinin ehtimalı olsun. Əgər $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B)$ olarsa, onda B hadisəsi A hadisəsindən asılı deyildir. $\rho_B = P_A(B) - P_{\overline{A}}(B)$ fərqinə B hadisəsinin A hadisəsinə nəzərən reqressiya əmsalı deyilir.

Belə bir misala baxaq: difteriyanın müalicəsində difteriya əleyhinə zərdab istifadə olunur. Zərdabın istifadə olunmasını A, xəstənin sağalmasını B ilə işarə edək. Əgər zərdab tətbiq olunduqda bütün xəstələr sağalsaydı və əgər o, tətbiq olunmadıqda onların hamısı ölsəydi, onda bu düz funksional asılılıq olardı; əgər $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B)$ olsaydı, yəni sağalma halları həm zərdab tətbiq olunduqda, həm də tətbiq olunmadıqda bərabər olsaydı, onda aydındır ki, zərdabın tətbiqi mənasız olardı, çünki onsuz, yuxarıda verilmiş tərifə görə, B hadisəsi (sağalma) A hadisəsindən (zərdabın

tətbiqi) asılı olmazdı. Əgər, məs., $P_A(B) = 0{,}97$, $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}85$ olarsa, onda reqressiya əmsalı $\rho_B = 0{,}12$, zərdabın tətbiqi və sağalma arasında müsbət əlaqənin olduğunu göstərərdi.

Reqressiya əmsalı ρ_B – funksional əlaqə müsbət olduqda +1, B-nin A-dan asılı olmadığı halda – sıfra, funksional əlaqə mənfi olduqda –1-ə bərabərdir; digər hallarda 0, –1 və +1 arasında, sıfırdan fərqli qiymətlər alır. Misalların çoxunda A və B arasında əlaqəni hökmən B hadisəsinin A hadisəsinə nəzərən $\rho_B = P_A(B) - P_{\overline{A}}(B)$ reqressiya əmsalı, və ya, A hadisəsinin B hadisəsinə nəzərən analoji reqressiya əmsalı $\rho_A = P_B(A) - P_{\overline{B}}(A)$ vasitəsilə təyin etmək üçün heç bir əsas yoxdur. Bu halda A və B hadisələri arasında korrelyasiya əmsalı – $R = \pm\sqrt{\rho_A \rho_B}$ istifadə oluna bilinər. R-in işarəsi reqressiya əmsallarının hər ikisinin işarəsi ilə üst-üstə düşməlidir (onların hər ikisinin də işarəsi həmişə eyni olur). Korrelyasiya əmsalı, yalnız və yalnız, o halda sıfra bərabər olur ki, A və B asılı olmayan hadisələr olsun (əgər B hadisəsi A hadisəsindən asılı deyildirsə, onda asanlıqla isbat olunur ki, A hadisəsi də B-dən asılı deyildir və yalnız onlar arasında funksional asılılıq olduğu halda o, ± 1-ə bərabər olur, yəni $R = \pm 1$ olur.

İki kəmiyyət arasında korrelyasiya. Əgər x-in hər bir qiymətinə tamamilə müəyyən bir $y = f(x)$ kəmiyyəti uyğun olursa, y kəmiyyəti x-dən funksional asılıdır. Əgər belə asılılıq yoxdursa, onda statistik təzahürlər halında (bu təzahürlərin müəyyən ehtimallarla qeyri-məhdud surətdə təkrarlanan olduğu hallarında) biz, x-in hər bir mümkün qiyməti üçün uyğun $\mathbf{M}_x(y) = f(x)$ *riyazi gözləməsini* təyin edə bilərik.

$y = f(x)$ tənliyinə *y kəmiyyətinin x-ə nəzərən reqressiya tənliyi,* (x, y) müstəvisində $y = f(x)$ əyrisinə *y-in x-ə nəzərən reqressiya əyrisi* deyilir. y-in riyazi gözləməsini (şərtsiz riyazi gözləməsini) $a_y = \mathbf{M}(y)$ ilə işarə edək. x və y kəmiyyətləri asılı olmadıqları halda reqressiya tənliyi $y = a_y$ şəklində olur [çünki, bu halda $\mathbf{M}_x(y) = \mathbf{M}(y) = a_y$]. Qeyd edək ki, reqressiya tənliyinin $y = a_y$ olmasından x və y-in asılı olmamazlığı alınmır; məs., x dəyişdikdə y-in riyazi gözləməsi dəyişməz qala bilər, lakin y-in heç olmasa, $\mathbf{M}_x(y - a_y)^2$ ilə ölçülə bilən orta dəyişikliyi x-dən asılı ola bilər. Reqressiya tənliyinin

y-in dəyişməsini nə dərəcədə yaxşı verə bilməsini təyin etmək, başqa sözlə, x və y arasındakı asılılığın funksional asılılığa nə dərəcədə yaxın olduğunu təyin etmək arzusu təbiidir. Bu suala cavabı y-in x-ə korrelyasion nisbəti verir [*Pirson* tərəfindən daxil olunmuşdur, bax]:

$$P_y = + \sqrt{1 - \frac{\mathbf{M}[y - \mathbf{M}_x(y)]^2}{\mathbf{M}(y - a_y)^2}}$$

$P_y = 0$, yalnız və yalnız, reqressiya tənliyi $y = a_y$ şəklində olduqda olur; yəni y-in riyazi gözləməsi x-dən asılı olmasın; $P_y = +1$ – yalnız y-in x-dən asılı olduğu halda doğrudur. Digər hallarda P_y, – 0 və +1 arasında qiymətlər alır.

Praktiki olaraq, reqressiya tənliyi məhdud sayda, məhdud dəqiqliyə malik müşahidələr üzrə hesablanılır. Sınağın verilənləri bilavasitə korrelyasion cədvəllə ifadə olunur; bu cədvəldə x və y kəmiyyətlərinin qiymətlərinin verilən hər hansı kombinasiyasının müşahidələrin neçəsində alındığı göstərilir (bax, cədvəl 1-də sxematik misal).

Cədvəl 1

y	x									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	–	1	–	–	–	–	–	1	1
2	1	1	2	–	–	–	1	2	–	2
3	–	2	1	3	1	1	–	4	2	–
4	–	–	–	1	4	3	4	1	–	–
5	–	–	–	–	2	3	–	–	–	–

Əgər x-in hər bir ayrıca qiymətinə çoxsaylı ayrı-ayrı müşahidələr uyğun olursa, onda reqressiya əyrisi $y = f(x)$ təqribi olaraq olduqca sadə təyin oluna bilinir: hər bir $x = x_i$ qiyməti üçün y kəmiyyətinin orta qiyməti $\bar{y}_i$, müşahidələrdə verilmiş $x_i = x_i$, $\bar{y}_i = f(x_i)$ qiyməti ilə təyin olunur və o, reqressiya əyrisini təqribən ifadə edir. Lakin hər bir $x = x_i$ qiymətinə uyğun müşahidələr sayı kifayət qədər böyük olmazsa, onda belə metod tamamilə təsadüfi nəticələrə gətirə bilər.

Cədvəl 2-də cədvəl 1-də verilmiş qiymətlərə uyğun $\bar{y}_i$-lər verilir. Sadə sağlam düşüncədən belə nəticəyə gəlmək olur ki, reqressiya əyrisi

$y = f(x)$, $x = 1$ olduqda təxminən 1,5-dən təxminən 4-ə qədər $x = 5$ və ya 6 ətrafında qalxaraq, x-in sonrakı artan qiymətlərində yenidən aşağı enməlidir. Lakin, məs., $x = 2$ olduqda, $\bar{y}_i$-nin əlavə maksimumunun $x = 3$-ə bərabər olduğu halda $\bar{y}_i$-nin sonradan azalması kimi halları, müşahidələrin verilmiş sayında tamamilə təsadüfi hesab oluna bilinər.

Cədvəl 2

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{y}_i$	1,5	2,7	2,0	3,2	4,1	4,4	3,4	2,8	2,2	1,7

İki kəmiyyət arasında normal korrelyasiya. (eht. nəz.-də) Akad. S. N. Bernşteynin nəzəri cəhətdən ən müfəssəl surətdə öyrənmiş olduğu bir sıra əsaslara görə, iki x və y kəmiyyətləri arasında korrelyasion asılılıq əksər hallarda məlum yaxınlaşma ilə normal sayılır, yəni koordinatları x və y olan nöqtənin (x, y) müstəvisinin hər hansı bir g oblastına düşməsi ehtimalı təqribən

$$\frac{1}{\Delta} \iint\limits_{g} e^{\frac{-1}{2(1-R^2)}\left[\frac{(x-a_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-a_y)^2}{\sigma_y^2} - \frac{2R(x-a_x)(y-a_y)}{\sigma_x \sigma_y}\right]} dx\, dy$$

inteqralı ilə ifadə olunacaqdır, burada $\Delta = 2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-R^2}$, $a_y = \mathbf{M}(y)$, $\sigma_y = +\sqrt{\mathbf{M}(y-a_y)^2}$, – y kəmiyyətinin riyazi gözləməsi və kvadratik orta yayınması, $a_x = \mathbf{M}(x)$, $\sigma_x = +\sqrt{\mathbf{M}(x-a_x)^2}$, – x kəmiyyətinin riyazi gözləməsi və kvadratik orta yayınması və nəhayət, R, – x və y kəmiyyətlərinin korrelyasiya əmsalıdır:

$$R = \frac{\mathbf{M}\{(x-a_x)(y-a_y)\}}{\sigma_x\ \sigma_y}.$$

Normal korrelyasiya halında reqressiya tənliyi $y = f(x)$ aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$y = a_y + \rho_y(x - a_x),$$

burada

$$\rho_y = R \frac{\sigma_y}{\sigma_x},$$

yəni normal korrelyasiya halında reqressiya əyrisi – düzxətdir. Normal korrelyasiya halında korrelyasion Pirson nisbəti P_y korrelyasiya əmsalı R-ə bərabərdir. Korrelyasiya əmsalının x və y arasında normal asılılıq-dan olduqca çox fərqlənən əlaqələr halında, asılılıq ölçüsü kimi istifadə edilməsi, bəzən səhv nəticələrə gətirir, belə ki, korrelyasiya əmsalı hətta y x-dən funksional asılı olan halda belə sıfra bərabər ola bilər. Cədvəl 1-dən y-in x ilə olduqca güclü əlaqəsi olduğunu görünür, lakin bununla belə korrelyasiya əmsalı sıfra yaxındır. Bir də qeyd edək ki, normal korrelyasiya halında x-in y-ə nəzərən reqressiya tənliyi –

$$x = a_x + \rho_x (y - a_y)$$

şəklində ifadə olunur, burada

$$\rho_x = R \frac{\sigma_x}{\sigma_y}.$$

ρ_y və ρ_x əmsalları y-in x-ə nəzərən və x-in y-ə nəzərən reqressiya əmsalları adlanır. ρ_x və ρ_y-in işarələri həmişə eynidir (və R-in işarəsi ilə üst-üstə düşür). Aydındır ki, $R = \pm \sqrt{\rho_x \rho_y}$. K. əmsalı faktiki olaraq, aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$R^* = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}},$$

burada $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i$, n – müşahidələr sayı, x_i və y_i, – x və y-in i-ci müşahidədəki qiymətləridir. Bu düstur – verilən müşahidələr sırasının empirik korrelyasiya əmsalı adlandırılan R^* üçün bilavasitə verilən korrelyasiya əmsalıdır. Ayrı-ayrı müşahidələrin sayı n-in böyük qiymətlərində R^* empirik korrelyasiya əmsalı əsl korrelyasiya əmsalı R-ə yaxın olur.

Cədvəl 3 normal korrelyasiya hipotezi ilə yaxşı uzlaşan korrelyasion əlaqəyə bir misaldır. Burada empirik korrelyasiya əmsalı R^*, $0,6279$-a bərabərdir. Müşahidələr sayı tamamilə kifayət edir ki, R-in R^*-ya olduqca yaxın olduğu hesab edilsin.

Cədvəl 3. – Əsgəri xidmətə çağrılanların boyu və çəkisi arasında korrelyasion əlaqə

Çəki kq	boy sm-lə								
	154-ə kimi	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182	182-dən çox
45-ə kimi	32	42	29	9	1	2	–	–	–
45-49	63	304	421	233	60	9	3	–	–
49-53	40	273	952	1.050	433	91	13	2	–
53-57	13	174	874	1.730	1.288	482	60	12	1
57-61	7	43	317	1.175	1.543	947	219	29	–
61-65	–	7	87	381	903	866	360	61	7
65-69	–	1	4	61	245	377	231	80	8
69-73	–	–	1	13	43	86	91	48	9
73-77	–	–	2	2	6	27	31	14	13
77-dən çox	–	–	–	–	5	10	9	11	3

Toplam korrelyasiya (rus. множественная корреляция). İkidən çox hadisələr və kəmiyyətlər arasında əlaqə analoji üsullarla öyrənilir. Bir çox tətbiqi məsələlərdə (məs., məhsuldarlığın proqnozu, çayların daşması) naməlum kəmiyyəti məlum kəmiyyətlər sırası ilə əlaqələndirən reqressiya tənliklərinin tətbiq olunması böyük əhəmiyyətə malikdir. Toplam korrelyasiya halında çox da olmayan müşahidələrdən alınmış verilənlər əsasında nəticələr çıxarmaq olduqca təhlükəlidir. Korrelyasiya nəzəriyyəsinin əsas problemlərindən biri – etibarlı reqressiya tənliklərinin tətbiq olunması üçün bu və ya digər şəraitlərdə kifayət ediləcək müşahidələr sayının nə qədər olmasının aydınlaşdırılmasıdır.

Əd.: Определения и основные понятия, см. – Б е р н ш т е й н С. Н., Теория вероятностей, 3 изд., М. – Л., 1934; С л у ц к и й Е. Е., Теория корреляции и элементы учения о кривых распределения, Киев, 1912;

Ч у п р о в А А., Основные проблемы теории корреляции. О статистическом исследовании связи между явлениями, [M.], 1926; T s c h u p r o w A. A., Grundbegriffe und Grundprobleme der Korrelationstheorie, Lpz., 1925.

A. N. Kolmoqorov (БСЭ-1, 1937, том 34).

KORRELYASİYA (r i y a z i s t a t i s t i k a d a) – ümumiyyətlə, ciddi funksional asılılığa malik olmayan statistik və ehtimali asılılıqdır. Funksional asılılıqdan fərqli olaraq, korrelyasion asılılıq yalnız o halda yaranır ki, dəyişənlərdən biri yalnız ikincinin verilənlərindən deyil, həmçinin bir sıra dəyişən şərtlərdən də asılı olur və ya hər iki dəyişən onların hər ikisi üçün ümumi olan müəyyən şərtlərdən asılı olur. Bu növ asılılıq cədvəl 1-də verilmişdir. Cədvəldən görünür ki, şam ağacının hündürlüyü o r t a q i y m ə t c ə artdıqda, onların gövdələrinin diametri də artır; lakin verilmiş hündürlüklü şam ağaclarının (məs., 23 m.) diametrlərinin *paylanması* olduqca yayınmalara malik olur. Əgər orta hündürlüyü 23-metrlik şam ağacları 22-metrlik ağaclardan qalın gövdəli olarsa, ayrı-ayrı şam ağacları üçün bu nisbət fərqli dərəcədə pozula bilər.

C ə d v ə l 1. – 624 ədəd Şimal şam ağaclarının gövdələrinin diametrlərinin və hündürlüklərinin paylanması.

Diametr sm.-lərlə	Hündürlük (m.-lərlə)														
	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	Cəmisi
14-17	2	2	5	1											10
18-21	1	3	3	12	15	9	4								47
22-25	1	1	1	3	18	24	29	14	7						98
26-29					7	18	30	43	31	3	2				134
30-33					1	5	18	29	35	18	7	1			114
34-37						1	3	17	33	26	12	6			98
38-41							2	2	10	19	16	4			53
42-45									4	13	6	8		1	32
46-49									3	7	6	2	1		22
50-53									1	4	4	2	1		12
54-57										1	1	1			3
58 və daha çox											1				1
Cəmisi	4	6	9	16	41	57	86	108	124	91	55	24	2	1	624

Obyektlərin geniş bir toplusunda dəyişənlərin statistik korrelyasiyası müxtəlif üsullarla riyazi olaraq, xarakterizə oluna bilinər. İki kəmiyyət

dəyişənlərinin arasındakı korrelyasiya halında ən çox istifadə olunan korrelyasiya əmsalı –

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})\,(y_i - \bar{y})}{\sigma_x\,\sigma_y}$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada n – araşdırılan toplumun obyektlərinin sayı, x_i və y_i, – i nömrəli obyekt üçün birinci və ikinci dəyişənin uyğun qiymətləri,

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,,\quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

– dəyişənlərin orta qiymətləri,

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2\,,$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

isə bu dəyişənlərin dispersiyalarıdır. *Statistik korrelyasiya*. – araşdırılan obyektlər çoxluğu sonlu olduqda və öyrənilən dəyişənlər arasında qanunauyğun əlaqənin mövcudluğunu göstərə bildiyi halda ən çox maraq kəsb edə bilir.

Bundan sonrakı şərh, əsas etibarilə, ehtimal nəzəriyyəsi terminlərilə verilir.

İki hadisə arasında korrelyasiya. İki A və B hadisələrinə baxaq. A hadisəsinə əks hadisəni $\overline{A}$ ilə (yəni A hadisəsi baş vermədikdə baş verən), B hadisəsinə əks hadisəni $\overline{B}$ ilə işarə edək. Əgər B hadisəsi baş verdikdə hər dəfə A hadisəsi də baş verirsə və B baş verdikdə A baş verirsə, A və B hadisələri bir-birilə düz ciddi asılılıqla əlaqəlidirlər. Əks xarakterli ciddi asılılıq – A hadisəsi, yalnız və yalnız, B hadisəsi baş vermədikdə baş verdikdə müşahidə oluna bilinər və əksinə. Bu iki kənar hallar istisna olunmaqla A və B hadisələri arasında əlaqənin qiymətləndirilməsi üçün

ehtimal anlayışından istifadə olunur. $P(B \setminus A)$, – A hadisəsinin baş verməsi şərtinə nəzərən B hadisəsinin baş verməsi ehtimalı, $P(B \setminus \overline{A})$ isə A hadisəsinin baş verməməsi şərtinə nəzərən B hadisəsinin baş verməsi ehtimalı olsun. Əgər $P(B \setminus A) = P(B \setminus \overline{A})$ olarsa, onda B hadisəsi A hadisəsindən asılı deyildir.

$$\rho_B = P(B \setminus A) - P(B \setminus \overline{A})$$

fərqi B hadisəsinin A hadisəsinə nəzərən r e q r e s s i y a ə m s a l ı adlandırılır.

Belə bir misala baxaq: difteriyanın müalicəsində difteriya əleyhinə zərdab tətbiq olunur. Zərdabın tətbiq olunmasını A, xəstənin sağalmasını B ilə işarə edək. Əgər zərdab tətbiq olunduqda bütün xəstələr sağalmış olsaydı, lakin onun tətbiq olunmadığı bütün hallarda bütün xəstələr dünyalarını dəyişmiş olardılarsa, onda düz ciddi asılılıq halı ilə qarşılaşırıq; əgər $P(B \setminus A) = P(B \setminus \overline{A})$ bərabərliyi ödənilsəydi, yəni sağalma hallarının nisbi miqdarları, zərdabın tətbiq edilib-edilməməsindən asılı olmayaraq eyni olardı, onda aydındır ki, yuxarıda verilən tərifə uyğun olaraq, B hadisəsi (sağalma) A hadisəsindən (zərdabın tətbiqi) asılı olmamalı idi. Məs., əgər $P(B \setminus A) = 0{,}97$, $P(B \setminus \overline{A}) = 0{,}85$ olarsa, onda reqressiya əmsalının $\rho_B = 0{,}12$ qiyməti zərdabın tətbiqi ilə sağalma arasında müsbət əlaqənin olduğunu göstərmiş olardı.

Düz ciddi asılılıqda reqressiya əmsalı $\rho_B = +1$, B hadisəsi A-dan asılı olmadıqda $\rho_B = 0$, əks ciddi asılılıq halında $\rho_B = -1$; digər hallarda reqressiya əmsalı –1 və +1 arasında sıfra bərabər olmayan qiymətlər alır.

Bir çox məsələlərdə A və B arasındakı əlaqəni reqressiya əmsalının

$$\rho_A = P(A \setminus B) - P(A \setminus \overline{B})$$

analoji ifadəsinin köməyilə deyil, hökmən ρ_B əmsalı vasitəsilə ölçmək üçün heç bir əsas yoxdur. Bu halda hətta A və B hadisələri arasında korrelyasiya əmsalı

$$R = \pm\sqrt{\rho_A \rho_B}$$

də istifadə oluna bilinər. R-in işarəsi reqressiya əmsallarının hər ikisinin də əmsallarının işarələri ilə üst-üstə düşməlidir (bunlar həmişə eyni

işarəlidir). Korrelyasiya əmsalı, yalnız və yalnız, A və B hadisələri asılı olmadıqları halda sıfra bərabər olur (əgər B hadisəsi A-dan asılı deyildirsə, onda A hadisəsinin B-dən asılı olmamazlığı asanlıqla isbat olunur) və ± 1 qiymətlərini, yalnız və yalnız, ciddi asılı olmamazlıq halında alır.

İki kəmiyyət arasında korrelyasiya. Əgər ξ və η təsadüfi kəmiyyətləri arasında ciddi (funksional) əlaqə yoxdursa, müəyyən ehtimallar verildiyi hallarda, ξ təsadüfi kəmiyyətinin hər bir mümkün $\xi = x$ qiyməti üçün uyğun $\mathbf{M}(\eta \mid \delta = x) = f(x)$ şərti riyazi gözləməsini təyin etmək olur. $y = f(x)$ tənliyi – η *kəmiyyətinin* ξ*-yə nəzərən reqressiya tənliyi*, xoy müstəvisində $y = f(x)$ əyrisi isə η*-nın* ξ*-yə nəzərən reqressiya əyrisi* adlandırılır. $m_\eta = \mathbf{M}(\eta)$ ilə η-nın şərtsiz riyazi gözləməsini işarə edək. ξ və η – asılı olmayan kəmiyyətlər olduqda, reqressiya tənliyi $y = m_\eta = \text{const}$ münasibətilə ifadə olunur, yəni $\mathbf{M}(\eta \mid \xi = x) = \mathbf{M}(\eta)$ olduqda bütün şərti riyazi gözləmələr şərtsiz riyazi gözləmələrlə üst-üstə düşür. Tərsi həmişə doğru olmur. ξ-nin aldığı qiymətlər dəyişdikcə reqressiya tənliyinin η-nın dəyiş-məsinə necə təsir etməsini təyin etmək arzusu, başqa sözlə, asılılığın ciddi asılılığa nə dərəcədə yaxın olmasını təyin etmək arzusu təbiidir. Bu məqsədlə $\xi = x$ verilmiş qiymətində η-nın şərti dispersiyasından və ya onun orta qiyməti – η-nın *reqressiya əyrisi ətrafında dispersiyası* –

$$\sigma^2_{\eta|\xi} = \mathbf{M}\,[\,\eta - \mathbf{M}(\eta \mid \xi = x)\,]^2$$

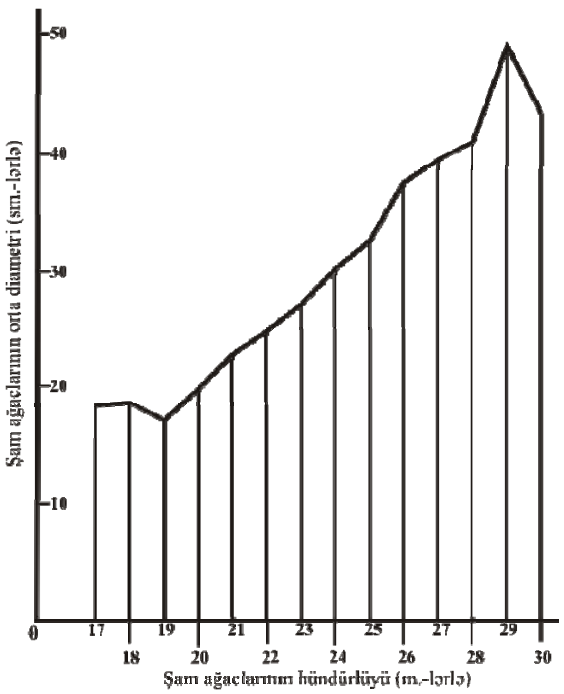
kəmiyyətindən istifadə etmək olar. Əlaqə göstəricisi kimi, adətən,

$$\theta^2_{\eta\,|\,\xi} = 1 - \frac{\sigma^2_{\eta\,|\,\xi}}{\sigma^2_\eta}$$

– *korrelyasion münasibətinə* baxılır, burada σ^2_η, – η kəmiyyətinin dispersiyasıdır. $\theta^2_{\eta\,|\,\xi}$ korrelyasion münasibəti də analoji təyin olunur. $\theta^2_{\eta\,|\,\xi}$ kəmiyyəti, yalnız və yalnız, reqressiya tənliyi $y = m_\eta$ şəklində

olduğu halda, yəni η -nın riyazi gözləməsi ξ -dən asılı olmadığı halda sıfra bərabər olur; $\theta^2_{\eta|\xi}$, – η kəmiyyətinin ξ -dən ciddi asılılığı halında +1-ə bərabər olur. Digər hallarda $\theta^2_{\eta|\xi}$, – 0 və +1 arasında qiymətlər alır.

Ehtimali reqressiya əyrisi olduqca geniş korrelyasion cədvəl üzrə təqribi olaraq yenidən bərpa oluna bilinər; $f(x)$ -ın təqribi qiyməti kimi η -nın $\xi = x$ olduğu haldakı müşahidələrdə aldığı qiymətlərin ədədi ortası götürülür. Lakin, ξ -nin hər bir qiymətinə uyğun müşahidələrin sayı çox da böyük olmazsa, onda belə metod tamamilə təsadüfi nəticələrə gətirilə bilər.



şimal şam ağaclarının orta diametrinin hündürlükdən asılılığı üçün reqressiyanın statistik asılılığı

Şəkildə, araşdırılmış şam ağaclarının diametrlərinin orta uzunluğunun onların hündürlüyündən asılılığı, cədvəl 2-yə müvafiq olaraq, statistik reqressiya əyrisi təsvir olunmuşdur. Göründüyü kimi bu xətt orta hissədə əsl qanunauyğunluğu yaxşı ifadə edir. Reqressiya xəttinin 29 m. və 30 m.

hündürlüyə uyğun nöqtələri materialın kifayət qədər olmaması səbəbindən etibarlı deyildirlər. 17, 18 və 19 m. hündürlüklərə uyğun nöqtələr materialın seçilməsi sistemi ilə təhrif olunmuşdur: cədvələ yalnız diametrləri ≥ 14 sm. olan şam ağacları daxil olmuşdur.

Cədvəl 2. – Orta diametrləri asılılığı
(cədvəl 1-in verilənləri üzrə)

	Hündürlük (m.-lərlə)														Cəmisi
	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Şam ağaclarının sayı	4	6	9	16	41	57	86	108	124	91	55	24	2	1	624
Orta diametr (sm.-lərlə)	18,5	18,8	17,7	20	22,9	25	27,2	30,1	32,7	38,3	40	41,8	42,8	43,5	31,2

Riyazi statistikada məhdud statistik material üzrə reqressiya əyrilərinin və korrelyasion münasibətin təqribi tapılması üçün digər, daha mükəmməl üsullar, həmçinin statistik tapılmış belə reqressiya əyrilərinin və korrelyasion münasibətin dəqiq qiymətləndirilməsi üsulları işlənilmişdir.

İki kəmiyyət arasında normal korrelyasiya. ξ və η kəmiyyətləri arasındakı korrelyasion asılılığın bir çox hallarda məlum yaxınlaşma ilə normal olduğunu, sovet riyaziyyatçısı S. N. Bernşteyn, bir sıra əsaslandırılmalarla ən mükəmməl surətdə nəzəri cəhətdən öyrənmişdir, yəni o göstərmişdir ki, koordinatları x və y olan nöqtənin xOy müstəvisinin hər hansı G oblastına düşməsi ehtimalı təqribi olaraq

$$\frac{1}{\Delta} \iint\limits_{G} e^{Q(x,y)}\, dx\, dy$$

inteqralı ilə ifadə olunacaqdır, burada

$$Q(x,y) = \frac{-1}{2(1-R^2)} \times$$

$$\times \left[\frac{(x-m_\xi)^2}{\sigma_\xi^2} + \frac{(y-m_\eta)^2}{\sigma_\eta^2} - \frac{2\,R(x-m_\xi)\,(y-m_\eta)}{\sigma_\xi\,\sigma_\eta} \right].$$

$$m_\xi = \mathbf{M}(\xi),\ \ m_\eta = \mathbf{M}(\eta),$$
$$\sigma_\xi^2 = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^2\ ,\ \ \sigma_\eta^2 = \mathbf{M}(\eta - \mathbf{M}\eta)^2$$

– ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərinin riyazi gözləməsi və dispersiyası, $\Delta = 2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta\sqrt{1-R^2}$ və R, – ξ və η kəmiyyətlərinin korrelyasiya əmsalıdır –

$$R = \frac{\mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)\ (\eta - \mathbf{M}\eta)}{\sigma_\xi\ \sigma_\eta}.$$

Normal korrelyasiya halında reqressiya tənliyi $y = f(x)$ aşağıdakı şəkildə ifadə olunur:

$$y = m_\eta + \rho_\eta\ (x - m_\xi),$$

burada

$$\rho_\eta = R\,\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi},$$

yəni reqressiya əyrisi – düzxətdir. Normal korrelyasiya halında korrelyasion nisbət $\theta^2_{\xi|\eta}$ – korrelyasiya əmsalı R-ə bərabərdir. Normaldan olduqca fərqlənən əlaqələr halında ξ və η arasında asılılıq ölçüsü olaraq, korrelyasiya əmsalının istifadə olunması bəzən səhv nəticələrə gətirir, belə ki, korrelyasiya əmsalı hətta η-nın ξ-dən adi asılı olduğu halda belə sıfra bərabər ola bilir. Bir də onu qeyd edək ki, normal korrelyasiya halında ξ-nin η-ya nəzərən reqressiya tənliyi

$$x = m_\xi\ + \rho_\xi(y - m_\eta)$$

şəklində ifadə olunur, burada

$$\rho_\xi = R\,\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta}.$$

ρ_η və ρ_ξ əmsalları – η-nın ξ-yə nəzərən və ξ-nin η-ya nəzərən reqressiya əmsalları adlandırılır. ρ_η və ρ_ξ-nin işarələri həmişə eynidir (və R-in işarəsi ilə üst-üstə düşür). Aydındır ki,

$$R = \pm\sqrt{\rho_{\xi}\ \rho_{\eta}}\ .$$

(ξ, η) kəmiyyətlərinin eyni bir ikiölçülü paylanmasına müvafiq müşahidələrin sayı böyük olduqda, yuxarıda təyin edilmiş statistik korrelyasiya əmsalı r, nəzəri korrelyasiya əmsalı R-ə yaxındır. Riyazi statistikada R-in r üzrə təyin olunmasının dəqiq qiymətləndirilmə metodları işlənilmişdir.

Toplam korrelyasiya. İkidən çox hadisə və ya kəmiyyətlər arasında əlaqə analoji üsullarla öyrənilir. Antropoloji dəyişənlər arasında toplam korrelyasiya aydın ifadə olunmuş şəkildə müşahidə olunur. Bu vəziyyət bir sıra sovet alimlərinin araşdırmalarında şəxsi istifadə əşyalarının (geyimin, ayaqqabının və s.) kütləvi istehsalında əhalinin tələbatının ən yaxşı surətdə öyrənilməsini təmin edən standartlar sisteminin hazırlanması üçün zəmin olmuşdur.

Bir çox tətbiqi məsələlərdə (məs., məhsulun proqnozlaşdırılması, çayların daşması) naməlum kəmiyyəti bir sıra məlum kəmiyyətlərlə əlaqələndirilən reqressiya tənliklərinin tərtib edilməsinin böyük əhəmiyyəti vardır. Toplam korrelyasiya halında müşahidələrin sayı kifayət qədər böyük ədəd olmadığı halda verilənlər əsasında nəticələr çıxarmaq xüsusilə təhlükəlidir. Korrelyasiya nəzəriyyəsinin əsas problemlərindən biri – etibarlı reqressiya tənliklərinin tərtib olunması üçün, bu və ya digər hallarda, müşahidələrin kifayətedici sayının təyin olunmasıdır.

Korrelyasiya nəzəriyyəsi üzərində qurulmuş nəticələrin əsaslandırılması üçün zəruridir ki: 1) seçilmiş ehtimal sxeminin verilən hadisə və ya prosesə tətbiq edilə bilinməsi əsaslandırılsın; 2) toplanılmış materialın reprezentativ olub-olmadığı diqqətlə yoxlanılsın, yəni toplanmış materiallarda öyrənilən dəyişənlərin paylanmasının təyin olunacaq ehtimal paylanmasından sistematik yayınması üçün səbəblərin olmadığı yoxlanılsın.

Korrelyasiyanın ölçülməsində empirik üsulların düzgün tətbiqi yalnız onun mahiyyətinin, baxılan təzahürlərin təbiətinin düzgün anlaşıldığı halında mümkündür. Korrelyasiya – hadisə və ya proseslərin ümumi əlaqə qanununun təzahürüdür. Onun funksional əlaqədən fərqli «natamam» xarakterinin mənbəi, elə məhz həmin qanundur – başqa şərtlərdən asılılığın mövcud olmasıdır. Burjua elmi çox vaxt bu natamamlıqdan əlaqə qanununu inkar etmək üçün istifadə edir. İngilis bioloqu F. Qalton varislər və əcdadların əlamətləri arasında əlaqəni tədqiq edərək, bütün diqqətini onun natamamlığına yönəltmişdi və nəticədə növün orta göstəriciləri üçün reqressiya «qanununu» almışdı; bu «qanun», daniya bioloqu V. İohansen tərəfindən bu asılılığın tamamilə inkar edilməsi kimi «qanuna» çevrildi və

bu da özlüyündə «təmiz xətlərin» dayanıqlılığı haqqında antidarvin nəzəriyyəsinə gətirdi. Digər tərəfdən unutmaq olmaz ki, iki təzahür (əlamət) arasında Korrelyasiya heç də belə anlaşılmamalıdır ki, bunlardan biri – səbəb, digəri nəticədir, necə ki, bəzən burjua alimləri bunu aktları təhrif etmək məqsədilə öz istədikləri səmtə yönəldirlər. Korrelyasiya – yalnız bu əlamətlərdəki dəyişilmələrdəki paralelizmi ölçür; bu dəyişikliklərin mənbəi isə üçüncü bir hər hansı faktorun hər iki əlamətə təsiri ola bilir.

Əd.: С л у ц к и й Е. Е., Теория корреляции и элементы учения о кривых распределения, К., 1912; Ч у п р о в А. А., Основные проблемы теории корреляции. О статистическом исследовании связи между явлениями. Л., 1926; Р о м а н о в с к и й В. И., Математическая статистика, М. – Л., 1938; К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., М., 1948; Теория и методы антропологической стандартизайии применительно к массовому производству изделий личного пользования, М., 1951.

RİYAZİ STATİSTİKA – natamam verilənlər üzrə statistik kollektivlərin xassələrinin riyazi təsviri və təyin olunması haqqında elmdir. Hər hansı müəyyən əlamətlərinə görə tam və bircins vəhdətdə birləşmiş, digər əlamətlərinə görə isə qruplara və ya siniflərə bölünmüş (məs., müəyyən bir zaman anında müəyyən bir ölkənin yaş qrupları üzrə bölünmüş əhali) əşyalar və ya təzahürlər çoxluğuna s t a t i s t i k k o l l e k t i v deyilir. Statistik kollektivin qruplara və ya siniflərə bölgüsünə səbəb əlamətlər statistik kollektivin arqumentləri adlanır. Statistik kollektivin üzvlərinin sayı onun həcmini təşkil edir. Statistik kollektivin ayrı-ayrı qruplarında və ya siniflərindəki üzvlərinin sayı onların elementlərinin sayı və ya onların arqumentlərinin uyğun qiymətlərinin tezlikləri adlanır.

Riyazi statistika iki növ məsələyə baxır: təsviri və normativ. Təsviri məsələlər ayrı-ayrı konkret statistik kollektivlərin təsviri ilə həll olunur və bu təsvir – onların statistik xarakteristikalarının və ya ümumi əlamətlərinin (orta qiymətlərinin, dispersiyalarının, momentlərinin və s.) tezliklərinin paylanmasında qanunauyğunluqların və arqumentlərin arasındakı əlaqələrin müəyyənləşdirilməsindən ibarətdir. Riyazi statistikanın normativ məsələləri – baxılan statistik kollektiv üçün müəyyən olunmuş xassələrin, bir hissəsi verilən kollektiv olan, lakin daha ümumi öyrənilməmiş kollektivə (ümumi statistik kollektiv) və ya verilən kollektivə analoji kollektivlər toplusuna köçürülə bilinməsi mümkünlüyünü araşdırmaqdan ibarətdir. Bu halda bəzi əlavə şərtlərdə, verilən kollektiv təsadüfi seçim və ya sadəcə olaraq, ümumi kollektivdən seçim adlanır; Riyazi statistikanın mühüm bölmələrindən biri

– seçimlər nəzəriyyəsinin əsas problemi ondan ibarətdir ki, seçimin həcmi və xarakteri təyin olunsun, bunlar əsasında seçim haqqında verilən dəqiqliklə və ehtimalla ümumi çoxluq üçün də istifadə oluna bilinsin. Statistik xarakteristikalara orta qiymətlər, dispersiya, momentlər haqqında nəzəriyyədə və statistik xarakteristikaların qiymətləndirilmə nəzəriyyəsində baxılır. Statistik kollektivlərin tezliklərinin paylanmasındakı qanunauyğunluqların təsviri ilə paylanma əyrilərinin nəzəriyyəsi, onların arqumentləri arasında əlaqələrin təsviri ilə korrelyasiya və birləşmələr (assosiasiyalar) nəzəriyyəsi məşğul olur.

O r t a q i y m ə t l ə r, d i s p e r s i y a, m o m e n t l ə r. Statistik kollektivlərin təsvir edilməsi üçün hazırlıq işləri – paylanma cədvəllərinin tərtib edilməsindən ibarətdir ki, bu cədvəllərdə kollektivlərin arqumentləri, sinifləri, bu siniflərin elementlərinin sayı və cədvəllərin diaqram, poliqon, histoqram (pilləvari qrafiklər) və s. şəklində həndəsi təsvirləri göstərilir. Statistik kollektivlərin öyrənilməsində sonrakı ən mühüm vasitə kimi, orta qiymətlərin – statistik kollektivin vəziyyətini təsvir edən statistik xarakteristikaların tərtib olunmasıdır. Məs., birölçülü S statistik kollektivinə (bir miqdar arqumenti bir ədəd olan kollektiv) baxaq, S – aşağıdakı cədvəllə təsvir olunur:

x	$x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots x_s$	$\sum n_x = n$
n_x	$n_1 \;\; n_2 \;\; \ldots n_s$	

bu cədvəldə $x_1, x_2, .., x_s$, $-$ x arqumentinin qiymətləri, $n_1, n_2, ..., n_s$ isə x-in bu qiymətləri müşahidə olunmuş halların sayıdır. S üçün x arqumentinin ədədi orta və ya sadəcə $\bar{x}$ orta qiyməti –

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum n_s \, x_s$$

bərabərliyi ilə təyin olunur və o, ən sadə və geniş yayılmış statistik xarakteristikadır. Orta qiymətlər arasında mühümlərindən biri də *mediandır* və bu xarakteristika arqumentin elə qiyməti ilə təyin olunur ki, x-in S-də bu qiymətdən kiçik və böyük qiymətləri eyni tezliklə təsadüf olunur. Ən çox istifadə olunan bu orta qiymətlərdən başqa, harmonik, həndəsi və s. orta qiymətlərə də baxılır. Mühümlük etibarilə növbəti statistik xarakteristikalar – statistik kollektivdə arqumentin qiymətlərinin səpələnmə ölçüləridir: kvadratik orta yayınma, dispersiya, ehtimali yayınma, mütləq orta yayınma, kvartillər və s. Bu ölçülərdən ən çox istifadə olunanlar – kvadratik orta yayınma və dispersiyadır; kvadratik orta yayınma –

$$\sigma = + \sqrt{\frac{1}{n} \sum n_s (x_s - \bar{x})^2}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, dispersiya isə σ^2-na bərabərdir. Əsl kollektivlərin əksəriyyəti üçün kvadratik orta yayınmanın belə bir xassəsi vardır ki, x-in kollektivdə olan bütün qiymətlərindən 99% $(\bar{x} - 3\sigma,\ \bar{x} + 3\sigma)$ intervalında yerləşir. Beləliklə, σ nə qədər kiçik olarsa, arqumentin qiymətləri onun orta qiyməti ətrafında o qədər çox topalanacaqdır. Hər hansı statistik xarakteristikanın mümkün qiymətlərinin kvadratik orta yayınması bu xarakteristikanın dəqiqliyini və etibarlılığını təyin edir və buna görə də, statistik xarakteristikanın kvadratik orta yayınmalarının axtarılması – Riyazi statistikanın mühüm məsələlərindən biridir. Kvadratik orta yayınma və ya $\bar{x}$ orta qiymətinin kvadratik orta xətası $\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$-ə bərabərdir.

Dispersiyanın orta qiymətləri və ölçüləri statistik kollektivlərin öyrənilməsində daha ümumi vasitələrin – *momentlər* adlandırılan xarakteristikaların xüsusi halıdır, bu momentlərdən başlanğıc, mərkəzi və ixtiyari başlanğıclı momentləri qeyd etmək olar. Başlanğıc momentlər –

$$m_h = \frac{1}{n} \sum n_x x_s^h$$

bərabərliyi ilə, mərkəzi momentlər –

$$\mu_h = \frac{1}{n} \sum n_s (x_s - \bar{x})^h$$

bərabərliyi ilə, ixtiyari a başlanğıcı ətrafında momentlər isə

$$\upsilon_h = \frac{1}{n} \sum n_s (x_s - a)^h$$

düsturu ilə təyin olunur; h – momentin tərtibi adlanır və ixtiyari müsbət qiymətlər alır. Birinci başlanğıc moment $\bar{x}$ – orta qiymətdir, ikinci mərkəzi moment σ^2 – dispersiyadır, üçüncü mərkəzi momentin vasitəsilə arqumentin paylanmasının asimmetriyasını ölçən asimmetriya əmsalı – $K = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ qurulur və dördüncü mərkəzi moment vasitəsilə paylanmanın

yüksək və ya alçaq zirvəli olmasını ölçən eksses – $E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ xarakteristikası (forma xarakteristikası H. M.) qurulur. Daha yüksək tərtib momentlər Riyazi statistikada çox nadir hallarda istifadə olunur. Yenilikcə Riyazi statistikada momentlərə analoji, onlara nisbətən bəzi üstünlüklərə malik, R. Fişerin kumulyantlarından istifadə etməyə başlamışlar.

P a y l a n m a l a r v ə p a y l a n m a ə y r i l ə r i. Birölçülü statistik kollektivlərin təsviri üçün digər vasitə – bəzi paylanmalar və *paylanma əyriləridir*. Belə paylanmalardan ən mühümləri – Puassonun binomial paylanması və normal və ya Qauss paylanmasıdır. Birincisi – hər bir sınaqda sabit ehtimalla baş verən, asılı olmayan sınaqlarda hər hansı hadisənin tezliklərinin paylanması ilə müqayisə oluna bilinən paylanmaların təsvir olunmasına xidmət edir. İkincisi – nadir hadisələr və proseslərin paylanmalarının təsviri üçün istifadə olunur (üç uşaq, dörd uşağın doğulması, radioaktiv maddələrin parçalanmasında α-hissəciklərin buraxılması və s.).

$$y = \frac{n}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{(A)}$$

tənliyi ilə verilən normal paylanma, riyazi statistikada nəzəri və praktiki, fundamental rol oynayır və çoxsaylı asılı olmayan və ya sanki asılı olmayan səbəblərin təsiri nəticəsində yaranan arqumentlərə toplananlar kimi baxdıqda, bu arqumentlərin paylanmasının təsvirinə xidmət edir (məs., belə arqument insan boyu ola bilər ki, bircins böyük bir kollektiv üçün onun paylanması normal paylanma qanununa dəqiqliklə tabedir). (A) tənliyi həndəsi anlamda, kəsilməz paylanmaların (arqumenti kəsilməz paylanmaların) təsviri üçün paylanma əyrilərindən biri – normal əyrini ifadə edir. Bu paylanmalar ümumi şəkildə

$$y = n\,f\,(x, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)$$

tənliyi ilə ifadə olunur, burada θ_i – verilən konkret paylanma üçün müəyyən qiymətlər alan paylanma parametrləridir. Paylanma əyrisi vasitəsilə verilmiş α və β sərhədləri arasında arqumentin qiymətlərinin tezlikləri – $n_{\alpha\beta} = n\int_{\alpha}^{\beta} f\,dx$ tapılır və paylanma əyriləri nəzəriyyəsinin məsələsi – müxtəlif paylanmalar və ya onların sinifləri üçün f funksiyanın

uyğun formalarının axtarılması və θ_i parametrlərinin qiymətlərinin axtarılmasının elə üsullarının müəyyənləşdirilməsidir ki, hesablanmış $n_{\alpha\beta}$ tezlikləri verilmiş kollektivin bütün (α, β) sinifləri üçün müşahidə olunmuş tezliklərə mümkün qədər yaxın ola bilsinlər. Parametrlərin axtarılması üçün ən çox istifadə olunan: *ən kiçik kvadratlar üsulu* və momentlər üsuludur. Birinci üsul ondan ibarətdir ki, parametrlərin elə qiymətləri axtarılır ki, onlar paylanmanın hesablanılmış müşahidə olunmuş tezlikləri arasında fərqlərin kvadratları cəminin minimumunu təmin etsin, ikincisi, – θ_i-nin elə qiymətlərinin tapılmasından ibarətdir ki, bunlar paylanma əyrisi üzrə və verilmiş paylanma üzrə hesablanılmış birinci tərtibdən başlayaraq, $[(S-1)$-ci tərtibə qədər] momentlərin bərabər olmalarını təmin edə bilsin. Son zamanlar R. Fişerin təklifinə görə ən böyük doğruyaoxşarlıq üsulu tətbiq olunmağa başlanmışdır; bu metod ondan ibarətdir ki, θ_i parametrlərinin elə qiymətləri axtarılır ki, onlar müşahidə olunmuş tezliklərə bərabər müşahidə ehtimalına mütənasib olan, doğruyaoxşarlıq kəmiyyətləri adlanan xüsusi bir kəmiyyətin maksimum qiymət olmasını təmin edə bilsin.

$f(x, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ funksiyasının ən çox istifadə olunan formaları – K. Pirsonun

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x+a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

differensial tənliyi ilə təyin olunan funksiyadır və Puasson paylanmasına və normal paylanmaya ümumiləşməyə yardımçı – Şarlye sıralarıdır. $f(x, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ paylanma əyrisinə ümumi kollektivdə arqumentin paylanma qanunu kimi baxıldıqda, f funksiyasının formasının nəzəri əsaslandırılması və θ_i parametrlərinin tapılmış qiymətlərinin qiymətləndirilməsi kimi məsələlər yaranır. f funksiyasının forması ümumi kollektivin real təbiəti haqqında mülahizələr əsasında seçilə bilinər, θ_i parametrlərinin qiymətləndirilməsi ən sadə yolla – onların kvadratik orta xətalarının axtarılması ilə alınır. Bu qiymətləndirilmə məsələsinin dəqiq həlli o halda alınır ki, araşdırılan konkret paylanmanın verdiyi seçimlərə analoji seçimlərin sonsuz toplusunda θ_i parametrlərinin paylanmasını tapmaq mümkün olsun. Paylanma əyrisi tapıldıqda bu əyri üzrə tezliklər hesablandıqdan sonra belə bir sual doğur: bunlar müşahidə olunmuş

tezlikləri nə dərəcədə bərpa edə bilir. Bu məsələnin həlli üçün ən çox Pirsonun uzlaşma kriterisi –

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_x - n'_x)^2}{n'_x}$$

istifadə olunur, burada n'_x – hesablanmış, n_x isə müşahidə olunmuş tezliklərdir və bu kriteri xüsusi cədvəllərin köməyilə təsadüfi $n_x - n'_x$ fərqlərinin ehtimallarını tapmağa imkan verir; bu fərqlər müşahidə olunmuş fərqlərin ehtimallarına ya bərabərdir və ya ondan kiçikdir; P kiçik olduqda n_x və n'_x arasında uzlaşma qeyri-kafi hesab olunur.

S e ç i m i m e t o d. Riyazi statistikanın normativ məsələlərinin həlli üçün ən mühüm vasitə – seçimi metoddur. Öyrənilən statistik kollektiv sonsuz və ya olduqca böyük və hərtərəfli statistik araşdırma üçün çətin olduqda və ya hər hansı digər səbəblərə görə hərtərəfli araşdırıla bilinmədikdə (məs., bu araşdırma obyektlərinin xarab olması və ya tamamilə sıradan çıxması ilə əlaqədar olarsa) ümumi kollektivin yalnız hər hansı bir hissəsi öyrənilir və bu hissə isə elə seçilir ki, bu hissədə öyrənilən arqumentin paylanması onun ümumi kollektivdəki paylanmasına olduqca yaxın olsun. Buna görə seçim müəyyən stoxastik sxemlərə müvafiq aparılır və bu seçimin həcmi qənaətbəxş olmalıdır. Riyazi statistikada yalnız arqumenti normal paylanmaya tabe olan ümumi kollektivdən seçimlər kifayət qədər tam öyrənilmişdir. Bunlar, həm də normal paylanmanın Riyazi statistika metodlarında istisna rolu olması cəhətindən çox mühümdür. Müasir Riyazi statistikada kiçik həcmli, yəni həcmi çox kiçik də ola bilən ixtiyari həcmli seçimlər, xüsusilə, mühüm rol oynayır. Bunların nəzəriyyəsinin mühümlüyü ondan aydın olur ki, biologiyada, aqronomiyada, texnikada və s. əksər hallarda statistik araşdırmaları həcmi böyük olmayan kollektivlər verir. Kiçik həcmin əsas problemi – bu seçimlərdə müxtəlif statistik xarakteristikaların dəqiq paylanmalarının axtarılmasıdır. Məs., arqumenti normal paylanmaya tabe kollektivlərin ixtiyari verilmiş həcmli seçimlərdə orta qiymətin, dispersiyanın və bəzi digər xarakteristikaların paylanmaları məlumdur. Bu paylanmalar ən yeni statistik kriterilərin: t-Styudent, z-Fişer və s. kimi kriterilərin yaranmasına səbəb oldu; bunlar da olduqca geniş və hərtərəfli tətbiqlər tapmış bir sıra ən yeni statistik araşdırma metodların əsasını təşkil etmiş oldu.

Ç o x ö l ç ü l ü s t a t i s t i k k o l l e k t i v l ə r – bir neçə arqumentli kriterilərdir. Bunların öyrənilməsində statistik asılılıqların əsas öyrənilmə problemi ilə bağlı bir sıra yeni məsələlər yaranır. Statistik

asılılıqlar funksional asılılıqlara qarşı qoyulur və məs., iki arqument üçün aşağıdakı kimi təyin olunur: əgər y-in şərti paylanmaları, yəni y-in x-in verilmiş qiymətlərinə uyğun palanmaları x-in dəyişməsi ilə dəyişirsə, y bu halda x-dən statistik asılıdır, deyilir (bax, həm də *Korrelyasiya*). Statistik sıraların dayanıqlılıq nəzəriyyəsi, zaman sıraları nəzəriyyəsi və assosiasiya nəzəriyyəsi – statistik kollektivlərin keyfiyyət arqumentləri arasında əlaqəni öyrənən nəzəriyyə də Riyazi statistikaya aiddir.

Riyazi statistikaya aid ilk məsələlərə ehtimal nəzəriyyəsinin ictimai, iqtisadi, mənəvi və demoqrafik məsələlərə tətbiqi ilə əlaqədar artıq Ya. Bernulli və Laplasın əsərlərində baxılmışdı. Lakin onun banisi A. Ketle (1796-1874) hesab olunur; o, riyazi statistika metodlarını demoqrafiya və antropometriyada tətbiq etmişdi. Müasir Riyazi statistikanın baniləri Frensis Qalton (1822-1911) və Karl Pirson (1857-1936) hesab olunur; Qalton korrelyasiya nəzəriyyəsinin və biometriyanın əsasını qoymuş, Pirson isə bunları geniş surətdə inkişaf etdirərək, Riyazi statistikanın bir sıra müasir metodlarını yaratmışdır (momentlər nəzəriyyəsi, paylanma əyriləri, χ^2-kriterisi və s.). Ən son dövrdə Ronald Fişer statistik xarakteristikaların qiymətləndirilməsinin ümumi nəzəriyyəsini, dispersion analiz metodları, kiçik seçimlər nəzəriyyəsi və b. yaratmışdı. Son dövrlərin riyaziyyatçı statistiklərindən Qauss və Puasson paylanmalarını ümumiləşdirən sıraları qurmuş Şarlye və A. A. Çuprovu qeyd etmək olar.

Əd.: Чупров А. А., Основные проблемы теории корреляции. О статистическом исследовании связи между явлениями. Л., Математические методы в статистике Сб. ст. под ред. Г. Л. Ритца, пер. и обработ. С. П. Бобров, М., 1927; Романовский В. И., Элементарный курс математической статистики, М. – Л., 1924; Лахтин Л. К., Кривые распределения …, М., [1922]; Эльдертон В. П., Кривые распределения численностей и корреляция, пер. с англ., М., 1924; Слуцкий Е. Е., Теория корреляции и элементы учения о кривых распределения, Киев, 1912; Романовский В. И., Элементы теории корреляции, 2 изд. Ташкент, 1928; Yule G. U. An Introduction to the theory of Statistics, 10 ed., L., 1932; Fisher R. A., Statistical methods for research workers, 5 ed., L. – Edinburgh, 1934; Anderson O. N., Einführung in die mathematische Statistik, W., 1935; Darmois G., Statistique mathématique, P., 1928; Jordan Ch., Statistique mathématique, P., 1927; Risser R. et Traynerd C. E., Les principes de la statistique mathématique, P., 1933.

В. И. РОМАНОВСКИЙ (БСЭ-1, 1938, том 38)

RİYAZİ STATİSTİKA

M ü n d ə r i c a t:

I. Riyazi statistikanın predmeti.
II. Riyazi statistikanın ehtimal nəzəriyyəsi ilə əlaqəsi.
III. Statistik təsvirin ən sadə üsulları.
IV. Statistik paylanmaların ehtimal paylanmaları ilə əlaqəsi. Parametrlərin qiymətləndirilməsi. Ehtimali hipotezlərin yoxlanılması.
V. Seçimi metod.
VI. Riyazi statistikanın qarşıdakı məsələləri.
VII. Tarixi məlumat.

Riyazi statistika – riyaziyyatın bir bölməsidir, elmi və praktik nəticələr üçün s t a t i s t i k v e r i l ə n l ə r i n sistemləşdirilməsi, yenidən işlənilməsi və istifadə olunmasının riyazi metodlarına həsr olunmuşdur. Burada statistik verilənlər – bu və ya digər əlamətlərə malik, çox və ya az geniş hər hansı çoxluğun obyektləri sayı haqqında məlumatlara deyilir (məs., 1a və 2a cədvəllərində verilənlər belələrindəndir).

I. Riyazi statistikanın predmeti

Obyektlər çoxluğunun statistik təsviri – bir tərəfdən, çoxluğun obyektlərindən hər birinin fərdi təsviri, digər tərəfdən, çoxluğun, onun ümumi – ayrı-ayrı obyektlərə ayrılmasını heç də tələb etməyən xassələri üzrə təsviri arasında aralıq bir vəziyyət tutur. Statistik verilənlər, birinci üsulla müqayisədə çox və ya az dərəcədə heç bir əlamətləri ilə seçilmirlər və yalnız məhz fərdi verilənlər mühüm olan hallarda, məhdud əhəmiyyət kəsb edirlər (məs., müəllim siniflə tanış olarkən, ondan əvvəlki müəllimin qoymuş olduğu əla, yaxşı, kafi və qeyri-kafi qiymətləri ifadə edən ədədlər statistikasından vəziyyət haqqında yalnız olduqca səthi məlumat alacaqdır). Digər tərəfdən çoxluğun kənardan müşahidə olunmuş toplam xassələri haqqında verilənlərlə müqayisədə, statistik verilənlər işin mahiyyətinə daha dərin varmağa yardım edir.

Məs., süxurun qranulometrik analizinin verilənləri (yəni süxuru əmələ gətirən hissəciklərin ölçüləri üzrə paylanması haqqında verilənlər) hissələrə ayrılmamış nümunələrinin yoxlanılması ilə müqayisədə dəyərli

əlavə informasiya verir və müəyyən dərəcədə onun xassələrini izah etməyə, onun nə cür yaranmasını izah etməyə imkan yaradır.

Obyektlərin bu və ya digər çoxluqları haqqında statistik verilənlərə baxılmasına əsaslanan araşdırma metodu s t a t i s t i k metod adlanır. Statistik metod ən müxtəlif bilik oblastlarında tətbiq olunur. Lakin müxtəlif təbiətli obyektlərə tətbiqdə statistik metodun cəhətləri özünəməxsusluğu o qədər ilə seçilir ki, məs., ictimai-iqtisadi statistikanı [sözün əsl mənasında *statistika* adlandırılan], fiziki statistikanı, ulduz statistikasını və s. bir elm kimi birləşdirmək mənasız olardı.

Müxtəlif bilik oblastlarında statistik metodun ümumi cəhətləri bu və ya başqa qruplara daxil olan obyektlərin sayının hesablanmasına, kəmiyyət əlamətlərinin paylanmasının baxılmasına, seçim metodunun tətbiqinə (geniş bir çoxluğun bütün obyektlərinin ətraflı araşdırılması çətin olduğu hallarda), bu və ya digər nəticələrin çıxarılması üçün müşahidələr sayının yetərli olub-olmadığını qiymətləndirdikdə ehtimal nəzəriyyəsinin istifadə olunmasına gətirilir. Araşdırmanın statistik metodlarının məhz bu f o r m a l r i y a z i – öyrənilən obyektlərin spesifik təbiətinə etinasızlıq kimi cəhəti, Riyazi statistikanın predmetini təşkil edir.

II. Riyazi statistikanın ehtimal nəzəriyyəsi ilə əlaqəsi

Riyazi statistikanın ehtimal nəzəriyyəsi ilə əlaqəsi müxtəlif hallarda müxtəlif xarakter daşıyır. *Ehtimal nəzəriyyəsi* kütləvi hadisə və ya prosesləri deyil, təsadüfi hadisə və ya prosesləri, məhz «ehtimali-təsadüfi» hadisə və ya prosesləri, yəni elələrini öyrənir ki, bunlar üçün onların uyğun ehtimal paylanmaları haqqında danışmaq məna kəsb edə bilsin. Bununla belə, ehtimal nəzəriyyəsi, ixtiyari təbiətli, ehtimali-təsadüfi kateqoriyaya aid olmayan kütləvi hadisə və ya proseslərin belə statistik öyrənilməsində müəyyən rol oynayır. Bu – ehtimal nəzəriyyəsinə əsaslanan *seçim metodu* nəzəriyyəsi və ölçmə xətaları nəzəriyyəsi vasitəsilə həyata keçirilir. Bu hallarda ehtimal qanunlarına öyrənilən hadisə və ya proseslərin özləri deyil, onları araşdırma üsulları tabe olur.

Ehtimal nəzəriyyəsi ehtimali təzahürlərin statistik araşdırılmalarında daha mühüm rol oynayır. Burada Riyazi statistikanın ehtimal nəzəriyyəsinə əsaslanan: ehtimali hipotezlərin statistik yoxlanılması nəzəriyyəsi, ehtimal paylanmalarının və bunlara daxil olan parametrlərin statistik qiymətləndirilməsi nəzəriyyəsi və s. kimi bölmələri tam mənası ilə tətbiqini tapa bilirlər. Bu statistik metodların daha dərin tətbiq oblastı olduqca dardır, çünki burada tələb olunur ki, öyrənilən hadisə və ya

proseslərin özləri kifayət qədər müəyyən ehtimal qanunauyğunluqlarına tabe olsunlar. Məs., radioqəbuledici cihazlarda turbulent su axınlarının və ya fluktuasiyalarının rejiminin statistik öyrənilməsi *stasionar ehtimali proseslər* (stasionar stoxastik proseslər, H. M.) nəzəriyyəsi əsasında aparılır. Lakin həmin nəzəriyyənin iqtisadi zaman sıralarına tətbiqi kobud səhvlərə gətirə bilər, belə ki, bu halda stasionar prosesin tərifinə daxil edilmiş: uzun müddət ərzində ehtimal paylanmalarının zamandan asılı olmayaraq dəyişməzliyi haqqında fərziyyə, bir qayda olaraq mümkünsüzdür.

Ehtimal qanunauyğunluqları böyük ədədlər qanunu əsasında statistik ifadə oluna bilinir (ehtimallar – tezliklər kimi, riyazi gözləmə – orta qiymətlər kimi götürülür).

III. Statistik təsvirin ən sadə üsulları

n obyektdən ibarət öyrənilən toplu hər hansı k e y f i y y ə t əlaməti A-ya görə $A_1, A_2, \dots, A_r$ siniflərinə ayrılır. Bu bölgüyə uyğun s t a t i s t i k p a y l a n m a ayrı-ayrı siniflərdəki obyektlərin sayı («tezlikləri») – $n_1, n_2, \dots, n_r$ $\left(\sum_{i=1}^{r} n_i = n\right)$ göstərilməklə verilir. n_i-lərin əvəzinə uyğun $h_i = \frac{n_i}{n}$ – nisbi tezlikləri göstərilir (bunlar isə aydındır ki, $\sum_{i=1}^{n} h_i = 1$ şərtini ödəyir). Əgər hər hansı kəmiyyət dəyişəni öyrənilirsə, onda onun n obyektdən ibarət topludakı paylanmasını həmin dəyişənin müşahidə olunmuş $x_1, x_2, \dots, x_r$ qiymətlərini artan qaydada bilavasitə hesablamaqla vermək olar. Lakin n-in böyük qiymətlərində bu olduqca ağır üsuldur və eyni zamanda paylanmanın mühüm xassələrini aydın aşkar etmir.

Praktikada n-in olduqca böyük qiymətlərində, adətən, müşahidə olunmuş x_i qiymətlərinin tam cədvəli tərtib olunmur və sonrakı işlərdə bütünlüklə elə cədvəllərdən istifadə olunur ki, müvafiq seçilmiş intervallar üzrə müşahidə olunmuş qiymətləri qruplaşdırdıqda, bunlarda yalnız siniflərdəki obyektlərin sayı göstərilsin.

Məs., Cədvəl 1a-nın birinci sütununda 0,05 mm uzunluqlu intervallar üzrə qruplaşdırılmış detalların diametrlərinin ölçmə nəticələri verilmişdir.

Əsas seçim texnoloji prosesin normal gedişatına uyğundur. 1-ci, 2-ci və 3-cü seçimlər istehsalın bu normal gedişatının dayanıqlılığını yoxlamaq üçün bəzi zaman intervallarından bir edilmişdir. Cədvəl 1b-də 0,25 mm. uzunluqlu intervallar üzrə qruplaşdırmada detalların əsas seçiminin ölçmə nəticələri verilmişdir.

Cədvəl 1a - kütləvi məhsulun statistik araşdırılmasında detalın mm.-lərlə diametrinin paylanması.

Diametr	Əsas seçim	1-ci seçim	2-ci seçim	3-cü seçim
13,05–13,09	–	–	1	1
13,10–13,14	2	–	–	–
13,15–13,19	1	–	1	1
13,20–13,24	8	–	–	–
13,25–13,29	17	1	2	1
13,30–13,34	27	1	1	2
13,35–13,39	30	2	3	1
13,40–13,44	37	2	1	1
13,45–13,49	27	1	–	–
13,50–13,54	25	2	1	–
13,55–13,59	17	–	–	–
13,60–13,64	7	1	–	2
13,65–13,69	2	–	–	1
Cəmisi	200	10	10	10
$\bar{x}$	13,416	13,430	13,315	13,385
S^2	2,3910	0,0990	0,1472	0,3602
x	0,110	0,105	0,128	0,200

Adətən, hər birində 15-20% x_i qiymətləri olan 10-20 intervallar üzrə qruplaşdırma, paylanmanın bütün mühüm xassələrinin olduqca tam şəkildə aşkar olunması və paylanmanın əsas xarakteristikalarının etibarlı hesablanması üçün kifayət edir. Belə qruplaşdırılmış verilənlər üzrə tərtib olunmuş *histoqram* paylanmanı əyani təsvir edir. Olduqca kiçik qruplaşma əsasında tərtib olunmuş histoqram, adətən, çoxzirvəli olur və paylanmanın mühüm xassələrini əyani əks etdirmir.

Şəkil 1-də misal kimi cədvəl 1a-nın birinci sütununun verilənlərinə əsasən 200 diametrin paylanmasının histoqramı, şəkil 3-də həmin

paylanmanın 0,01 mm. intervalında histoqramı verilmişdir (müvafiq cədvəl böyük olduğundan verilmir).

Digər tərəfdən çox böyük intervallar üzrə qruplaşdırma paylanmanın xarakteri barədə aydın təsəvvürün itməsinə və paylanmanın orta qiyməti və digər xarakteristikalarının hesablanılmasında kobud xətalara səbəb ola bilər (bax, cədvəl 1b və uyğun histoqrama şəkil 2-də).

Cədvəl 1b – olduqca böyük qruplaşdırma intervalları halında əsas seçimin (cədvəl 1a-dan) detalının diametrinin paylanması.

Diametr	Detalların sayı
13.00–13.24	11
13.25–13.49	138
13.50–13.74	51
Cəmisi	200

Riyazi statistika çərçivəsində qruplaşdırma intervalları haqqında məsələyə yalnız belə formal cəhətdən baxıla bilinər: paylanmanın riyazi təsvirinin tamlığı, qruplaşdırılmış verilənlər üzrə orta qiymətlərin hesablanılması dəqiqliyi və s.

İki dəyişənin birgə paylanması öyrənildikdə ikigirişli cədvəllərdən istifadə olunur. İki keyfiyyət dəyişəninin birgə paylanmasına misal cədvəl 2a-nı göstərmək olar.

Cədvəl 2a – Moskva Mərkəzi univermağı işçiləri arasında qriplə xəstələnmiş və xəstələnməmiş, qrip əleyhinə zərdab almış və almamış işçilərin paylanması (1939).

	Xəstələnməmə	Xəstələnmə	Cəmi
Zərdab almış	1675	150	1825
Zərdab almamış	497	4	501
Cəmisi	2172	154	2326

Ümumi halda, material A əlaməti üzrə $A_1, A_2, \dots, A_r$ siniflərinə, B əlaməti üzrə $B_1, B_2, \dots, B_s$ siniflərinə ayrıldıqda cədvəl eyni zamanda A_r və B_j siniflərinə aid obyektlərin sayları n_{ij} -lərdən ibarət olur.

$n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{s} n_{ij}$, $n_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{r} n_{ij}$ düsturları ilə A_i və B_j siniflərinin özündəki obyektlərin sayı alınır (aydındır ki, $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} n_{ij} = \sum_{i=1}^{r} n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{s} n_{\bullet j} = n$, burada n – öyrənilən toplunun bütün obyektlərinin sayıdır). Sonradan aparılacaq araşdırmanın məqsədindən asılı olaraq, nisbi tezliklərdən bəziləri hesablanılır, məs.:

$$h_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}, \quad h_{i\bullet} = \frac{n_{i\bullet}}{n}, \quad h_{\bullet j} = \frac{n_{\bullet j}}{n}$$

$$h_{i(j)} = \frac{n_{ij}}{n_{\bullet j}}, \quad h_{(i)j} = \frac{n_{ij}}{n_{i\bullet}}.$$

Məs., qriplə xəstələnənlərə zərdabın təsirinin öyrənilməsində cədvəl 2a-dan istifadə edərək, cədvəl 2b-də verilmiş nisbi tezlikləri hesablamaq təbiidir. İki kəmiyyət dəyişəninin birgə paylanması üçün cədvəllər *Korrelyasiya* məq.-də verilmişdir.

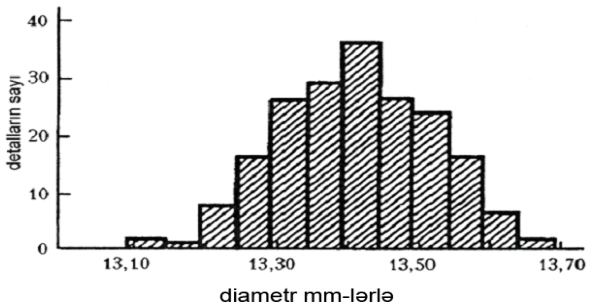
Cədvəl 2b – Nisbi tezliklər

(cədvəl 2a-dakı verilənlərə uyğun)

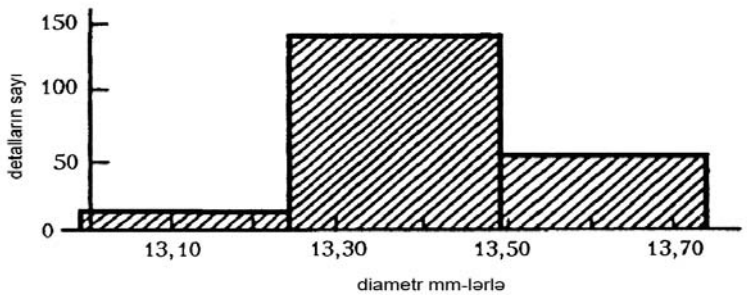
	Xəstələnməyənlər	Xəstələnənlər	Cəmisi
Zərdab almış	0,918	0,082	1,000
Zərdab almamış	0,992	0,008	1,000

Cədvəl 1a qarışıq hala misaldır: material hər hansı bir keyfiyyət əlaməti üzrə (istehsal prosesinin orta səviyyəsinin təyin olunması üçün əsas seçimə aid olunma və bu normal səviyyənin saxlanılmasının yoxlanılması üçün müxtəlif zaman anlarında aparılmış üç seçimə aid

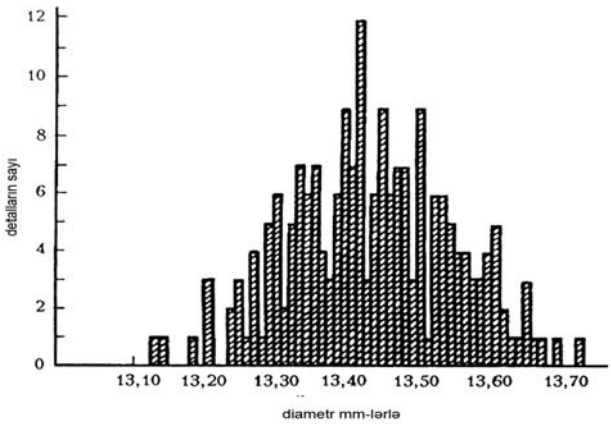
olunma) və hər hansı bir kəmiyyət əlaməti üzrə (detalların diametri) qruplaşdırılır.



Şəkil 1. 200 detalın diametrlərinin paylanmasının histoqramı. Qruplaşdırma intervalının uzunluğu – 0, 05 mm.



Şəkil 2. 200 detalın diametrlərinin paylanmasının histoqramı. Qruplaşdırma intervalının uzunluğu – 0, 5 mm.



Şəkil 3. 200 detalın diametrlərinin paylanmasının histoqramı. Qruplaşdırma intervalının uzunluğu – 0, 01 mm.

Bir kəmiyyət əlamətinin (dəyişəninin) paylanmasının ən sadə ümumi xarakteristikaları aşağıdakılardır:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

orta qiyməti və

$$D = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

kvadratik orta yayınması, burada

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 .$$

$\bar{x}$, S^2 və D-ni qruplaşdırılmış verilənlər üzrə hesablamaq üçün

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{r} n_k a_k = \sum_{k=1}^{r} h_k a_k ,$$

$$S^2 = \sum_{k=1}^{r} n_k (a - \bar{x})^2 = \sum_{k=1}^{r} n_k a_k^2 - n\bar{x}^2$$

və ya

$$D^2 = \sum_{k=1}^{r} h_k a_k^2 - \bar{x}^2$$

düsturlarından istifadə olunur, burada r – qruplaşdırılma intervallarının sayı, a_k – onların ortaları (cədvəl 1a halında bu ortalar – 13,07; 13,12; 13,17; 13,22 və s.). Əgər material olduqca böyük intervallar üzrə qruplaşdırılmışdırsa, onda belə hesablama olduqca kobud nəticələrə gətirir. Bəzən belə hallarda qruplaşdırmaya düzəlişlər kimi xüsusi düzəlişlərdən istifadə etmək yaxşı nəticə verir. Lakin bu düzəlişlər yalnız müəyyən ehtimali fərziyyələr şərtində məna kəsb edir.

IV. Statistik paylanmaların ehtimal paylanmaları ilə əlaqəsi. Parametrlərin qiymətləndirilməsi. Ehtimali hipotezlərin yoxlanılması

Yuxarıda yalnız bəzi seçilmiş ən sadə statistik təsvir üsulları şərh olunmuşdu və bunlar hal-hazırda yaxşı işlənilmiş anlayışlar və hesablama texnikası sistemi ilə olduqca geniş bir fənn mövzusudur. Statistik təsvirin üsulları maraqlıdır, lakin özü-özlüyündə deyil, yalnız öyrənilən hadisə və ya proseslərin tabe olduqları qanunauyğunluqlar haqqında, bu və ya digər müşahidə olunmuş statistik paylanmalara hər bir ayrıca halda gətirmiş səbəb haqqında statistik materialdan bir vasitə olaraq maraqlıdır.

Məs., cədvəl 2a-da göstərilən verilənləri belə nəzəri sxemlə əlaqələndirmək təbiidir. Univermağın hər bir işçisinin qriplə xəstələnməsini təsadüfi hadisə hesab etmək olar, çünki işin və müayinə olunmuş işçilərin həyatlarının ümumi şərtləri bu və başqa bir işçinin xəstələnməsi faktının özünü deyil, yalnız xəstələnmənin hər hansı *ehtimalını* təyin edə bilər. Statistik verilənlərə görə, zərdab almış və zərdab almamış işçilərin xəstələnməsi ehtimalları (p_1 və p_0) müxtəlifdir: bu verilənlər p_1-in p_0-dan olduqca kiçik olduğunu fərz etməyə əsas verir. Riyazi statistika qarşısında belə məsələ durur: müşahidə olunmuş $h_1 = \frac{4}{501} \approx 0{,}008$ və $h_0 = \frac{150}{1825} \approx 0{,}082$ tezlikləri üzrə p_1 və p_0 ehtimallarını qiymətləndirmək və yoxlamaq ki, statistik material kifayət edirmi ki, $p_1 < p_0$ olduğu qəbul

edilmiş hesab olunsun (yəni zərdab olunduqda xəstələnmə ehtimalı həqiqətən azdır). Qoyulmuş suala kafi cavab cədvəl 2a-nın verilənləri halında Riyazi statistikanın incə vasitələri olmadan belə olduqca inandırıcıdır. Lakin olduqca şübhəli hallarda Riyazi statistikada işlənilmiş xüsusi kriterilərə müraciət etmək zəruridir.

Cədvəl 1a-nın birinci sütununun verilənləri, istehsalatın normal gedişatında hesablama üçün diametri 13,40 mm. olan detalların hazırlanmasındakı dəqiqliyin müəyyənləşdirilməsi məqsədi ilə toplanılmışdır. Bu halda müəyyən nəzəri mülahizələrlə əsaslandırılmış ən sadə fərziyyə – ayrı-ayrı detalların diametrinə

$$\mathbf{P}\{\xi < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\, dt \qquad (1)$$

– normal ehtimal paylanmalarına tabe təsadüfi kəmiyyətlər kimi baxılmasıdır. Əgər bu fərziyyə doğrudursa, onda a və σ^2 parametrlərinin ehtimal paylanmasının orta qiymətini və dispersiyasını – kifayət qədər dəqiqliklə s t a t i s t i k paylanmanın uyğun xarakteristikaları üzrə qiymətləndirmək olar (müşahidələr sayı olduqca böyük, yəni $n = 200$ olduğuna görə). Nəzəri dispersiya – σ^2 üçün statistik qiymət kimi $D^2 = \frac{S^2}{n}$ – statistik dispersiyasına deyil,

$$s^2 = \frac{S^2}{n-1}$$

– *meylsiz statistik qiymətinə* üstünlük verilir.

Nəzəri kvadratik orta yayınma üçün meylsiz statistik qiymətin ümumi ifadəsi (ixtiyari ehtimal paylanmasında yaraya bilən) yoxdur. σ üçün statistik qiymət kimi (ümumiyyətlə, meylli), əksər hallarda, s istifadə olunur. a və σ üçün $\bar{x}$ və s statistik qiymətlərinin dəqiqliyi uyğun dispersiyalarla verilir və bunlar (1) normal paylanması halında aşağıdakı münasibətlərlə verilir:

$$\sigma_a = \frac{\sigma^2}{n} \sim \frac{s^2}{n},$$

$$\sigma^2_{s^2} = \frac{2\sigma^4}{n-1} \sim \frac{2s^4}{n},$$

$$\sigma_1^2 = \frac{\sigma^2}{2n} \sim \frac{s^2}{2n},$$

burada $\sim$ işarəsi n-in böyük qiymətlərində təqribi bərabərliyi ifadə edir. Beləliklə, statistik qiymətlərə $\pm$ işarəli kvadratik yayınmanı əlavə etməyi şərtləşərək, (1) normal paylanması fərziyyəsində n -in böyük qiymətlərində

$$\left.\begin{aligned} a &= \bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}}, \\ \sigma &= s \pm \frac{s}{\sqrt{2n}} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

olduğunu alırıq. Cədvəl 1a-nın birinci sütununun verilənləri halında (2) düsturlarından

$$a = 13{,}416 \pm 0{,}008,$$

$$\sigma = 0{,}110 \pm 0{,}006$$

alınır. Seçim həcminin $n = 200$ olması, «böyük seçimlər» nəzəriyyəsinin bu düsturlardan istifadəsinin qanuniliyi üçün kifayətedicidir.

Cədvəl 1a-nın sonrakı sütunlarının verilənlərinə baxdıqda, bu sütunların hər birinin 10 ölçmə əsasında tərtib olunduğu nəzərə alınarsa, böyük seçimlər nəzəriyyəsinin düsturlarından yalnız birinci «yanaşma» kimi istifadə etmək olar, belə ki, bu düsturlar yalnız $n \to \infty$ olduqda limit düsturları kimi təyin olunmuşdu. a və σ parametrlərinin təqribi statistik qiymətləri olaraq, əvvəlki kimi x və s kəmiyyətlərindən istifadə olunur, lakin bu statistik qiymətlərin dəqiqliyi və etibarlılığı üçün *kiçik seçimlər* nəzəriyyəsini tətbiq etmək zəruridir. Cədvəlin birinci sütunu üzrə qiymətləndirilmiş a və σ parametrləri normal üç seçim üçün cədvəl 1a-nın sonuncu sətrində Riyazi statistikanın qaydaları üzrə $\bar{x}$ və s üçün yazılmış qiymətləri müqayisə etdikdə aşağıdakı nəticələri çıxarmaq olur: birinci seçim istehsal prosesinin gedişatında mühüm dəyişikliklər olacağını fərz etməyə heç bir əsas vermir, ikinci seçim a orta diametrinin azalması nəticəsinə gəlməyə əsas verir, üçüncü seçim – dispersiyanın artması haqqında nəticəyə gətirir.

Parametrlərin statistik qiymətləri və hipotezlərin yoxlanılması üçün ehtimal nəzəriyyəsinə əsaslanan bütün qaydalar yalnız müəyyən $\omega < 1$ *mühümlük ölçüsü* ilə tətbiq oluna bilinir, yəni bu qaydalar $\alpha = 1 - \omega$

ehtimalı ilə səhv nəticələrə gətirə bilər. Əgər normal paylanma və nəzəri dispersiyanın məlum olduğu hipotezində α-nı $\bar{x}$ üzrə

$$\bar{x} - k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \alpha < \bar{x} + k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

qaydası üzrə qiymətləndirsək, onda səhv ehtimalı α-ya bərabər olacaqdır və α isə k ilə aşağıdakı münasibətlə əlaqəlidir (bax, cədvəl 3):

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_k^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx .$$

Verilmiş konkret şərtlərdə mühümlük ölçüsünün rasional seçilməsi haqqında məsələ (məs., kütləvi məhsula statistik nəzarətin qaydalarının işlənilməsində) olduqca mühümdür. Bu zaman mühümlük ölçüsü yalnız yüksək olan (vahidə yaxın) qaydaları tətbiq etmək arzusuna əks olan bir vəziyyət yaranır ki, müşahidələr sayı məhdud olduqda belə qaydalarla yalnız çox zəif nəticələr çıxarılır (bunlar, tezliklərin hiss olunacaq bərabərsizliyində belə, ehtimalların bərabərsizliyini müəyyənləşdirməyə imkan vermir və s.).

Cədvəl 3. – a və $\omega = 1 - \alpha$-nın k-dan asılılığı.

k	1,96	2,58	3,00	3,29
α	0,050	0,010	0,003	0,001
ω	0,950	0,990	0,997	0,999

V. Seçimi metod

IV bölmədə ehtimal paylanmasının və ya onun parametrlərinin qiymətləndirilməsi üçün n sayda müşahidələrin nəticələrinin asılı olmamazlığı (lakin bu qeyd olunmamışdı) nəzərdə tutulmuşdu. Asılı müşahidələrin istifadəsinə yaxşı öyrənilmiş misal – N obyektdən ibarət «ümumi çoxluqdan» $n < N$ obyektdən ibarət aparılmış «seçim» üzrə statistik paylanma və ya parametrlərinin qiymətləndirilməsidir.

Terminoloji qeyd. Çox vaxt ehtimal paylanmasının qiymətləndirilməsi üçün aparılmış n sayda müşahidə toplusunu da «seçim» adlandırırlar. IV bölmədə istifadə olunmuş «kiçik seçimlər nəzəriyyəsi» termini bununla izah olunur. Belə terminologiya onunla əlaqələndirilir ki, bir çox hallarda ehtimal paylanması təsəvvürdə fərz olunan sonsuz «ümumi

çoxluqda» statistik paylanma kimi güman olunur və şərti olaraq hesab edilir ki, müşahidə olunan n obyekt bu çoxluqdan «seçilir». Belə fərzlər aydın bir məzmuna malik deyildir. Sözün əsl mənasında seçimi metod həmişə ilkin ümumi çoxluğun sonlu olduğunu fərz edir.

Seçimi metodun tətbiqinə aid aşağıdakı misala baxaq. N məmulatdan ibarət partiyada X saydası qüsurludur. Bu partiyadan ixtiyari qaydada $n < N$ məmulatdan ibarət seçim aparılır (məs., $n = 100$, $N = 10\ 000$). Seçimdəki qüsurlu məmulatlar sayı x-in m-ə bərabər olması ehtimalı –

$$\mathbf{P}\ \{x = m\} = \frac{n!\ (N-n)!\ X!\ (N-X)!}{m!\ (n-m)!\ (X-m)!\ (N-X-n+m)!\ N!}$$

düsturu ilə təyin olunacaqdır. Beləliklə, x və $h = \frac{x}{n}$ nisbi tezliyi təsadüfi kəmiyyətlərdir, bunların paylanması X parametrlərindən və ya $H = \frac{X}{N}$ parametrlərindən asılıdır. Seçimi h nisbi tezliyi üzrə H nisbi tezliyinin qiymətləndirilməsi məsələsi, n asılı olmayan sınaqlar halında olduğu kimi, h tezliyi üzrə, P ehtimalının nisbi qiymətləndirilməsi məsələsinə olduqca oxşardır. n-in böyük qiymətlərində, ehtimalın qiymətləndirilməsi məsələsində

$$p \sim h$$

təqribi bərabərliyi, nisbi tezliyin qiymətləndirilməsi məsələsində

$$H \sim h$$

təqribi bərabərliyi vahidə yaxın ehtimalla ödənilir. Lakin H-ın qiymətləndirilməsi məsələsində düsturlar olduqca mürəkkəbdir, h-ın H-dan yayınmaları isə ehtimalın qiymətləndirilməsi məsələsində (həmin n qiymətlərində) h-ın p-dən yayınmasından orta hesabla bir qədər kiçikdir. Beləliklə, partiyada qüsurlu məmulatların hissəsi H-ın n həcmli verilmiş seçimdə qüsurlu məmulatların hissəsi h üzrə qiymətləndirilməsi (N-in ixtiyari qiymətində), n asılı olmayan sınaqlarda p ehtimalının h nisbi tezliyi üzrə qiymətləndirilməsi ilə müqayisədə bir qədər dəqiq olur. $\frac{n}{N} \to \infty$ olduqda seçimlə bağlı məsələdəki düsturlar p ehtimalının qiymətləndirilməsilə bağlı məsələnin düsturlarına asimptotik olaraq keçir.

VI. Riyazi statistikanın qarşıdakı məsələləri

Qiymətləndirmə nəzəriyyəsi və ümumiyyətlə, sabit ehtimal paylanması ilə verilən n sayda asılı olmayan sınaqların nəticələrindən istifadə olunmaqla çıxarılmış statistik nəticələr nəzəriyyəsi və qeyd olunmuş n həcmli seçimlər halı üçün seçimi metod nəzəriyyəsi – Riyazi statistikanın ən çox işlənilmiş bölmələri hesab edilir.

Klassik korrelyasiya nəzəriyyəsi asılı olmayan müşahidələr toplusu əsasında, kəmiyyətlər arasında asılılığı öyrənir. Məs., ξ və η kəmiyyətləri arasında asılılıq – hər biri ξ və η kəmiyyətlərinin araşdırılan birgə paylanmasına tabe (x_i, y_i) qiymətlər cütünü verən n sayda, öz aralarında asılı olmayan müşahidələr vasitəsilə araşdırılır. Kəmiyyət dəyişənləri (əlamətləri) arasında asılılıq *dispersion analizin* köməyi ilə analoji sxem üzrə aparılır.

Asılı müşahidələrin tədqiq metodları, Riyazi statistikada, yalnız zaman sıraları nəzəriyyəsində, əsas etibarilə, onların stasionarlığının olduqca məhdudlaşdırdığı hallarında dərin surətdə işlənilmişdi. Statistik eksperimentin planlaşdırılması da böyük əhəmiyyətə malikdir. Ən sadə halda bu – verilən mühümlük ölçüsü ilə tələb olunan dəqiqliklə və tamlıqla nəticələrin alınması üçün zəruri olan, müşahidələr sayı n-in təyin olunması məsələsidir. Lakin çox vaxt müşahidələr sayını aprior təyin etmək mümkün olmur (və ya məqsədəuyğun olmur, belə ki, müşahidələr sayını əvvəlcədən qeyd etmədikdə və onu yalnız eksperimentin gedişində təyin etdikdə, onun riyazi gözləməsini azaltmaq mümkündür). Müşahidələr sayı əvvəlcədən qeyd olunmayan, lakin eksperimentin gedişində təyin olunan statistik eksperimentin metodları, hazırda ümumi – *ardıcıl analiz* adı altında birləşdirilmişdir. Qeyd etmək lazımdır ki, bu növ ən sadə üsullar çoxdan işlənilmişdi. Ciddi dedikdə, kütləvi məhsula nəzarətin statistik metodları – Riyazi statistikanın hələ təşəkkül tapmamış bölməsinin tətbiq oblastıdır; bu oblast seçimi statistik verilənlər üzrə proseslərin tənzimlənməsi problemlərinə həsr olunmuşdur və burada statistik qaydalar, verilmiş mühümlük ölçüsünə görə nəticələrin alınması məsələsilə deyil, tənzimlənən prosesin müəyyən gedişatının təmin olunması məsələsilə diktə olunur (məs., məhsulun keyfiyyətinin verilmiş səviyyəsinə zəmanət verən istehsal rejiminin müəyyənləşdirilməsi).

VII. Tarixi məlumat

Riyazi statistikanın ilkin əsaslarını artıq ehtimal nəzəriyyəsinin təməlini qoymuş alimlərin – İsveçrə riyaziyyatçısı Ya. Bernulli (XVII əsrin sonu – XVIII əsrin əvvəli), fransız riyaziyyatçıları P. Laplas (XVIII əsrin 2-ci yarısı – XIX əsrin başlanğıcı) və S. Puassonun (XIX əsrin 1-ci yarısı) əsərlərində tapmaq olurdu. Rusiyada V. Y. Bunyakovski (1846) ehtimal nəzəriyyəsinin əsasında Riyazi statistikanın metodlarını demoqrafiya və sığorta məsələlərinə tətbiq etməklə inkişaf etdirirdi. Riyazi statistikanın bütün sonrakı inkşafında XIX əsrin 2-ci yarısı – XX əsrin başlanğıcı dövründə rus klassik ehtimal nəzəriyyəsi məktəbinin işləri həlledici rol oynadı (P. L. Çebışev, A. A. Markov, A. M. Lyapunov, S. N. Bernşteyn). Statistik qiymətləndirmə nəzəriyyəsinin bir çox məsələləri mahiyyət etibarilə xətalar nəzəriyyəsi və ən kiçik kvadratlar metodunun əsasında işlənilmişdir [alman riyaziyyatçısı K. Qauss (XIX əsrin 1-ci yarısı) və rus riyaziyyatçısı A. A. Markov (XIX-un sonu – XX əsrin başlanğıcı)]. Burjua ədəbiyyatında əksər hallarda Riyazi statistikanın baniləri kimi adlandırılan A. Ketle (XIX ə., Belçika), F. Qalton (XIX ə., İngiltərə) və K. Pirsonun (XIX-in sonu – XX əsrin başlanğıcı) işləri çox böyük əhəmiyyətə malik idi, lakin ehtimal nəzəriyyəsinin nailiyyətlərindən istifadə səviyyəsinə görə rus məktəbinin işlərindən geri qalırdı; bunu da qeyd etmək lazımdır ki, Riyazi statistika metodlarının ictimai və bioloji elmlərdə istifadə sahəsində onların işləri mürtəce istiqamətli idi. Riyazi statistika metodlarının tətbiqi üçün zəruri olan funksiyalar cədvəllərinin tərtibi üzrə geniş işlər K. Pirson tərəfindən aparılırdı. Kiçik seçimlər nəzəriyyəsinin, hipotezlərin yoxlanılması və statistik qiymətləndirilməsi, ardıcıl analizin ümumi nəzəriyyəsinin yaradılmasında ingilis-amerikan məktəbinin olduqca gənc nümayəndələrinin [Styudent (təxəllüsü V. Qosset), R. Fişer, E. Prison – İngiltərə, Y. Neyman, A. Vald – ABŞ] rolu olduqca mühümdür; onlar fəaliyyətə 20-ci əsrin 20-ci illərində başlamışdılar. SSRİ-də Riyazi statistika sahəsində V. İ. Romanovski, Y. Y. Slutski mühüm nəticələr almışdı: Y. Y. Slutski stasionar sıralarla bağlı statistika üzrə mühüm işlər görmüşdür, N. V. Smirnov Riyazi statistikanın qeyri-parametrik nəzəriyyəsinin əsaslarını qoyaraq, mühüm nəticələr almışdı: Riyazi statistikanın əsasında kütləvi istehsalın tədqiqi və nəzarətinin statistik metodları, hidrologiya sahəsində, iqlimşünaslıqda, ulduz astronomiyasında və s. statistik metodlar xüsusi bir intensivliklə işlənilmişdi. Sovet alimləri Riyazi statistika sahəsində burjua elm məktəblərinin səhv metodoloji qoyuluşu, formalizmi və sadələşməni tənqid edirdilər. Biologiya və ictimai elmlərə Riyazi statistikanın tətbiqi məsələlərinə sovet elmində yenidən baxılmışdı, bu elmlərdə burjua alimləri antielmi məqsədlərində Riyazi statistikanın formal metodlarından xüsusilə tez-tez istifadə edirdilər.

Ədd.: Романовский В. И. Элементарный курс математической статистики, М. – Л., 1939; Митропольский А. К., Техника статиститческого исследования, М. – Л., 1931; Митропольский А. К., Статистическое исследование, т. 1-2, Л., 1952; Длин А. М., Математическая статистика в технике, 2 изд., М., 1951; Бородачев Н. А. и Журавлев А. Н., Статистические методы анализа и контроля качества продукции, хода технологического процесса и состояния производственного оборудования, в кн.: Машиностроение. Энциклопедический справочник, т. 15, М., 1950 (стр. 597-647); Романовский В. И., Математическая статистика, М. – Л., 1938; Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., М., 1948; Арлей Н. и Бух К. Р., Введение в теорию вероятностей и математическую статистику, пер. с англ., М., 1951; Pearson K., Tables for statisticians and biometricians, pt 1-2, L., 1930-31; Kendall M. G., The advanced theory of statistics, v. 1-2, L., 1948; Hald A., Statistical theory with engineering applications, N. Y. – L., 1952; Hald A., Statistical tables and formulas, N. Y., 1952.

ƏN KİÇİK KVADRATLAR ÜSULU – təqribi hesablamalar metodudur, əsas məsələsi – bir və ya bir neçə naməlum kəmiyyətin axtarılmasıdır; bu kəmiyyətlərin əsl qiymətlərinə ən yaxın olanları – axtarılan kəmiyyətlərlə ifadə olunan digər kəmiyyətlərin ölçmə qiymətləri və hesablanmış qiymətlər arasındakı fərqlər kvadratlarının minimumunu təmin edən qiymətlərdir. Məs., $y'_1,\ y'_2,\ \dots,\ y'_n$ ölçmə qiymətlərinin təyin olunacaq $x_1, x_2, \dots, x_m$ qiymətlərindən müəyyən şəkildə asılı olduğu, yəni bunların funksiyaları olduğu fərz olunur:

$$y'_i = f_i\,(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Fərz edək ki, müşahidələrin sayı (n), naməlum kəmiyyətlərin sayından (m) çoxdur. Fərz olunur ki, bu müşahidələrdə (müşahidə xətaları ilə birlikdə) $y'_1,\ y'_2,\ \dots,\ y'_n$ kəmiyyətləri üçün $y_1, y_2, \dots, y_n$ nəticələri alınmışdır. Fərz edək ki, ölçmələrin hamısı eynilə dəqiq deyildir və onların nisbi dəyərləri $p_1,\ p_2,\ \dots,\ p_n$ çəkiləri ilə qiymətləndirilir və bu çəki uyğun ölçmə xətalarının kvadratik ortalarının kvadratlarına tərs mütənasib, hər hansı müsbət ədədlərdir; p_i kimi həmçinin xüsusi, dəqiq elə ölçmələrin sayını götürmək olar ki, y_i – bu ölçmə nəticələrindən ortada olanıdır. İndi isə y-in ölçmə qiymətlərinin hesablanılmış qiymətlərdən yayınmalarının

çəkili kvadratlarının cəmi olan $S = \sum_{i=1}^{n} p_i (y_i - y_2')^2$ cəmini götürək. Onda naməlum $x_1, x_2, ..., x_n$ kəmiyyətlərinin axtarılması üçün Ən kiçik kvadratlar üsulu ondan ibarətdir ki, onlar üçün ən yaxşı elə yaxın qiymətlər götürülür ki, onlar S cəminin minimumunu təmin etmiş olsunlar. Bu qiymətlər, differensial hesabının məlum qaydalarına əsasən

$$\sum_{i=1}^{n} p_i (y_i - y_i'') \frac{\partial y_i'}{\partial x_h} = 0$$

tənliklərdən tapılır; bu tənliklər $\frac{\partial y_i'}{\partial x_h}$ törəmələrini sıfra bərabər götürməklə alınır və n o r m a l t ə n l i k l ə r adlanırlar.

Əgər f_i funksiyaları

$$\bar{y} = a_1^{(i)} x_1 + a_2^{(i)} x_2 + ... + a_m^{(i)} x_m, \quad i = 1, 2, 3, ..., n$$

tənliklərinə görə xətti funksiyalardırsa, onda normal tənliklər $x_1, x_2, ..., x_m$-ə görə xətti tənliklər sistemi olur və bu tənliklərin həlli yaxşı məlumdur və bunların həlli çox və ya az dərəcədə asan yerinə yetirilə bilinir.

Əgər f_i funksiyaları $x_1, x_2, ..., x_m$-ə görə xətti funksiyalar olmasalar, onda normal tənliklərin həlli çox çətin ola bilər. Beləliklə, Ən kiçik kvadratlar üsulu ən böyük uğurla və çox vaxt birinci halda və ya f funksiyası hansısa bir çevirmə yolu ilə birinci hala gətirilə bilindikdə tətbiq oluna bilinir. Məsələn, dəmirin maqnitləşdirilməsində meydanın gərginliyi H, maqnit induksiyası B ilə $B = \frac{H}{x_1 + H x_2}$ şəklində bərabərliklə əlaqəlidirlər, burada x_1 və x_2 ölçmə yolu ilə B və H-ın alınmış qiymətlərinə görə tapılmalıdır. Burada $f = \frac{H}{x_1 + H x_2}$, – x_1 və x_2-nin qeyri-xətti funksiyasıdır. Lakin bizim bu tənliyimizi asanlıqla ona ekvivalent olan $\frac{1}{B} = \frac{1}{H} x_1 + x_2$ tənliyinə çevirmək olar ki, burada $\frac{1}{B}$ və

$\frac{1}{H}$, $-$ B və H ilə birlikdə məlum olacaqlar və x_1 və x_2 isə bu tənliyə artıq xətti olaraq daxil olacaqdır. Ən kiçik kvadratlar üsulu ən çox xətalar nəzəriyyəsinə tətbiqdə işlənilmişdir. Bu nəzəriyyədə onun əsas tətbiqlərinə baxaq.

B i r n a m ə l u m o l a n h a l. Fərz olunur ki, naməlum x kəmiyyətinin axtarılması üçün n sayda asılı olmayan müşahidə aparılmışdır. Əgər p_i ilə aparılan ölçmələrin çəkiləri işarə olunarsa, onda Ən kiçik kvadratlar üsuluna əsasən, x-in $\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - x)^2$ cəmini minimuma çevirə bilən təqribi qiyməti $\bar{x} = \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}$ olacaqdır. p_i çəkiləri x_i qiymətlərinin kvadratik orta xətalarının kvadratlarına tərs mütənasibdirlər, yəni $p_i = \frac{K}{\sigma_i^2}$, burada $\sigma_i^2 = \mathbf{M}(x_0 - x_i')^2$, x_0, $-$ x_i' təsadüfi dəyişəninin riyazi gözləməsidir, x_i', $-$ x-in i-ci ölçmə nəticəsindəki mümkün qiymətidir. Ölçülərdə sabit xəta olmadıqda x_0 kəmiyyəti x-in əsl qiyməti kimi götürülür. x kəmiyyəti üçün alınmış təqribi $\bar{x}$ qiymətinin çəkisi $P = \sum p_i$ bərabərliyi ilə təyin olunur, $x_0 \approx \bar{x}$ təqribi bərabərliyinin kvadratik orta xətası $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{P}}$ düsturu ilə verilir, burada σ – ayrıca bir ölçmənin kvadratik orta xətasını vahid çəki ilə ifadə edir və

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum p_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

təqribi bərabərliyi ilə təyin olunur.

Bəzi əlavə fərziyyələrlə göstərmək olar ki, $x_0 - \bar{x}$ fərqi orta xətaya və σ_x^2 dispersiyasına malik normal paylanma qanununa tabedir, məs., $x_0 - \bar{x}$ xətasına, bir-birindən asılı olmayan çoxsaylı faktorların eyni zamanda təsirindən yaranan biri digərindən asılı olmayan eyni kiçik tərtibli çoxsayda elementar xətalar cəmi kimi baxmaq olar. Bu halda, $x_0 - \bar{x}$ xətasının

paylanma qanununun məlum olması – $\bar{x}$ və x_0 arasında mümkün ola bilən müxtəlif yayınmaların ehtimallarını ehtimalların inteqral cədvəlləri üzrə hesablanmasına və beləliklə də, x kəmiyyətinin alınmış təqribi qiymətinin dəqiqliyi dərəcəsini də qiymətləndirməyə imkan yaradır.

Ç o x s a y d a n a m ə l u m l a r o l a n h a l. Fərz edək ki, n sayda asılı olmayan, $p_1, p_2, ..., p_n$ çəkilərli ölçmələr nəticəsində y kəmiyyəti üçün $y_1, y_2, ..., y_m$ qiymətləri alınmışdır, y kəmiyyəti isə naməlum $x_1, x_2, ..., x_m$ kəmiyyətləri ilə $y = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m$ xətti münasibətilə əlaqədardır, $m < n$, $a_1, a_2, ..., a_m$ parametrləri isə bizim ölçmələrimiz üçün dəqiq, bizə məlum olan $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, ..., a_m^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, ..., n)$ qiymətlərini alırlar. Bu halda x_i üçün Ən kiçik kvadratlar üsulu ilə ən yaxşı təqribi qiymətlərin axtarılması – onların

$$\sum_{i=1}^{n} p_i (y_i - a_1^{(i)} x_1 - ... - a_m^{(i)} x_m)^2$$

cəminə minimum verə bilən qiymətlərin axtarılmasına gətirilir.

Bu qiymətlər aşağıdakı normal tənliklərdən tapılır:

$$x_1 \sum p_i a_1^{(i)} a_1^{(i)} + x_2 \sum p_i a_1^{(i)} a_2^{(i)} + ... + x_m \sum p_i a_1^{(i)} a_m^{(i)} = \sum p_i y_i a_1^{(i)}$$

……

$$x_1 \sum p_i a_m^{(i)} a_1^{(i)} + x_2 \sum p_i a_m^{(i)} a_2^{(i)} + ... + x_m \sum p_i a_m^{(i)} a_m^{(i)} = \sum p_i y_i a_m^{(i)} .$$

$\bar{x}_h$-ın təqribi qiymətlərinin alınmış çəkiləri $\frac{\Delta}{\Delta_{hh}}$-a bərabərdir, burada Δ – normal tənliklərdə $x_1, x_2, ..., x_m$-lərin əmsallarından tərtib olunmuş determinant, Δ_{hh} isə $\sum p_i a_h^{(i)} a_h^{(i)}$ elementinə uyğun bu determinantın minorudur; x_h^0, – x_h-ın əsl qiyməti olsun, onda $x_h^0 \approx \tilde{x}_h$ təqribi bərabərliyinin kvadratik orta xətası –

$$\sigma_h \approx \sqrt{\frac{\sum p_i \lambda_i^2}{n - m}} \frac{\Delta_{hh}}{\Delta}$$

olacaqdır, burada $\lambda_i = y_i - \sum_{h=1}^{m} a_h^{(i)} \bar{x}_h$.

İndi araşdırdığımız məsələnin xüsusi halı – y və x kəmiyyətləri arasında empirik əlaqənin parabolik əyri şəklinə salınmasıdır, yəni bu kəmiyyətlər üçün müşahidə və ölçmələr nəticəsində y_i, x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ cütləri n_i tezlikləri ilə alınmışdır, yəni Ən kiçik kvadratlar üsuluna əsasən y və x arasında $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$ $(m < n)$ şəklində (burada $a_1, a_2, \ldots, a_m$ naməlum kəmiyyətlər fərz olunur) ən yaxşı təqribi asılılığın axtarılması elə aşağıdakı normal tənliklərdən tapılır:

$$S_0 a_0 + S_1 a_1 + \ldots + S_m a_m = T_0,$$

$$S_1 a_0 + S_2 a_1 + \ldots + S_{m+1} a_m = T_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_m a_0 + S_{m+1} a_1 + \ldots + S_{2m} a_m = T_m,$$

burada

$$S_0 = \sum n_i, \quad S_1 = \sum n_i x_i,$$

$$S_2 = \sum n_i x_i^2 \quad \text{və s.},$$

$$T_0 = \sum n_i y_i, \quad T_1 = \sum n_i y_i x_i,$$

$$S_2 = \sum n_i y_i x_i^2 \quad \text{və s.}$$

Əgər biz $a_1, a_2, \ldots, a_m$-lərin

$$\sum n_i (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \ldots - a_m x_i^m)^2$$

cəminə minimum verən qiymətlərini axtarsaq, bu normal tənliklər alınır.

Sonda qeyd edək ki, Ən kiçik kvadratlar üsulunun baniləri Qauss və Lejandr olmuşdur. Lejandr Ən kiçik kvadratlar üsulunu ilk dəfə özünün «Nouvelles méthodes pour la détermination des comètes» (1805-06) əsərində daxil etmişdir. Bu üsulu Qauss Lejandrdan asılı olmadan kəşf etmiş və onu özünün məhşur «Theoria motus corporum

coelestium» (1809) əsərində nəşr etdirmişdir. Ən kiçik kvadratlar üsulunun ilk elmi əsaslandırılması Qaussa aiddir; o, bunu ədədi orta prinsipindən çıxarılmış xətaların normal paylanma qanununun köməyilə etmişdir. Sonrakı Ən kiçik kvadratlar üsulu ilə bir çox tədqiqatçılar, o cümlədən, Laplas, Qlişer, Enke, Bessel, A. A. Markov və b. məşğul olmuşlar. Ən kiçik kvadratlar üsulunun ən ciddi və ən gözəl əsaslandırmalarından biri Markova aiddir.

Əd.: М а р к о в А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924, гл. VII; К р ы л о в А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, 3 изд., Л. – М., 1935; Ш и л о в П. И., Способ наименьших квадратов, 2 изд., М., 1936; Ч е б о т а р е в А. С., Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей, 2 изд., М., 1936; G a u s s C. F r., Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate, B., 1887; D e l - t h e i l R., Erreurset moindres carrés, P., 1930.

Х Р Е С Т О М А Т И Я
ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

ПОПУЛЯРНОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЙ

ХРЕСТОМАТИЯ
ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Титульный лист первого фрагмента Хрестоматии выглядит так:

ЛАПЛАС

ОПЫТ ФИЛОСОФИИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

(Essai philosophique sur les probabilités)

ПОПУЛЯРНОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЯ ПРИЛОЖЕНИЙ

Перевод **А. І. В.**

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

А. К. Власова

ПР-ДОЦЕНТА МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Москва – 1908.

Хрестоматию открывает «Опыт философии теории вероятностей» – перевод знаменитого сочинения французского ученого П. Лапласа. Далее помещены введение, заключение и исторический очерк из «Оснований математической теории вероятностей» В. Я. Буняковского (СПб., 1846) – первого русского учебника по теории вероятностей. Наконец, глава «Теория вероятностей» из 2-го тома книги «Математика, ее содержание, методы и значение» (М., 1956), написанная А. Н. Колмогоровым, содержит элементарное изложение основных понятий теории вероятностей. Заключительная часть Хрестоматии состоит из статей по теории вероятностей и математической статистике, помещенных в 1-м и 2-м изданиях «Большой Советской энциклопедии» (М., 1937-58).

При жизни П. Лапласа (P. Laplace, 1749-1827) «Опыт философии теории вероятностей» издавался пять раз (февраль и ноябрь 1814, 1816, 1819, 1825). При этом второе и четвертое издания служили введением ко второму и третьему изданию его «Аналитической теории вероятностей» (Theorie analytiquc des probabilités, Paris, 1812, – первое издание). «Опыт» содержит, как считается, развитие идей лекции, прочитанной автором в Нормальной школе еще в 1725.

«Опыт философии теории вероятностей», как и его переводы, неоднократно переиздавался в 19 в. (начиная с 1840) и в 20 в. Одно из последних изданий – английский перевод с 5-го французского издания 1825 (Laplace R. S., Philosophical essay on probabilities, N. Y. – B., 1994) содержит обширный комментарий, подготовленный с учетом пояснений, сопровождавших предшествующие издания.

«Опыт философии теории вероятностей» был опубликован в переводе на русский язык в 1908. Ниже воспроизводится этот перевод.

Предисловие к переводу.

Теория вероятностей является одной из интереснейших ветвей математического анализа, уже давно привлекшей к себе внимание и вне круга специалистов. Развитие математической статистики, биометрии, различного рода страхований, которые, распространяясь на широкие народные массы, сделались неизбежным фактором социальной и экономической политики, свидетельствует о том значении, какое может иметь теория вероятностей, которая лежит в основе этих наук и приложений.

За последнее время она вводится как обязательный предмет изучения не только на математическом отделении физико-математических

факультетов, где она преподавалась и раньше, но и на экономическом отделении юридических факультетов и других высших школ, где таковые отделения устраиваются. Естественно возникает таким образом потребность в такого рода сочинениях по теории вероятностей, которые были бы рассчитаны на более широкий круг читателей и при всестороннем освещении предмета могли бы служить введением к основательному изучению этой теории.

«Опыт философии теории вероятностей» («Essai philosophique sur les probabilités») Лапласа, перевод которого предлагается вниманию читателя, в этом отношении является наиболее подходящим. В блестящем труде французского геометра без особенных вычислений дается свод почти всех главных вопросов этой теории, затрагиваются самые глубокие и тонкие вопросы науки и жизни, к которым имеет приложение теория случайных явлений. Никому теория вероятностей не обязана столько, как Лапласу. Его «Theorie analytique des probabilités» составляет своего рода *principia* по этому предмету. В качестве введения к этому главному сочинению был приложен «Опыт философии теории вероятностей», который под этим последним заглавием раньше был выпушен отдельной монографией. Столетний возраст этого классического сочинения не умалил его значения. По выражению Джевонса «"Essai philosophique sur les probabilités" есть трактат, один из самых глубоких и интересных, какие когда-либо были напечатаны. Он должен быть хорошо знаком всякому, изучающему логический метод, потому что с течением времени он мало или почти ничего не потерял». Так писал Джевонс в своих «Основах науки, трактате о логике и научном методе». Можно было бы прибавить, что знакомство с этой книгой Лапласа доставит несомненное удовлетворение лицам, ищущим в общеобразовательных целях расширения своих сведений, возбудит интерес и энергию к основательному изучению математической теории вероятностей в лицах, посвятивших себя научной работе или применениям научных выводов к статистике, биометрии и практическим задачам страхования.

Перевод сделан с введения, которое приложено к третьему изданию «Аналитической теории вероятностей» («Théorie analytique des probabilités»), вошедшему в полное собрание сочинений Лапласа. Хорошо известный и оригинале специалистам, знаменитый «Опыт» великого геометра уже давно имеет переводы на другие языки, и я думаю, что ввиду оживившегося у нас интереса к теории вероятностей за последнее время и русский перевод не будет лишним.

Л. Власов.

ОПЫТ ФИЛОСОФИИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

Введение[*] это есть развитие курса лекций по теории вероятностей, читанного мною и 1795 г. «écoles normales», куда я был приглашен как профессор математики, вместе с Лагранжем, декретом национального конвента. Я хочу изложить здесь без помощи анализа принципы и общие результаты теории вероятностей, изложенной в этой книге[**], применяя их к важнейшим вопросам жизни, большинство которых не что иное, как задачи теории вероятностей. Можно даже сказать, если уж говорить точно, что почти все наши знания только вероятны; и в небольшом кругу предметов, где мы можем познавать с достоверностью, в самой математике, главные средства достигнуть истины – индукция и аналогия – основываются на вероятностях; таким образом вся система человеческих знаний связана с теорией, изложенной в этом труде. В ней увидят без сомнения с интересом, что, если даже рассматривать вечные принципы разума, справедливости и гуманности лишь как счастливые статочности постоянно их сопровождающие, следовать этим принципам является большою выгодой, а устраняться от них – тяжелым ущербом; так как статочности их, подобно благоприятствующим статочностям в лотереях, преимуществуют среди колебаний случая. Я желал бы, чтобы мысли, рассеянные в этом введении, заслужили внимание философов, и направили бы его на столь достойный их изучения предмет.

О вероятности.

Все явления, даже те, которые по своей незначительности как будто не зависят от великих законов природы, суть следствия столь же неизбежные этих законов, как обращение солнца. Не зная уз, соединяющих их с системой мира в ее целом, их приписывают конечным причинам или случаю, в зависимости от того, происходили ли и следовали ли они одно за другим с известной правильностью, или же без видимого порядка; но эти мнимые причины отбрасывались по мере того как расширялись границы нашего знания и совершенно исчезли перед здравой философией, которая видит в них лишь проявление неведения, истинная причина которого – мы сами.

---

[*] Опыт философии теории вероятностей помещен в качестве введения к Théorie analytique des probabilitiés.

[**] Théorie analytique des probabilitiés.

Всякое имеющее место явление связано с предшествующим на основании того очевидного принципа, что какое-либо явление не может возникнуть без производящей его причины. Эта аксиома, известная под именем «принципа достаточного основания», распространяется даже на действия, считаемые безразличными. Воля, самая свободная, не может породить эти действия без побуждающей причины; потому что, если бы она действовала в одном случае и воздерживалась от действия в другом, при полном подобии всех обстоятельств обоих положений, то выбор ее был бы действием без причины: она была бы, как сказал Лейбниц, слепым случаем эпикурейцев. Противоположное мнение есть иллюзия ума, который, теряя из виду мелкие причины того или другого выбора воли в безразличных поступках, убеждается, что она определяется самою собою и беспричинна.

Таким образом мы должны рассматривать настоящее состояние вселенной как следствие ее предыдущего состояния и как причину последующего.

Ум, которому были бы известны для какого-либо данного момента все силы, одушевляющие природу, и относительное положение всех ее составных частей, если бы вдобавок он оказался достаточно обширным, чтобы подчинить эти данные анализу, обнял бы в одной формуле движения величайших тел вселенной наравне с движениями легчайших атомов: не осталось бы ничего, что было бы для него недостоверно, и будущее, так же как и прошедшее, предстало бы перед его взором. Ум человеческий в совершенстве, которое он сумел придать астрономии, дает нам представление о слабом наброске того разума. Его открытия в механике и геометрии в соединении с открытием всемирного тяготения сделали его способным понимать под одними и теми же аналитическими выражениями прошедшие и будущие состояния мировой системы. Применяя тот же метод к некоторым другим объектам знания, нашему разуму удалось подвести наблюдаемые явления под общие законы и предвидеть явления, которые будут вызваны данными условиями. Все усилия духа в поисках истины постоянно стремятся приблизить его к разуму, о котором мы только что упоминали, но от которого он останется всегда бесконечно далеким. Это стремление, свойственное роду человеческому, возвышает его над животными; и успехи его в этом направлении различают нации и века и составляют их истинную славу.

Припомним, что в былое время, в эпоху не очень от нас отдаленную, на дождь или на чрезвычайную засуху, на комету с сильно

растянутым хвостом, на солнечное затмение, на северное сияние и вообще на необычайные явления смотрели как на знак небесного гнева. Взывали к небу, чтобы отвратить их пагубное влияние. Небо не молили остановить движение планет или солнца: наблюдение скоро дало бы почувствовать всю бесполезность таких молений. Но, так как те явления, наступающие и исчезающие через длинные промежутки времени, казалось противоречили порядку, установившемуся в природе, то люди предположили, что небо порождало и изменяло их по своему усмотрению в наказание земных грехов. Так длинный хвост кометы 1456-го года произвел панику в Европе, уже приведенной в ужас быстрыми победами турок, от которых только что пала Византийская империя. После того, как это небесное светило совершило четыре своих обращения, оно возбудило среди нас очень различный интерес. Знакомство законами системы мира, приобретенное за этот промежуток времени, рассеяло страх, порожденный незнанием истинных отношений человека ко вселенной; и Галлей (Halley), признав тождество этой кометы с кометою 1531-го, 1607-го и 1682-го годов, предсказал следующее ее возвращение в конце 1758-го или в начале 1759-го года. Ученый мир ждал с нетерпением этого возвращения, долженствовавшего подтвердить одно из самых великих открытий, сделанных в науке, и исполнить предсказание Сенеки, сказавшего об обращении небесных светил, которые спускаются из громадных расстояний: «Наступит день, когда, благодаря длившемуся несколько столетий изучению, вещи, ныне скрытые, явятся со всею своею очевидностью; и потомки наши изумятся, что столь очевидные истины ускользнули от нас». Тогда Клэро (Clairaut) взялся подвергнуть анализу те возмущения, которые комета испытала под влиянием двух самых больших планет – Юпитера и Сатурна: после громадных вычислений он назначил ее ближайшее прохождение через перигелий на начало апреля 1759-го года, и наблюдение не замедлило подтвердить это. Правильность, которую обнаруживает нам астрономия, без всякого сомнения имеет место во всех явлениях. Кривая, описанная простой молекулой воздуха или пара, определена так же точно, как и орбиты планет: разницу между ними делает только наше незнание.

Вероятность обусловливается отчасти этим незнанием, а отчасти нашим знанием. Пусть нам известно, что из трех или более событий должно произойти одно; но ничто не дает нам повода думать, что одно из них имеет преимущество перед другими. При такой неуверенности мы не можем предсказать достоверно, какое событие произойдет. Однако вероятно, что одно из этих событий, взятое

произвольно, не случится, потому что мы видим несколько одинаково возможных случаев, исключающих его существование, в то время как благоприятствует ему только один случай.

Теория случайностей состоит в том, чтобы свести все однородные явления к известному числу равно возможных случаев, то есть таких, существование которых для нас было бы одинаково неопределенно, и определить число случаев, благоприятствующих явлению, вероятность которого отыскивается. Отношение этого числа к числу всех возможных случаев и есть мера этой вероятности, которая таким образом не что иное, как дробь, числитель которой есть число всех благоприятных случаев, а знаменатель – число всех возможных случаев.

Предыдущее понятие вероятности предполагает, что, при увеличении в одинаковом отношении числа благоприятствующих и числа всех возможных случаев, вероятность остается та же. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим две урны A и B, из которых первая содержит четыре белых и два черных шара, а вторая только два белых и один черный. Представим себе оба черных шара первой урны связанными ниткой, которая рвется в тот момент, как мы берем один из шаров, чтобы его вынуть, представим себе также четыре белых шара образующими две такие же системы. Все те статочности, которые благоприятствуют изъятию одного из шаров черной системы, дадут черный шар. Если же предположить, что нитки, соединяющие шары, не рвутся, то ясно, что число возможных статочностей не изменится, так же, как и число статочностей, благоприятствующих изъятию черных шаров; только выниматься из урны будут два шара зараз. Вероятность изъятия из урны черного шара будет та же, что и раньше. Но тогда мы очевидно имеем случай урны B, с той только разницей, что три шара этой последней урны заменены тремя парами неизменно связанных шаров. Когда все статочности благоприятствуют какому-либо явлению, то вероятность заменяется достоверностью, а выражение ее делается равным единице. В этом отношении достоверность и вероятность сравнимы, хотя и есть существенное различие между двумя состояниями ума: когда истина ему строго доказана, или же когда он усматривает еще маленький источник заблуждения.

В явлениях, которые лишь правдоподобны, разница данных, имеющихся у каждого отдельного человека, составляет одну из главных причин различия мнений, существующих об одних и тех же предметах. Положим, напр., что мы имеем 3 урны A, B, C, из которых

одна содержит только черные шары, а две остальные – только белые. Шар должен быть вынут из урны С; спрашивается, какова вероятность того, что это будет черный шар. Если нам неизвестно, которая из трех урн содержит одни черные шары, так что нет никакого повода предполагать, что черные шары заключаются скорее в урне С, чем в В или А, то все эти три предположения покажутся равно возможными, и, так как черный шар может быть вынут только при первом предположении, то вероятность его изъятия равна одной трети. Если известно, что урна А содержит одни белые шары, то колебание наше относится только к урнам В и С, и вероятность того, что вынутый из урны С шар окажется черным, равна половине. Эта вероятность обращается, наконец, в достоверность, если мы убеждены, что в урнах А и В заключаются одни белые шары.

Таким-то образом факт, рассказанный перед многочисленным собранием, получает различную степень вероятия, смотря по обширности знаний слушателей. Если лицо, докладывающее о нем, совершенно в нем убеждено, и по своему положению и характеру внушает большое доверие, то рассказ его, как бы он ни был необычаен, будет иметь для непросвещенных слушателей ту же степень правдоподобия, как и обычный факт, рассказанный тем же лицом; ему поверят безусловно. Однако, если кто-либо из слушателей знает, что тот же факт отрицается людьми не менее почтенными, то он будет сомневаться; а просвещенными слушателями этот факт будет сочтен за ложный, так как они найдут, что он противоречит либо хорошо проверенным фактам, либо неизменным законам природы.

Влиянию мнения тех, кого толпа считает самыми сведущими и кому она привыкла доверять в важнейших вопросах жизни, обязаны мы распространением заблуждений, которые в невежественные времена рассеялись по лицу земли. Двумя крупными примерами этого являются магия и астрология. Подобные заблуждения, внушенные с детства, принятые без испытания и в основании которых лежит только всеобщее верование поддерживались в продолжение очень долгого времени, пока наконец прогресс науки не разрушил их в умах людей просвещенных, мнение которых заставило исчезнуть эти заблужения и среди народа силою подражания и привычки, распространивших их раньше так широко. Эта сила – самая могущественная побудительная причина мира нравственного утверждает и сохраняет в целой нации идеи, совершенно противоположные тем, которые та же сила поддерживает в другом месте с тою же властью. Насколько же должны мы быть снисходительны к чужим взглядам, различие

которых от наших зависит часто только от разных точек зрения, созданных обстоятельствами. Будем просвещать тех, кого мы не считаем достаточно образованными; но подвергнем раньше строгому пересмотру наши собственные взгляды и беспристрастно взвесим их относительное вероятие.

Разница взглядов зависит еще от способа определения влияния известных нам данных. Теория вероятностей имеет дело с такими деликатными соображениями, что не удивительно, особенно в очень сложных вопросах, если два лица, имея одни и те же данные, приходят к разным результатам. Изложим теперь главные принципы этой теории.

Общие принципы исчисления вероятностей.

I – ы й п р и н ц и п. Первый из этих принципов есть самое определение вероятности, которое, как мы видели, есть отношение числа случаев благоприятствующих к числу всех возможных случаев.

I I – о й п р и н ц и п. Но при этом различные случаи предполагаются равно возможными. Если же это не так, то сперва определяют их соответственные возможности, точная оценка которых является одним из самых деликатных пунктов теории случайностей. Тогда вероятность будет суммой возможностей каждого благоприятного случая. Поясним этот принцип примером.

Положим, что бросают в воздух большую и очень тонкую монету, две большие противоположные стороны которой, назовем их *крест* и *решетка,* совершенно подобны. Найдем вероятность по крайней мере однократного появления *креста* при двух бросаниях. Ясно, что могут иметь место четыре одинаково возможных случая, а именно: *крест* при первом и при втором бросаниях; *крест* при первом бросании и *решетка* при втором; *решетка* при первом бросании и *крест* при втором; наконец, *решетка* при двух бросаниях. Первые три случая благоприятствуют событию, вероятность которого отыскивается; она, следовательно, равна 3/4; так что три шанса против одного за то, что *крест* выпадет по крайней мере один раз при двух бросаниях.

Можно считать в этой игре только три разных случая, а именно: *крест* при первом бросании, что избавляет от второго бросания; *решетка* при нервом бросании и *крест* при втором; наконец, *решетка* при первом и втором бросаниях. Это свело бы вероятность к 2/3 если, бы мы считали, как Даламбер, эти три случая одинаково возможными. Но, очевидно, что вероятность появления *креста* при первом

бросании равна 1/2, тогда как вероятность других случаев равна 1/4; ибо первый случай есть событие простое, которое соответствует двум сложным событиям, *кресту* при первом и втором бросаниях, и *кресту* при первом бросании, *решетке* при втором. Если теперь, согласно второму принципу, прибавить возможность 1/2 *креста* при первом бросании к возможности 1/4 *решетки,* выпавшей при первом бросании, и *креста* при втором, то получится 3/4 для искомой вероятности, что согласуется с тем, что находим, предполагая выполнить оба бросания. Это предположение совсем не меняет участи того, кто держит пари за это событие: оно служит только для сведения различных случаев к случаям равно возможным.

I I I – и й п р и н ц и п. Один из самых важных пунктов теории вероятностей и наиболее дающий место иллюзиям – это способ, каким вероятности увеличиваются и уменьшаются взаимными сочетаниями. Если события независимы одно от другого, вероятность существования их совместности есть произведение их частных вероятностей. Так, в то время как вероятность выпадения одного очка на одной кости составляет одну шестую, вероятность выпадения двух очков при бросании двух костей сразу равняется одной тридцать шестой. Действительно, так как каждая сторона одной кости может комбинироваться с шестью сторонами другой, то существует тридцать шесть случаев, одинаково возможных, из которых один только дает два очка. Вообще, вероятность, что какое-нибудь простое событие при одинаковых обстоятельствах повторится подряд данное число раз, равна вероятности этого простого события, возведенной в степень, указанную этим числом. Таким образом, так как последовательные степени дроби, меньшей единицы, постоянно уменьшаются, событие, которое зависит от ряда очень больших вероятностей, может сделаться чрезвычайно маловероятным. Предположим, что какой-нибудь факт передан нам двадцатью свидетелями таким образом, что первый передал его второму, второй третьему и т.д.; предположим далее, что вероятность каждого свидетельства равна 9/10: вероятность факта, вытекающая из свидетельств, была бы менее одной восьмой. Нельзя лучше сравнить это уменьшение вероятности как с уменьшением ясности предметов, когда на пути зрения ставят несколько стеклянных пластинок, причем даже незначительного количества пластинок достаточно, чтобы скрыть вид предмета, который сквозь одно стекло виден совершенно ясно. Историки, кажется, не обращали достаточно внимания на это постепенное уменьшение вероятности фактов, если смотреть на них через большое число последовательных поколений: многие

исторические события, считающиеся достоверными, оказались бы по меньшей мере сомнительными, если бы их подвергли этому испытанию.

В науках чисто математических самые отдаленные следствия участвуют в достоверности принципа, от которого они происходят. В применениях анализа к физике следствия обладают всей достоверностью фактов или опытов. Но в нравственных науках, где каждое следствие выводится из предыдущего лишь на основании правдоподобия, как бы вероятны ни были эти выводы, шансы ошибок возрастают вместе с их числом, и наконец, в очень отдаленных следствиях какого-либо принципа, превышают шансы истинности.

I V – ы й п р и н ц и п. Если два события находятся в зависимости друг от друга, вероятность сложного события есть произведение вероятности первого события на вероятность того, что, когда оно совершилось, совершится и второе. Так в предыдущем случае с тремя урнами A, B и C, из которых две содержат только белые шары и одна только черные, вероятность изъятия белого шара из урны C есть 2/3, так как из трех урн две содержат шары только этого цвета. Но ввиду того, что по изъятии белого шара из урны C неизвестность, относящаяся к той из урн, которая содержит одни черные шары, касается уже только урн A и B, вероятность изъятия белого шара из урны B есть 1/2; произведение 2/3 на 1/2. или 1/3 есть, следовательно, вероятность изъятия из урн B и C сразу двух белых шаров. В самом деле, для этого необходимо, чтобы урна A была той из трех урн, которая содержит черные шары, а вероятность этого случая очевидно есть 1/3.

Из этого примера обнаруживается влияние прошедших событий на вероятность событий будущих; ибо вероятность изъятия белого шара из урны B, которая первоначально равна 2/3, сводится к 1/2 после того, как вынули белый шар из урны C: она обратится в достоверность, если бы из той же урны был вынут черный шар. Это влияние будет определено с помощью следующего принципа, который является следствием предыдущего.

V – ы й п р и н ц и п. Если вычислить *a priori* вероятность совершившегося события и вероятность события, состоящего из этого первого и из другого, которое ожидается, то вторая вероятность, деленная на первую, будет вероятностью ожидаемого события, выведенной из наблюденного события.

Здесь является вопрос, возбужденный несколькими философами, относительно влияния прошлого на вероятность будущего. Предположим, что в игре в *крест* и *решетку* *крест* появлялся чаще

решетки: из-за одного этого мы будем склонны думать, что в строении монеты существует постоянная причина, которая этому благоприятствует. Так, в жизни постоянное счастье является доказательством ловкости, которая и побуждает предпочитать счастливых людей. Но если из-за непостоянства обстоятельств мы беспрестанно возвращаемся к состоянию абсолютной неопределенности; если, напр., монета меняется при каждом бросании в игре в *крест* и *решетку,* то прошедшее не может пролить пи малейшего света па будущее, и было бы нелепостью принимать его в расчет.

V I – о й п р и н ц и п. Каждая из причин, которой может быть приписано наблюденное событие, тем более правдоподобна, чем более вероятно, что при существовании этой причины событие будет иметь место; вероятность существования какой-либо из этих причин равна, следовательно, дроби, числитель которой есть вероятность события, вытекающая из этой причины, а знаменатель есть сумма подобных вероятностей, относящихся ко всем причинам: если эти различные причины, рассматриваемые *a priori* не одинаково вероятны, то вместо вероятности события, вытекающей из каждой причины, следует взять произведение этой вероятности на вероятность самой причины. Это основной принцип той отрасли анализа случайностей, которая занимается переходом от событий к причинам.

Этот принцип уясняет, почему правильные события приписывают особенной причине. Некоторые философы полагали, что эти события менее возможны, чем остальные, и что в игре в *крест* и *решетку,* напр., сочетание, при котором *крест* выпадает двадцать раз подряд, менее естественно, чем такие сочетания, в которых *крест* и *решетка* перемешаны неправильно. Но этот взгляд предполагает, что прошедшие события оказывают влияние на возможность событий будущих, что совершенно недопустимо. Правильные сочетания только потому реже встречаются, что они менее многочисленны. Если мы будем добиваться причины там, где заметили симметрию, то это не значит, что мы рассматриваем симметричное событие как менее возможное, чем другие; но так как это событие должно быть следствием регулярной причины или случайности, то первое из этих предположений более вероятно, нежели второе. Мы видим на столе печатные буквы, расположенные в таком порядке: *Константинополь,* и мы считаем, что это расположение не есть следствие случая не потому, что оно менее возможно, нежели другие, так как, если бы это слово не употреблялось ни на одном языке, то мы не подозревали бы никакой особенной причины этого расположения; но ввиду того, что это слово

у нас употребляется, несравненно вероятнее, что кто-нибудь расположил так предыдущие буквы, нежели то, что этим расположением мы обязаны случаю.

Здесь уместно будет определить слово *необычайно.* Мы разбиваем мысленно все возможные события на различные классы, и мы считаем *необычайными* те классы, которые вмещают очень малое количество этих событий. Так, в игре в *крест* и *решетку* появление *креста* сто раз подряд кажется нам необычайным, потому что при подразделении почти бесконечного числа сочетаний, могущих произойти при ста бросаниях, на ряды правильные, или те, в которых па наш взгляд царствует легко уловимый порядок, и па ряды неправильные, эти последние несравненно многочисленнее. Изъятие белого шара из урны, которая на миллион шаров содержит только один шар этого цвета, а остальные черного, также кажется нам необычайным, потому что мы образуем только два класса событий соответственно двум цветам. Однако выход, напр., № 475813 из урны, содержащей миллион номеров, кажется нам событием обычным, потому что, индивидуально сравнивая между собою номера без подразделения их на классы, мы не имеем никакого основания думать, что один из них выйдет скорее, нежели остальные.

Из предыдущего мы вообще должны заключить, что, чем более какой-либо факт необычаен, тем более он нуждается в том, чтобы опорой ему служили сильные доказательства; ибо те, кто о нем свидетельствуют, могут ошибаться или быть обманутыми, и эти две причины тем более вероятны, чем менее вероятна сама но себе реальность факта. В этом мы убедимся особенно, когда будем говорить о вероятности свидетельских показании.

V I I – о й п р и н ц и п. Вероятность будущего события есть сумма произведений вероятности каждой причины, выведенной из наблюденного события, на вероятность того, что при существовании этой причины будущее событие будет иметь место. Следующий пример пояснит этот принцип.

Представим себе урну, содержащую только два шара, каждый из которых пусть будет белым или черным. Вынимают один из этих шаров, который кладут затем обратно в урну, чтобы приступить к новому тиражу. Предположим, что при первых двух тиражах появились белые шары; спрашивается, какова вероятность нового появления белого шара при третьем тираже.

Здесь можно допустить только две следующих гипотезы: или один из шаров белый, а другой черный, или оба белые. При первой гипотезе

вероятность наблюденного события равна 1/4; она равна единице или достоверности при второй. Так что, рассматривая эти гипотезы как столько же причин, будем иметь, согласно шестому принципу, 1/5 и 4/5 для соответствующих им вероятностей. Но если имеет место первая гипотеза, то вероятность изъятия белого шара при третьем тираже равна 1/2; она равна единице при второй гипотезе. После умножения этих последних вероятностей на вероятности соответствующих гипотез сумма произведений, или 9/10, будет вероятностью изъятия белого шара при третьем тираже.

Когда вероятность простого события неизвестна, то можно предполагать ее равной всем числовым значениям от нуля до единицы. Вероятность каждой из этих гипотез, выведенная из наблюденного события, равна, согласно шестому принципу, дроби, числитель которой есть вероятность события при этой гипотезе, а знаменатель – сумма подобных вероятностей относительно всех гипотез. Так, вероятность того, что возможность события заключена в данных пределах, равна сумме дробей, заключенных в этих пределах. Если теперь умножим каждую дробь на вероятность будущего события, определенную при соответствующей гипотезе, то сумма произведений, относящихся ко всем гипотезам, будет, согласно седьмому принципу, вероятностью будущего события, выведенное из наблюденного события. Таким образом находим, что после того как событие произошло подряд некоторое число раз, вероятность того, что оно произойдет еще следующий раз, равна этому числу, увеличенному на единицу, деленному на то же число, увеличенное па две единицы. Напр., если отнести древнейшую историческую эпоху за пять тысяч лет, или за 1826 213 дней, назад и принять во внимание, что солнце постоянно восходило за этот промежуток времени при каждой смене суток, то будет 1 826 214 шансов против одного за то, что оно взойдет и завтра. Но число это несравненно значительнее для того, кто, зная из совокупности явлении принцип, регулирующий дни и времена года, видит, что ничто в настоящий момент не может остановить их течения.

Бюффон в своей политической арифметике исчисляет по другому предыдущему вероятность. Он полагает, что она разнится от единицы только на дробь, числитель которой есть единица, а знаменатель число два, возведенное в степень равную числу дней, протекших с той эпохи. Но верный способ перехода от прошедших событий к вероятности причин и будущих событий был неизвестен этому знаменитому писателю.

Об ожидании

Вероятность событии служит для определения надежды или боязни лиц, заинтересованных в существовании этих событий. Слово *надежда* имеет разные значения: оно обыкновенно выражает выгоду того, кто ожидает какого-либо блага, делая предположения, которые не более как вероятны. Эта выгода в теории случайностей равна произведению ожидаемой суммы на вероятность ее получения, что составляет часть суммы, подлежащую уплате заинтересованному лицу, если оно не желает подвергаться риску, сопряженному с событием, в предположении, что сумма распределяется пропорционально вероятностям. Это распределение является единственным справедливым, когда мы отбрасываем все побочные обстоятельства, так как равная степень вероятности дает равные права на ожидаемую сумму. Мы назовем эту выгоду *математическим ожиданием.*

V I I I – о й п р и н ц и п. Если выгода зависит от многих событий, то, беря сумму произведений вероятности каждого события на благо, связанное с его наступлением, мы получим эту выгоду.

Применим этот принцип к примерам. Предположим, что в игре в *крест* и *решетку* Павел получает два франка, если у него выпадет *крест* при первом бросании, и пять франков, если он выпадет лишь при втором бросании. Умножив два франка на вероятность 1/2 первого случая, а пять франков на вероятность 1/4 второго случая, получим сумму произведений, или два с четвертью франка, которая будет выгодою Павла. Это та сумма, которую он должен дать вперед тому, кто ему доставил эту выгоду; ибо для равноправности игры ставка должна быть равна выгоде, которую она приносит.

Если Павел получает два франка при выпаде *креста* в первом бросании и пять франков при выпаде его во втором бросании даже в том случае, если *крест* выпал и в первом бросании, при вероятности выпадения *креста* во втором бросании равной 1/2, после умножения двух франков и пяти франков на 1*/2,* сумма этих произведений даст три с половиной франка для выгоды Павла и, следовательно, для его ставки в игре.

I X – ы й п р и н ц и п. Имея ряд вероятных событий, из которых одни приносят прибыль, а другие убыток, мы узнаем выгоду, которая из них последует, составляя сумму произведений вероятности каждого благоприятного события на приносимую им прибыль и отнимая от этой суммы сумму произведений вероятности каждого неблагоприятного события на связанный с ним убыток. Если

вторая сумма превосходит первую, то прибыль обращается в убыток, а надежда в страх.

В жизни всегда следует действовать по крайней мере в смысле уравнивания произведения ожидаемой прибыли на ее вероятность с подобным же произведением относительно убытка. Но, чтобы достигнуть этого, необходимо точно оценить прибыль, убыток и их соответственные вероятности. Для этого надо обладать очень верным умом, тонким тактом и большой опытностью в следующих отношениях: надо уметь оградить себя от предрассудков, иллюзий, страха и надежды, и от тех ложных представлений о богатстве и счастье, которыми большинство людей убаюкивают свое самолюбие.

Применение предшествующих принципов к нижеследующему вопросу очень занимало геометров. Павел играет в *крест* и *решетку* с условием, что он получает два франка, если у него выпадет *крест* при первом бросании, четыре франка, если он выпадет лишь при втором бросании, восемь франков, если он выпадет лишь при третьем и т.д. Его ставка в игре должна быть, согласно восьмому принципу, равна числу бросаний; так что, если партия продолжается до бесконечности, то его ставка должна быть бесконечною. Между тем ни один разумный человек не пожелал бы поставить в этой игре даже умеренную сумму, пятьдесят франков, напр. Откуда происходит эта разница между результатом исчисления и указаниями здравого смысла? Скоро узнали, что она зависит от того, что нравственная выгода, доставляемая нам каким-либо благом, не пропорциональна этому благу, и что она зависит от тысячи обстоятельств, часто с трудом поддающихся определению, самым общим и важным из которых является однако состояние. В самом деле, очевидно, что один франк имеет гораздо большую ценность для того, кто их имеет только сотню, чем для миллионера. Следует поэтому отличать в ожидаемом благе его абсолютную ценность от ценности относительной: эта последняя зависит от мотивов, заставляющих желать его, в то время как первая от этого независима. Нельзя дать общего принципа для оценки этой относительной ценности. Вот однако принцип, предложенный Даниилом Бернулли, и могущий быть полезным во многих случаях.

Х – ы й п р и н ц и п. Относительная ценность бесконечно малой суммы равна ее ценности абсолютной, деленной на все имущество заинтересованного лица. Здесь предполагается, что всякий человек имеет какое-либо имущество, ценность которого ни в каком случае не может предполагаться равною нулю. В самом деле, даже тот. кто

ничем не обладает, все же придает произведению своих трудов и своих надежд ценность, по крайней мере равную тому, что как раз необходимо, чтобы жить.

Если проанализировать только что нами изложенный принцип, то получим следующее правило.

Если, обозначая единицей часть состояния какого-либо лица, не зависящую от его ожиданий, определить различные значения которые может принимать это состояние ввиду этих ожиданий и их вероятностей, то произведение этих значений, возведенных соответственно в степени, указанные этими вероятностями, будет физическим богатством, которое доставит данному лицу ту же самую нравственную выгоду, какую оно получает от части своего состояния, взятой за единицу, и от своих ожиданий; если отнять от этого произведения единицу, то разница будет приращением физического богатства, которым мы обязаны ожиданиям: мы назовем это приращение *нравственным ожиданием.* Легко убедиться, что оно совпадает с математическим ожиданием в том случае, если состояние, принятое за единицу), делается бесконечным в сравнении с изменениями, которые оно претерпевает от ожиданий. Но когда эти изменения составляют значительную часть этой единицы, оба ожидания могут очень значительно отличаться друг от друга.

Это правило приводит к результатам, согласным с указаниями здравого смысла, которые благодаря этому могут быть оценены с некоторой точностью. Так, в предыдущем вопросе находим, что, если состояние Павла равно двумстам франкам, неразумно будет ставить в игре более девяти франков. То же самое правило рекомендует скорее распределить опасность на несколько частей ожидаемого состояния, чем подвергнуть той же опасности это состояние целиком. Из него вытекает подобным же образом, что в игре, даже самой справедливой, проигрыш всегда относительно больше выигрыша. Напр., при предположении, что игрок, обладая состоянием в сто франков, ставит из них пятьдесят в игре в *крест* и *решетку,* состояние его после ставки сводится к восьмидесяти семи франкам, т.е. эта последняя сумма доставила бы игроку ту же самую нравственную выгоду, как положение его имущества после ставки. Игра, следовательно, Невыгодна даже в том случае, когда ставка равна произведению ожидаемой суммы на ее вероятность. По этому можно судить о безнравственности игр, в которых ожидаемая сумма ниже этого произведения. Они существуют лишь благодаря ложным рассуждениям и благодаря алчности, которую они возбуждают и которая, склоняя народ

жертвовать даже необходимым ради химерических надежд, неправдоподобие которых он оценить не в состоянии, являются источником бесконечных зол.

Невыгода игр, выгода не подвергать одной и той же опасности все ожидаемое благо и все подобные результаты, указываемые здравым смыслом, существуют, какова бы ни была функция физического богатства, которая для каждого индивидуума выражает его богатство нравственное. Достаточно, чтобы отношение приращения этой функции к приращению физического богатства уменьшалось по мере увеличения этого последнего.

Об аналитических методах вероятностей.

Применение только что нами изложенных принципов к различным вопросам вероятности требует методов, изыскание которых дало начало многим отраслям анализа, в частности теории сочетаний и исчислению конечных разностей.

Если составить произведение биномов единица плюс первая буква, единица плюс вторая буква, единица плюс третья буква и т.д. до n букв, то, отняв единицу от этого раскрытого произведения, получим сумму сочетаний всех этих букв, взятых по одной, по две, по три и т. д., причем всякое сочетание будет иметь коэффициентом единицу. Чтобы получить число сочетаний этих n букв, взятых по s, следует заметить, что при равенстве этих букв между собой предшествующее произведение обратится в $n - s$ степень бинома единица плюс первая буква таким образом число сочетаний n букв, взятых по s, будет коэффициентом степени s первой буквы в разложении этого бинома; это число получится, следовательно, из известной формулы бинома.

Будем обращать внимание на порядок букв в каждом соединении, замечая, что, если присоединить вторую букву к первой, можно поместить ее на первом или втором месте, что дает два соединения. Если присоединить к этим соединениям третью букву, то можно поместить ее в каждом соединении на первом, втором пли третьем месте, что дает три соединения на каждое из двух предыдущих; всего шесть соединений. Отсюда легко заключить, что число размещений, которое возможно для s букв, есть произведение чисел от единицы до s. Поэтому, принимая во внимание и порядок букв, следует умножим, на это произведение число сочетаний n букв, взятых по s; а это сводится к тому, чтобы отбросить знаменатель коэффициента члена бинома, выражающего это число.

Представим себе лотерею, состоящую из n номеров, из которых r выходят при каждом тираже: нужно узнать вероятность выхода s данных номеров при одном тираже. Чтобы достигнуть этого, определяют число сочетаний n номеров, взятых по s. Затем определяют число сочетаний r номеров, взятых подобным же образом по s. Отношение этого последнего числа к предшествующему очевидно и есть вероятность того, что s данных номеров будут заключаться в r номерах, долженствующих выйти; следовательно, это отношение будет искомой вероятностью. Так, во Французской лотерее, состоящей, как известно, из 90 номеров, из которых при каждом тираже выходят пять, вероятность выхода данного выигрышного билета равна 5/90 или 1/18; значит лотерея в этом случае должна была бы для равноправности игры вернуть увеличенную в восемнадцать раз ставку. Число всех сочетаний но два, которые возможны из 90 номеров, равно 4005, и десять из них выходят при каждом тираже. Вероятность выхода данного амба равна поэтому 1/400.5, и лотерея в этом случае должна была бы вернуть ставку, увеличенную в четыреста с половиною раз; она должна была бы увеличить ставку в 11 748 раз для терны, в 511 038 раз для терны и в 43 949 268 раз для квины; лотерея далека от того, чтобы предоставить игрокам эти преимущества.

Предположим, что урна содержит a белых шаров и b черных, и что, по изъятии из нее шара, его кладут обратно в урну: спрашивается, какова вероятность того, что при n тиражах будут вынуты m белых шаров и $n - m$ черных. Ясно, что число случаев возможных при каждом тираже равно a плюс b. Так как каждый случай второго тиража может комбинироваться со всеми случаями первого, то число случаев возможных при двух тиражах равно квадрату бинома a плюс b. В разложении этого квадрата квадрат a выражает число случаев, в которых два раза вынут белый шар, удвоенное произведение a на b выражает число случаев, в которых вынуты белый и черный шары; наконец, квадрат b выражает число случаев, в которых вынуты два черных шара. Продолжая таким образом дальше, находят вообще, что n-я степень бинома a плюс b выражает число всех случаев возможных при n тиражах, и что в разложении этой степени член, умноженный на m-ю степень a выражает число случаев, в которых можно вынуть m белых шаров и $n - m$ черных. Поэтому, деля этот член на всю степень бинома, получим вероятность изъятия m белых шаров и $n - m$ черных. Так как отношение чисел a и a плюс b есть вероятность изъятия белого шара при одном тираже, а отношение

чисел b и a плюс b есть вероятность изъятия черного шара, если при этом назовем эти вероятности p и q, то вероятностью изъятия m белых шаров при n тиражах будет член, умноженный на $m - n$ степень p, в разложении n-й степени бинома p плюс q легко заметить, что сумма p плюс q есть единица. Это замечательное свойство бинома оказывается очень полезным в теории вероятностей.

Но самый общий и прямой метод решения вопросов о вероятности состоит в том, чтобы привести их в зависимость от разностных уравнений. При сравнении последовательных значений функции, которая выражает вероятность, когда переменные увеличиваются на соответствующие им разности, предложенный вопрос часто доставляет очень простое соотношение между этими значениями. Это соотношение есть то, что называется *уравнением с обыкновенными или частными разностями:* обыкновенными, когда имеется только одна переменная, частными, когда их несколько. Приведем несколько примеров.

Три игрока, силы которых предполагаются равными, играют на следующих условиях. Тот из двух первых игроков, который обыгрывает своего противника, играет с третьим, и, если он его обыграет, партия кончена. Если же он побит, то победитель играет с другим игроком и т.д., до тех пор пока один из игроков не обыграет сряду обоих остальных, чем и заканчивается партия: требуется определить вероятность того, что партия кончится через некоторое число n ходов. Найдем сперва вероятность того, что она будет окончена именно на n-м ходе. Для этого тот игрок, который выигрывает, должен вступить в игру через n минус единица ходов и выиграть как этот, так и следующий ход. Если же вместо того, чтобы выиграть ход n минус единица, он оказался бы побежденным своим противником, причем этот последний только что обыграл и другого игрока, то партия окончилась бы на этом ходе. Так что вероятность того, что один из игроков вступит в партию уа ходе n минус единица и выиграет его, равна вероятности того, что партия окончится именно на этом ходе; а так как этот игрок должен выиграть и следующий ход, для того чтобы партия окончилась на n-м ходе, вероятность этого последнего случая будет равна только половине предшествующей. Эта вероятность, очевидно, есть функция числа n; эта функция равна, следовательно, половине той же функции, если уменьшить в ней n на единицу. Это равенство составляет одно из тех уравнений, которые называются *уравнениями в обыкновенных конечных разностях.*

При помощи этого уравнения можно легко определить вероятность того, что партия окончится именно на некотором данном ходе. Очевидно, что партия никоим образом не может кончиться раньше, чем на втором ходе, и для этого необходимо, чтобы тот из первых двух игроков, который обыграл своего противника, обыграл на втором ходе третьего игрока; вероятность того, что партия окончится на этом ходе равна поэтому 1/2. Отсюда на основании предыдущего уравнения мы заключаем, что последовательные вероятности окончания партии равны: 1/4 для третьего хода, 1/8 для четвертого, и т.д., и вообще 1/2. возведенной в степень n минус единица для *n*-го хода. Сумма всех этих степеней 1/2 равна единице минус последняя из этих степеней; это и есть вероятность того, что партия будет окончена самое большее в *n* ходов.

Рассмотрим также первую более или менее трудную задачу на вероятности, которую удалось решить и которую Паскаль предложил решить Фермату. Два игрока *A* и *B,* ловкость которых одинакова, играют друг с другом с тем условием, что тот, кто первый победит другого данное число раз, выигрывает партию и получает сумму ставок; после нескольких ходов игроки соглашаются прекратить игру, не окончив партии; спрашивается, каким образом должна быть распределена между ними эта сумма. Ясно, что доли их должны быть пропорциональны соответственным вероятностям выиграть партию; поэтому вопрос сводится к тому, чтобы определить эти вероятности. Они зависят, очевидно, от числа очков, которых каждому игроку недостает до данного числа. Так, вероятность игрока *A* есть функция тех двух чисел, которые мы назовем *указателями.* Если бы оба игрока согласились сделать еще один ход (соглашение, которое совсем не меняет их участи, лишь бы только после этого нового хода дележ произошел по-прежнему пропорционально новым вероятностям выиграть партию), то либо *A* выиграет этот ход и в таком случае число недостающих ему очков уменьшится на единицу, либо игрок *B* выиграет его и в таком случае число очков, недостающих этому последнему игроку, сделается на единицу меньше. Но вероятность каждого из этих случаен равна 1/2; искомая функция равна поэтому половине этой функции, в которой первый указатель уменьшен на единицу, плюс половина той же функции, в которой второй указатель уменьшен на единицу. Это равенство есть одно из уравнений, которые называются *уравнениями и частных разностях.*

При помощи этого уравнения можно определить вероятности игрока *A*, исходя из наименьших чисел и заметив, что вероятность или

выражающая ее функция равна единице, когда игрок *A* достиг данного числа очков, иначе когда первый указатель равен нулю и эта функция обращается в нуль вместе со вторым указателем. Таким образом, предполагая, что игроку *A* недостает только одного очка, мы найдем, что его вероятность равна 1/2, 3/4, 7/8 и т. д., смотря по тому, недостает ли *B* одного очка, или двух, или трех и т.д. Вообще она равна тогда единице без степени 1/2 равной числу очков, недостающих *B*. Предположим затем, что игроку *A* недостает двух очков, и найдем его вероятность равной 1/4, 1/2, 11/16 и т.д., смотря по тому, недостает ли *B* одного очка, или двух, или трех и т.д. Предположим дальше, что игроку *A* недостает трех очков и т. д.

Этот способ получения последовательных значений какой-либо величины при помощи ее уравнения в разностях долог и затруднителен. Геометры искали методы получения общей функции указателей, удовлетворяющей этому уравнению, для того чтобы в каждом частном случае нужно было бы только подставить в эту функцию соответствующие значения указателей. Рассмотрим этот вопрос в общем случае. Для этого возьмем ряд членов, расположенных по горизонтальной линии, таких, что каждый из них происходит из предшествующих на основании известного закона. Предположим, что закон этот выражен уравнением, связывающим несколько последовательных членов с их указателем или числом, которое указывает место, занимаемое ими в ряду. Это уравнение есть то, что я называю *уравнением в конечных разностях с одним указателем.* Порядок или степень этого уравнения есть разность порядков двух крайних его членов. С помощью этого уравнения можно последовательно определить члены ряда и неопределенно продолжить его; но для этого необходимо знать число членов ряда равное степени уравнения. Эти члены суть произвольные постоянные выражения общего члена ряда или интеграла уравнения в разностях.

Возьмем теперь поверх членов предшествующего ряда второй ряд членов, расположенных горизонтально; возьмем поверх членов второго ряда еще третий горизонтальный ряд и т. д. до бесконечности и предположим, что члены всех этих рядов связаны общим уравнением между несколькими последовательными членами, взятыми как в горизонтальном, так и в вертикальном направлениях, и числами, указывающими их место в обоих направлениях. Это уравнение есть то, что я называю *уравнением в конечных частных разностях с двумя указателями.*

Подобным же образом возьмем поверх плоскости предыдущих рядов вторую плоскость подобных же рядов, члены которых находились бы соответственно над членами первой плоскости; возьмем затем поверх этой второй плоскости третью плоскость подобных же рядов и так до бесконечности; предположим, что все члены этих рядов связаны уравнением между несколькими последовательными членами, взятыми в направлении длины, ширины и высоты, и тремя числами, указывающими их место в этих трех направлениях. Это уравнение будет то, что я называю *уравнением в конечных частных разностях с тремя указателями.*

Рассматривая, наконец, вопрос в отвлеченной форме и независимо от измерений пространства, возьмем вообще систему величин, являющихся функциями известного числа указателей, и предположим между этими величинами, разностями их относительно этих указателей и самими указателями столько уравнений, сколько этих величин; это будут *уравнения в конечных частных разностях с известным числом указателей.*

При помощи этих уравнений можно последовательно определить эти величины. Но подобно тому как при уравнении с одним указателем для этого необходимо знать известное число членов ряда, при уравнении с двумя указателями необходимо знать одну или несколько строк рядов, общие члены которых могли бы быть выражены каждый произвольной функцией одного из этих указателей. Подобным образом при уравнении с тремя указателями необходимо знать одну или несколько плоскостей рядов, общие члены которых могли бы быть выражены каждый произвольной функцией двух указателей, и т.д. Во всяких этих случаях будет возможно посредством последовательных исключений определить какой-либо член рядов. Но так как все уравнения, из которых делается исключение, заключаются в одной и той же системе уравнений, все выражения последовательных членов, полученные с помощью этих исключений, должны заключаться в одном общем выражении, являющемся функцией указателей, которые определяют место члена. Это выражение есть интеграл предложенного уравнения в разностях, и нахождение его составляет предмет интегрального исчисления.

Тэйлор первый исследовал в сочинении под заглавием Methodus incrementorum линейные уравнения в конечных разностях. Он дает в нем способ интегрирования уравнений первого порядка с одним коэффициентом и последним членом, являющимися функциями указателя. Правда, отношения членов арифметических и геометрических

прогрессий, которые всегда рассматривались, являются простейшими случаями линейных уравнений в разностях; но они еще не рассматривались с такой точки зрения, одной из тех, которые, примыкая к общим теориям, ведут к этим теориям и благодаря этому являются настоящими открытиями.

Около того же времени Моавр рассматривал уравнения в конечных разностях любого порядка с постоянными коэффициентами под названием *возвратных рядов* (suites récurrentes). Ему удалось их интегрировать очень остроумным способом. Так как всегда интересно проследить путь изобретателей, я изложу путь, которым следовал Моавр, применяя его к возвратному ряду, соотношение между тремя последовательными членами которого дано. Он рассматривает сперва соотношение между последовательными членами геометрической прогрессии или двучленное уравнение, выражающее его. Относя его к членам предшествующим, он умножает его в этом виде на постоянный множитель и произведение вычитает из первоначального уравнения. Этим способом он получает уравнение, связывающее три последовательных члена геометрической прогрессии. Затем Моавр рассматривает вторую прогрессию, отношением членов которой является тот самый множитель, который он только что брал. Он уменьшает подобным же образом на единицу указателя членов уравнения этой новой прогрессии: в таком виде он умножает ее на отношение членов первой прогрессии и произведение вычитает из уравнения второй прогрессии, откуда он получает совершенно подобное же соотношение между тремя последовательными членами этой прогрессии, как уже найденное им для первой прогрессии. Далее он замечает, что если сложить почленно обе прогрессии, то же самое соотношение сохранится между любыми тремя такими последовательными суммами. Он сравнивает коэффициенты этого соотношения с коэффициентами соотношения членов предложенного возвратного ряда и находит с целью определения отношений обеих геометрических прогрессий уравнение второй степени, корнями которого являются эти отношения. Таким образом Моавр разлагает возвратный ряд на две геометрические прогрессии, умноженные каждая на произвольное постоянное, определяемое им при помощи двух первых членов возвратного ряда. Этот остроумный способ в сущности тот же самый, который применялся потом Даламбером для интегрирования линейных уравнений в бесконечно малых разностях с постоянными коэффициентами и который был перенесен Лагранжем на подобные же уравнения в конечных разностях.

Я рассмотрел затем линейные уравнения в конечных частных разностях сперва под названием *возвратно-возвратных рядов* (suites récurro-récurrentes), а потом под их собственным названием. Самым общим и простейшим способом интегрирования всех этих уравнений является, мне кажется, способ, основанный мною на рассмотрении образующих функций, идея которых такова.

Если возьмем функцию A переменного t, разложенную в ряд по восходящим степеням этого переменного, то коэффициент какой-либо из этих степеней будет функцией показателя или указателя этой степени. A будет то, что я называю *образующей функцией* этого коэффициента или функции указателя.

Если теперь умножить ряд A на линейную функцию того же самого переменного t, каковою является, напр., единица плюс это переменное, взятое два раза, то произведение будет новой образующей функцией, в которой коэффициент какой-либо степени переменного будет равен коэффициенту той же степени в A плюс двойной коэффициент степени на единицу меньшей. Таким образом функция указателя в произведении равна будет функции указателя в A плюс та же самая удвоенная функция, указатель в которой уменьшен на единицу. Эта функция указателя в разложении произведения является таким образом производной функции указателя в A, производной, которую можно выразить характеристикой δ, поставленной перед этой последней функцией. Операция, указанная характеристикой, зависит от множителя A, который мы обозначим через B и относительно которого мы предположим, что он подобно A, разложен по степеням переменного t.

Если снова умножить на B произведение A на B, что сводится к умножению A на квадрат B, то составится третья образующая функция, в которой коэффициент некоторой степени t будет подобной же производной соответствующего коэффициента предыдущего произведения; поэтому его можно будет обозначить той характеристикой δ, поставленной перед предшествующей производной; а тогда эта характеристика будет написана два раза перед соответствующим коэффициентом ряда A. Но вместо тою, чтобы писать ее два раза, пишут ее с показателем два.

Продолжая таким образом, увидим в общем случае, что после умножения A на n-ю степень B, в произведении получается коэффициент некоторой степени переменного t, если поставить перед соответствующим коэффициентом A характеристику δ с показателем n.

Предположим, что B есть единица деленная на t; тогда в произведении A на B коэффициент какой-либо степени этого переменного будет коэффициентом степени на единицу большей в A; откуда следует, что в произведении A на n-ю степень В коэффициент этот будет коэффициентом степени на n единиц большей в A.

Обозначим через C единицу, деленную на переменное t, минус единица; тогда в произведении A на C коэффициент какой-либо степени переменного будет коэффициентом его степени, на единицу большей, в ряде A, минус коэффициент этой степени в том же ряде; он будет, следовательно, конечной разностью этого последнего коэффициента, в котором указатель меняют на единицу. Таким образом в произведении A на n-ю степень C коэффициентом будет n-я разность соответствующего коэффициента A.

Так как B равно здесь единице плюс C, то n-я степень B тождественно равна такой же степени бинома единица плюс C. Поэтому после умножения на A обеих этих степеней окажется, что оба произведения тождественны. Но в произведении A на n-ю степень B коэффициент какой-либо степени переменного t является, как мы видели, коэффициентом степени, на n единиц большей в A; значит он есть функция указателя, увеличенного на число n. В произведении A на разложение бинома единица плюс C получим, на основании предыдущего, соответственные коэффициенты, написав вместо произведений A на последовательные степени C последовательные разности функции указателя в A и умножив на эту функцию член, не зависящий от C. Мы получим, следовательно, некоторую функцию указателя, увеличенного па неопределенное n, выраженной через коэффициенты n-й степени бинома единица плюс единица, соответственно умноженные на самую функцию и на ее последовательные разности, что дает интерполяцию рядов при помощи разностей их последовательных членов, если рассматривать неопределенное n дробным.

Тождественное уравнение B равно C плюс единица дает тождественное уравнение C равно B минус единица. Если возвести в n-ю степень обе части этого последнего равенства и умножить на A обе эти степени, то в произведении A на n-ю степень C коэффициент данной степени переменного C будет n-й конечной разностью коэффициента той же самой степени в A. В произведении A на разложение n-й степени бинома B минус единица коэффициент данной степени переменного будет суммой членов этого разложения, соответственно умноженных на значения коэффициента той же самой степени в A, если последовательно увеличивать указатель этого

коэффициента на количества *n*, *n* минус единица, *n* минус два и т. д., что дает *n*-ю конечную разность функции указателя через последовательные значения функции.

Обозначив δ производную коэффициента данной степени переменного *t* в *A* относительно множителя *B*, обозначим характеристикой Δ производную относительно множителя *C*. Если в уравнении *B* равно *C* плюс единица подставить δ вместо *B* и Δ вместо *C,* то, на основании предыдущего, от возведения обеих частей этого уравнения в *n*-ю степень равенство не нарушится, лишь бы только в каждом члене разложения коэффициент данной степени переменного в *A*, или функция указателя, поставлены были после каждой степени характеристик, а член, не зависящий от характеристик, умножен был на эту функцию. То же самое имеет место в уравнении *C* равно *B* минус единица, а также и в уравнении *B* минус *C* равно единице. От подстановки δ и Δ вместо *B* и *C* и от возведения обеих частей этого последнего уравнения в *n*-ю степень, если разложить потом первую часть, равенство не нарушится, лишь бы только в каждом члене функция указателя была поставлена после степеней характеристик δ и Δ и произведений этих степеней; и лишь бы эта функция была написана вместо единицы во второй части; что дает выражение этой функции при помощи ее последовательных значений и ее разностей.

Применяя те же рассуждения и к другим значениям множителей *B* и *C*, мы приходим к следующему общему результату: каковы бы ни были функции переменного *t*, представленные *B* и *C*, в разложении всех тождественных уравнений, могущих их связывать, можно заменить эти функции соответствующими характеристиками δ и Δ лишь бы функция указателя была поставлена после степеней или произведении степеней характеристик, а члены, не зависящие от характеристик, были умножены на эту функцию. В самом деле, очевидно, что если в некотором члене разложения уравнения, связывающего *B* и *C*, о котором идет речь, r есть степень *B,* а r' – степень *C*, для того чтобы перейти от образующих функций к их коэффициентам, нужно написать δ вместо *B* и Δ вместо *C* и поставить произведение степеней.

Распространяя по аналогии этот результат на тот случай, когда деление невозможно, он рассматривал количество, возведенное в дробную степень, как корень степени, указанной знаменателем этой дроби, из количества, возведенного в степень, указанную числителем. Затем он заметил, что по Декартову обозначению умножение двух степеней одной и топ же буквы сводится к сложению их показателей,

а деление – к вычитанию показателя степени делителя из показателя степени делимого, когда второй из этих показателей больше первого. Валлис распространил этот результат на тот случай, когда первый показатель равен второму или больше его, что обращает разность в нуль или делает ее отрицательной. Тогда он предположил, что отрицательный показатель означает единицу, деленную на величину, возведенную в ту же степень, но положительную. Эти замечания привели его к интегрированию в общем случае дифференциальных одночленов; откуда он вывел определенные интегралы особого рода дифференциальных биномов, показатель которых есть число целое и положительное. Заметив потом закон чисел, выражающих эти интегралы, он рядом интерполяций и удачных индукций, в чем заключается зародыш исчисления определенных интегралов, столь занимавших геометров, и одно из оснований моей новой теории вероятностей, выразил отношение площади круга к квадрату его диаметра бесконечным произведением, которое, если прерывать его, дает это отношение в пределах все более и более тесных: результат, один из самых замечательных в анализе. Однако замечательно, что Валлис, который так хорошо рассматривал дробные показатели радикальных степеней, продолжал обозначать их так же, как это делалось до него. Ньютон первый, если не ошибаюсь, ввел в своих Письмах к Ольденбургу обозначение этих степеней с помощью дробных показателей. Сравнивая путем индукции, которой Валлис дал такое прекрасное применение, показатель степенен бинома с коэффициентами членов его разложения в том случае, когда этот показатель целый и положительный, он определил закон этих коэффициентов и распространил его по аналогии на степени дробные и отрицательные. Эти различные результаты, основанные па обозначении Декарта, свидетельствуют о его влиянии на прогресс анализа. Оно имеет еще то преимущество, что дает самое простое и самое верное понятие о логарифмах, которые на самом деле не что иное как показатели степеней одной и той же величины, которые, последовательно возрастая на бесконечно малые величины, могут выразить все числа.

Но самое важное обобщение этого обозначения, это расспространение его на переменные показатели, что составляет показательное исчисление, одну из самых плодотворных ветвей новейшего анализа. Лейбниц первый указал па трансцендентные величины с переменными показателями и этим дополнил систему элементов, из которых может быть составлена конечная функция, ибо всякая явная конечная функция переменной сводится в последнем анализе к простым

величинам, комбинированным при помощи сложения, вычитания, умножения и деления и возведенным в постоянные или переменные степени. Корни уравнений, состоящих из этих элементов, суть неявные функции переменного. Таким образом, так как переменное имеет логарифмом показателя равной ему степени в ряде степеней числа, гиперболический логарифм которого единица, то логарифм переменного есть неявная функция.

Лейбницу пришла мысль давать своей дифференциальной характеристике, так же как и величинам, показатели; но тогда эти показатели вместо того, чтобы указывать на повторные умножения одной и той же величины, будут указывать на повторные дифференциации одной и той же функции. Это новое обобщение Декартова обозначения привело Лейбница к аналогии положительных степеней с дифференциалами, а отрицательных с интегралами. Лагранж проследил эту замечательную аналогию во всех ее подробностях; и рядом индукций, которые можно рассматривать как одно из прекраснейших, когда-либо сделанных применений этого метода, он дошел до общих формул, столь же интересных как и полезных для преобразования разностей и интегралов одних в другие в тех случаях, когда переменные получают конечные и различные приращения, а также когда эти приращения бесконечно малы. Но он не дал доказательств, которые он считал трудными. Теория образующих функций распространяет Декартово обозначение на любые характеристики: она доказывает с очевидностью аналогию между степенями и действиями, па которые указывают эти характеристики, так что она может быть также рассматриваема как показательное исчисление характеристик. Все, что касается рядов и интегрирования разностных уравнений вытекает из нее с необычайной легкостью.

Применение исчисления вероятностей. Об играх.

Комбинации, представляемые играми, были предметом первых исследований о вероятностях. Среди бесконечного разнообразия этих комбинаций многие легко поддаются исчислению, другие требуют исчисления более трудного, и вместе с возрастанием этих трудностей, по мере того как комбинации становятся более сложными, стремление преодолеть их и любознательность побуждали геометров совершенствовать все более и более этот род анализа. Мы видели раньше, что с помощью теории сочетаний легко можно определить выгоды в какой-либо лотерее; но узнать, на сколько тиражей можно держать

пари один против одного, напр., что выйдут все номера, труднее. Если n есть число номеров, r – число номеров, выходящих при каждом тираже, а i – неизвестное число тиражей, то выражение вероятности выхода всех номеров зависит от конечной разности n-й степени i произведения r последовательных чисел. Когда число n значительно, нахождение значения i, которое делает эту вероятность равной 1/2, становится невозможным, по крайней мере, если не разложить эту разность в очень сходящийся ряд. Этого можно удачно достигнуть с помощью ранее указанного метода для приближений функций очень больших чисел. Таким образом находим, что, если лотерея состоит из десяти тысяч номеров, из которых при каждом тираже выходит только один, то невыгодно держать пари один против одного, что все номера выйдут через 95 767 тиражей, и выгодно держать тоже самое пари при 95 768 тиражах. Во Французской лотерее такое пари невыгодно при 85-ти тиражах и выгодно при 86-ти тиражах.

Рассмотрим еще такой случай: два игрока A и B играют вместе в *крест* и *решетку* так, что при каждом бросании в случае выпадения *креста* A дает один жетон B, который в свою очередь дает ему один жетон в случае выпадения *решетки*; число жетонов у B ограничено, число жетонов у A не ограничено, и партия должна кончиться только тогда, когда у B не будет больше жетонов. Спрашивается, на сколько бросаний можно держать пари один против одного, что партия будет окончена. Выражение вероятности того, что партия будет окончена через число i бросаний, дано рядом, состоящим из большого числа членов и множителей, если число жетонов у B значительно; нахождение значения неизвестного i, которое делает этот ряд равным 1/2, было бы тогда невозможным, если бы не удалось свести этот ряд к ряду очень сходящемуся. Применяя к нему метод, о котором мы только что говорили, находим очень простое выражение для неизвестного, из которого вытекает, что, если, напр., у B сто жетонов, то немного менее одного шанса против одного за то, что партия окончится через 23 780 бросаний, и немного более одного шанса против одного за то, что она окончится через 23 781 бросание.

Этих двух примеров вместе с теми, которые уже были нами даны, достаточно, чтобы показать, каким образом задачи на игры могли содействовать совершенствованию анализа.

О неизвестных неравенствах, которые могут существовать между шансами, предполагаемыми равными.

Неравенства этого рода оказывают значительно влияние, заслуживающее особого внимания, на результаты исчисления вероятностей. Рассмотрим игру в *крест* и *решетку* и предположим, что обе стороны монеты выпадают с одинаковой легкостью; тогда вероятность выпадения *креста* при первом бросании равна 1/2, а вероятность его выпадения два раза подряд равна 1/4. Но если в монете существует неравенство, заставляющее одну из сторон выпадать преимущественно перед другой, и неизвестно, которой стороне благоприятствует это неравенство, то вероятность выпадения *креста* при первом бросании будет все еще 1/2, потому что при нашем незнании стороны, которой благоприятствует это неравенство, вероятность простого события настолько же увеличивается, если это неравенство ей благоприятствует, насколько она уменьшается, если неравенство ей не благоприятствует. Но при том же незнании вероятность выпадения *креста* два раза подряд увеличивается. В самом деле, эта вероятность является вероятностью выпадения *креста* при первом бросании, умноженной на вероятность того, что после выпадения при первом бросании он выпадет при втором; но выпадение его при первом бросании дает повод думать, что неравенство монеты ему благоприятствует; значит неизвестное неравенство увеличивает в таком случае вероятность выпадения *креста* при втором бросании; оно увеличивает, следовательно, произведение обеих вероятностей. Для того, чтобы подвергнуть этот вопрос исчислению, предположим, что это неравенство увеличивает на одну двадцатую вероятность простого события, которому оно благоприятствует. Если это событие есть выпадение *креста*, вероятность его будет равна 1/2 плюс 1/20, или 11/20, а вероятность его двукратного выпадения сряду будет равна квадрату 11/20. или 121/400. Если благоприятствуемое событие есть выпадение *решетки,* то вероятность *креста* будет равна 1/2 минус 1/20, или 9/20, а вероятность его двукратного выпадения сряду будет равна 81/400. Так как нет никакого основания думать наперед, что неравенство благоприятствует одному из этих событий преимущественно перед другим, то ясно, что для нахождения вероятности сложного события *крест-крест,* надо сложить обе предшествующие вероятности и взять половину их суммы, что дает 101/400 для этой вероятности, превышающей 1/4 на 1/400 или на квадрат приращения 1/20, на которое неравенство увеличивает возможность благоприятствуемого им

события. Подобным же образом вероятность выпадения *решетка-решетка* равна 101/400; но каждая из вероятностей выпадения *крест-решетка* или *решетка-крест* равна только 99/400, ибо сумма этих четырех вероятностей должна равняться достоверности или единице. Таким образом обыкновенно оказывается, что постоянные и неизвестные причины, которые благоприятствуют простым событиям, считающимся равно возможными, всегда увеличивают вероятность повторения одного и того же простого события.

При четном числе бросаний *крест* и *решетка* оба должны выпасть либо четное число раз, либо нечетное. Вероятность каждого из этих случаев равна 1⁄2, если возможности для обеих сторон монеты одинаковы; но, если между ними существует неизвестное неравенство, то это неравенство всегда благоприятствует первому случаю.

Два игрока, ловкость которых предполагается одинаковой, играют с тем условием, что при каждом ходе тот, кто проигрывает, дает своему противнику жетон, и что партия продолжается до тех пор, пока у одного из игроков не выйдут все жетоны. Исчисление вероятностей показывает нам, что для равноправности игры ставки игроков должны быть пропорциональны числам их жетонов. Но, если между их ловкостью существует маленькое неизвестное неравенство, то оно благоприятствует тому из игроков, у которого число жетонов меньше. Вероятность, что он выигрывает партию, увеличивается, если игроки условятся удваивать, утраивать свои жетоны, и она будет равна 1/2 или будет такой же, как и вероятность второго игрока в тех случаях, когда числа их жетонов сделаются бесконечными, сохраняя всегда одно и то же отношение.

Можно исправлять влияние этих неизвестных неравенств, подвергая их самих шансам случая. Так, если в игре в *крест* и *решетку* имеем вторую монету, которую бросаем всякий раз вместе с первой, и если условимся постоянно называть *крестом* ту сторону, которая выпадает на второй монете, то вероятность двукратного выпадения сряду *креста*[*] на первой монете будет гораздо больше приближаться к одной четверти, чем тогда, когда была только одна монета. В этом последнем случае разница равна квадрату малого приращения возможности, которое дает благоприятствуемой стороне первой монеты неизвестное неравенство: в другом случае эта разница равна учетверенному произведению этого квадрата на соответственный квадрат относительно второй монеты.

[*] В условном смысле.

Пусть в урну брошены сто номеров, от первого до сотого, в порядке нумерации, и пусть, после того как ее встряхнут, чтобы перемешать эти номера, вынут один из них; ясно, что вероятности выхода номеров будут между собой равны, если смешение произведено хорошо. Но, если опасаются, как бы между ними не было небольших отличий, зависящих от порядка бросания номеров в урну, то можно значительно уменьшить эти отличия, бросая эти номера во вторую урну в порядке их выхода из первой и встряхивая затем эту вторую урну для смешения номеров. Третья урна, четвертая и т.д. все более и более будут уменьшать эти отличия, незначительные уже во второй урне.

О законах вероятности, вытекающих из неопределенного увеличения числа событий.

В кругу непостоянных и неизвестных причин, которые мы разумеем под именем *случая* и которые делают ход событий непостоянным и неправильным, по мере увеличения их числа возникает заметная, поразительная правильность, которая кажется зависящей от преднамеренности и которую считали доказательством Провидения. Но, размышляя об этом, мы скоро убеждаемся, что эта правильность есть не что иное как раскрытие соответственных возможностей простых событий, которые должны случаться чаще, когда они более вероятны. Рассмотрим, напр., урну, которая содержит белые и черные шары, и предположим, что каждый раз как из нее вынимают шар, его кладут обратно в урну, чтобы приступить к новому тиражу. Отношение числа изъятых белых шаров к числу изъятых черных шаров будет всего чаще очень неправильно в первых тиражах; но непостоянные причины этой неправильности производят действия, поочередно благоприятствующие и не благоприятствующие правильному ходу событий, действия, которые, взаимно уничтожаясь при большом числе тиражей, делают все более и более заметным отношение содержащихся в урне белых шаров к черным или соответствующие возможности изъятия из нее белого или черного шара при каждом тираже. Отсюда вытекает следующая теорема.

Вероятность того, что отношение числа изъятых белых шаров к числу всех вышедших шаров не уклонится, сверх данного интервала, от отношения числа содержащихся в урне белых шаров к числу всех шаров, неопределенно приближается к достоверности при неопределенном увеличении числа событий, как бы мал ни был предполагаемый интервал.

Эту теорему, подсказываемую здравым смыслом, было трудно доказать с помощью анализа. И знаменитый геометр Яков Бернулли, первый, занимавшийся этим, приписывал большое значение доказательству, данному им. Исчисление образующих функций в применении к этому предмету не только с легкостью доказывает эту теорему, но дает еще и вероятность того, что отношение наблюдаемых событий уклоняется лишь в известных пределах от истинного отношения их соответственных возможностей.

Из предшествующей теоремы можно вывести одно следствие, которое должно быть рассматриваемо как общий закон, а именно, что отношения произведений природы остаются приблизительно постоянными, когда эти произведения рассматриваются в большом количестве. Так, несмотря на различие годов, сумма продуктов за значительное число лет заметно остается одною и тою же; так что человек в своей предусмотрительности может защитить себя от непостоянства времен года, распределяя поровну на все периоды те блага, которыми природа наделяет его неравномерно. Я не исключаю из предыдущего закона действий, вытекающих из нравственных причин. Отношение ежегодных рождений к населению и отношение браков к рождениям испытывают очень небольшие изменения: в Париже число ежегодных рождений остается почти одно и то же; и как я слышал, на почте в обыкновенное время число писем, не доставленных за отсутствием адреса, из года в год мало изменяется; что подобным же образом наблюдалось и в Лондоне.

Из этой теоремы следует кроме того, что в ряду событий, неопределенно продолженном, действие регулярных и постоянных причин должно со временем перевешивать действие причин нерегулярных. Это обстоятельство делает прибыль от лотерей такой же верной, как продукты земледелия ввиду того, что шансы, которые они представляют себе, обеспечивают им выгоду при большом числе ставок. Таким образом, принимая во внимание, что благоприятные многочисленные шансы постоянно связаны с соблюдением вечных принципов разума, справедливости и гуманности, которые являются основой и поддержкой обществ, следовать этим принципам представляет большое преимущество, а уклоняться от них – значительное неудобство. Пусть всякий обратится к истории и своему личному опыту, он увидит, что все факты подтверждают этот результат исчисления. Посмотрите на удачные результаты установлений, основанных на разуме и естественных правах человека, у народов, сумевших их ввести и сохранить. Посмотрите также, какое преимущество дала

добросовестность тем правительствам, которые положили ее в основу своего поведения, и как вознаграждены они были за жертвы, принесенные ими строгой точности в исполнении своих обещаний. Какое громадное доверие внутри страны! Какой авторитет вне! Посмотрите, наоборот, в какую бездну несчастий повергались часто народы благодаря властолюбию и вероломству своих вождей. Всякий раз, как великая держава, опьяненная любовью к победам, стремится ко всемирному Владычеству, чувство независимости объединяет угрожаемые народы в коалицию. Подобным же образом среди непостоянных причин, которые заставляют расширяться или сжиматься различные государства, естественные границы, действуя как постоянные причины, должны, наконец, одержать верх. Поэтому важно, как для прочности, так и для счастья государств, не переходить этих границ, к которым они беспрестанно должны возвращаться от действия этих причин, подобно тому, как воды морские, вздымающиеся от свирепствующей бури, падают обратно в свой бассейн от тяжести. Это один из результатов исчисления вероятностей, подтвержденный многочисленными пагубными опытами. История, рассматриваемая с точки зрения влияния постоянных причин, представляла бы сверх интереса для любознательности тот интерес, что она давала бы людям полезнейшие уроки. Иногда приписывают неизбежные следствия этих причин случайным обстоятельствам, которые только раскрыли их действие: напр., противно природе вещей, чтобы какой-либо народ навсегда остался подвластным другому народу, отделенному от него громадными морями или большим расстоянием. Можно утверждать, что со временем эта постоянная причина, соединяясь, все время с причинами непостоянными, действующими в том же смысле и обнаруживающимися с течением времени, натолкнется, наконец, среди них на достаточно сильные, чтобы вернуть подчиненному народу его естественную независимость, или чтобы присоединить его к какому-либо могущественному государству, смежному с ним.

В большом числе случаев, и это – важнейшие случаи анализа случайностей, возможности простых событий неизвестны, и мы принуждены искать в прошедших событиях указаний, которыми мы могли бы руководствоваться в наших догадках относительно причин, от которых они зависят. Применяя анализ образующих функций к вышеизложенному принципу вероятности причин, выведенной из наблюденных событий, мы приходим к следующей теореме.

Когда событие простое, или состоящее из нескольких простых, какова, напр., партия игры, повторялось большое число раз, то

возможности простых событий, которые делают наблюденное наиболее вероятным, суть те, на которые указывает наблюдение с наибольшим правдоподобием: по мере того как наблюденное событие повторяется, это правдоподобие увеличивается и оно слилось бы наконец с достоверностью, если бы число повторений сделалось бесконечным.

Здесь возможны два ряда приближений: одно из них относится к взятым с той и другой стороны пределам возможностей, которые придают прошедшему наибольшее правдоподобие; другое приближение касается вероятности того, что эти возможности падут в эти пределы. Повторение сложного события все более и более увеличивает эту вероятность, если пределы остаются те же самые; оно все более и более суживает промежуток между этими пределами, если вероятность остается та же самая: в бесконечности этот промежуток обращается в нуль, а вероятность переходит в достоверность.

Если применить эту теорему к отношению рождений мальчиков к рождениям девочек, наблюдавшемуся в различных странах Европы, то окажется, что это отношение, повсюду приблизительно равное отношению 22 к 21, указывает с крайней вероятностью на болышую легкость рождений мальчиков. Принимая затем во внимание, что оно остается тем же самым в Неаполе и Петербурге, мы увидим, что влияние климата в этом отношении нечувствительно. Можно было бы поэтому подозревать в противоположность общему мнению, что это преобладание мужских рождений существует даже на Востоке. Вследствие этого я предложил французским ученым, командированным в Египет, заняться этим интересным вопросом: однако затруднительность получения точных сведений о рождениях не позволила им решить его. К счастью Гумбольдт не оставил без внимания этого вопроса среди массы новых данных, которые он наблюдал и собирал в Америке с такой проницательностью, таким упорством и мужеством. Он нашел между тропиками то же самое отношение рождений мальчиков к рождениям девочек, какое наблюдалось в Париже, что должно заставить рассматривать преобладание мужских рождений как общий закон для рода человеческого. Законы, которым следуют в этом отношении различные виды животных, кажутся мне заслуживающими внимания естествоиспытателей.

Отношение рождений мальчиков к рождениям девочек отличается очень мало от единицы, однако даже достаточно большие числа рождений, наблюдавшихся в каком-либо месте, могли бы в этом отношении дать результат противоположный общему закону, и все-таки мы не имели бы права отсюда заключать, что этот закон не

существует. Чтобы вывести такое заключение, следует применить очень большие числа и убедиться в том, что оно указано с большой вероятностью. Бюффон приводит, напр., в своей Политической арифметике несколько бургундских общин, в которых рождаемость девочек превышает рождаемость мальчиков. Из этих общин община Carce11e-1e-Grignon дает на 2009 рождений в течение пяти лет 1026 девочек и 983 мальчика. Хотя эти числа значительны, они указывают все же на большую возможность рождений девочек только с вероятностью 9/10; а эта вероятность, которая меньше, чем вероятность, что *крест* не выпадет четыре раза подряд в игре в *крест* и *решетку,* не достаточна для нахождения причины этой аномалии, которая по всей вероятности исчезла бы, если бы за рождаемостью в этой общине следили в течение столетия.

При помощи метрических книг о рождениях, которые ведутся тщательно для обеспечения состояния граждан, можно определить население большого государства, не прибегая к переписи его жителей, затруднительной операции, которую трудно выполнить точно. Но для этого надо знать отношение населения к годичным рождениям. Самый точный способ достигнуть этого состоит в том, чтобы 1) выбрать в государстве департаменты, распределенные приблизительно одинаково на всей его поверхности, для того, чтобы сделать общий результат независимым от местных условий; 2) произвести тщательную перепись населения нескольких общин в каждом департаменте для какой-либо данной эпохи; 3) определить с помощью списков рождений за несколько лет, предшествующих этой эпохе и последующих за ней, среднее число, соответствующее годичным рождениям. Это число, деленное на число жителей, дает отношение ежегодных рождений к населению с тем большею верностью, чем значительнее будет перепись. Правительство, убежденное в пользе подобной переписи выразило согласие предписать ее выполнение, по моей просьбе. В тридцати департаментах, одинаково расположенных по всей Франции, были намечены общины, которые могли доставить самые точные сведения. Перепись в них дала в общем итоге 2037 615 человек жителей на 23-е сентября 1802-го года. Списки рождений в этих общинах за 1800, 1801 и 1802 годы дали:

Рождения	Браки	Смертные случаи
110312 мальчиков 105287 девочек	46037	103659 мужчин 99443 женщины

Отношение населения к годичным рождениям равно, следовательно, 28 352 845 : 1 000 000 ; оно больше, чем его оценивали до сих пор. Умножая на это отношение число годичных рождений во Франции, получим население этого государства. Но какова вероятность, что определенное таким образом население не уклоняется от истинного больше данного предела? Решая эту задачу и применяя к ее решению предыдущие данные, я нашел, предполагая число ежегодных рождений во Франции равным одному миллиону, что дает для населения 28 352 845 жителей, что будет триста тысяч шансов против одного за то, что ошибка этого результата не равна и полумиллиону.

Отношение рождений мальчиков к рождениям девочек, данное предшествующими списками, равно отношению 22 к 21; а браки относятся к рождениям как три к четырнадцати.

Крещение детей обоего пола в Париже слегка уклоняется от отношения 22 к 21. С 1745-го года, времени, с которого начали различать пол в метрических книгах о рождениях, до конца 1784-го года в этой столице окрестили 393 386 мальчиков и 377 555 девочек. Отношение этих чисел почти равно отношению 25 к 24; оказывается, по-видимому, что в Париже какая-нибудь особенная причина стремится уравнять крещения обоих полов.

Если применим к этому вопросу исчисление вероятностей, то найдем, что 238 шансов против одного за существование этой причины, что в достаточной мере дает право на ее изыскание. Когда я стал размышлять об этом, то мне показалось, что замеченная разница зависит от того, что родители из деревни и провинции, находя некоторое преимущество в оставлении при себе мальчиков, отсылали их в Приют для подкидышей в Париже сравнительно с девочками меньше, чем как следовало бы из отношения рождений обоих полов; что и доказали мне списки этого приюта. С начала 1745-го года до конца 1809-го в него поступило 163 499 мальчиков и 159 405 девочек. Первое из этих чисел превышает второе только на одну тридцать восьмую, тогда как оно должно было бы его превышать по крайней мере на одну двадцать четвертую. Подтверждает существование указанной причины и то, что, если не принимать во внимание подкинутых детей, отношение рождений мальчиков к рождениям девочек равно в Париже, как и в остальной Франции, отношению 22 к 21.

Постоянство преобладания рождений мальчиков над рождениями девочек, как в Париже, так и в Лондоне, за все время наблюдения

показалось некоторым ученым вмешательством Провидения, без которого, как они думали, нерегулярные причины, нарушающие беспрестанно ход событий, должны были бы много раз давать перевес годичным рождениям девочек над рождениями мальчиков.

Но этот довод является новым примером того, как часто злоупотребляли конечными причинами, которые всегда исчезают при более глубоком исследовании вопросов, когда имеются необходимые данные для их решения. Постоянство, о котором идет речь, является результатом регулярных причин, которые дают перевес рождениям мальчиков и которые перевешивают аномалии, зависящие от случая, когда число ежегодных рождений значительно. Нахождение вероятности того, что это постоянство сохранится в течение длинного периода времени, принадлежит той отрасли анализа случайностей, которая переходит от прошедших событий к вероятности событий будущих, а из нее вытекает, что, исходя из рождений, наблюдавшихся с 1745-го года по 1784-й, мы имеем почти четыре шанса против одного за то, что в Париже ежегодные рождения мальчиков будут постоянно превышать рождения девочек в продолжение столетия; нет, следовательно, никакого повода удивляться, что то же самое имело место в продолжение полустолетия.

Приведем еще пример того, как события раскрывают постоянные отношения по мере своего увеличения в числе. Рассмотрим ряд урн, расположенных в круговом порядке и содержащих, каждая, очень большое число белых и черных шаров; таким образом отношения в этих урнах белых шаров к черным могут быть вначале весьма различны, напр., таковы, что какая-либо из этих урн содержит одни белые шары, в то время как какая-либо другая содержит одни черные. Если мы вынем шар из первой урны, чтобы переложить его во вторую, из которой, встряхнувши ее для того, чтобы положенный шар хорошенько смешался с остальными, вынем шар и переложим в третью урну, и т. д. до последней урны, из которой вынем шар, чтобы переложить его в первую, и если мы будем неопределенно продолжать этот ряд тиражей; анализ вероятностей показывает нам, что отношения в этих урнах белых шаров к черным станут наконец одинаковыми и равными отношению суммы всех белых шаров к сумме всех черных, содержащихся в урнах. Так от регулярности этого способа изменения первоначальная неправильность отношений исчезает со временем, чтобы уступить место самому простому порядку. Если мы теперь вставим между этими урнами новые урны, в которых отношение суммы белых шаров к сумме черных, содержащихся в них,

отличается от предшествующего, и будем неопределенно продолжать только что указанные изъятия из всей совокупности этих урн, то тот простой порядок, который установился в прежних урнах, сперва будет нарушен и отношения белых шаров к черным сделаются неправильными; но мало-помалу эта неправильность исчезнет, чтобы уступить место новому порядку, который станет, наконец, порядком равенства отношений содержащихся в урнах белых шаров к черным. Можно распространить этот результат на все сочетания в природе, в которых постоянные силы, присущие их элементам, устанавливают правильный образ действий, способный вызвать даже из недр хаоса системы, управляемые удивительными законами.

Явления, даже наиболее зависящие, по-видимому, от случая, имеют, следовательно, тенденцию по мере увеличения их числа непрерывно приближаться ко вполне определенным отношениям; так что, если мы наметим по обе стороны каждого из этих отношений промежуток любой величины, то вероятность, что средний результат наблюдений падает на этот промежуток, в конце концов будет отличаться от достоверности только на величину, меньшую любой данной величины. Таким образом можно посредством исчисления вероятностей, примененного к большому числу наблюдений, познавать существование этих отношений. Но прежде чем искать их причины, и чтобы не запутаться в бесполезных умозрениях, необходимо убедиться в том, что они указаны с вероятностью, не позволяющей их рассматривать как аномалии, зависящие от случая. Теория образующих функций дает очень простое выражение для этой вероятности, которое получается от интегрирования произведения дифференциальной величины, результат которой, выведенный из большого числа наблюдений, уклоняется от истины на постоянную меньшую единицы, зависящую от рода задачи и возведенную в степень, показатель которой есть отношение квадрата этого уклонения к числу наблюдений. Интеграл, взятый в данных пределах и деленный на тот же самый интеграл, распространенный до бесконечности положительной и отрицательной, выразит вероятность того, что уклонение от истины заключено в этих пределах. Таков общий закон вероятности результатов, указанных большим числом наблюдений.

Приложение теории вероятностей к натуральной философии

Явления природы сопровождаются по большей части столькими посторонними обстоятельствами, влияние многочисленных

возмущающих причин настолько к ним примешивается, что становится очень трудным познавать их. Достигнуть этого можно только повторным наблюдением и опытом, чтобы посторонние влияния взаимно уничтожались, и средние результаты сделали бы очевидными эти явления и их различные элементы. Чем многочисленнее наблюдения и чем менее они расходятся, тем ближе их результаты к истине. Это последнее условие достигается подбором методов наблюдения, точностью инструментов и тщательностью, с которой производится наблюдение. С помощью теории вероятностей определяют затем САмые подходящие (выгодные) средние результаты, или такие, которые оставляют всего менее места ошибке. Но этого недостаточно; необходимо еще взвесить вероятность того, что ошибки этих результатов заключаются в данных пределах; без этого мы бы имели лишь несовершенное понятие о степени достигнутой точности. Поэтому формулы, служащие этой цели, составляют истинное усовершенствование научного метода и его важное добавление. Анализ, которого требуют эти формулы, принадлежит к самым тонким и трудным в теории вероятностей; он составляет один из главных предметов в напечатанном мною труде по этой теории, я нашел в нем несколько формул такого рода, имеющих то замечательное преимущество, что они независимы от закона вероятности ошибок и содержат только величины, данные непосредственными наблюдениями и выражениями их.

Аналитическое выражение каждого наблюдения есть функция элементов, которые требуется определить; и, если эти элементы приблизительно известны, функция эта обращается в линейную функцию их поправок. Приравнивая ее самому наблюдению, получаем так называемое *условное уравнение.* Если имеется большое число подобных уравнений, то комбинируют их так, чтобы получить столько конечных уравнений, сколько было элементов, поправки к которым можно затем определить, решая эти уравнения. Но какой способ комбинирования уравнений самый выгодный для получения конечных уравнений? Каков вероятный закон ошибок, элементы которого, получаемые из них, еще очень изменчивы? Это мы узнаем из теории вероятностей. Составление конечного уравнения с помощью уравнений условных сводится к умножению каждого из этих последних на неопределенный множитель и к соединению этих произведений. Следовательно, надо выбирать такую систему множителей, при которой можно ожидать наименьшую ошибку. Но, если умножать возможные ошибки какого-нибудь элемента на их соответственные вероятности, то, очевидно, что самой выгодной системой окажется та, в которой сумма этих

произведений, всех взятых положительно, будет *minimum,* потому что ошибка, положительная или отрицательная, всегда должна рассматриваться как потеря. Значит при образовании этой суммы произведений, условие *minimum'*а определит приемлемую систему множителей, или самую выгодную систему. Таким образом находим, что эта система есть система коэффициентов элементов в каждом условном уравнении, так что первое конечное уравнение образуется умножением соответственно каждого условного уравнения на его коэффициент первого элемента и соединением всех этих, таким образом умноженных, уравнений. Второе конечное уравнение составится, если поступим подобным же образом с коэффициентами второго элемента, и т. д. Таким образом элементы и законы явлений, заключенные в совокупности большого числа наблюдений, раскрываются с наибольшей очевидностью.

Вероятность ошибок, которых еще можно опасаться в каждом элементе, пропорциональна числу, гиперболический логарифм которого есть единица, возведенному в степень равную квадрату ошибки, взятому с минусом и умноженному на постоянный коэффициент, который можно рассматривать как модуль вероятности ошибок, потому что, если ошибка остается без изменения, вероятность ее быстро уменьшается при его увеличении; так что полученный элемент тяготеет, если я могу так выразиться, к истине тем более, чем больше этот модуль. Поэтому я назову этот модуль *весом* элемента или результата. Вес этот имеет наибольшую возможную величину в самой выгодной системе множителей; это обстоятельство и дает этой системе преимущество перед другими. Благодаря замечательной аналогии и этого веса и веса тел, сравниваемых по отношению к их общему центру тяжести, оказывается, что, если один и тот же элемент дан разными системами, составленными каждая из большого числа наблюдений, то средний результат, самый выгодный изо всех, равен сумме произведений каждого отдельного результата на его вес, деленной на сумму всех весов.

Кроме того, общий вес результата различных систем есть сумма их отдельных весов, так что вероятность ошибок среднего результата всех их взятых вместе пропорциональна числу, гиперболический логарифм которого есть единица, возведенному в степень равную квадрату ошибки, взятому с минусом, и умноженному на сумму всех весов. Каждый вес зависит на самом деле от закона вероятности ошибок каждой системы, а этот закон почти всегда неизвестен; но мне удалось исключить множитель, заключающий этот закон, с помощью

суммы квадратов уклонений наблюдений системы от их средних результатов. Итак, для расширения наших знаний о результатах, добытых совокупностью большого числа наблюдений, было бы желательно, чтобы рядом с каждым результатом записывался соответствующий ему вес; анализ представляет нам для этой цели общие и простые методы. Когда таким образом получена показательная функция, которая представляет закон вероятности ошибок, то мы имеем вероятность, что ошибка результата заключается в данных пределах, беря в этих пределах интеграл произведения этой показательной функции на дифференциал ошибки и умножая его на квадратный корень веса результата, деленного на окружность, диаметр которой единица. Отсюда следует, что, при одной и той же вероятности, ошибки результатов обратно пропорциональны квадратным корням их весов, что может служить для сравнения их относительных точностей. Для успешного применения этого метода следует разнообразить условия наблюдений или опытов таким образом, чтобы избежать постоянных причин ошибки. Наблюдения должны быть многочисленны, и тем более, чем больше элементов требуется определить, так как вес среднего результата растет вместе с числом наблюдений, деленным на число элементов. Необходимо кроме того, чтобы элементы имели в этих наблюдениях различный ход изменения, потому что, если бы ход изменения двух элементов был совершенно одинаков, что сделало бы коэффициенты их пропорциональными в условных уравнениях, то элементы эти составляли бы вместе одно неизвестное, и было бы невозможно различить их по этим наблюдениям. Необходимо, наконец, чтобы наблюдения были точны; это условие, самое первое изо всех, сильно увеличивает вес результата, выражение которого имеет делителем сумму квадратов уклонении наблюдений от этого результата. При таких предосторожностях возможны будут пользование предыдущим методом и оценка степени доверия, которого заслуживают результаты, выведенные из большого числа наблюдений.

Правило, которое мы только что дали для выведения конечных уравнений из условных, сводится к тому, чтобы сделать *minimum'*ом сумму квадратов ошибок наблюдений, потому что всякое условное уравнение становится точным от подстановки наблюдения плюс его ошибка; если же определить из него выражение этой ошибки, то легко можно убедиться, что условие *minimum'*а суммы квадратов этих выражений дает правило, о котором идет речь. Правило это тем точнее, чем многочисленнее наблюдения; но даже в том случае, когда число их невелико, кажется естественным применять то же правило,

которое во всяком случае дает нам простой способ получать без гадания искомые поправки. Оно может также служить для сравнения точности различных астрономических таблиц одного и того же светила. Можно всегда предположить, что эти таблицы приведены к одинаковому виду, а тогда они разнятся лишь эпохами, средними движениями и коэффициентами аргументов; так как, если одна из них содержит аргумент, которого нет в других, то ясно, что это сводится к тому предположению, что коэффициент этого аргумента в них равен нулю. Если теперь исправить эти таблицы всей совокупностью хороших наблюдений, то они удовлетворили бы условию *minimum'*а суммы квадратов ошибок; те таблицы, которые при сравнении со значительным количеством наблюдений всего более приближаются к этому условию, заслуживают, следовательно, предпочтения.

В астрономии, главным образом, может быть успешно применяем вышеизложенный метод. Астрономические таблицы обязаны достигнутой ими действительно изумительной верностью точности наблюдений и теорий, а также употреблению условных уравнений, благодаря которым большое число превосходных наблюдений содействует исправлению одного и того же элемента. Но оставалось еще определить вероятность ошибок, которых еще можно опасаться при этом исправлении; метод, только что мною изложенный, и служит для этой цели. Чтобы привести несколько интересных применений его, я воспользовался огромным только что законченным трудом Bouvard'а о движениях Юпитера и Сатурна, весьма точные таблицы которых он составил с величайшей тщательностью, разобрал противостояния и квадратуры этих двух планет, наблюдавшиеся Брадлэем и астрономами, следовавшими ему до последних лет. Из этих таблиц он вывел поправки элементов их движений и масс, сравниваемых с массой солнца, взятой за единицу. Вычисления эти дают ему массу Сатурна равную одной 3512-й части массы солнца. Применяя к ним мои формулы вероятности, я нахожу одиннадцать тысяч шансов против одного за то, что ошибка этого результата менее сотой части его числового значения; или, что сводится почти что к тому же самому, если через столетие новых наблюдений присоединить их к предыдущим и рассмотреть по тому же самому способу, то новый результат не будет отличаться и на сотую долю от результата Bouvard'а. Этот ученый астроном находит кроме того, что масса Юпитера равна одной 1701-й части массы солнца; а мой метод вероятности дает миллион шансов против одного, что этот результат не ошибочен и на сотую долю.

Этот метод может быть также с успехом применен к геодезическим операциям. Длина большой дуги на поверхности земли определяется цепью треугольников, опирающихся на точно измеренную базу; но, с какой бы точностью ни были измерены углы, неизбежные ошибки могут, накопляясь, значительно отклонить от истины числовое значение дуги, выведенное из большого числа треугольников. Числовое значение известно нам, следовательно, не совершенно, если мы не можем определить вероятности того, что его ошибка заключается в данных пределах. Ошибка геодезического результата есть функция ошибок углов каждого треугольника. В названном труде я дал общие формулы для получения вероятности числовых значений одной или нескольких линейных функций большого числа частных ошибок, закон вероятности которых нам известен; с помощью этих формул можно, значит, определить вероятность того, что ошибка какого-либо геодезического результата заключается в назначенных пределах, каков бы ни был закон вероятности частных ошибок. Стать вне зависимости от этого закона тем более необходимо, что законы, даже самые простые, всегда бесконечно мало вероятны, принимая во внимание бесконечное число этих законов, могущих существовать в природе. Неизвестный закон частных ошибок вводит однако в формулы неопределенную величину, которая не позволила бы сократить их число, если бы не удалось ее исключить. Мы видели, что в астрономических вопросах, где всякое наблюдение доставляет условное уравнение, для получения элементов исключают эту неопределенную величину при помощи суммы квадратов остатков после того, как в каждое уравнение подставлены самые вероятные числовые значения элементов. Так как геодезические вопросы не представляют подобных уравнений, то надо отыскать другой способ исключения. Величина, на которую сумма углов всякого наблюдаемого треугольника превосходит два прямых, плюс сферический избыток, доставляет нам этот способ. Так, заменяют суммой квадратов этих величин сумму квадратов остатков условных уравнений; и можно вычислить вероятность того, что конечный результат ряда геодезических операций не превзойдет данной величины. Но который способ самый выгодный при распределении между 3 углами каждого треугольника наблюденной суммы их ошибок? Анализ вероятностей показывает, что каждый угол должен быть уменьшен на треть этой суммы, для того чтобы вес геодезического результата был по возможности наибольшим; а это делает ту же ошибку менее вероятной. Следовательно, есть большое преимущество наблюдать три угла всякого треугольника и поправлять

их указанным способом. Простой здравый смысл заставляет предчувствовать эту выгоду; но одно исчисление вероятностей может оценить ее и показать, что благодаря этой поправке она становится возможно наибольшей.

Чтобы убедиться в точности числового значения дуги большого круга, опирающейся на измеренную базу при одном из ее концов, измеряют вторую базу при другом ее конце и вычисляют по одной из этих баз длину другой. Если длина эта очень мало уклоняется от наблюдения, то вполне уместно будет думать, что цепь треугольников, соединяющих эти базы, почти совсем точна, так же как и определяемая из нее величина большой дуги. Затем исправляют эту величину, изменяя углы треугольников так, чтобы базы вычисленные согласовались с измеренными; но это может быть сделано бесконечным числом способов, между которыми следует предпочесть те, геодезический результат которых имеет наибольший вес, потому что та же самая ошибка делается тогда менее вероятной. Анализ вероятностей дает формулы для непосредственного получения самой выгодной поправки, которая вытекает из измерений нескольких баз, а также законы вероятности, возникшие благодаря многочисленности баз, законы, которые становятся быстрее убывающими благодаря именно этой многочисленности.

Ошибки результатов, выведенные из большого числа наблюдений, суть вообще говоря линейные функции частных ошибок каждого наблюдения. Коэффициенты этих функций зависят от рода задачи и от способа, которому следовали для получения результатов. Самый выгодный способ очевидно тот, при котором одна и та же ошибка в результатах менее вероятна чем при всяком другом. Применение исчисления вероятностей к натуральной философии заключается, следовательно, в определении аналитически вероятности числовых значений этих функций и в выборе их неопределенных коэффициентов так, чтобы закон этой вероятности стал наиболее быстро убывающим. Исключая затем из формул, с помощью данных задачи, множитель, который вводит почти всегда неизвестный закон вероятности частных ошибок, возможно будет оценить численно вероятность того, что ошибки результатов не превысят данной величины. Таким образом получим все, чего мы может желать относительно результатов, выведенных из большого числа наблюдений.

Можно кроме того получить очень близкие результаты с помощью других соображений. Положим, напр., что мы имеем тысячу одно наблюдение одной и той же величины; среднее арифметическое

всех этих наблюдений есть результат, данный самым выгодным методом; но можно было бы выбрать результат согласно условию, чтобы сумма уклонений от каждой частной величины, всех взятых положительно, была бы *minimum* в самом деле, нам кажется естественным рассматривать результат, удовлетворяющий этому условию, как наиболее приближенный. Если расположить числовые значения, данные наблюдениями, в порядке величины, то легко видеть, что числовое значение, которое займет среднее место, выполнит предыдущее условие; а вычисление показывает нам, что в случае бесконечного числа наблюдений эта величина совпадет с истинной; однако результат, данный самым выгодным методом, все же предпочтительнее.

Рассмотрение вероятностей может служить для того, чтобы различать маленькие неравенства небесных движений скрытые в ошибках наблюдений, и для того, чтобы добраться до причины аномалий, замеченных в этих движениях. Сравнивая между собой все свои наблюдения, Тихо Брагэ признал необходимость применения к луне уравнения времени, отличного от уравнения, применяемого к солнцу и планетам. Подобным же образом совокупность большого числа наблюдений дала знать Майеру, что коэффициент неравенства прецессии должен быть уменьшен для луны. Но так как это уменьшение, хотя и подтвержденное и даже увеличенное Мазоном, казалось не вытекает из всемирного тяготения, то большая часть астрономов пренебрегли им в своих вычислениях. После того как я подверг исчислению вероятностей значительное количество лунных наблюдений, для этой цели избранных, и разобранных по моей просьбе Bouvard'ом, уменьшение это показалось мне указанным с такой большой вероятностью, что я счел себя обязанным найти его причину. Я отлично видел, что ею мог быть лишь эллиптический вид земного сфероида, до тех пор не принимавшийся во внимание в теории движения луны, как могущий ввести в нее лишь незначительные члены; отсюда я заключил, что члены эти становятся значительными при последовательных интегрированиях дифференциальных уравнений. Я определил затем эти члены отдельным анализом и открыл сперва неравенство движения луны по широте, которое пропорционально sinus'у долготы луны и которого еще не подозревал ни один астроном. Я узнал потом при помощи этого неравенства о существовании другого неравенства в движении луны по долготе, которое и производит уменьшение, замеченное Майером в уравнении прецессии, применяемом к луне. Величина этого уменьшения и

коэффициент предыдущего неравенства по широте очень удобны для установления сжатия земли. Сообщив о моих исследованиях Бургу, который в то время занимался усовершенствованием лунных таблиц путем сравнения всех хороших наблюдений, я просил его определить с особою тщательностью эти две величины. Весьма замечательно согласуясь, найденные им величины дают для земли одно и то же сжатие 1/305, сжатие, которое мало отличается от среднего значения, выведенного из измерений градусов меридиана и из наблюдений маятника, но которое в виду влияния на эти измерения ошибок наблюдений и возмущающих причин мне кажется более точно определенным лунными неравенствами.

При рассмотрении вероятностей узнал я также причину векового уравнения луны. Новейшие наблюдения этого светила, будучи сравнены с прежними затмениями, указали астрономам на ускорение в движении луны; но геометры, и особенно Лагранж, после безуспешного искания членов, от которых зависит это ускорение, в возмущениях, испытываемых этим движением, отбросили это ускорение. Внимательное рассмотрение старых и новейших наблюдений, а также промежуточных затмений, наблюдавшихся арабами, показало мне, что указания на него имеют большую вероятность. С этой точки зрения я снова рассмотрел лунную теорию, и я нашел, что вековое уравнение луны происходит от действия солнца на этого спутника в связи с вековым изменением эксцентриситета земной орбиты, а это меня привело к открытию вековых уравнений движений узлов и перигелия лунной орбиты, уравнений, о которых и не подозревали астрономы. Весьма замечательное соответствие этой теории со всеми древними и новейшими наблюдениями сделали ее в высшей степени очевидной.

Подобным же образом исчисление вероятностей привело меня к причине больших неправильностей Юпитера и Сатурна. Сравнивая новейшие наблюдения с древними, Галлей нашел ускорение в движении Юпитера и замедление в движении Сатурна. Чтобы согласовать наблюдения, он подчинил эти движения двум вековым уравнениям с разными знаками и возрастающим как квадраты времен, протекших с 1700 года. Эйлер и Лагранж подвергли анализу изменения, которые должно было произвести в этих движениях взаимное притяжение двух планет. Тогда они нашли вековые уравнения; но их результаты были до того различны, что по крайней мере один из них должен был быть ложным. Я решил поэтому заняться этим важным вопросом небесной механики, и я признал неизменность средних планетных движений, что заставило исчезнуть вековые уравнения, введенные Галлеем в

таблицы Юпитера и Сатурна. Таким образом служить объяснением больших неправильностей этих планет могли еще только притяжения комет, к которым действительно и прибегли некоторые астрономы, или же существование неравенства большого периода, произведенного в движениях этих двух планет их взаимодействием, и определяемого для каждой из них противоположными знаками. Найденная мною теорема о неравенствах такого рода сделала для меня весьма правдоподобным это неравенство. По этой теореме оказывается, что, если движение Юпитера ускоряется, то движение Сатурна замедляется, что уже сходно с тем, что заметил Галлей; более того, ускорение Юпитера, следующее из той же теоремы, относится к замедлению Сатурна почти совершенно так, как относятся друг к другу вековые уравнения, предложенные Галлеем. Исследуя средние движения Юпитера и Сатурна, мне легко было узнать, что движение Юпитера, взятое два раза, превосходит лишь на очень малую величину движение Сатурна, взятое пять раз. Период неравенства, которое имело бы этот аргумент, равнялся бы приблизительно девяти векам. На самом деле, его коэффициент был бы того же порядка, как кубы эксцентриситетов орбит. Но мне было известно, что в силу последовательных интегрирований он приобретает делителем квадрат очень малого множителя времени в аргументе этого неравенства, что может ему дать большое числовое значение: существование этого неравенства показалось мне поэтому очень вероятным. Следующее замечание еще увеличило его вероятность. Полагая этот аргумент равным нулю во времена наблюдений Тихо Брагэ, я увидел, что при помощи сравнения новейших наблюдений со старыми Галлей должен был найти изменения, им указанные, тогда как сравнение новейших наблюдений между собой должно было дать изменения противоположные и подобные тем, которые вывел Ламберт из этого сравнения. Не колеблясь предпринял я поэтому длинное и утомительное вычисление необходимое для того, чтобы убедиться в существовании этого неравенства оно вполне было подтверждено результатом этого исчисления, открывшим мне кроме того большое число еще других неравенств, совокупность которых довела таблицы Юпитера и Сатурна до точности самых наблюдений.

При помощи исчисления вероятностей опять-таки мне удалось открыть замечательный закон средних движений первых трех спутников Юпитера, согласно которому средняя долгота первого минус три раза взятая долгота второго плюс два раза взятая долгота третьего в точности равняется полуокружности. Приближение, с которым средние

движения этих светил со времени их открытия удовлетворяют этому закону, указывало на его существование с большим правдоподобием: я стал искать причину его в их взаимодействии. Тщательное исследование этого действия показало мне, что достаточно было такого первоначального отношения их средних движений, которое только приближалось к этому закону в известных пределах, для того чтобы их взаимодействие установило этот закон и в точности его поддерживало. Таким образом эти три тела будут вечно совершать свои движения в пространстве по предшествующему закону, если только какие-нибудь посторонние причины, напр., кометы, не нарушат внезапно их движения вокруг Юпитера.

Отсюда видно, с каким вниманием следует относиться к указаниям природы, когда они являются результатом большого числа наблюдений, хотя бы при этом их и нельзя было объяснить известными способами. Чрезвычайная трудность задач, относящихся к системе мира, принудила геометров прибегнуть к приближениям, при которых всегда можно опасаться как бы отбрасываемые величины не оказали заметного влияния. Когда наблюдения указывали им на такое влияние, они снова обращались к их анализу; при поверке они всегда находили причину замеченных аномалий; они определяли их закон и часто предупреждали наблюдения, открывая неравенства, которые наблюдениями еще не были указаны. Таким образом можно сказать, что сама природа содействовала аналитическому совершенствованию теорий, основанных на принципе всемирного тяготения, и это по моему мнению является одним из сильнейших доказательств истинности этого принципа, достойного удивления.

Одно из самых замечательных явлений системы мира представляют все движения вращения вокруг оси и обращения планет и спутников в одном направлении с вращением солнца вокруг своей оси и почти в плоскости его экватора. Столь замечательное явление далеко не случайно: оно указывает на общую причину, которая определила эти движения. Чтобы узнать, с какой вероятностью указана эта причина, принимают во внимание, что планетная система, насколько она нам известна в данное время, состоит из одиннадцати планет и восемнадцати спутников, по крайней мере если вместе с Гершелем приписывать планете Урану шесть спутников. Известны движения вращения вокруг оси солнца, шести планет, луны, спутников Юпитера, кольца Сатурна и одного из его спутников. Эти движения вместе с движениями обращения составляют всего сорок три движения в одном и том же направлении; а из анализа вероятностей мы узнаем,

что четыре тысячи миллиардов шансов против одного за то, что этот порядок не есть дело случая; а это представляет вероятность гораздо большую, чем вероятность таких исторических событий, относительно которых мы не позволяем себе сомневаться. Поэтому мы должны по меньшей мере с той же уверенностью принять, что какая-либо первоначальная причина дала направление планетным движениям, особенно, если принять во внимание, что наклонение большей части этих движений к солнечному экватору очень невелико.

Другое столь же замечательное явление солнечной системы это малый эксцентриситет орбит планет и спутников, между тем как орбиты комет очень растянуты, так что в этой системе орбиты не представляют промежуточных переходов от больших эксцентриситетов к малым. Здесь мы точно так же вынуждены признать действие регулярной причины: случай не придал бы почти кругообразной формы орбитам всех планет и их спутников; поэтому необходимо, чтобы причина, определившая движения этих тел, сделала их почти круговыми. Необходимо кроме того, чтобы большие эксцентриситеты орбит комет вытекали из существования этой причины, которая в то же время не оказывала бы влияния на направление их движений; ибо оказывается, что существует почти столько же комет с обратным движением как с прямым и что среднее наклонение всех их орбит к эклиптике очень близко половине прямого угла, как это должно было бы быть, если бы эти тела были рассеяны случайно.

Какова бы ни была природа той причины, о которой идет речь, раз она вызвала или направила движения планет, необходимо, чтобы она охватывала все эти тела, а ввиду расстояний, которые разделяют их, ею могла бы быть только жидкость громадного протяжения: чтобы дать в одном и том же направлении почти круговое движение вокруг солнца, необходимо, чтобы эта жидкость окружала это светило подобно атмосфере. Изучение планетных движений приводит нас, следовательно, к мысли, что вследствие необычайного жара атмосфера солнца простиралась первоначально за пределы орбит всех планет и мало-помалу сжалась до настоящих пределов.

В том первичном состоянии, в котором мы предполагаем солнце, оно походило на туманные пятна, которые кажутся в телескоп состоящими из более или менее блестящего ядра, окруженного туманностью, которая, все уплотняясь на поверхности ядра в один прекрасный день должна превратить его в звезду. Если мы будем считать по аналогии, что все звезды произошли таким образом, то можно вообразить, что их предыдущему состоянию туманности в

свою очередь предшествовали другие состояния, при которых туманная материя была все более и более рассеяна, а ядро все менее и менее блестяще и плотно. Таким образом, восходя все дальше, насколько это возможно, мы приходим к туманности до такой степени рассеянной, что мы лишь с трудом могли бы подозревать ее существование.

Таково на самом деле первичное состояние туманных пятен, исследованных Гершелем с особою тщательностью при помощи его сильных телескопов, пятен, на которых он проследил прогресс уплотнения, не на одной, так как прогресс этот может стать заметным для нас только через столетия, но на их совокупности; подобно тому как в большом лесу можно проследить рост деревьев на отдельных деревьях разного возраста, из которых он состоит. Сначала он наблюдал туманную материю рассеянную в виде отдельных скоплений в разных частях неба, на большом протяжении его. Он заметил, что в некоторых скоплениях эта материя слегка уплотнена вокруг одного или нескольких мало блестящих ядер. В других туманных пятнах эти ядра блестят сильнее сравнительно с окружающей их туманностью. Если атмосферы отдельных ядер обособляются вследствие дальнейшего уплотнения, то возникают сложные туманные пятна, состоящие из очень близко расположенных блестящих ядер, окруженных, каждое, атмосферой: иногда, равномерно уплотняясь, туманная материя образовывала туманные пятна, носящие название *планетных*. Наконец еще большая степень уплотнения превращает эти туманные пятна в звезды. Классификация туманных пятен согласно этой философской точке зрения указывает на крайнюю вероятность их будущего превращения в звезды и предшествующего состояния туманности существующих звезд. Следующие соображения служат подтверждением доказательств, выведенных из этих аналогий.

Уже давно особенное расположение некоторых звезд, доступных невооруженному глазу, поражало наблюдателей философов. Уже Митчель заметил, как мало вероятно, чтобы звезды созвездия Плеяд, напр., так тесно заполнили бы небольшое пространство, которое их вмещает, только благодаря шансам случая; отсюда он заключил, что эта группировка звезд, так же как и другие подобные ей, является следствием одной первоначальной причины, одного общего закона природы. Эта группировка является необходимым результатом уплотнения туманных пятен с несколькими ядрами; ибо очевидно, что так как туманная материя постоянно притягивается различными ядрами, они должны со временем образовать группу звезд, подобную группе

Плеяд. Точно так же уплотнение туманных пятен с двумя ядрами образует звезды, расположенные очень близко друг от друга и вращающиеся одна вокруг другой, подобно звездам, соответствующие движения которых уже наблюдались Гершелем. Таковы также шестьдесят первая и следующие за нею звезды Лебедя, у которых Бессел заметил собственные движения такие значительные и так мало различающиеся, что близость этих светил друг к другу и их движение вокруг общего центра тяжести не должны оставлять ни малейшего сомнения. Таким образом из прогресса уплотнения туманной материи мы заключаем, что солнце было некогда окружено громадной атмосферой, взгляд, к которому, как мы видели, приводит изучение явлений солнечной системы. Это замечательное совпадение придает существованию такого предшествующего состояния солнца вероятность, очень близкую к достоверности.

Но каким образом солнечная атмосфера определила движения вращения вокруг оси и обращения планет и спутников? Если бы тела эти глубоко проникали в эту атмосферу, то ее сопротивление заставило бы их упасть на солнце. Это приводит к мысли о большой вероятности того, что планеты образовались на последовательных границах солнечной атмосферы, которая, сжимаясь по мере охлаждения, должна была выделить в плоскости своего экватора пояса паров, превратившиеся благодаря взаимному притяжению их молекул в различные сфероиды.

В моем Изложении системы мира я пространно развил эту гипотезу, которая, как мне кажется, согласна со всеми явлениями, встречающимися в этой системе.

По этой гипотезе кометы представляют нечто чужое планетной системе. Связывая их образование с образованием туманных пятен, можно их рассматривать как небольшие туманные пятна с ядрами, блуждающие от одних солнечных систем к другим и образовавшиеся вследствие уплотнения туманной материи, в таком изобилии рассеянной во вселенной. Кометы явились бы таким образом по отношению к нашей системе тем же, чем аэролиты по отношению к земле, для которой они по-видимому чужды. Когда эти светила делаются для нас видимыми, они представляют такое полное сходство с туманными пятнами, что их часто путают; и только по их движению да по тому, что все туманные пятна, заключающиеся в той части неба, где они появляются, известны, удается их различить. Это предположение удачно объясняет большое протяжение, которое занимают головы и хвосты комет по мере приближения к солнцу, а также чрезвычайную

разреженность этих хвостов, которые, несмотря на свою громадную толщу, не могут заметно ослабить сияния звезд, видимых сквозь них.

Когда небольшие туманные пятна достигают той части пространства, в которой притяжение солнца является преобладающим и которую мы назовем *сферой действия* этого светила, она заставляет их описывать эллиптические или гиперболические орбиты. Но так как скорость их равно возможна по всем направлениям, они должны двигаться безразлично по всем направлениям и под всевозможными наклонениями к эклиптике; что и согласуется с наблюдениями.

Большой эксцентриситет кометных орбит также вытекает из предыдущей гипотезы. В самом деле, если эти орбиты имеют эллиптическую форму, то они очень удлинены, потому что их большие оси по меньшей мере равны радиусу сферы действия солнца. Но эти орбиты могут иметь гиперболическую форму, и если оси этих гипербол не очень велики сравнительно со средним расстоянием солнца от земли, то движение комет, которые их описывают, будет казаться заметно гиперболическим. Между тем из ста комет, элементы которых уже известны, ни одна как известно не кажется движущейся по гиперболе; очевидно, что шансы, дающие заметную гиперболу, должны быть крайне редки сравнительно с шансами противоположными.

Кометы так малы, что становятся видимыми только тогда, когда их расстояние в перигелии незначительно. До сих пор это расстояние не превышало диаметра земной орбиты более чем в два раза, а всего чаще оно бывало меньше радиуса этой орбиты. Для того, чтобы приблизиться к солнцу на такое близкое расстояние, скорость их в момент вступления в сферу действия очевидно должна иметь величину и направление, заключенные в тесных пределах. Определяя посредством анализа вероятностей отношение шансов, которые в этих пределах дают заметную гиперболу, к шансам, дающим орбиту, которую можно смешать с параболою, я нашел, что по меньшей мере шесть тысяч шансов против одного за то, что туманное пятно, проникнувшее в сферу действия солнца и доступное наблюдению, опишет или очень удлиненный эллипс или гиперболу, которая по величине своей оси заметно приближается к параболе в наблюдаемой части. Поэтому не удивительно, что до сих пор гиперболическое движение не узнавалось.

Притяжение планет, а также может быть и сопротивление эфирной среды должны были превратить многие кометные орбиты в эллипсы, у которых большая ось меньше радиуса действия солнца, что увеличивает шансы эллиптических орбит. Можно допустить, что подобное

изменение имело место для кометы 1759-го года и некоторых других, обращение которых установлено.

Я обращусь теперь к рассмотрению земли и жидкостей, покрывающих ее. Явлением, могущим пролить больше всего света на правильность ее пластов, оказывается изменение тяжести на ее поверхности. Это изменение определяется либо посредством перенесения в разные места одного и того же маятника, причем считают число его колебаний в известный промежуток времени; либо непосредственным измерением длины секундного маятника. Опыты эти легки и могут быть теперь чрезвычайно точны. Ввиду их важности для теории земли их особенно надо рекомендовать мореплавателям. Уже произведенные опыты, хотя и оставляют желать многого, обнаруживают тем не менее большую правильность и стремление приблизиться к простейшему закону изменения, т. е. закону квадрата sinus'a широты; северное и южное полушария не представляют в этом отношении заметной разницы или по крайней мере такой, которую нельзя было бы приписать ошибкам наблюдений. Если взять за единицу длину секундного маятника на экваторе, то все эти наблюдения в совокупности дадут пятьдесят четыре десятитысячных для коэффициента члена пропорционального квадрату sinus'a широты. Мои формулы вероятности дают в применении к этому результату больше двух тысяч шансов против одного за то, что истинный коэффициент заключается в пределах от пяти тысячных до шести тысячных. Если земля представляет эллипсоид вращения, то мы узнаем ее сжатие, вычтя коэффициент закона тяготения из 875 стотысячных; коэффициент пяти тысячных соответствует таким образом сжатию 1/272. Следовательно, будет больше четырех тысяч шансов против одного за то, что сжатие земли меньше этой дроби. Миллионы миллиардов шансов против одного будут за то, что оно меньше того, которое соответствует однородности земли, и за то, что плотность земных пластов увеличивается по мере их приближения к центру этой планеты. Равномерность тяжести на ее поверхности доказывает, что они расположены симметрично вокруг этой точки. Оба эти условия, неизбежные следствия жидкого состояния, делают весьма правдоподобным, что вся земля была первоначально в этом состоянии, в которое мог ее привести только необычайный жар; а это подтверждает гипотезу, предложенную нами относительно образования небесных тел.

По предложению Академии Наук в начале прошлого столетия были произведены в Бресте наблюдения над приливом и отливом, продолжавшиеся в течение шести лет подряд. Положение этого порта очень

благоприятно для такого рода наблюдений. Он соединен с морем каналом, оканчивающимся очень большим рейдом, в глубине которого и был построен порт. Таким образом неправильности в движении моря очень ослабляются пока достигают порта, подобно тому как колебания в барометре, происходящие от неправильного движения корабля, ослабляются сужением трубки этого инструмента. Кроме того, так как прилив и отлив в Бресте значительны, случайные колебания, зависящие от ветра, оказывают слабое влияние на это явление; в наблюдениях над приливом и отливом там действительно замечается большая правильность, которую совсем не должна нарушать маленькая речка, теряющаяся в громадном рейде этого порта. Пораженный этой правильностью, я обратился к правительству с просьбой повелеть произвести в Бресте новый ряд наблюдений в продолжение всего периода движения узлов лунной орбиты, что и было исполнено. Эти наблюдения начались с первого июня 1806-го года и с того времени продолжаются без перерыва до сих пор, так что превышают уже половину периода, о котором я упомянул. Они представили мне слишком благоприятный случай применить мои формулы вероятности к одному из величайших явлений природы, чтобы я не воспользовался им. Я нашел, что они с большой вероятностью устанавливали законы высот и промежутков между приливами и отливами в зависимости от фаз луны, времен года и расстояний луны и солнца до земли. В этом отношении эти наблюдения самым совершенным образом согласуются с теми, которые были сделаны сто лет тому назад. Они в такой же мере согласуются с общим законом тяготения, который мог быть открыт при помощи их одних.

Согласная с этим законом теория прилива и отлива, данная мною в четвертой книге Небесной механики, покоится на одном принципе динамики, который делает ее очень простой и независимой от местных условий порта, условий, слишком сложных для того, чтобы их можно было подвергнуть исчислению. При помощи этого принципа они входят как произвольные постоянные в результаты анализа, долженствующие таким образом представлять эти наблюдения, если всемирное тяготение действительно является истинной причиной морских приливов и отливов. Вот этот принцип, применимый и ко многим другим явлениям: *состояние системы тел, в которой первоначальные условия движения исчезли вследствие испытываемых ею сопротивлений, возобновляется периодически, как силы, действующие в ней.* Присоединив этот принцип к принципу совместного существования очень малых колебаний, я нашел выражение

высоты прилива и отлива, в котором произвольные постоянные содержат действие местных условий порта. Многочисленные различия приливов и отливов и их видоизменения, происходящие от этих условий, все представлены этим выражением с чрезвычайной точностью. Одним из самых замечательных видоизменений такого рода является запаздывание на полтора дня самых больших и самых малых приливов и отливов в моменты сизигий и квадратур. Выражение, о котором идет речь, указывает, что это замедление зависит от скорости движения светила, влияющего на океан, в связи с местными условиями; и что та же самая причина вызывает в Бресте приращение в отношении действий солнца и луны. Анализ дает различные способы определения этого приращения с помощью наблюдений, по которым оно равняется приблизительно одной восьмой истинного отношения.

Действие солнца и луны вызывает без сомнения в нашей атмосфере, которая отделяет их от океана, колебания подобные явлениям прилива и отлива; но они очень слабы и для того, чтобы выделить их из совокупности атмосферных движений, необходимо будет произвести при помощи превосходных барометров длинный ряд наблюдений главным образом на экваторе, где нерегулярные атмосферные изменения незначительны.

Принцип, который положен в основание моей теории приливов и отливов, при обобщении его может быть распространен на все явления случая, к которому присоединяются непостоянные причины и который все-таки следует правильным законам. Действие этих причин вызывает в результатах большого числа явлений различия, которые следуют одним и тем же законам, что и можно обнаружить с помощью анализа вероятностей. По мере увеличения числа явлений эти различия обнаруживаются со все возрастающей вероятностью, которая слилась бы с достоверностью, если бы число явлений стало бесконечным. Эта теорема аналогична той, которую я развил раньше относительно действия постоянных причин. Следовательно, всякий раз как мы видим, что причина, ход которой правилен, может влиять на известный род событий, мы можем пытаться узнать ее влияние, умножая наблюдения; и когда нам кажется, что это влияние обнаруживается, анализ вероятностей определяет вероятность ее существования и ее напряженности. Так, ввиду того, что колебание температуры при переходе от дня к ночи может менять давление атмосферы, а, следовательно, и высоту барометра, естественно думать, что с увеличением числа наблюдений над этой высотой должно обнаружиться влияние солнечной теплоты. В самом деле на

экваторе, где это влияние по-видимому всего больше, уже давно установлено небольшое суточное колебание барометра, *maximum* которого имеет место около девяти часов утра, а *minimum* около четырех часов вечера. Второй *maximum* имеет место около одиннадцати часов вечера, а второй *minimum* около четырех часов утра. Ночью колебания меньше чем днем, когда они совершаются в пределах двух миллиметров. Непостоянство нашего климата не скрыло этого колебания от наших наблюдателей, хотя оно здесь и меньше чем между тропиками. Применяя формулы вероятности к многочисленным точным наблюдениям, которые производил в течение нескольких последовательных лет Рамонд, мы видим, что они делают крайне вероятным существование этого явления. Эти наблюдения позволили ему открыть еще одно колебание барометра, находящееся в зависимости от времен года. Он находит первый *maximum* средней месячной высоты барометра вскоре после зимнего солнцестояния, а первый *minimum* в апреле; второй *maximum* имеет место около летнего солнцестояния, а второй *minimum* в сентябре. Анализ показывает нам, что эти результаты отмечены уже как правдоподобные. Кроме того они подтверждаются и другими наблюдениями. Время покажет, на одни и те же ли месяцы приходится наибольшая и наименьшая высота в разных климатах. Эти годичные и суточные колебания барометра зависят без сомнения, подобно пассатам и муссонам, от солнечной теплоты в связи с вращательным движением земли. Однако почти невозможно подвергнуть исчислению столь сложные явления.

Анализ вероятностей может служить также для того, чтобы проверять существование или влияние известных причин, действие которых, как нам казалось, заметно на организованных существах. Изо всех орудий, которые мы можем применять для познавания незаметных сил природы, самыми чувствительными являются нервы, в особенности если какие-либо особые причины возбуждают их чувствительность. С их помощью было открыто слабое электричество, которое развивается от соприкосновения двух разнородных металлов, что открыло перед физиками и химиками обширное поле исследований. Своеобразные явления, происходящие от необычайной чувствительности нервов у некоторых людей, породили различные мнения насчет существования некоторого нового агента, названного *животным магнетизмом,* насчет действия обыкновенного магнетизма и насчет влияния солнца и луны при некоторых нервных страданиях; наконец насчет впечатлений, испытывать которые может заставить близость

металлов или текущей воды. Естественно думать, что действие этих причин очень слабо и что оно легко может быть нарушено случайными обстоятельствами; так что нельзя отвергать его существования из-за того, что в некоторых случаях оно не обнаружилось. Мы так далеки от знания всех сил природы и их различных проявлений, что было бы мало научно отрицать явления, только потому что они необъяснимы при современном состоянии наших знаний. Мы должны только исследовать их с тем большими вниманием и тщательностью, чем нам кажется труднее допустить их; здесь-то становится необходимым исчисление вероятностей для того, чтобы определить до каких пор следует умножать наблюдения или опыты, чтобы получить в пользу обнаруживающихся в них сил вероятность, которая одержала бы верх над теми основаниями, на которых их все-таки можно было бы не признавать.

Исчисление вероятностей позволяет оценить достоинство и недостатки методов, применяемых в науках, основанных на догадках. Так, чтобы узнать, который из вошедших в употребление методов лечения какой-либо болезни является наилучшим, достаточно испытать каждый из них на одном и том же числе больных при совершенно сходных условиях; преимущество самого выгодного метода будет обнаруживаться все более и более, по мере того как это число будет возрастать; а исчисление дает нам соответственную вероятность его преимущества и отношение, выражающее предпочтительность его в сравнении с остальными.

Применение исчисления вероятностей к нравственным наукам

Мы только что убедились в выгоде, предоставляемой анализом вероятностей при изыскании законов естественных явлений, причины которых неизвестны или же слишком сложны для того, чтобы действия их могли быть подчинены вычислению. То же самое относится почти ко всем объектам нравственных наук. Столько причин непредвиденных, или скрытых, или неподдающихся оценке влияет на человеческие учреждения, что судить о их следствиях *a priori* невозможно. Ряд событий, которые время приносит с собою, раскрывает эти следствия и указывает средства для предотвращения тех из них, которые пагубны. В этом смысле составлялись часто мудрые законы; но так как при этом пренебрегалось сохранение мотивов, то многие из них были отменены, как бесполезные, и понадобилось для их восстановления, чтобы тяжелый опыт снова

заставил почувствовать их необходимость. Весьма важным является, следовательно, составление в каждой отрасли общественного управления точного реестра эффектов, которые произведены различными применявшимися средствами, представляющими из себя соответствующее число опытов, произведенных в большом масштабе правительствами. Применим к политическим и нравственным наукам метод, основанный на наблюдении и исчислении, метод, который служил нам так хорошо в науках естественных. Не будем противополагать бесполезного и часто опасного сопротивления неизбежным следствиям прогресса просвещения, но будем изменять лишь крайне осторожно наши учреждения и обычаи, к которым мы давно уже применились. Мы хорошо знаем по опыту прошлого неудобства, которые они представляют, но мы не знаем, как велико будет зло, которое может причинить их изменение. При такой неизвестности теория вероятностей предписывает избегать всякого изменения: особенно следует избегать внезапных изменений, которые в нравственном порядке, как и в физическом, никогда не происходят без большой потери живой силы.

Исчисление вероятностей уже применялось с успехом по многим предметам нравственных наук. Я здесь представляю его главные результаты.

О вероятности свидетельских показаний

Ввиду того, что большая часть наших суждений основана на вероятности свидетельских показаний, очень важным является подчинить ее исчислению. Это, правда, бывает часто невозможно из-за трудности оценить правдивость свидетелей, а также из-за большого числа обстоятельств, сопровождающих факты, о которых они свидетельствуют. Но во многих случаях возможно бывает разрешать задачи, имеющие большое сходство с вопросами, которыми мы задаемся, и решение которых может быть рассматриваемо, как приближение годное к руководству и предостерегающее от ошибок и опасностей, которым нас подвергают неверные заключения. Приближение такого рода, если оно хорошо проведено, всегда следует предпочесть самым правдоподобным по-видимому заключениям. Попробуем дать несколько общих правил для достижения этой цели.

Вынут только один номер из урны, содержащей их тысячу. Один из свидетелей этого изъятия объявляет, что вышел № 79; спрашивается вероятность этого выхода. Положим, что нам известно по опыту, что

свидетель этот обманывает один раз из десяти, так что вероятность его свидетельства 9/10. Отмечено событие: свидетель утверждает, что вышел № 79. Это событие может явиться результатом двух следующих гипотез: а именно, что свидетель говорит правду, или же, что он обманывает. Согласно принципу, изложенному нами относительно вероятности причин, выведенной из наблюденных событий, следует сперва определить *a priori* вероятность этого события при каждой гипотезе. При первой вероятность того, что свидетель объявит № 79 есть в тоже время вероятность изъятия этого номера, т. е. $1/1000$. Надо помножить ее на вероятность 9/10 правдивости свидетеля; следовательно будем иметь $9/10\ 000$ для вероятности события, наблюденного при этой гипотезе. Если свидетель обманывает, то № 79 не выходил; и вероятность этого случая равна $999/1000$. Но, чтобы объявить выход этого номера, свидетель должен его выбрать из 999 невышедших номеров; а так как предполагается, что у него нет никакой причины отдать предпочтение одним номерам перед другими, то вероятность того, что он выберет № 79 равна 1/999; умножая эту вероятность на предыдущую, получим $1/1000$ для вероятности того, что свидетель объявит № 79 при второй гипотезе. Надо еще умножить эту вероятность на вероятность 1/10 самой гипотезы, что дает $1/10\ 000$ для вероятности этого события при этой гипотезе. Если теперь составить такую дробь, числителем которой была бы вероятность при первой гипотезе, а знаменателем – сумма вероятностей при обеих гипотезах, то получим, согласно шестому принципу, вероятность первой гипотезы, и вероятность эта была бы 9/10, т. е. та же правдивость свидетеля. Это и есть также вероятность изъятия № 79. Вероятность того, что свидетель лжет и что №79 не вышел, равна 1/10.

Если бы свидетель, желая обмануть, был как-нибудь заинтересован в выборе № 79 среди невышедших номеров; если бы он рассчитывал, напр., что, поставивши на этот номер значительную ставку, объявлением о выходе этого номера он увеличит свой кредит, то вероятность, что он выберет этот номер, не будет как прежде 1/999; она может тогда быть 1/2, 1/9 и т. д., смотря по тому, насколько он будет заинтересован в объявлении его выхода. Полагая ее равной 1/9, надо умножить на эту дробь вероятность $999/1\ 000$, чтобы получить при гипотезе обмана вероятность наблюденного события, которую надо умножить еще на 1/10; что дает $111/10\ 000$ для вероятности этого события при второй гипотезе. Вероятность первой гипотезы, или

выхода № 79, сводится тогда, по предыдущему правилу, к 9/120. Следовательно, она будет очень ослаблена, если принять во внимание интерес, который может иметь свидетель, объявляя о выходе № 79. Правда, тот же интерес увеличивает вероятность 9/10 того, что свидетель скажет правду, если выйдет № 79. Но вероятность эта не может превысить единицы или 10/10; таким образом вероятность выхода № 79 не превысит 10/121. Здравый смысл подсказывает нам, что этот интерес должен внушать недоверие, а исчисление оценивает его влияние.

A priori вероятность номера, объявленного свидетелем, равна единице, деленной на число номеров в урне; она превращается, в силу свидетельства, в самую правдивость свидетеля; следовательно, она может быть ослаблена этим свидетельством. Если, напр., в урне заключается только два номера, что дает 1/2 для вероятности *a priori* выхода № 1; и если правдивость того свидетеля, который о нем объявляет, равна 4/10, то выход этот становится вследствие этого менее вероятным. В самом деле, очевидно, что свидетель, будучи в этом случае более склонным ко лжи, чем к истине, своим свидетельством должен уменьшать вероятность свидетельствуемого факта каждый раз, как эта вероятность равняется или превосходит 1/2. Но если в урне три номера, вероятность *a priori* выхода № 1 увеличивается показанием свидетеля, правдивость которого превышает 1/3.

Предположим теперь, что урна содержит 999 черных шаров и один белый, и что по изъятии из нее одного шара свидетель этого изъятия объявляет, что вынут белый шар; вероятность наблюденного события, определенная *a priori* при первой гипотезе, равняется здесь, как и в предшествующем вопросе, $9/10\,000$. Но при предположении, что свидетель обманывает, белый шар не вышел и вероятность этого случая равна $999/1\,000$. Надо умножить ее на вероятность 1/10 обмана, что дает $999/10\,000$ для вероятности наблюденного события при второй гипотезе. Эта вероятность равнялась лишь $1/10\,000$ в предшествующей задаче: такая большая разница зависит от того, что в случае выхода черного шара свидетелю, желающему обмануть, не остается выбора из 999 не вышедших шаров, если он хочет объявить о выходе белого шара. Если теперь составить две дроби, числителями которых были бы вероятности при каждой гипотезе, и общий знаменатель которых был бы равен сумме этих вероятностей, то вероятность первой гипотезы и выхода белого шара равнялась бы $9/1\,008$, а вероятность второй гипотезы и выхода черного шара

999/1 008. Эта последняя вероятность очень приближается к достоверности; она приблизилась бы еще более и равнялась бы 999 999/1 000 008, если бы урна содержала миллион шаров, из которых только один был бы белый, так как выход белого шара стал бы тогда гораздо более необычайным. Из этого мы видим, как возрастает вероятность обмана по мере того, как самый факт становится более необычайным.

До сих пор мы предполагали, что свидетель совсем не ошибается; но если допустить еще возможность его ошибки, то необычайный факт делается еще невероятнее. Тогда вместо двух гипотез будем иметь четыре следующие, а именно: гипотезу, что свидетель не обманывает и сам не ошибается; что свидетель не обманывает и ошибается; гипотезу, что свидетель обманывает и не ошибается; и наконец, что свидетель обманывает и ошибается. Определяя *a priori* при каждой из этих гипотез вероятность наблюденного события, находим, согласно шестому принципу, вероятность, что указанный факт ложен, равной дроби, числитель которой есть число черных шаров в урне, умноженное на сумму вероятностей того, что свидетель не обманывает и ошибается, или же обманывает и не ошибается, а знаменатель которой равен этому числителю, увеличенному на сумму вероятностей того, что свидетель не обманывает и не ошибается, или же обманывает и вместе с тем ошибается. Отсюда видно, что если число черных шаров в урне очень велико, что делает необычайным выход белого шара, вероятность того, что указанный факт не существует, чрезвычайно приближается к достоверности.

Из распространения этого следствия на все необычайные факты вытекает, что вероятность ошибки, или же лжи свидетеля, делается тем больше, чем более необычен рассматриваемый факт. Некоторые авторы утверждали противное, основываясь на том, что, так как форма необычайного факта совершенно подобна форме обычного, то одни и те же мотивы должны нас побуждать верить свидетелю одинаково, утверждает ли он, что тот или что другой из этих фактов имел место. Простой здравый смысл опровергает столь странное утверждение; но исчисление вероятностей, подтверждая указания здравого смысла, еще более оценивает правдоподобность свидетельств о необычайных фактах.

Можно настаивать и сделать предположение, что из двух свидетелей, равно заслуживающих доверия, один показывает, что видел мертвым две недели тому назад человека, относительно которого

второй свидетель показывает, что видел его вчера полного жизни. Ни тот, ни другой из этих фактов не представляет ничего неправдоподобного. Следствием их обоих, взятых вместе, является воскресение этого человека; но так как показания прямо не касаются его, то его необычайность вовсе не должна ослаблять доверия, которого факты эти заслуживают (Encyclopédie, art Certitude).

Однако, если бы следствие, вытекающее из совокупности свидетельских показаний, было невозможно, то одно из них обязательно должно было бы быть ложным; невозможное же следствие есть предел следствий необычайных, как ошибка есть предел неправдоподобности; значение свидетельского показания, которое делается равным нулю в случае невозможного следствия, должно быть, следовательно, очень ослаблено в случае необычайного следствия, что на самом деле и подтверждается исчислением вероятностей.

Чтобы показать это, рассмотрим две урны A и B, первая из которых содержит миллион белых шаров, а вторая – миллион черных. Из одной из этих урн вынимают шар и перекладывают его во вторую, из которой затем снова берут шар. Два свидетеля, один – первого тиража, другой – второго, показывают, что они видели как был вынут белый шар. Каждое показание, взятое отдельно, не представляет ничего неправдоподобного, и легко видеть, что вероятность того факта, о котором дается показание, является правдивостью самого свидетеля. Но из совокупности показаний следует, что белый шар был вынут из урны A при первом тираже и что затем, после того как он был положен в урну B, он появился снова при втором тираже, что весьма необыкновенно, ибо эта вторая урна содержит тогда один белый шар на миллион черных, а поэтому вероятность вынуть из нее белый шар равна $1/1\,000\,001$. Чтобы определить проистекающее отсюда ослабление вероятности показаний обоих свидетелей, мы заметим, что наблюденным событием является здесь утверждение каждого из них, что он видел как был вынут белый шар. Пусть дробь $9/10$ выражает вероятность того, что он показывает правду; это может иметь место в настоящем случае, когда свидетель не обманывает и не ошибается и когда он обманывает и вместе с тем ошибается. Можно сделать четыре следующих предположения.

1) Первый и второй свидетели говорят правду. В этом случае белый шар сперва был вынут из урны A, и вероятность этого события равна $1/2$, так как шар вынутый при первом тираже одинаково мог появиться из той или другой урны. Затем вынутый и положенный в урну B шар снова появился при втором тираже; вероятность этого события

$1/1\,000\,001$; вероятность показанного факта равна поэтому $1/2\,000\,002$. Умножив ее на произведение вероятностей 9/10 и 9/10, что свидетели говорят правду, получим $81/200\,000\,200$ для вероятности наблюденного события при этой первой гипотезе.

2) Первый свидетель говорит правду, а второй – нет, потому ли что он обманывает и не ошибается, или потому, что он не обманывает и ошибается. Значит белый шар вышел из урны A при первом тираже, и вероятность этого события 1/2. Затем, после того как этот шар был положен в урну B, из этой последней был вынут черный шар: вероятность этого изъятия равна $1\,000\,000/1\,000\,001$; мы имеем следовательно $1\,000\,000/2\,000\,002$ для вероятности сложного события. Умножив ее на произведение двух вероятностей 9/10 и 1/10, что первый свидетель говорит правду, а второй – нет, получим $9\,000\,000/200\,000\,200$ для вероятности наблюденного события при второй гипотезе.

3) Первый свидетель говорит неправду, а второй говорит правду. Значит черный шар вышел из урны B при первом тираже и, после того как он был положен в урну A, из этой последней был вынут белый шар. Вероятность первого из этих событий равна 1/2, а второго $1\,000\,000/1\,000\,001$: следовательно вероятность сложного события равна $1\,000\,000/2\,000\,002$. Умножив ее на произведение вероятностей 1/10 и 9/10, что первый свидетель показывает ложно, а второй говорит правду, получим $9\,000\,000/200\,000\,200$ для вероятности наблюденного события, соответствующей этой гипотезе.

4) Наконец оба свидетеля показывают ложно. Значит черный шар был вынут из урны B при первом тираже, затем, после того как он был положен в урну A, он снова появился при втором тираже. Вероятность этого сложного события равна $1/2\,000\,002$. Умножив ее на произведение вероятностей 1/10 и 1/10, что каждый свидетель показывает ложно, получим $1/200\,000\,200$ для вероятности наблюденного события при этой гипотезе.

Теперь, чтобы узнать вероятность того, что было показано обоими свидетелями, а именно, что при каждом тираже был вынут белый шар, надо разделить вероятность, соответствующего первой гипотезе, на сумму вероятностей, соответствующих всем четырем гипотезам, и тогда получим для этой вероятности $81/18\,000\,082$ дробь чрезвычайно малую.

Если бы оба свидетеля утверждали, первый, что белый шар был вынут из одной из двух урн A и B; второй, что белый шар был подобным же образом вынут из одной из двух урн A и B, во всем сходных с первыми; вероятность показаний обоих свидетелей была бы произведением вероятностей их свидетельства или 81/100: следовательно, она была бы по крайней мере в сто восемьдесят тысяч раз больше предыдущей. Отсюда видно, насколько ослабляет значение двух свидетельств их необычайное следствие, как в первом случае вторичное появление при втором тираже белого шара, который был вынут при первом.

Мы не поверили бы свидетельству человека, который стал бы удостоверять, что при метании ста костей все они выпали одной и той же стороной: если бы мы сами были очевидцами этого события, мы поверили бы собственным глазам, лишь после того как подвергли бы тщательному рассмотрению все обстоятельства и после того как призвали бы в свидетели еще кого-либо, чтобы быть вполне уверенными, что тут не было ни галлюцинации, ни фокуса; но после этого рассмотрения мы не колеблясь признали бы его, невзирая на его чрезвычайное неправдоподобие, и никто не пытался бы прибегнуть для его объяснения к опровержению законов зрения. Отсюда мы должны заключить, что вероятность постоянства законов природы для нас выше вероятности, что упомянутое событие не должно иметь места, вероятности, которая в свою очередь выше вероятности большинства исторических фактов, считающихся несомненными. По этому можно судить каким огромным весом должны обладать свидетельские показания, чтобы можно было признать, что естественные законы нарушены, и каким злоупотреблением явилось бы применение к этому случаю обычных правил критики. Все, кто, не представляя такой вескости свидетельств, поддерживают выставляемые ими и противоречащие этим законам события, скорее ослабляют доверие, которое они желают внушить, чем усиливают его, потому что тогда эти рассказы делают очень вероятными заблуждение или ложь их авторов. Но то, что уменьшает доверие просвещенных людей, часто увеличивает доверие черни, всегда жаждущей чуда.

Есть вещи, столь необычайные, что ничто не может поколебать их неправдоподобия; но действием господствующих взглядов это неправдоподобие может быть ослаблено настолько, что будет казаться меньшим, чем вероятность свидетельских показаний; когда же эти взгляды изменятся, нелепость, единодушно допущенная в том веке, который породил ее, явится для последующих веков лишь новым

доказательством огромного влияния всеобщего мнения на лучшие умы. Два великих человека века Людовика XIV, Расин и Паскаль, являются поразительным примером этого. Прискорбно видеть с какою угодливостью Расин, этот замечательный художник человеческого сердца и совершеннейший изо всех поэтов, рассказывает о якобы чудесном исцелении молодой Перье, племянницы Паскаля, бывшей пансионеркой в аббатстве Порт-Рояль; тяжело читать рассуждения Паскаля, которыми он старается доказать, что это чудо было необходимо для религии, чтобы оправдать доктрину монахинь этого аббатства, в то время преследовавшихся иезуитами. Молодая Перье уже три с половиной года страдала слезной фистулой; она прикоснулась своим больным глазом к реликвии, которая будто бы была тернием из венца Спасителя, и тотчас же почувствовала себя исцеленной. Несколько дней спустя врачи и хирурги констатировали выздоровление, в котором по их мнению, природа и лекарство не принимали никакого участия. Это событие, случившееся в 1656 году, наделало много шума; «весь Париж», говорит Расин, «направился в Порт-Рояль». Толпа увеличивалась с каждым днем и казалось, что самому Господу было угодно питать благочестие народа большим числом чудес, совершившихся в этой церкви». В то время чудеса и волшебство не казались еще неправдоподобными; и к ним не сомневаясь причисляли все странное в природе, чего не могли объяснить иначе.

Этот взгляд на необычайные явления встречается в самых замечательных сочинениях века Людовика XIV, даже в Опыте о человеческом разуме мудрого Локка, который говорит, имея в виду различные степени согласия; «хотя бы общий опыт и обычный ход вещей и имели полное основание влиять на ум людей, чтобы склонить их согласиться с тем, во что предлагается верить, или отказать в этом согласии, бывают однако случаи, где то, что есть странного в факте, нисколько не ослабляет того доверия, которое мы должны оказать искреннему свидетельству, служащему основанием этого факта. Если сверхъестественные события соответствуют целям, которые поставил себе тот, в чьей власти менять течение вещей в природе в данное время и при данных обстоятельствах, то ум наш может отнестись к ним с тем большим доверием, чем они выше обыкновенных наблюдений или даже чем в большем противоречии с ними они находятся». Ввиду того, что истинные принципы вероятности свидетельских показаний таким образом не признавались философами, которым разум главным образом обязан своим прогрессом, я счел своим долгом пространно изложить результаты исчисления для этого важного вопроса.

Здесь является уместным исследовать знаменитый аргумент Паскаля, который английским математиком Крэгом был облечен в геометрическую форму. Несколько свидетелей показывают, что само Божество им поведало, что, согласившись с известной вещью, можно наслаждаться не одной или двумя, но бесконечным множеством счастливых жизней. Как бы мала ни была вероятность свидетельских показаний, если только она не бесконечно мала, очевидно, что выгода тех, кто соглашается с этим предписанием, бесконечно велика, потому что она является произведением этой вероятности на бесконечное благо: поэтому нельзя и колебаться, доставить ли себе эту выгоду.

Этот аргумент основан на бесконечном числе счастливых жизней, обещанных свидетелями именем Божества. Значит надо было бы делать то, что они предписывают, именно потому, что они в своих обещаниях переходят всякие границы, заключение, которое противно здравому смыслу. Исчисление и показывает нам, что именно это преувеличение обещаний ослабляет вероятность свидетельских показаний до такой степени, что обращает ее в бесконечно малую или в нуль. В самом деле этот случай сводится к тому, когда свидетель объявляет выход наибольшего номера из урны, наполненной большим числом номеров, из которых был вынут только один, причем свидетель очень заинтересован в объявлении выхода этого номера. Мы раньше видели, насколько его заинтересованность ослабляет его свидетельство. Оценивая только 1/2 вероятность того, что свидетель, если он обманывает, выберет наибольший номер, получим после вычисления, что вероятность объявленного им меньше дроби, числитель которой единица, а знаменатель единица плюс половина произведения числа номеров на вероятность лжи, рассмотренную *a priori,* или независимо от объявленного. Чтобы провести сравнение между этим случаем и случаем, к которому относится аргумент Паскаля, достаточно представить номерами урны все возможные числа счастливых жизней, отчего число этих номеров становится бесконечным, и заметить, что, если свидетели обманывают, то самым выгодным для них является обещать вечное блаженство, чтобы аккредитовать свою ложь. Выражение вероятности их показания становится тогда бесконечно малым. После умножения ее на бесконечное число обещанных счастливых жизней, бесконечность пропадает в произведении, выражающем выгоду, которая вытекает из этого обещания, что и разбивает аргумент Паскаля.

Рассмотрим теперь вероятность совокупности нескольких свидетельских показаний, касающихся определенного факта. Чтобы

говорить о чем-нибудь определенном, предположим, что этим фактом будет выход номера из урны, содержащей сто номеров, из которой вынут только один. Два свидетеля этого тиража объявляют, что вышел № 1, и спрашивается вероятность, вытекающая из совокупности этих свидетельств. Можно допустить следующие две гипотезы: свидетели говорят правду и свидетели обманывают. При первой гипотезе № 1 вышел, и вероятность этого события 1/100. Надо умножить ее на правдивость каждого свидетеля, которую предположим равной для одного 9/10 и для другого 7/10: получим, следовательно, 63/10 000 для вероятности наблюденного события при этой гипотезе. При второй гипотезе № 1 не вышел, и вероятность этого события равна 99/100. Но тогда согласное показание свидетелей требует, чтобы, желая обмануть, они выбрали оба № 1 из 99 невышедших номеров: вероятность этого выбора есть произведение дроби 1/99 на саму себя; затем надо умножить эти две вероятности друг на друга и на произведение вероятностей 1/10 и 3/10, что свидетели обманывают; таким образом получим 1/330 000 для вероятности наблюденного события при второй гипотезе. Теперь получим вероятность свидетельствуемого факта или выхода № 1, разделив вероятность, соответствующую первой гипотезе, на сумму вероятностей, соответствующих обеим гипотезам. Эта вероятность будет, следовательно, $2\,079 / 2\,080$, а вероятность того, что этот номер не вышел, и вероятность обмана свидетелей будет $1 / 2\,080$.

Если бы урна содержала только номера 1-й и 2-й, то тем же самым способом мы нашли бы 21/22 для вероятности выхода № 2, и, следовательно, 1/22 для вероятности обмана со стороны свидетелей, вероятности, которая по крайней мере в девяносто четыре раза больше предшествующей. Отсюда видно, как уменьшается вероятность обмана со стороны свидетелей, когда факт, относительно которого они дают показания, сам по себе менее вероятен. В самом деле, понятно, что тогда согласие свидетельских показаний между собой, если свидетели обманывают, менее возможно, если только они не сговорились, чего мы здесь не предполагаем.

В предыдущем случае, в котором урна содержит только два номера, и вероятность *a priori* показуемого факта равна поэтому 1/2, вероятность, вытекающая из свидетельских показаний, есть произведение правдивостей свидетелей, деленное на это произведение, сложенное с произведением соответственных вероятностей обмана с их стороны.

Нам остается рассмотреть влияние времени на вероятность фактов, переданных рядом свидетельств по преданию. Ясно, что эта вероятность должна уменьшаться по мере того как ряд удлиняется. Если факт сам по себе совершенно невероятен, то вероятность, которую он приобретает от свидетельских показаний, убывает вместе с произведением вероятностей правдивости свидетелей. Если факт сам по себе обладает вероятностью, если, напр., этим фактом является выход № 2 из урны, которая содержит конечное число номеров и из которой, как достоверно известно, вынут один номер; то, что ряд преданий прибавляет к этой вероятности, убывает вместе с произведением, первый множитель которого есть отношение числа номеров урны без одного к тому же числу; а каждый из остальных множителей которого есть правдивость каждого свидетеля, уменьшенная на отношение вероятности обмана с его стороны к числу номеров урны без одного; так что предел вероятности факта есть предел вероятности этого факта, рассмотренного *a priori* или независимо от свидетельских показаний, вероятность равная единице, деленной на число номеров в урне.

Действие времени поэтому непрерывно ослабляет вероятность исторических фактов, подобно тому, как оно кладет свой отпечаток на самые прочные памятники. Можно, правда, замедлить его, умножая и сохраняя свидетельские показания и те памятники, на которые они опираются. Книгопечатание является для этой цели могущественным средством, к несчастью неизвестным древним. Несмотря на бесконечные преимущества, предоставляемые им, физические и нравственные революции, которым навсегда останется подвержена поверхность земного шара, в соединении с неизбежным действием времени, кончат тем, что по прошествии тысячелетий сделают сомнительными исторические факты ныне достоверные.

Крэг пытался подвергнуть исчислению постепенное ослабление доводов христианской религии: предполагая, что конец света наступит тогда, когда она потеряет свою вероятность, он находит, что это должно случиться через 1454 года после момента его вычисления. Но анализ его настолько же ошибочен, насколько странна гипотеза о продолжительности существования мира.

О выборах и о решениях собраний.

Вероятность решений какого-либо собрания зависит от большинства голосов, от его просвещенности и от беспристрастия членов, составляющих это собрание: столько страстей и частных интересов

так часто сюда примешивают свое влияние, что невозможно подчинить исчислению эту вероятность. Но все-таки существует несколько общих результатов, продиктованных простым здравым смыслом и подтверждаемых исчислением. Если, напр., собрание очень мало сведуще в вопросе, представленном на его решение, если этот вопрос требует тонких рассуждений, или же истина в этом пункте противоречит имеющимся предрассудкам, так что более одного шанса против одного, что каждый голосующий уклонится от нее, тогда решение большинства будет вероятно дурным, и опасения на этот счет будут тем более справедливы, чем многочисленнее будет собрание. Ради общественных интересов следует поэтому предоставлять собранию решать только вопросы, доступные большей его части; важно, чтобы просвещение было распространено повсюду и чтобы хорошие книги, основанные на разуме и опыте, наставляли тех, кто призван решать судьбу себе подобных или управлять ими, и предостерегали от ложных взглядов и невежественных предубеждений. Ученые часто имеют случай наблюдать, что первое впечатление нередко обманчиво и что истина не всегда правдоподобна.

Трудно узнать и определить волю собрания среди разнообразия мнений его членов. Попытаемся дать относительно этого несколько правил, рассматривая два самых обыкновенных случая: выбор между несколькими кандидатами и выбор между несколькими предложениями, относящимися к одному и тому же предмету.

Когда собранию надлежит сделать выбор из нескольких кандидатов, явившихся на одно или несколько однородных мест, то самым простым кажется предоставить всякому голосующему написать на записке имена кандидатов в порядке достоинств, которые он им приписывает. Если предположить, что он их располагает добросовестно, то рассмотрение этих записок обнаружит результаты выборов, каким бы способом ни были сравнены между собою кандидаты, так что новые выборы ничего на этот счет не могут прибавить. Теперь надлежит отсюда вывести порядок преимущества, который устанавливают для кандидатов записи. Представим себе, что каждому избирателю дана урна, содержащая бесконечное число шаров, с помощью которых он может оттенить все степени достоинства кандидатов; допустим еще, что он вынимает из своей урны число шаров, пропорциональное достоинству каждого кандидата, и предположим, что это число написано на записке рядом с именем кандидата. Ясно, что после того, как составлена будет сумма всех чисел, относящихся к каждому кандидату на каждой записке, тот из

кандидатов, который получит наибольшую сумму, есть кандидат, предпочитаемый собранием, и что вообще порядок преимущества кандидатов будет порядком сумм, относящихся к каждому из них. Но записки совершенно не отмечают числа шаров, которое каждый избиратель дает кандидатам: они лишь указывают, что первый кандидат их имеет более, нежели второй, второй более, нежели третий и т. д. Значит, если приписать первому на данной записке какое-либо число шаров, то все сочетания низших чисел, выполняющие предшествующие условия, одинаково допустимы; и мы получим число шаров относительно каждого кандидата, составив сумму всех чисел, которые дает каждая комбинация, и разделив ее на число всех комбинаций. Очень простой анализ показывает, что числа, которые следует написать на каждой записке рядом с последним именем, с предпоследним и т.д., пропорциональны членам арифметической прогрессии 1, 2, 3 и т.д. Когда таким образом напишем на каждой записке члены этой прогрессии и прибавим члены, соответствующие каждому кандидату на этих записках, то различные суммы укажут своею величиною тот порядок преимущества, который должен быть установлен между кандидатами. Таков способ избрания, указываемый теорией вероятностей. Он без сомнения был бы наилучшим, если бы каждый избиратель записывал на своей записке имена кандидатов в порядке достоинств, которые он им приписывает; но частные Интересы и много соображений, чуждых достоинствам, должны нарушать этот порядок и заставлять иногда ставить на последнее место кандидата, самого опасного тому, которому отдано предпочтение, что дает слишком большое преимущество кандидатам среднего достоинства. Поэтому-то опыт и заставил отказаться от такого порядка избрания в тех учреждениях, в которых он был принят.

Выборы по абсолютному большинству голосов присоединяют к уверенности, что ни один из кандидатов, отвергнутых этим большинством, не будет допущен, то преимущество, что они выражают чаще всего волю собрания. Они совпадают с предыдущим способом всегда, когда имеются только два кандидата. Правда, они представляют то неудобство, что делают выборы бесконечными, но опыт показал, что это неудобство сводится к нулю и что общее желание положить выборам конец скоро объединяет большинство голосов на одном из кандидатов.

Выбор между несколькими предложениями, относящимися к одному предмету, казалось бы, должен быть подчинен тем же правилам, как выбор между несколькими кандидатами. Но между этими

двумя случаями существует разница, а именно та, что достоинство одного кандидата не исключает достоинств его конкурентов; тогда как, если предложения, между которыми надо выбирать, противоположны, то истинность одного исключает истинность остальных. Тогда следует рассматривать вопрос следующим образом.

Дадим каждому голосующему урну, содержащую бесконечное число шаров и предположим, что он распределяет их между различными предложениями пропорционально соответственным вероятностям, которые он им приписывает. Ясно, что если все число шаров выражает достоверность, и голосующий, по гипотезе, убежден, что одно из предложений должно быть истинно, он распределит это число целиком между предложениями. Задача сводится значит к тому, чтобы определить сочетания, в которых будут распределены шары таким образом, чтобы было более шаров для первого предложения записки, чем для второго, для второго более, чем для третьего и т.д.; к тому, чтобы составить суммы всех чисел шаров, относящихся к каждому предложению в этих различных сочетаниях, и к тому, чтобы разделить эту сумму на число сочетаний: частные будут числами шаров, которые следует приписать предложениям на какой-либо записке. С помощью анализа находим, что, исходя от последнего предложения, чтобы дойти до первого, эти частные относятся между собой как следующие величины: 1) единица, деленная на число предложений; 2) предыдущая величина, увеличенная на единицу, деленную на число предложений без одного; 3) эта вторая величина, увеличенная на единицу, деленную на число предложений без двух, и т. д. Написав эти величины на каждой записке рядом с предложениями, к которым они относятся и сложив соответственно все, относящиеся к одному и тому же предложению на различных записках, получим суммы, своей величиной указывающие порядок и преимущество, которые собрание придает этим предложениям.

Скажем несколько слов о способе обновлять собрания, которые целиком должны быть сменяемы через определенное число лет: должно ли обновление совершиться сразу или же удобнее распределить его на эти годы? Следуя этому последнему способу, собрание составлялось бы под влиянием различных мнений, господствовавших в то время, пока длилось его обновление; тогда мнение, которое будет господствовать в нем, было бы очень вероятно средним из всех этих мнений. Таким образом собрание получило бы со временем такое же преимущество, какое дает ему распространение выборов его членов на все части территории, которую оно представляет. Если теперь принять

во внимание то, что опыт и показал слишком хорошо, а именно, что выборы всегда направляются в самом преувеличенном смысле господствующими взглядами, то мы увидим, как полезно умерять эти взгляды одни другими, помощью частичного обновления.

О вероятности судебных приговоров.

Анализ подтверждает то, что нам подсказывает простой здравый смысл, а именно, что мягкость судебных приговоров тем более вероятна, чем многочисленнее состав суда и просвещеннее судьи. Поэтому следовало бы, чтобы апелляционные суды удовлетворяли этим двум условиям. Суды первой инстанции, более близкие к подсудимым, представляют им выгоду первого приговора уже вероятною, и они часто удовлетворяются им, либо приходя к полюбовному соглашению, либо отказываясь от своих претензий. Но если неуверенность в предмете тяжбы и его значительность побуждают истца прибегнуть к апелляционному суду, он должен находить в большей вероятности получить справедливый приговор, большую безопасность для своего состояния и вознаграждение за хлопоты и расходы, которые влечет за собою новый процесс. Именно это и не имело места в институте взаимной апелляции окружных судов (tribunaux de département) – институте, очень вредившем поэтому интересам граждан. Быть может, следовало бы и согласовалось бы с исчислением вероятностей требовать большинства двух голосов, по крайней мере, в апелляционных судах для отмены приговора низшего суда. Этот результат был бы достигнут, если бы при составе апелляционного суда из четного числа судей приговор имел силу в случае равенства голосов.

Я буду рассматривать в частности приговоры по уголовным делам.

Без сомнения, судьям нужны, чтобы осудить обвиняемого, самые сильные доказательства его преступления; но нравственное доказательство есть всегда только вероятность, и опыт слишком хорошо показал, какие ошибки возможны в уголовных приговорах, даже тех, которые кажутся самыми справедливыми. Возможность исправлять эти ошибки есть самый основательный аргумент философов, желавших отмены смертной казни. Мы должны были бы таким образом воздерживаться от суда, если бы нам надо было ждать математической очевидности. Но судить повелевает нам опасность, которая проистекала бы от безнаказанности преступления. Этот суд сводится, если не ошибаюсь, к решению следующего вопроса: имеет ли доказательство проступка обвиняемого наивысшую степень вероятности,

необходимую для того, чтобы гражданам пришлось менее опасаться ошибок суда, если обвиняемый невиновен и осужден, чем его новых преступлений и преступлений тех несчастных, которых поощрит пример его безнаказанности, если он виновен и оправдан? Решение этого вопроса зависит от многих элементов, с большим трудом поддающихся познанию: такова близость опасности, которая угрожала бы обществу, если бы уголовный обвиняемый оставался безнаказанным. Иногда эта опасность так велика, что магистрат видит себя принужденным отказаться от форм, разумно установленных для ограждения невиновности. Но что почти всегда делает вопрос, о котором идет речь, неразрешимым, это – невозможность оценить точно вероятность проступка и установить вероятность, необходимую для осуждения обвиняемого. Всякий судья в этом отношении принужден обращаться к собственному такту: он составляет свое мнение, сравнивая различные показания и обстоятельства, которыми сопровождалось преступление, с результатами своих соображений и своего опыта, и в этом отношении долгий навык допрашивать и судить обвиняемых дает большие преимущества для того, чтобы уловить истину среди указаний, часто противоречивых.

Предыдущий вопрос зависит, кроме того, от размера наказания, налагаемого за преступление, так как само собою разумеется, что для смертного приговора, требуются доказательства гораздо более веские, чем для присуждения к аресту на несколько месяцев. Это является доводом в пользу соразмерности наказания с преступлением, так как тяжкое наказание, будучи налагаемо за легкий проступок, неизбежно должно заставлять оправдывать много виновных. Так как произведение вероятности преступления на тяжесть его есть мера опасности, которую может заставить испытать общество оправдание подсудимого, то можно было бы думать, что наказание должно зависеть от этой вероятности. Это косвенным образом и делается в судах, где задерживают на некоторое время обвиняемого, против которого имеются сильные улики, но недостаточные для его осуждения. В надежде получить новые сведения, его отнюдь не возвращают немедленно в общество его сограждан, которые не могли бы видеть его снова в своей среде без живейшего беспокойства. Однако произвол этой меры и возможность злоупотребления ею заставили отбросить ее в странах, где придают величайшую цену индивидуальной свободе.

Теперь, какова вероятность того, что решение суда, который может осудить только при данном большинстве, будет справедливо, т. е.

будет соответствовать истинному решению вышепоставленного вопроса? Эта важная задача, будучи хорошо разрешена, дает средство сравнивать между собою различные суды. Большинство одного только голоса при многочисленном составе суда указывает, что рассматриваемое дело по меньшей мере сомнительно. Осуждение обвиняемого противоречило бы в этом случае принципам гуманности, ограждающим невиновность. Единодушие судей дало бы очень большую вероятность для справедливости решения; но при его обязательности слишком много виновных было бы оправдано. Следует, поэтому, или ограничить число судей, если желательно, чтобы они были единодушны, или увеличить большинство, необходимое для осуждения, когда состав суда становится более многочисленным. Я попытаюсь применить исчисление к этому предмету, будучи убежден, что оно всегда является лучшим руководителем, когда опирается на данные, подсказываемые нам здравым смыслом.

Вероятность того, что мнение каждого судьи справедливо, входит, как главный элемент, в это исчисление. Эта вероятность, очевидно, относительна в каждом деле. Если в суде, состоящем из тысячи одного судьи, пятьсот один одного мнения и пятьсот – противоположного, то очевидно, что вероятность справедливости мнения каждого судьи превышает 1/2 на очень небольшую величину, ибо при предположении, что она значительно больше, разница на один только голос была бы событием невероятным. Но если судьи все согласны, то это указывает, что сила улик достигает степени, которая влечет за собой убежденность: вероятность мнения каждого судьи очень близка тогда к единице, или достоверности, если только какие-нибудь общие страсти или предубеждения не введут в заблуждение сразу всех судей. Помимо этих случаев, отношение голосов за и против обвиняемого одно должно определить эту вероятность. Я предполагаю таким образом, что она может меняться от 1/2 до единицы, но что она не может быть ниже 1/2. Если бы это было не так, то решение суда имело бы так же мало значения, как жребий; но имеет цену постольку, поскольку мнение судьи более склонно к истине, чем к заблуждению. Помощью отношения числа голосов благоприятствующих обвиняемому к неблагоприятствующим я определяю затем вероятность справедливости мнения судьи.

Этих данных достаточно, чтобы иметь общее выражение вероятности того, что решение суда, судящего известным большинством, справедливо. В суде, в котором при восьми судьях необходимы были бы пять голосов для осуждения обвиняемого, вероятность возможной

ошибки в справедливости решения превысили бы 1/4. Если бы состав суда сводился к шести членам, которые могли бы осудить лишь при большинстве четырех голосов, вероятность возможной ошибки была бы ниже 1/4: следовательно, для обвиняемого было бы выгодно это уменьшение числа судей. В том и другом случае требуемое большинство остается одно и то же и равно двум. Таким образом при этом, остающемся постоянным, большинстве вероятность ошибки увеличивается с числом судей: это имеет место вообще, каково бы ни было требуемое большинство, если только оно остается одним и тем же. Если примем за правило арифметическое отношение, то обвиняемый будет находиться все в менее и менее выгодном положении, по мере того как состав суда становится многочисленнее. Можно было бы подумать, что так как в суде, где требовалось бы большинство двенадцати голосов, каково бы ни было число судей, голоса меньшинства нейтрализовали бы такое же число голосов большинства, остающиеся двенадцать голосов указывали бы на единодушие суда присяжных из двенадцати членов, которое в Англии необходимо для осуждения обвиняемого; однако это было бы большой ошибкой: здравый смысл указывает нам, что есть разница между решением суда из двухсот двенадцати судей, из которых сто двенадцать осуждают обвиняемого, в то время как сто его оправдывают, и решением суда из двенадцати судей, единогласно стоящих за осуждение. В первом случае сто голосов благоприятных для обвиняемого дают право думать, что улики далеко не достигли той степени, которая влечет за собою убеждение; во втором случае единогласие судей побуждает верить, что они достигли этой степени. Но одного здравого смысла вовсе не достаточно, чтобы оценить крайнюю разницу вероятности ошибки в этих двух случаях; тогда следует прибегнуть к исчислению, и получится приблизительно одна пятая для вероятности ошибки в первом случае и лишь $1/8\,192$ для этой вероятности во втором случае, – вероятности, которая не равна и одной тысячной первой. Это являет-ся подтверждением того принципа, что арифметическое отношение невыгодно для обвиняемого, когда число судей увеличивается. Наобо-рот, если возьмем за правило геометрическое отношение, вероятность ошибки решения уменьшается, когда число судей увеличивается. Напр., в судах, которые могут осуждать только большинством двух третей голосов, вероятность возможной ошибки почти равна одной четверти, если число судей равно шести; она ниже 1/7, если это число доходит до двенадцати. Таким образом, не следует придерживаться ни арифметического, ни геометрического

отношений, если мы желаем, чтобы вероятность ошибки не была никогда ни выше, ни ниже определенной дроби.

Но какая дробь должна быть установлена? Здесь-то и начинается произвол, и судебные учреждения представляют в этом отношении большое разнообразие. В специальных судах (tribunaux spéciaux), где пяти голосов из восьми достаточно для осуждения обвиняемого, вероятность ошибки, которой можно опасаться относительно мягкости приговора, равна 65/256, или выше 1/4. Величина этой дроби ужасна; однако отчасти примиряющим должно являться то соображение, что чаще всего судья, который оправдывает обвиняемого, не смотрит на него как на невинного: он только объявляет, что против обвиняемого нет улик, достаточных для его осуждения. Особенно же успокоительным является то, что здесь действует жалость, которую природа вложила в сердце человека и которая располагает ум лишь с трудом видеть в обвиняемом, подлежащем его суду, виновного. Это чувство, более живое в тех, для кого уголовные приговоры – дело непривычное, возмещает неудобства, связанные с неопытностью присяжных. В суде присяжных из двенадцати членов, при большинстве, требуемом для осуждения, в восемь голосов из двенадцати, вероятность ошибки, которой можно опасаться, равна $1\,093 / 8\,192$, или немного более одной восьмой; она будет равна приблизительно 1/22, если это будет большинство девяти голосов. В случае единогласного решения вероятность возможной ошибки равна $1 / 8\,192$, т.е. более чем в тысячу раз меньше, чем в наших судах присяжных. Здесь предполагается, что единогласное решение вытекает исключительно из улик, благоприятствующих или неблагоприятствующих обвиняемому; но совершенно посторонние мотивы должны часто способствовать его появлению, когда его ставят суду присяжных как необходимое условие приговора. Тогда эти решения, как зависящие от темперамента, характера и привычек присяжных, иногда противоречат решениям, которые приняло бы большинство присяжных, если бы оно руководилось одними уликами**;** в этом заключается по-моему большой недостаток такого способа судить.

Вероятность решений слишком слаба в наших судах присяжных, и, по моему мнению, для достаточного ограждения невиновности, следует требовать по крайней мере большинства девяти голосов из двенадцати.

Таблицы смертности и средней продолжительности жизни, браков и каких-либо ассоциаций

Способ составления таблиц смертности очень прост. Берут из гражданских актов большое число людей, рождение и смерть которых указаны. Определяют, сколько из них умерло на первом году жизни, сколько на втором и т. д. На основании предыдущего определяют число лиц, остающихся в живых в начале каждого года, и записывают это число в таблицу рядом с числом, указывающим год. Так, рядом с нулем пишут число рождений, рядом с 1-м годом – число детей, которым исполнился год; рядом со 2-м годом – число детей, которым исполнилось два года, и т. д. Но в виду того, что в течение двух первых лет жизни смертность очень велика, следует для большей точности указывать в этом первом возрасте число остающихся в живых к концу каждого полугодия.

Если разделить сумму лет жизни всех лиц, внесенных в таблицу смертности, на число этих лиц, то получится средняя продолжительность жизни, соответствующая этой таблице. Для этого надо умножить на полгода число умерших в течение первого года, число, равное разности чисел лиц, записанных рядом с годами 0 и 1: так как их смертность должна быть распределена на весь год, то средняя продолжительность их жизни равна только полугоду. Надо умножить на полтора года число умерших в течение второго года, на два с половиною года – число умерших в течение третьего года, и т. д. Сумма этих произведений, деленная на число рождений, будет средней продолжительностью жизни. Отсюда легко заключить, что эта продолжительность получится, если составить сумму чисел, записанных в таблице рядом с каждым годом, разделить ее на число рождений и вычесть половину частного; при этом год берется за единицу. Средняя продолжительность того, что остается прожить, начиная с некоторого возраста, определяется тем же самым способом, с помощью тех же операций над числом лиц, достигших этого возраста, которые только что были произведены над числами рождений. Средняя продолжительность жизни всего больше не в момент рождения, а тогда, когда человек избежал опасностей первого детства, и в этом случае она равна приблизительно сорока трем годам. Вероятность достижения какого-либо возраста, исходя из данного, равна отношению двух чисел, указывающих, сколько лиц этого возраста в таблице.

Точность этих результатов требует, чтобы при составлении таблиц было принято в расчет очень большое число рождений. Анализ дает

тогда очень простые формулы для оценки вероятности, что уклонения от истины чисел, указанных в этих таблицах, заключены в тесных пределах. Из этих формул становится очевидным, что промежуток между пределами уменьшается, а вероятность увеличивается, по мере того как рассматривается все большее число рождений; так что таблицы точно выразили бы истинный закон смертности, если бы число рождений, принятых в расчет, стало бесконечным.

Таблица смертности представляет из себя, следовательно, таблицу вероятностей человеческой жизни. Отношение лиц, записанных рядом с каждым годом, к числу, рождений есть вероятность, что новорожденное дитя доживет до этого года. Подобно тому как числовое значение ожидания определяется посредством составления суммы произведений каждого ожидаемого блага на вероятность его получения, и среднюю продолжительность жизни можно вычислить посредством сложения произведений каждого года на полусумму вероятностей дожить до начала и конца его, что приводит к тому результату, который мы нашли раньше. Но этот взгляд на среднюю продолжительность жизни имеет то преимущество, что он позволяет заметить, что в постоянном населении, т.е. таком, в котором число рождений равно числу смертных случаев, средняя продолжительность жизни является именно отношением населения к годичным рождениям; ибо при предположении, что население остается постоянным, число лиц того возраста, который заключается между двумя последовательными годами таблицы, равно числу годичных рождений, умноженному на полусумму вероятностей дожить до этих лет. Сумма всех этих произведений и будет все население. Но легко убедиться, что эта сумма, деленная на число годичных рождений, совпадает со средней продолжительностью жизни; какою она является по нашему определению.

При помощи таблицы смертности легко составить соответствующую таблицу населения, которое предполагается постоянным. Для этого берут среднее арифметическое чисел таблиц смертности, соответствующих возрастам нуль и один год, один и два года, два и три и т. д. Сумма всех средних арифметических и есть все население; его записывают рядом с возрастом нуль. Из этой суммы вычитают первое среднее арифметическое, а остаток есть число лиц одного года и больше; его пишут рядом с 1-м годом. Из этого первого остатка вычитают второе среднее арифметическое; этот второй остаток есть число лиц двух лет и больше; его пишут рядом со 2-м годом и т. д.

Столько непостоянных причин влияет на смертность, что таблицы, ее представляющие, должны меняться смотря по месту и времени.

Разные состояния жизни представляют в этом отношении значительные различия относительно изнурительности и опасностей, неразлучных с каждым состоянием, которые необходимо принимать в расчет при вычислениях, основанных на продолжительности жизни; но различия эти еще недостаточно исследованы; когда-нибудь это будет достигнуто: тогда станет известным, какой жертвы требует каждая профессия от жизни, и этим знанием воспользуются для уменьшения опасностей.

В большей или меньшей степени здоровая почва, высота ее, ее температура, нравы жителей и мероприятия правительств имеют сильное влияние на смертность; но отысканию причины замеченных различий следует всегда предпосылать определение вероятности, с какою эта причина может иметь место. Так, отношение населения к годичным рождениям, по наблюдениям возраставшее во Франции до двадцати восьми и одной трети, не достигает и двадцати пяти в прежнем Миланском герцогстве. Эти отношения, оба установленные на основании большого числа рождений, не позволяют сомневаться в существовании особой причины смертности в Милане, которую правительству этой страны надлежит отыскать и уничтожить.

Отношение населения к рождениям возросло бы еще более, если бы удалось ослабить или уничтожить некоторые опасные и очень распространенные болезни. Этого удалось достигнуть относительно оспы, сперва при помощи прививки этой болезни, а потом гораздо более удачным способом – прививкой вакцины, – неоценимого открытия Дженнера, сделавшего его одним из благодетелей человечества.

К особенностям оспы принадлежит то, что один и тот же человек не заболевает ею два раза, или по крайней мере случаи эти так редки, что с ними можно не считаться. Эта болезнь, которой очень немногие избегали до открытия вакцины, часто оканчивается смертью и губит приблизительно каждого седьмого человека из тех, кого она поражает. Иногда она встречается в легкой форме, и опыт показал, что ей можно придать этот последний характер, прививая ее здоровым людям, подготовленным хорошим режимом, в благоприятное время года. Тогда отношение лиц, погибших от нее, к тем, которым была сделана прививка, не достигает и одной трехсотой. Это большое преимущество прививки в соединении с тем, что она не портит красоты и предохраняет от неприятных последствий, которые часто имеет натуральная оспа, заставило многих признать ее. Применение ее горячо рекомендовалось; но, как почти всегда бывает с тем, что представляет неудобства, она вызвала горячее противодействие. В

этом споре Даниил Бернулли намеревался подвергнуть исчислению вероятностей влияние прививки на среднюю продолжительность жизни. Так как у него не было точных данных о смертности от оспы в различных возрастах, то он предположил, что опасность заболеть этой болезнью и погибнуть от нее одинакова для всех возрастов. С помощью этих предположений ему удалось путем тонкого анализа преобразовать обыкновенную таблицу смертности в такие, которые имели бы место, если бы оспа не существовала или была смертельна лишь для очень небольшого числа больных; он вывел заключение, что прививка оспы увеличила бы по крайней мере на три года среднюю продолжительность жизни, что, как ему казалось, ставит вне всякого сомнения пользу этой меры. Даламбер оспаривал анализ Бернулли, во-первых, на основании недостоверности этих двух гипотез, во-вторых, на основании недостаточности его, ибо в него совсем не входило сравнение будущей опасности, хотя и очень небольшой, погибнуть от прививки, с гораздо большей, но и более отдаленной, опасностью умереть от натуральной оспы. Это соображение, исчезающее, когда рассматривается большое число людей, безразлично поэтому для правительств, и для них остается в силе польза прививки; но оно имеет большой вес для отца семейства, который, делая своим детям прививку, должен бояться, что скоро будет свидетелем гибели самого дорогого для него на свете и что он сам будет причиною этого. Многих родителей удерживала эта боязнь, которую к счастью рассеяло открытие вакцины. Это одна из тайн, часто представляемых для нас природою, что вакцина является таким же верным предохранительным средством, как и оспенный яд; кроме того, она не представляет никакой опасности, не подвергает никакой болезни и требует очень небольшого ухода; поэтому она и получила быстро широкое распространение, и для того, чтобы оно стало всеобщим, остается только преодолеть естественную косность народа, с которой приходится бороться постоянно, даже в тех случаях, когда дело касается его самых дорогих интересов.

Простейший способ вычисления выгоды, которую принесло бы уничтожение какой-либо болезни, состоит в том, чтобы определить путем наблюдений число лиц известного возраста, которые каждый год гибнут от нее, и вычесть его из числа всех умирающих в этом возрасте. Отношение этой разности к общему числу лиц данного возраста было бы вероятностью умереть в продолжение года в этом возрасте, если бы этой болезни не существовало. Следовательно, если составить сумму таких вероятностей от рождения до некоторого

возраста и вычесть эту сумму из единицы, то остаток будет вероятностью прожить до этого возраста при уничтожении этой болезни. Ряд таких вероятностей будет таблицей смертности при этой гипотезе, и из нее можно вывести на основании предыдущего среднюю продолжительность жизни. Этим способом Дювилар нашел, что увеличение средней продолжительности жизни, которым мы обязаны прививке вакцины, равно по крайней мере трем годам. Столь значительное увеличение вызвало бы очень большое приращение населения, если бы, с другой стороны, это приращение не ограничивалось соответственной убылью средств существования.

Недостаток в средствах существования главным образом задерживает поступательное движение населения. Во всех видах животных и растений природа непрерывно стремится увеличивать число особей до тех пор, пока оно не будет в уровне со средствами существования; в роде человеческом нравственные причины имеют большое влияние на население. Если почва, благодаря легкости разработки, может доставлять обильное пропитание новым поколениям, то уверенность в возможности прокормить многочисленную семью поощряет браки и делает их более ранними и плодовитыми. На подобной почве население и рождения должны оба возрастать в геометрической профессии. Но когда распашка становится более трудной и редкой, рост населения уменьшается: оно непрерывно приближается к меняющемуся состоянию средств существования, совершая около него колебания; подобно тому как маятник, точку привеса которого передвигают замедленным движением, качается около этой точки от своей тяжести. Трудно определить *maximum* приращения населения. По некоторым наблюдениям род человеческий мог бы, по-видимому, при благоприятных обстоятельствах удваиваться каждые пятнадцать лет. Полагают, что в Северной Америке период этого удвоения равен двадцати двум годам. При таком положении вещей население, рождения, браки, смертность, все возрастает в той геометрической прогрессии, постоянное отношение последовательных членов которой получается из наблюдений над годичными рождениями в две эпохи.

Так как таблица смертности представляет вероятности человеческой жизни, то с ее помощью можно определить продолжительность браков. Предположим для простоты, что смертность одинакова для обоих полов; мы получим вероятность, что брак продолжится год, два года, три года и т. д., если составим ряд дробей, общий знаменатель которых был бы произведением двух чисел таблицы, соответствующей возрастам лиц, сочетавшихся браком, а числители которых

были бы последовательными произведениями чисел, соответствующих этим возрастам, увеличенных на один, на два, на три и т. д. года. Сумма этих дробей, увеличенная на половину, будет средней продолжительностью брака, если год взят за единицу. Легко распространить то же самое правило па среднюю продолжительность товарищества, состоящего из трех или большего числа лиц.

О выгодах, предоставляемых учреждениями, основанными на вероятности событий

Припомним здесь то, что мы сказали, говоря об ожидании. Мы видели, что для получения выгоды, вытекающей из нескольких простых событий, из которых одни приносят прибыль, а другие – убыток, надо сложить произведения вероятности каждого благоприятного события на прибыль, приносимую им, и вычесть из их суммы сумму произведений вероятности каждого неблагоприятного события на убыток, связанный с ним. Но какова бы ни была прибыль, выраженная разностью этих сумм, одно сложное событие, состоящее из этих простых, еще не ограждает от боязни потерпеть действительный убыток. Очевидно, что эта боязнь должна уменьшаться, когда сложное событие повторяется. Анализ вероятностей приводит к следующей общей теореме.

От повторения выгодного события, простого или сложного, действительная выгодность становится все более и более вероятной и растет беспрерывно: она делается достоверной при предположении бесконечного числа повторений; и, деля ее на это число, получим частное или среднюю выгодность каждого события, которая и будет математическим ожиданием, или выгодою, соответствующею этому событию. То же самое касается и убытка, который делается со временем достоверным, если только событие невыгодно.

Эта теорема о выгодах и потерях аналогична теоремам, данным нами раньше об отношениях, которые обнаруживаются при неопределенном повторении простых или сложных событий; и, подобно им, она подтверждает, что правильность устанавливается в конце концов даже в вещах, наиболее подчиненных тому, что мы называем *случаем.*

Когда число событий очень велико, анализ дает еще одно очень простое выражение вероятности того, что действительная выгодность будет заключаться в определенных пределах, – выражение, входящее в общий закон о вероятности, который был нами дан выше, когда

мы говорили о вероятностях, вытекающих из неопределенного увеличения числа событий.

От истинности предшествующей теоремы зависит прочность учреждений, основанных на вероятностях. Но для того, чтобы можно было применять ее к ним, нужно, чтобы эти учреждения многочисленностью предприятий умножали выгодные события.

На вероятностях человеческой жизни основаны были различные учреждения, таковы, напр., пожизненные ренты и тонтины. Самый общий и самый простой метод исчисления выгод и расходов этих учреждений состоит в том, чтобы свести их к современной стоимости капиталов. Ежегодный прирост единицы есть так называемая *процентная такса.* К концу каждого года каждый капитал приобретает множителем единицу плюс процентная такса; он возрастает, следовательно, в геометрической прогрессии, знаменателем отношения которой и будет этот множитель. Таким образом с течением времени он делается громадным. Если, напр., процентная такса равна 1/20 или пяти на сто, то капитал удваивается приблизительно через четырнадцать лет, учетверяется через 29 лет, и меньше чем через три столетия он увеличивается в два миллиона раз.

Благодаря такому поразительному росту возникла мысль использовать его для погашения государственного долга. Если создать первый фонд погашения, который будет непрерывно, вместе с процентами, помещаем в общественные предприятия, особенно при использовании моментов понижения, и если в тех случаях, когда нужды государства требуют займа, пожертвовать частью его ради увеличения фонда погашения, то очевидно, что эти операции будут иметь двойную выгоду увеличения этого фонда и поддержки кредита и общественных предприятий, и что касса погашения поглотит со временем большую часть государственного долга. Удачные опыты вполне подтвердили эту выгоду. Но честность в обязательствах и стойкость, столь необходимые для успеха подобных учреждений, могут быть вполне гарантированы только таким правительством, в котором законная власть подразделена на несколько властей независимых. Доверие, внушаемое неизбежным соревнованием этих властей, удваивает могущество государства, и даже глава его выигрывает в закономерной власти гораздо больше, чем теряет в самовластии.

Из предыдущего следует, что современная стоимость капитала, равносильная сумме, которая должна быть уплачена только но прошествии известного числа лет, равна этой сумме, умноженной на вероятность, что она будет уплачена в этот срок, и деленной на единицу,

увеличенную на процентную таксу и возведенную в степень, выраженную числом этих лет.

Легко применить этот принцип к пожизненным рентам, для одного или нескольких лиц, и к сберегательным кассам и страхованиям всякого рода. Предположим, что мы желаем составить таблицу пожизненных рент по данной таблице смертности. Пожизненная рента, подлежащая уплате по прошествии пяти лет, напр., и сведенная к современной стоимости, равна, согласно этому принципу, произведению двух следующих величин, а именно: ренты, деленной на пятую степень единицы, увеличенной на процентную таксу, и вероятности того, что она будет уплачена. Эта вероятность равна обратному отношению числа лиц, внесенных в таблицу против возраста того лица, для которого устанавливается рента, к числу, внесенному против этого возраста, увеличенного на пять лет. Составляя ряд дробей, знаменатели которых были бы произведениями числа лиц, указанных в таблице смертности еще живущими в возрасте того лица, для которого устанавливается рента, на последовательные степени единицы, увеличенной на процентную таксу, а числители были бы произведениями ренты на число лиц еще живущих того же возраста, увеличенное последовательно на год, на два и т.д., получим выраженный суммой этих дробей капитал, требуемый для пожизненной ренты в этом возрасте.

Предположим теперь, что кто-либо желает посредством пожизненной ренты обеспечить своих наследников капиталом, подлежащим уплате к концу года его смерти. Чтобы определить величину этой ренты, можно представить себе, что это лицо занимает пожизненно в какой-либо кассе этот капитал, деленный на единицу, увеличенную на процентную таксу, и помещает его на вечные проценты в ту же самую кассу. Ясно, что этот капитал будет долгом кассы наследникам этого лица к концу года его смерти; но оно уплачивало ежегодно только излишек пожизненных процентов над вечными. Таблица пожизненных рент укажет поэтому, сколько это лицо должно платить ежегодно в кассу, чтобы после его смерти этот капитал был обеспечен.

Страхования морские, от пожаров и от бури и вообще все установления этого рода исчисляются на основании тех же принципов. Купец имеет на море суда и желает застраховать их стоимость и стоимость их груза от опасностей, которым они могут подвергнуться; с этой целью он вручает известную сумму какому-либо обществу, которое отвечает согласно оценке за стоимость его груза и судов. Отношение этой стоимости к сумме, которую следует заплатить в качестве

премии страхования, зависит от опасностей, которым подвергаются суда, и может быть оценено не иначе, как посредством многочисленных наблюдений над судьбою судов, отправившихся из порта по тому же назначению.

Если бы застрахованные лица платили страховому обществу только сумму, указанную исчислением вероятностей, то это общество не могло бы нести расходов, связанных с его учреждением, необходимо поэтому, чтобы они платили более высокую премию страхования. Но какова в таком случае их выгода? Здесь становится необходимым рассмотрение нравственной невыгоды, связанной с неизвестностью. Понятно, что если самая справедливая игра становится невыгодной, как мы раньше видели, потому, что игрок меняет верную ставку на неверный выигрыш, страхование, в котором неверное меняется на верное, должно быть выгодно. И это действительно вытекает из правила, данного нами выше для определения нравственного ожидания, из которого, кроме того, явствует, как далеко может простираться та жертва, которую должно принести страховому обществу, продолжая сохранять нравственную выгоду. Общество это может, следовательно, доставляя эту выгоду, и само получить большую прибыль, если число застрахованных лиц очень значительно, – условие, необходимое для прочности его существования. В этом случае выгода, его делается достоверной, а математическое ожидание совпадает с нравственным; ибо анализ приводит к следующей общей теореме: если число ожидаемых благ очень велико, то оба ожидания непрерывно приближаются друг к другу, и наконец совпадают, когда число этих благ бесконечно велико.

Говоря об ожиданиях математическом и нравственном, мы полагали, что есть нравственная выгода в распределении риска ожидаемого блага на отдельные его части. Так, чтобы перевезти из отдаленного порта некоторую сумму, лучше распределить ее между несколькими судами, чем поместить на одно. Это и достигается при помощи взаимного страхования. Если два лица, имеющие по одинаковой сумме на двух различных судах, вышедших из одного и того же порта к месту назначения, согласятся разделить поровну все деньги, которые они получат, то ясно, что по этому соглашению каждое из этих лиц распределяет поровну на оба судна ожидаемую им сумму. Правда, такого рода страхование все еще оставляет место неизвестности относительно потери, которой можно опасаться. Но эта неизвестность уменьшается по мере того, как число участников увеличивается: нравственная выгода растет все более и более и

наконец совпадает с математической, своим естественным пределом. Благодаря этому товарищества взаимного страхования, когда они состоят из очень большого числа лиц выгоднее для страхователей, чем страховые общества, которые из-за получаемой ими прибыли нравственную выгоду предоставляют всегда меньшую математической. Все эти результаты независимы, как мы раньше видели, от закона, выражающего нравственную выгоду.

Можно рассматривать свободный народ как большую ассоциацию, члены которой взаимно поручились за свое имущество, неся пропорциональные расходы по этому поручительству. Конфедерация нескольких народов доставила бы каждому из них преимущества, подобные тем, которые каждый человек извлекает, живя в обществе. Конгресс из их представителей мог бы обсуждать вопросы, одинаково важные для всех, и тогда без сомнения система веса, мер и монет, предложенная французскими учеными, была бы принята этим конгрессом как одно из полезнейших мероприятий в коммерческих отношениях.

Из учреждений, основанных на вероятностях человеческой жизни, лучшие – это те, в которых, жертвуя небольшой частью своего дохода, можно обеспечить существование свое и своей семьи на то время, когда можно опасаться, что не будет хватать средств на удовлетворение своих нужд. Насколько игра безнравственна, настолько же эти учреждения улучшают нравы, благоприятствуя самым нежным естественным привязанностям. Правительство должно поэтому поощрять их и щадить в превратностях общественного достояния, ибо вследствие того, что предоставляемые ими ожидания относятся к отдаленному будущему, они могут процветать, только будучи защищены от каких бы то ни было опасений за их прочность. Одно из преимуществ представительного правления и состоит в том, что оно дает эту гарантию.

Скажем несколько слов о займах. Ясно, что для того, чтобы сделать вечный заем, надо платить ежегодно сумму, равную произведению капитала на процентную таксу. Но можно пожелать погасить этот капитал равными платежами в течение определенного числа лет, – платежами, которые называются аннюитетами и величина которых получается таким образом: каждый аннюитет, чтобы быть сведенным к настоящему моменту, должен быть разделен на степень единицы, увеличенной на процентную таксу, причем показатель степени равен числу лет, по прошествии которых этот аннюитет должен быть уплачен. Составляя геометрическую прогрессию, первый член которой равен аннюитету, деленному на единицу, увеличенную на процентную

таксу, а последний – этому аннюитету, деленному на ту же величину, возведенную в степень, равную числу лет, в течение которых должна производиться уплата, получим, что сумма этой прогрессии будет равносильна занятому капиталу, что и определяет величину аннюитета. Если желают заключить пожизненный заем, то не трудно видеть, что простая пропорция укажет, какую ренту следует уплачивать тому лицу, у которого занимают капитал, если обратить внимание, что таблицы пожизненных рент указывают капитал, необходимый для установления пожизненной ренты для какого бы то ни было возраста. С помощью этих принципов можно вычислить все возможные виды займа.

Об иллюзиях в оценке вероятностей

Ум имеет свои иллюзии, как чувство зрения; и подобно тому, как осязание исправляет эти последние, рассуждение и исчисление исправляет первые. Вероятность, основанная на ежедневном опыте или преувеличенная страхом и надеждою, поражает нас более, чем вероятность высшая, но являющаяся простым результатом исчисления. Так, мы совсем не боимся из-за незначительной выгоды подвергать свою жизнь опасностям, гораздо менее невероятным, чем выход квины по Французской лотерее; и в то же время никто не пожелал бы добиваться той же выгоды при уверенности лишиться жизни в случае выхода этой квины.

Наши страсти, наши предрассудки и господствующие взгляды, преувеличивая благоприятствующие им вероятности и уменьшая противоположные, являются обильными источниками опасных иллюзий.

Настоящее зло и причина, порождающая его действуют на нас гораздо сильнее, чем воспоминания о зле, причиненном противоположной причиной; оно мешает нам справедливо оценить недостатки того и другого и вероятность тех средств, которые могли бы предохранить нас от них. Это и толкает поочередно к деспотизму и к анархии народы, вышедшие из состояния покоя, к которому они и возвращаются всегда лишь после долгих и жестоких волнений.

То живое впечатление, которое мы испытываем, присутствуя при событиях, и которое едва позволяет нам замечать события противоположные, наблюденные другими, является одной из главных причин заблуждений, от которых нельзя достаточно уберечься.

В игре преимущественно случается, что масса иллюзий питает надежду и поддерживает ее против неблагоприятных шансов.

Большинство людей, играющих в лотерею не знают, сколько шансов в их пользу и сколько противоположных. Они принимают во внимание только возможность выиграть на маленькую ставку значительную сумму и предположения, которыми их ребяческое воображение увеличивает в их глазах вероятность получения этой суммы: бедняк в особенности, воодушевленный стремлением к лучшей участи, подвергает опасности этой игры свое необходимое, цепляясь даже за самые неблагоприятные сочетания, обещающие ему большую выгоду. Без сомнения, все испугались бы огромного числа проигранных ставок, если бы могли его знать; но прилагаются старания, наоборот, к тому, чтобы предать наибольшей гласности выигрыши, гласности, которая становится новой причиной возбуждения в этой пагубной игре.

Когда во Французской лотерее какой-либо номер уже долгое время не выходил, толпа спешит покрыть его ставками. Она считает, что номер, долгое время не выходивший, должен при ближайшем тираже выйти преимущественно перед другими. Подобная общая ошибка, мне кажется, проистекает от иллюзии, которая невольно переносит нас к началу событий. Напр., очень мало правдоподобно, чтобы в игре в *«крест* и *решетку»* (орлянку) *крест* появился десять раз подряд. Это неправдоподобие, которое еще поражает нас в то время, как он вышел девять раз, побуждает нас думать, что в десятый раз появится *решетка.* Между тем прошедшее, указывая на большую склонность в монете к *кресту,* чем к *решетке,* делает первое из этих событий более вероятным, чем второе: оно увеличивает, как мы видели, вероятность появления *креста* при следующем бросании. Подобная иллюзия убеждает многих, что возможно выиграть наверное в лотерее, помещая каждый раз на один и тот же номер до его выхода ставку, выигрыш которой превышает сумму всех ставок. Но если бы даже подобные спекуляции не прекращались часто вследствие невозможности поддерживать их, они все же не уменьшали бы математического ожидания потери спекулянтов и они увеличивали бы нравственное ожидание их потери, потому что с каждым тиражом спекулянты ставили бы все большую часть своего состояния.

Я видел, как люди, страстно желавшие иметь сына, с прискорбием узнавали о рождениях мальчиков в том месяце, когда они должны были стать отцами. Воображая, что отношение этих рождений к рождениям девочек должно быть одно и то же в конце всякого месяца, они считали, что уже рожденные мальчики делают более вероятными ближайшие рождения девочек. Так, изъятие белого шара из урны,

содержащей ограниченное число шаров белых и черных, в данном отношении, увеличивает вероятность изъятия черного шара при следующем тираже. Но это перестает иметь место, когда число шаров в урне безгранично, как должно предположить, чтобы уподобить этот случай случаю этих рождений. Если в продолжение какого-либо месяца родилось гораздо больше мальчиков, чем девочек, то можно было бы подозревать, что около времени их зачатия какая-нибудь общая причина благоприятствовала мужским зачатиям, что сделало бы ближайшее рождение мальчика более вероятным. Неправильные явления природы не могут быть в точности сравниваемы с выходом номеров лотереи, в которой все номера перемешиваются в каждом тираже так, чтобы сделать шансы их выхода совершенно равными. Частота одного из этих явлений как будто указывает на причину, некоторое время действовавшую, которая ему благоприятствовала, что увеличивает вероятность его будущего повторения; и повторение его, долго продолжавшееся, как, напр., длинный ряд дождливых дней, может раскрыть неизвестные причины его изменения, так что при каждом ожидаемом явлении мы не возвращаемся, как при каждом тираже лотереи, к одному и тому же состоянию неопределенности относительно того, что должно случиться. Но по мере того, как умножаются наблюдения над этими явлениями, сравнение их результатов с результатами лотерей становится более точным.

Благодаря иллюзии, противоположной предыдущим, отыскивают в прошедших тиражах Французской лотереи наиболее часто выходившие номера, чтобы составить из них сочетания, на которые рассчитывают выгодно поместить ставку. Однако в виду того способа, каким производится смешение номеров в этой лотерее, прошедшее не должно иметь никакого влияния на будущее. Более частый выход одного какого-либо номера является только аномалией случая: относительно многих из них я произвел вычисления, и я постоянно находил, что они заключались в пределах, которые при предположении одинаковой возможности выхода всех номеров нельзя считать неправдоподобными.

В длинном ряду однородных событий одни шансы случая иногда должны быть причиной этих странных полос счастья или несчастья, которые большинство игроков не преминет приписать некоторого рода предопределению. Часто случается в играх, зависящих одновременно от случая и от ловкости игроков, что тот, кто проигрывает, смущенный своим проигрышем, пытается наверстать его случайными ходами, ходами, которых он избегал бы в другом положении: этим

способом он усугубляет свое собственное несчастье и увеличивает его продолжительность. Между тем именно тогда благоразумие становится необходимым и надлежит убедиться в том, что нравственное ожидание потери, связанное с неблагоприятными шансами, возрастает благодаря самому несчастью.

То чувство, из-за которого человек долгое время помещал себя в центре вселенной, считая себя предметом особых забот природы, склоняет каждую отдельную личность представлять себя центром более или менее широкого круга и верить, что случай ему окажет предпочтение. Поддерживаемые этим взглядом, игроки часто ставят значительные суммы в играх, шансы которых, как им известно, им не благоприятствуют. В жизни подобный взгляд иногда может иметь свои преимущества, но чаще всего он ведет к пагубным предприятиям. Здесь, как и во всем, иллюзии опасны, и истина одна всегда полезна.

Одна из больших заслуг исчисления вероятностей – та, что оно учит не доверять первым впечатлениям. Так как в тех случаях, когда можно их подвергнуть исчислению, оказывается, что они часто обманывают, то отсюда должно заключить, что и в других случаях следует на них полагаться лишь с крайней осмотрительностью. Докажем это примерами.

Урна содержит четыре шара черных или белых, которые однако не все одного цвета. Вынули один из шаров, белого цвета, и положили его обратно в урну, чтобы приступить снова к подобному же тиражу. Спрашивается вероятность того, что при четырех следующих тиражах будут появляться только черные шары.

Если бы число белых и черных шаров было одинаково, эта вероятность была бы четвертой степенью вероятности 1/2 изъятия черного шара при каждом тираже; следовательно она равнялась бы 1/16. Но изъятие белого шара при первом тираже указывает на преобладание числа белых шаров в урне; ибо, если предположить, что в урне три белых шара и один черный, то вероятность изъятия из нее белого шара равна 3/4; она равна 2/4, если предположить, что в ней два белых шара и два черных; наконец она сводится к 1/4, если предположить, что в урне три черных шара и один белый. Согласно принципу вероятности причин, извлеченному из опыта, вероятности этих трех предположений относятся между собой как количества 3/4, 2/4, 1/4; следовательно, они равны 3/6, 2/6, 1/6. Таким образом пять шансов против одного за то, что число черных шаров уступает или, самое большее, равно числу белых. Кажется, судя по изъятию белого шара при первом тираже, что вероятность изъятия подряд четырех черных

шаров должна была бы быть меньше, чем в случае равенства обоих цветов, или менее одной шестнадцатой. Между тем этого нет и с помощью очень простого вычисления находим, что эта вероятность больше одной четырнадцатой. В самом деле она была бы равна четвертой степени 1/4, 2/4, 3/4 при первом, втором и третьем предыдущих предложениях относительно цвета шаров в урне. При умножении соответственно каждой степени на вероятность соответствующего предположения, или на 3/6, 2/6, и 1/6, сумма произведений будет вероятностью изъятия подряд четырех черных шаров. Таким образом имеем для этой вероятности 29/384 дробь, большую, чем 1/14. Это противоречие объясняется, если примем во внимание, что указание первого тиража на преобладание белых шаров над черными вовсе не исключает преобладания черных шаров над белыми, – преобладания, исключаемого предположением равенства того и другого цвета. А это преобладание, хотя мало правдоподобное, должно сделать вероятность появления подряд данного числа черных шаров большей, чем при последнем предположении, если данное число значительно; и мы видим, что так и будет начиная с четырех.

Рассмотрим еще одну урну, содержащую несколько белых и черных шаров. Положим сперва, что в ней только один белый шар и один черный. Тогда можно держать пари с равными шансами, что при одном тираже вынут будет белый шар. Но кажется, что для равенства пари следовало бы предоставить тому, кто ставит на изъятие белого шара, два тиража, если урна содержит два черных шара и один белый; три тиража, если она содержит три черных шара и один белый, и т.д.; предполагается, что после каждого тиража вынутый шар снова кладется в урну.

Однако легко убедиться, что это первое впечатление ошибочно. В самом деле, в том случае, когда два черных шара приходятся на один белый, вероятность изъятия из урны двух черных шаров при двух тиражах равна второй степени 2/3, или 4/9; но эта вероятность, сложенная с вероятностью появления белого шара при двух тиражах, есть достоверность, или единица, потому что достоверно известно, что должны появиться два черных шара или по крайней мере один раз белый; вероятность этого последнего случая равна поэтому 5/9 – дроби, которая больше 1/2. Еще выгоднее было бы держать пари за появление белого шара при пяти тиражах, когда урна содержит пять черных шаров и один белый; это последнее пари выгодно даже при четырех тиражах: оно сводится тогда к пари за вскрытие шестерки при четырех бросаниях одной кости.

Кавалер де Мере, друг Паскаля, и тот, кто дал начало исчислению вероятностей, побуждая этого великого геометра им заняться, говорил ему: «что он нашел неправильность в числах по следующей причине: стараясь вскрыть шестерку при метании одной кости, можно иметь выгодные шансы в отношении 671:625 при четырех бросаниях. Если же задаться целью при метании двух костей получить 12, то право на 24 бросания дает невыгодные шансы. Тем не менее 24 относится к 36, числу всех пар граней двух костей, как 4 к 6, числу граней одной кости». «Вот, писал Паскаль Фермату, в чем была его большая досада, которая побудила его смело сказать, что теоремы не постоянны и что арифметика сама себе противоречит... Он обладает сильным умом, но он не геометр, а это, как вы знаете, большой недостаток». Кавалер де Мере, введенный в заблуждение ложной аналогией, полагал, что в случае равенства пари число бросаний должно возрастать пропорционально числу всех возможных шансов, что хотя не точно, но приближается к точности тем более, чем больше это число.

Пробовали объяснить преобладание рождений мальчиков над рождениями девочек общим желанием отцов иметь сыновей, которые продолжают их имя. Так, представив себе урну, наполненную бесконечным числом белых и черных шаров, в одинаковом количестве, и предположив, что из большого числа лиц каждое вынимает шар из этой урны и продолжает тираж с намерением остановиться, когда им будет вынут белый шар, полагали, что это намерение должно дать числу вынутых белых шаров преобладание над числом черных. В самом деле, после всех тиражей оно даст непременно число белых шаров по крайней мере равное числу лиц; и возможно, что эти тиражи не дадут ни одного черного шара. Но легко убедиться, что это воззрение не что иное как иллюзия, ибо если мы допустим, что при первом тираже все лица сразу вынимают по шару из урны, то очевидно, что их намерения не могут иметь никакого влияния на цвет шаров, которые должны появиться при этом тираже. Его единственным последствием будет исключение из второго тиража тех лиц, которые вынули белые шары при первом тираже. Подобным же образом очевидно, что намерения лиц, которые примут участие в новом тираже, не повлияют на цвет шаров, которые появятся, и что то же самое будет иметь место при следующих тиражах. Следовательно, это намерение совсем не повлияет на цвет шаров, вынутых при всей совокупности тиражей; оно только приведет к участию большего или меньшего числа лиц в каждом из них. Отношение вынутых белых шаров к черным будет таким образом очень мало отличаться от

единицы. Откуда следует, предполагая число лиц очень большим, если притом наблюдение дает между цветами вынутых шаров отношение, значительно отличающееся от единицы, что очень вероятным является существование почти того же самого различия между единицей и отношением в урне белых шаров к черным.

К иллюзиям причисляю я также применение, которое Лейбниц и Даниил Бернулли сделали из исчисления вероятностей к суммированию рядов. Если мы разложим дробь, числитель которой единица, а знаменатель; единица плюс переменная, в ряд, расположенный по степеням этой переменной, то легко убедиться, полагая переменную равной единице, что дробь обращается в 1/2, а ряд становится равным *плюс единица, минус единица, плюс единица, минус единица* и т. д. Складывая два первых члена, два следующих и т. д., мы преобразовываем. Этот ряд в другой, каждый член которого равен нулю. Гранди, итальянский иезуит, вывел отсюда заключение относительно возможности творения; в виду того, что ряд всегда равен 1/2, он полагал, что эта дробь возникает из бесконечного числа нулей, или из ничего. То же произошло и с Лейбницем. Он думал, что можно видеть подобие творения в его двоичной арифметике, где он употреблял только два знака: нуль и единицу. Он думал, что единица могла бы изображать Бога, а нуль – ничто, и что Высшее Существо вывело из ничего все существующее, подобно тому как единица с нулем выражает все числа в арифметической системе. Эта идея настолько понравилась Лейбницу, что он поделился ею с иезуитом Гримальди, представителем кафедры математики в Китае, в надежде, что эта эмблема творения обратит в христианство тогдашнего императора, который особенно любил науки. Я упоминаю об этой черте для того только, чтобы показать, до какой степени предрассудки детства могут вводить в заблуждение самых великих людей.

Лейбниц, все еще руководимый странной и очень развязной метафизикой, считал, – что ряд *плюс единица, минус единица, плюс единица* и т.д. делается единицей или нулем в зависимости от того, остановиться ли на нечетном или четном числе членов; и ввиду того, что нет никакого повода предпочитать четное число нечетному в бесконечности, должно, согласно правилам вероятностей, взять половину результатов, которые относятся к этим двум родам чисел и которые равны нулю и единице, что дает 1/2 для числового значения ряда. Даниил Бернулли распространил затем это рассуждение на суммирование рядов, составленных из периодических членов. Но все эти ряды, собственно говоря, не имеют числового значения: они его

получают только в том случае, когда их члены умножаются на последовательные степени какой-либо переменной, меньшей единицы. В этом случае эти ряды всегда являются сходящимися, как бы ни была мала предполагаемая разница между переменной и единицей; и легко доказать, что числовые значения, определенные Бернулли на основании теории вероятностей, являются именно числовыми значениями дробей, образующих ряды, когда переменная в этих дробях предполагается равной единице. Эти числовые значения являются также пределами, к которым все более и более приближаются ряды, по мере того как переменная приближается к единице. Но когда переменная как раз равна единице, ряды перестают быть сходящимися; они имеют числовое значение постольку, поскольку их прерывают. Замечательное отношение этого применения исчисления вероятностей к пределам числовых значений периодических рядов предполагает, что члены этих рядов умножены на все последовательные степени переменной. Но эти ряды могут вытекать из разложения бесконечного числа различных дробей, в которых это не имеет места. Так, ряд *плюс единица, минус единица, плюс единица* и т. д. может возникнуть из разложения дроби, числитель которой равен единице плюс переменная, а знаменатель равен этому числителю, увеличенному на квадрат переменной. Предполагая переменную равной единице, это разложение превращается в заданный ряд, и образующая дробь делается равной 2/3; правила вероятностей дали бы тогда ложные результаты, что доказывает, как опасно было бы применять подобные рассуждения, особенно в математических науках, которые должны в высшей степени отличаться точностью своих методов.

Мы, естественно, склонны думать, что порядок, по которому, как мы видим, все на земле возобновляется, всегда существовал и будет существовать. В самом деле, если бы настоящее состояние вселенной совершенно походило на предшествующее, из которого оно возникло, то оно породило бы в свою очередь подобное же состояние. Смена этих состояний тогда была бы вечной. Посредством применения анализа к закону всемирного тяготения я узнал, что движения вращения и возмущения планет и спутников и положения их орбит и экваторов подчинены только периодическим неравенствам. Сравнивая теорию векового уравнения луны с древними затмениями, я нашел, что со времени Гиппарха продолжительность дня не изменилась и на сотую долю секунды и что средняя температура земли не уменьшилась и на сотую долю градуса. Таким образом постоянство настоящего состояния как будто устанавливается одновременно теорией

и наблюдениями. Но это состояние нарушается различными причинами, которые внимательное рассмотрение позволяет заметить и которые невозможно подвергнуть исчислению.

Действия океана, атмосферы и метеоров, землетрясения и извержения вулканов колеблют беспрестанно земную поверхность и со временем должны в ней производить значительные изменения. Температура климатов, объем атмосферы и отношение газов, ее составляющих, могут изменяться незаметно. При новизне инструментов и средств, годных для определения этих изменений, наблюдение не могло до сих пор ничему нас научить в этом отношении. Однако весьма мало правдоподобно, чтобы причины поглощения и восстановления газов, составляющих наш воздух, поддерживали в точности их соответственные количества. Длинный ряд веков дает возможность познать изменения, испытываемые всеми этими элементами, столь существенными для сохранения организованных существ. Хотя исторические памятники не восходят к самой глубокой древности, они все-таки указывают довольно большие изменения, последовавшие от медленного и продолжительного действия естественных агентов.

Проникая в недра земли, открывают многочисленные остатки природы, некогда существовавшей и совершенно отличной от настоящей природы. Кроме того, если вся земля первоначально была жидкой, как все по-видимому указывает, то понятно, что при переходе из этого состояния к тому, в котором она находится теперь, поверхность ее должна быта испытать громадные изменения. Даже небо, несмотря на порядок в своих движениях, не неизменно. Сопротивление света и других эфирных жидкостей и притяжение звезд должны, после очень большого числа веков, значительно изменять движения планет. Изменения, уже замеченные в звездах и в форме туманностей, заставляют предчувствовать те изменения, которые будут произведены временем в системе этих великих тел. Можно изобразить последовательные состояния вселенной кривой, абсциссой которой служило бы время, а ординаты выражали бы эти различные состояния. Едва зная какой-либо элемент этой кривой, мы далеки от возможности добраться до ее начала; и если для того, чтобы дать отдых воображению, все еще тревожимому незнанием причины интересующих его явлений, рискуют делать какие-либо предположения, то благоразумно предлагать их не иначе как с крайней осмотрительностью.

Существует при оценке вероятностей один род иллюзий, который, завися специально от законов устройства ума, требует для того, чтобы оградить себя от них, глубокого испытания этих законов. Желание

проникнуть в будущее и отношение некоторых замечательных событий к предсказаниям астрологов, гадателей и жрецов, к предчувствиям и снам, к числам и дням, слывущим счастливыми или несчастными, породили массу предрассудков, еще и теперь очень распространенных. Совсем не думают о большом числе несовпадений, которые не произвели никакого впечатления или остались неизвестными; между тем как необходимо знать их, чтобы оценить вероятность причин, которым приписывают совпадения. Это значение без сомнения подтвердило бы то, что диктует нам разум относительно этих предрассудков. Так, философ древности, которому показывали в храме для превознесения могущества того бога, которому в нем поклонялись, *ex-voto* всех тех, кто призывая его, спасся от кораблекрушения, сделал замечание, согласующееся с исчислением вероятностей, сказав, что он совсем не видит записанными имена тех лиц, которые, несмотря на свои мольбы, погибли. Цицерон опровергнул все эти предрассудки с большим умом и красноречием в своем Трактате о гадании, заканчивая его словами, которые я и приведу; ибо любят находить у древних черты мирового разума, который, рассеяв своим светом все предрассудки, обратится в единственное основание человеческих установлений.

«Следует, – говорит римский оратор, – отбросить гадание по снам и все подобные предрассудки. Повсюду распространившееся суеверие поработило большую часть умов и овладело человеческой слабостью. Именно это мы развивали в наших книгах о природе богов, и в особенности в этом труде, будучи уверены, что принесем пользу другим и себе, если нам удастся разрушить суеверность. Однако (и я особенно желаю, чтобы в этом отношении моя мысль была хорошо понята), разрушая суеверность, я далек от того, чтобы желать затронуть религию. Благоразумие предписывает нам поддерживать учреждения и обряды наших предков, касающиеся культа богов. Кроме того, красота вселенной и порядок небесных явлений заставляют нас признать какую-то высшую природу, которая должна быть отмечена родом человеческим и которой он должен восхищаться. Но насколько приличествует распространять религию, которая связана с познанием природы, настолько же следует работать над искоренением суеверий, потому что они вас мучают, вас угнетают и беспрестанно всюду вас преследуют. Если вы просите совета у гадателя или прорицателя, если вы приносите жертву, если вы смотрите на полет птицы, если вы встречаете халдейца или гадателя по внутренностям животных, если сверкает молния, если гром гремит, если разражается гроза, наконец,

если рождается или появляется некоторого рода чудовище, – все события, из которых нередко какое-нибудь и должно произойти: тогда суеверия, которые властвуют над вами не дают вам покоя. Даже сон, это прибежище смертных в их горестях и в их трудах, превращается благодаря им в предмет нового беспокойства и страха».

Все эти предрассудки и страх, внушаемый ими, зависят от физиологических причин, которые иногда продолжают сильно действовать после того, как разум нас вывел из заблуждения. Однако повторение действий, противоречащих нашим предрассудкам, может всегда разрушить их. Докажем это с помощью следующих соображений.

На границе видимой физиологии начинается другая физиология, явления которой, гораздо более разнообразные, чем явления первой, подчинены, подобно им, законам, знать которые весьма важно. Эта физиология, которую мы обозначим именем *психологии,* является без сомнения продолжением физиологии видимой. Нервы, волокна которых теряются в мозговом веществе, распространяют по нему впечатления, полученные ими от внешних предметов, и оставляют в нем постоянные впечатления, которые изменяют неизвестным нам образом сенсориум или местопребывание мысли.

Внешние чувства ничему не могут нас научить относительно природы этих изменений, изумительных по своему бесконечному разнообразию, по своей отличительности и порядку, который они сохраняют в маленьком пространстве, их вмещающем, – изменений, о которых нам дают некоторое понятие столь разнообразные явления света и электричества. Но, применяя к наблюдению над внутренним чувством, которое одно может их замечать, метод, использованный в наблюдениях над внешними чувствами, можно было бы внести в теорию человеческого познания ту же точность, как и в другие отрасли натуральной философии.

Некоторые принципы* психологии уже признаны и успешно развиты. Таково стремление всех существ со сходной организацией к установлению между собой гармонии. Это стремление, которое составляет *симпатию,* существует даже у животных различных видов: оно уменьшается по мере того, как их организация становится менее сходной. Среди существ, наделенных одинаковой организацией, некоторые сходятся друг с другом скорее, чем с остальными. Неорганическая природа знает подобные явления: двое часов, стенных или карманных, ход которых очень мало различается, будучи положены на одну

* Я обозначаю называнием *принципов* общие отношения явлений.

подставку, в конце концов начинают идти совершенно одинаково; и в системе звучащих струн колебания одной из них заставляют отзываться все гармонические. Эти действия, хорошо известные причины которых были подвергнуты исчислению, дают верное понятие о той симпатии, которая зависит от гораздо более сложных причин.

Чувство приятного почти всегда сопровождает движения симпатии. У большей части видов животных отдельные особи привязываются таким образом друг к другу и соединяются в общества. В роде человеческом сильные личности испытывают истинное счастье от господства над слабыми, которые испытывают не меньшее счастье, повинуясь им. Чувство симпатии, возбужденное сразу в большом числе лиц, растет благодаря взаимной реакции, как это можно наблюдать в театре. Удовольствие, вытекающее из него, сближает лиц со сходными взглядами, объединение же воспламеняет их иногда до фанатизма. Таким образом возникают секты, возбуждаемое ими рвение и быстрота их распространения. В истории они представляют самые поразительные и самые пагубные примеры власти чувства симпатии. Часто представляется случай наблюдать, с какой легкостью симпатические движения, как например смех, сообщаются от одного только вида, без содействия какой бы то ни было другой причины, тем, кто этим чувством заражается. Влияние симпатии на сенсориум несомненно могущественнее: вибрации, которые она ему сообщает, когда они очень сильны, реагируя на животную экономию, производят необычайные действия, приписывавшиеся в века суеверия сверхъестественным силам и заслуживающие по своей исключительности внимания наблюдателей.

Сострадание, благосклонность и много других чувств произошли от симпатии. Благодаря ей можно чувствовать чужое страдание и разделять радость того несчастного, которому оказывается помощь. Но я хочу здесь только изложить принципы психологии, не входя в развитие их следствий.

Один из этих принципов, самый плодовитый из всех, есть принцип связи всех вещей, которые существовали в сенсориуме одновременно или в правильной последовательности, связи, которая, при возвращении одной из этих вещей, вызывает и остальные. К этому принципу имеет отношение употребление знаков и языков для того, чтобы вызывать ощущения и идеи, для образования и анализа идей сложных, отвлеченных и общих и для рассуждения. Многие философы хорошо развили этот предмет, который до сих пор составляет реальную часть метафизики.

Можно еще установить, как принцип психологии, что часто повторявшиеся впечатления от одного и того же Предмета на различные чувства изменяют сенсориум так, что внутреннее впечатление, соответствующее внешнему впечатлению от предмета на одно только чувство, делается весьма отличным от того, чем оно было вначале. Разовьем этот принцип и с этой целью рассмотрим слепорожденного, которому только что вернули зрение. Образ предмета, который запечатлевается на его сетчатке, производит на его сенсориум впечатление, которое я назову *вторым образом,* не желая ни уподоблять его первому, ни утверждать что-либо относительно его природы. Этот второй образ не есть сначала верный образ предмета; но привычное сравнение впечатлений от этого предмета, полученных посредством осязания, с впечатлениями, данными зрением, изменяя сенсориум, приводит наконец к тому, что второй образ становится согласным с действительностью, верно переданной осязанием. Образ, запечатлевшийся на сетчатке, не меняется; но внутренний образ, вызванный им, не остается тем же самым, как показали опыты, произведенные на многих слепорожденных, которым вернули зрение.

Сенсориум претерпевает эти изменения главным образом в детстве. Ребенок, беспрестанно сравнивая впечатления, получаемые от одного и того же предмета при посредстве органов зрения и освязания, исправляет зрительные впечатления. Он приучает свой сенсориум придавать видимым предметам форму, указываемую осязанием, впечатления которого тесно связаны со зрительными, всегда их вызывающими. Тогда видимые предметы оказываются изображенными с такой же верностью, как осязаемые. Световой луч делается для зрения тем же, чем палка для осязания. Этим способом первое из этих чувств расширяет гораздо дальше чем второе область объектов своих впечатлений. Но даже небесный свод, к которому мы прикрепляем все светила, еще очень ограничен, и только путем длинного ряда наблюдений и исчислений мы дошли до познания громадных расстояний этих тел и научились неопределенно отдалять их в необъятном пространстве.

Многим видам животных свойственна по-видимому та способность сенсориума, которая позволяет оценивать расстояния. Но человек, в котором природа заменила инстинкт, почти во всем, умом, нуждается взамен его в наблюдениях и сравнениях, которые удивительно способствуют развитию его умственных способностей и, благодаря этому развитию, обеспечивают за ним земное царство.

Внутренние образы не являются поэтому действиями одной только причины; они вытекают либо из впечатлений, полученных одновременно одним и тем же, или различными органами чувств, либо из внутренних впечатлений, вызванных памятью. Взаимное влияние этих впечатлений является психологическим принципом, богатым последствиями. Разовьем некоторые из главных.

Пусть наблюдатель, находящийся в совершенной темноте, видит два светящихся шара одного и того же диаметра на разных расстояниях: они покажутся ему неодинаковой величины. Их внутренние образы будут пропорциональны соответствующим изображениям, запечатлевшимся на сетчатке. Но если, по прекращении темноты, он увидит одновременно с шарами все промежуточное пространство, то это зрелище увеличивает внутренний образ более удаленного шара и делает его почти равным образу другого шара. Отсюда происходит, что человек, видимый на расстоянии двух и четырех метров, кажется нам одной и той же величины: его внутренний образ не меняется, хотя одно из запечатлевшихся на сетчатке изображений вдвое больше другого. Точно так же, благодаря впечатлению от промежуточных предметов, и луна на горизонте кажется нам большей, чем в зените. Мы замечаем над веткой, близкой к глазу, предмет, который относим на далекое расстояние и который кажется очень большим. Затем мы узнаем о связи, соединяющей его с веткой: то, что мы заметили эту связь, тотчас же меняет внутреннее изображение и сводит его к гораздо меньшим размерам. Все это не просто суждения, как думали некоторые метафизики; это – физиологические эффекты, зависящие от способностей, приобретенных сенсориумом путем привычного сравнения впечатлений от одного и того же предмета на органы нескольких чувств и в особенности на органы освязания и зрения.

Влияние следов, вызванных памятью, на впечатления, производимые внешними предметами, дает себя знать в большом числе случаев. Видны издали буквы, однако невозможно разобрать, какое слово они изображают. Если кто-либо произнесет это слово или если какое-либо обстоятельство напомнит его памяти, тотчас же внутреннее изображение этих букв, таким образом возобновленных, накладывается, если я могу так выразиться, на неясное изображение, вызванное впечатлением от внешних знаков, и делает его отчетливым. Вид букв вызывает следы соответствующих им звуков; и эти следы, смешиваясь с неясными звуками голоса, позволяют различить их. Страх часто преображает таким способом предметы, которых слишком слабый свет не позволяет распознать, в предметы страшные, имеющие с ними

сходство. Изображение этих последних предметов, сильно запечатлевшееся в сенсориуме от страха, приписывается впечатлению от внешних предметов. Важно оградить себя от этой причины иллюзий в следствиях, выводимых из наблюдений явлений, которые производят лишь очень слабое впечатление: таково наблюдение относительно уменьшения света на поверхности планет и спутников, откуда заключили о существовании и о плотности их атмосфер и об их вращательных движениях. Часто приходится опасаться, чтобы внутренние образы не уподобили себе этих впечатлений: мы склонны верить в существование тех вещей, которые представлены впечатлениями, полученными от чувств.

Эта замечательная склонность зависит от особого характера, которым впечатления, идущие извне, различаются от следов, созданных воображением или вызванных памятью. Но иногда бывает вследствие расстройства в сенсориуме или в органах, действующих на него, что эти следы приобретают характер и живость внешних впечатлений: тогда человек признает соответствующие предметы присутствующими, он видит призрак. Тишина и сумрак ночи благоприятствуют этим иллюзиям, которые во время сна становятся полными и образуют сновидения; о них будем иметь верное представление, если примем во внимание, что следы предметов, которые представляются нашему воображению в темноте, приобретают большую напряженность во время сна.

Все побуждает думать, что у лунатиков некоторые чувства не вполне усыплены. Если чувство осязания, например, остается еще немного чувствительным к прикосновению внешних предметов, то слабые впечатления, получаемые им от них, переданные сенсориуму, могут, сочетаясь с образами сновидения лунатика, изменять их и управлять его движениями. Когда, принимая во внимание эти соображения, я исследовал хорошо проверенные рассказы о необычайных вещах, совершаемых лунатиками, то мне показалось, что можно дать им очень простое объяснение.

Иногда ясновидящим кажется, что они слышат речь воображаемых ими лиц, и они ведут с ними связный разговор; сочинения врачей полны фактов этого рода.

Боннэ приводит как человека, которого он часто наблюдал, своего деда по матери, «старика», говорит он, «полного здоровья, который независимо от какого бы то ни было впечатления извне видит от времени до времени перед собою образы, мужчин, женщин, птиц, экипажей, строений и т.д. Он видит, как эти образы обмениваются

различными движениями, приближаются друг к другу, удаляются друг от друга, бегут, уменьшаются и увеличиваются в размерах, появляются, исчезают и снова появляются. Он видит строения, которые возвышаются перед его глазами, и т.д. Но он совсем не принимает этих видений за действительные: его ум забавляется ими. Он не знает, какое видение явится ему в каждый следующий момент. Его мозг является театром, исполняющим сцены, тем более удивительные для зрителя, что он совершенно не предвидел их». Читая историю Жанны Д'Арк, мы вынуждены признать чистосердечную ясновидящую в этой чудной девушке, чья мужественная экзальтация так сильно способствовала освобождению Франции от ее врагов. Весьма возможно, что многие из тех, которые провозглашали, что их учения получены ими от сверхестественного существа, были ясновидцами: они тем скорее убеждали других, что сами были убеждены. Благочестивые обманы и сильные средства, к которым они потом прибегали, казались им оправдываемыми целью распространения того, что они считали истинами, необходимыми для людей.

Особый характер отличает от плодов воображения следы, вызванные памятью, которыми мы обязаны впечатлениям от внешних предметов. Мы склонны как бы инстинктивно признавать прошедшее существование этих предметов в том порядке, который подсказывает нам память. Постоянные опыты подтверждают истинность следствий, извлекаемых нами отсюда для нашего поведения, и укрепляют эту склонность. Каков механизм, который при этой операции сенсориума определяет наши суждения? Мы его не знаем и можем только замечать его действия. С помощью этого механизма даже и слабые следы памяти позволяют нам оценивать их первоначальную силу, которую мы таким образом можем сравнивать с подобными же впечатлениями от присутствующих предметов. Таким образом мы считаем, что: цвет, виденный нами накануне, был ярче того, который поражает наше зрение в данную минуту.

Впечатления, сопровождающие следы памяти, помогают нам вспоминать их причины. Так, когда к воспоминанию о чем-либо, рассказанном нам, присоединяется воспоминание о доверии, которое мы оказали рассказчику, если имя его ускользает от нас, мы вспомним его, припоминая последовательно имена лиц, с которыми мы разговаривали, до тех пор, пока мы не дойдем до имени, внушившего нам это доверие.

Присутствующие предметы, уже виденные нами, пробуждают следы вещей, которые были с ними связаны, когда мы их видели

первый раз. Эти следы пробуждают подобным же образом следы других предметов и т.д., так что но поводу какой-либо присутствующей вещи мы можем вспомнить их целую бесконечность и остановить наше внимание на тех, которые хотим рассмотреть.

Впечатления, воспринятые в детстве, сохраняются до самой глубокой старости и пробуждаются даже тогда, когда сильные впечатления зрелого возраста совершенно изгладились. Кажется, как будто первые впечатления, глубоко запечатлевшиеся в сенсориуме, ждут только ослабления последующих впечатлений возрастом или болезнью, чтобы снова появиться, подобно тому как светила, которые затмевал дневной свет, показываются ночью или во время солнечных затмений.

Следы памяти приобретают в напряженности от действия времени и без нашего ведома. То, что мы узнаем вечером, запечатлевается в сенсориуме во время сна и легко запоминается таким способом. Я много раз замечал, что, когда я переставал на несколько дней думать об очень сложных вопросах, они становились для меня легкими, когда я вновь начинал их рассматривать.

Если мы снова видим предмет, который поразил нас своей величиной, долгое время спустя после того, как от частого наблюдения однородных с ним предметов, гораздо больших, уменьшилось впечатление величины, которое они производят, то мы удивляемся, найдя, что он сильно уступает впечатлению, сохраненному о нем памятью.

Некоторые люди одарены поразительной памятью. Точностью, с которой они повторяют длинные разговоры, слышанные ими, удивляет нас. Но когда подумаешь обо всем, что содержит в себе память большинства людей, то удивишься еще гораздо более тому, что столько вмещается в ней, не путаясь. Посмотрите на певца на сцене: его память подсказывает ему каждое слово его роли, размер и движения, которыми она должна сопровождаться. Если же новая роль следует за первой, то первая кажется как бы вычеркнутой из памяти, которая восстанавливает в надлежащем порядке все части второй роли и которая восстановила бы подобным же образом все различные роли, разученные певцом. Эти следы, число которых громадно, или по крайней мере состояние, способное породить их, существуют в его сенсориуме одновременно, не смешиваясь, и актер может вызвать их по своему желанию. Я должен здесь повторить, что словами *след, образ, колебание* и т.д. я хочу выразить только явления сенсориума, ничего не утверждая относительно их природы и их причин, подобно тому как в механике выражают лишь эффекты словами *сила, притяжение, сродство* и т. д.

Действия сенсориума и те движения, которые он заставляет выполнять, делаются более легкими и как бы естественными от частых повторений. Из этого психологического принципа вытекают наши привычки. Комбинируясь с симпатией, он образует обычаи и нравы с их своеобразными особенностями. Благодаря ему один народ смотрит с ужасом на то, что у другого общепринято. Битвы гладиаторов, зрелище которых римляне страстно любили, и человеческие жертвоприношения, которые оскверняют летописи народов, показались бы нам ужасными. Когда смотришь на плачевное состояние рабов, на унижение париев в Индии, на нелепость стольких верований, противных разуму и свидетельствам всех наших чувств, то с прискорбием видишь, до какой степени привычка к рабству и предрассудкам унижала род человеческий.

Это состояние, в которое сенсориум приходит путем частных повторений, очень затрудняет различение приобретенных привычек от наклонностей, зависящих от организации человека; ибо естественно думать, что инстинкт, столь распространенный и могущественный у животных, не исчезает совершенно в роде человеческом и что привязанность матери к ребенку происходит из него. Двойное влияние привычки и симпатии изменяет эти наклонности, часто укрепляет их; иногда оно извращает их до такой степени, что они заменяются противоположными. Некоторые наблюдения, сделанные над человеком и животными, продолжить которые представляет большой интерес, наводят нас на предположение, что изменения сенсориума, которым привычка придала большую устойчивость, передаются от отцов к детям, из поколения в поколение, подобно многим органическим способностям.

Податливость, которую придает органам постоянное упражнение, такова, что часто они продолжают сами собой движения, сообщенные им волей. Когда, идя, мы сильно заняты какой-нибудь мыслью, то причина, которая возобновляет каждое мгновение наше движение, действует без участия нашей воли, и мы не даем себе в этом отчета. Были случаи, что люди, застигнутые сном во время ходьбы, продолжали свой путь и просыпались, только встретив какое-либо препятствие. Кажется, как будто ход продолжается благодаря тому состоянию, которое придало двигательной системе желание идти, подобно тому как ход часов поддерживается раскручиванием спиральной пружины. Расстройство в животной экономии может вызвать такое состояние. Тогда движение ходьбы делается невольным, и от одного просвещенного врача я узнал, что при такого рода

болезни, которую он лечил, больной мог остановиться, только держась за неподвижную точку опоры. Таким образом, наблюдения над болезнями могут пролить много света на психологию, когда врачи соединяют со знанием своего искусства и соприкасающихся наук способность точного критического отношения, которую дает изучение математики и в особенности науки о вероятностях.

Из сказанного нами о взаимном влиянии следов сенсориума становится понятным, что музыка путем частых повторений может сообщать нашим движениям правильность своего размера. Это мы и наблюдаем в танцах и в разных упражнениях, точность движений которых, регулированных таким образом, нам кажется необычайной. Этой регулярностью музыка обыкновенно облегчает движения, выполняемые многими лицами сразу.

Весьма замечательное психологическое явление представляет сильное влияние внимания на следы сенсориума. Оно увеличивает их живость и в то же время ослабляет сопровождающие побочные впечатления. Если мы пристально смотрим на предмет, чтобы различить какие-нибудь особенности его, то внимание может сделать нас нечувствительными к впечатлениям, производимым в то же самое время на сетчатку другими предметами. С его помощью образы предметов, которые мы желаем сравнить, приобретают силу, необходимую для того, чтобы их отношения одни занимали нашу мысль; оно пробуждает следы памяти, могущие служить для этого сравнения, и благодаря этому оно становится могущественнейшей пружиной человеческого ума.

Когда внимание часто обращается на какое-либо особенное качество предметов, то оно наделяет, наконец, органы утонченной чувствительностью, которая позволяет узнавать это качество и тогда, когда оно делается незаметным обыкновенному человеку.

Эти принципы объясняют странные эффекты, производимые панорамами. Когда правила перспективы в них хорошо соблюдены, то предметы запечатлеваются на сетчатке, как если бы они были реальны; тогда зритель находится в том же состоянии, какое породила бы реальность предметов. Но перспектива никогда не достигает точности достаточной, чтобы тождество достигло совершенства. Кроме того, посторонние впечатления, хотя бы и слабые, примешиваясь к главным, производимым перспективой, нарушают сначала иллюзию. Внимание, сосредоточенное на панораме, уничтожает их; но для этого нужно более или менее продолжительное время, в зависимости от состояния сенсориума и от совершенства панорамы. Во всех

панорамах, виденных мною, промежуток времени в несколько минут мне был необходим для получения полной иллюзии.

Следующий принцип психологии объясняет большое число явлений, которые имеют прямое отношение к предмету этого труда: «Если часто выполнять действия, вытекающие из особого изменения сенсориума, то реакция их на этот орган может не только увеличить это изменение, но иногда и быть его причиною». Так, движение руки, которая держит длинную висящую цепь, распространяется вдоль цепи до ее нижнего конца; и если после того, как цепь пришла в состояние покоя, привести в движение этот конец, то колебание подымется до руки, которую оно в свою очередь заставит двигаться. Эти взаимные движения делаются легче от частого повторения.

Действие этого принципа на веру замечательно. Вера, или наше согласие с известным предложением, обыкновенно основана на очевидности, на свидетельствах чувств или на вероятностях: в этом последнем случае степень ее силы зависит от степени вероятности, которая в свою очередь зависит от данных, которые каждый человек может иметь относительно предмета своего суждения.

Мы часто поступаем сообразно с нашей верой, не имея нужды вспоминать ее доводов. Вера является, следовательно, изменением сенсориума, которое существует независимо от этих доводов, подчас совершенно забытых, и которое побуждает нас совершать действия, являющиеся его последействиями. Согласно только что нами изложенному принципу, частое повторение этих действий может произвести это изменение, особенно, если они повторяются сразу большим числом лиц, ибо тогда к силе их реакции присоединяется власть подражания, необходимое следствие симпатии. Когда эти действия являются долгом, который налагают на нас обстоятельства, то стремление животной экономии принимать положение, самое благоприятное нашему самочувствию, также располагает нас к вере, благодаря которой мы выполняем их с удовольствием. Мало людей, которые не поддаются действию всех этих причин.

Паскаль хорошо раскрыл эти эффекты в одной главе своих мыслей, которая носит своеобразное заглавие, *что трудно доказать существование Бога посредством естественных познаний и что самое верное – это верить в Него*. Обращаясь к неверующему, он выражается так: «Вы хотите идти к вере, и вы не знаете к ней дороги; вы хотите исцелиться от неверия и вы спрашиваете лекарство от него. Узнайте его от тех, кто были такими же, как и вы, и кто в настоящее

время не имеет никаких сомнений. Они знают ту дорогу, которой вы хотели бы следовать, и они исцелены от болезни, от которой вы хотите исцелиться. Следуйте тому, с чего они начали. Подражайте их внешним действиям, если вы еще не можете войти в их внутреннее состояние; бросьте эти суетные забавы, которые исключительно занимают вас. Я тотчас же бросил бы эти развлечения, говорите вы, если бы я уверовал. А я вам говорю, что вы тотчас же уверовали бы, если бы вы бросили эти развлечения. Начало же должно быть положено вами. Если бы я мог, я дал бы вам веру; я не могу этого сделать и не могу, следовательно, убедиться в справедливости того, что вы говорите; вы же можете вполне бросить ваши развлечения и испытать, верно ли то, что я вам говорю».

«Не следует заблуждаться: мы столько же плоть, сколько и дух; отсюда происходит, что орудием, которым достигается убеждение, являются не одни только доказательства. Как мало вещей доказано! Доказательства убеждают только ум; привычка придает нашим доказательствам наибольшую силу. Она склоняет чувства, которые увлекают дух без нашего ведома. Кто доказал, что завтра наступит день, что мы умрем? А существует что-либо другое, во что вера была бы более распространена? Значит, убеждает нас привычка; это она делает стольких турками и язычниками; это она делает ремесленниками, солдатами и т. д. Правда, не следует начинать с нее, чтобы найти истину*, но следует прибегать к ней, раз рассудок убедился, где истина, чтобы проникнуться и окраситься этой верой, постоянно ускользающей от нас; ибо иметь всегда наготове доказательства слишком трудно. Надо обрести веру более легкую, какой является привычная вера, которая без насилия, без искусства, без доказательств заставляет нас верить во что-либо и преклоняет наши силы перед этой верой, так что душа наша естественно отдается ей. Недостаточно верить только в силу убеждения, если наши чувства склоняют нас к противоположному. Следует поэтому пускать в ход обе стороны нашего существа вместе: рассудок, посредством доводов, которые достаточно рассмотреть раз в жизни, и чувства посредством привычки, не позволяя им склоняться к противоположному».

Средство, которое Паскаль предлагает, чтобы обратить неверующего, может быть применено с успехом, чтобы уничтожить предрассудки, воспринятые в детстве и укоренившиеся в силу привычки. Этот

---

* Паскал здесь упускает из виду то, что он только что советовал, чтобы обрести веру, а именно – начинать с внешних действий.

род предрассудков возникает часто из самой пустой причины в деятельных воображениях. Допустим, что лицо, связывающее со словом *левый* мысль о несчастии, каждый день делает правой рукой что-либо, что может быть выполнено безразлично той или другой рукой; эта привычка может увеличить отвращение к применению в этом деле левой руки до такой степени, что рассудок окажется бессильным против этого предрассудка. Легко можно допустить, что Август, наделенный умом во многих отношениях необыкновенным, иногда упрекает себя за свою слабость, заключающуюся в том, что он не отваживается пускаться в путь в день, следующий за ярмаркой, и что он захотел превозмочь эту слабость. Но в ту минуту, когда он предпринимал путешествие в один из этих дней, считающихся несчастными, он мог говорить себе, что *самым безопасным* было бы отложить путешествие, увеличивая таким образом свое отвращение привычкой поддаваться ему. Частое повторение действий, противоречащих этим предрассудкам, должно их со временем ослаблять и заставлять совершенно исчезнуть.

Привязанность, питаемая к лицам, которых мы часто обязываем, вытекает из принципа, который мы только что развивали. Частое повторение поступков в их пользу увеличивает, а иногда даже порождает то чувство, естественным следствием которого они являются. Действия, которые нас заставляет выполнять многократно склонность к чему-либо, усиливают эту склонность и часто превращают ее в страсть.

Из предыдущего можно видеть, насколько наша вера зависит от наших привычек. Привыкнув судить и поступать согласно известного рода вероятностям, мы выражаем этим вероятностям свое одобрение как бы инстинктивно, и они убеждают нас с большей силой, чем вероятности гораздо высшие, являющиеся результатом размышления или исчисления. Вещь неправдоподобная часто заставляет нас сомневаться: мы не колеблясь отбрасываем ее, если она противоречит нашим привычным вероятностям. Чтобы по мере возможности ослабить эту причину иллюзий, надо призвать на помощь рассудку воображение и чувства. Представив себе в виде линий соответствующие вероятности, мы почувствуем их различие гораздо лучше. Линия, изображающая вероятность свидетельского показания, которое подкрепляет необычайный факт, будучи помещена рядом с линией, изображающей неправдоподобие этого факта, сделала бы очень заметной вероятность ошибки этого свидетельского показания, подобно тому как рисунок, на котором сопоставлены высоты гор, дает

поразительное представление об отношениях этих высот. Это средство может быть применено с успехом во многих случаях. Чтобы сделать ощутимой необъятность вселенной, изобразим почти незаметной величиной, одной десятой миллиметра, наибольшее протяжение Франции в длину; расстояние от земли до солнца равно будет четырнадцати метрам; расстояние до ближайшей звезды превзойдет полтора миллиона метров, т. е. семь или восемь раз взятый радиус самого обширного горизонта, доступного глазу с самой высокой точки. И все еще таким образом мы будем иметь лишь очень слабую картину величины вселенной, которая простирается бесконечно за самыми блестящими звездами, как это доказывает громадное число звезд, расположенных одни за другими и скрывающихся из виду в глубине небес. Но при всей ее слабости картины этой достаточно, чтобы заставить почувствовать нелепость представлений о превосходстве человека надо всей природой, – представлений, из которых выведены были столь странные заключения.

Наконец, мы установим в качестве психологического принципа преувеличение вероятностей страстями. Вещь, которой мы сильно боимся или желаем, кажется нам, именно благодаря этому, вероятной. Образ ее, сильно запечатлевшийся в сенсориуме, ослабляет впечатление противоположных вероятностей и иногда изглаживает их настолько, что заставляет верить, что вещь эта уже случилась. Размышление и время, уменьшая живость этих чувств, возвращают рассудку спокойствие, необходимое для правильной оценки вероятности событий.

Колебания в сенсориуме должны быть, как все движения, подчинены законам динамики, что и подтверждено опытом. Движения, которые они передают мускульной системе и которые эта система сообщает посторонним телам, как при развертывании пружин, таковы, что общий центр тяжести нашего тела и тех, которые оно приводит в движение, остается неподвижным. Эти колебания накладываются друг на друга, подобно тому как волны в жидкости соединяются, не смешиваясь. Они сообщаются людям, как колебания звучащего тела сообщаются окружающим телам. Сложные идеи образуются из простых, как морской прилив образуется из частичных приливов, вызываемых солнцем и луной. Колебание между противоположными побуждениями есть равновесие равных сил. Внезапные изменения, производимые в сенсориуме, испытывают сопротивление, которое и материальная система противополагает подобным изменениям; и если мы хотим избежать потрясений и не

терять живой силы, то надо действовать, как и в этой системе, посредством незаметных переходов. Напряженное и продолжительное внимание истощает сенсориум, подобно тому как длинный ряд электрических ударов истощает вольтов столб, или электрический орган у рыб. Почти все сравнения, почерпаемые нами из материальных предметов, для того чтобы сделать ощутимыми вещи интеллектуальные, представляют в сущности тождества.

Я желал бы, чтобы предыдущие размышления, при всем своем несовершенстве, могли привлечь внимание исследователей философов к законам сенсориума, или миру интеллектуальному, – законам, вникать в которые для нас так же важно, как в законы мира физического. Для объяснения явлений этих двух миров придумали до некоторой степени сходные гипотезы; но ввиду того, что основание этих гипотез ускользает от всех наших способов исследования и исчисления, можно на их счет сказать вместе с Монтэнем, что *невежество и отсутствие любознательности – две очень мягкие подушки, чтобы покоить рассудительную голову.*

Различные способы приближения к достоверности

Индукция, аналогия гипотез, основанных на фактах и беспрестанно поверяемых новыми наблюдениями, счастливый природный такт, подкрепленный частым сравниванием их указаний с опытом, – таковы главные средства достижения истины.

Если внимательно рассматривать ряд однородных предметов, то можно заметить между ними и в их изменениях отношения, которые все более и более обнаруживаются, по мере того как ряд продолжается, и которые, непрерывно распространяясь и обобщаясь, приводят наконец к тому принципу, из которого они вытекают. Но часто эти отношения скрыты столькими посторонними обстоятельствами, что требуется много проницательности, чтобы выделить их и дойти до этого принципа: в этом и заключается истинный научный гений. Анализ и натуральная философия обязана своими важнейшими открытиями тому плодотворному методу, который называется *индукцией:* Ньютон обязан ему своей теоремой о биноме и принципом всемирного тяготения. Трудно оценить вероятность результатов индукции, которая основывается на том, что простейшие отношения суть самые обыкновенные; что оправдывается в формулах анализа и в том, что мы находим в естественных явлениях, в кристаллизации, в химических соединениях. Эта простота отношений вовсе не будет

казаться удивительной, если принять во внимание, что все действия природы не что иное, как математические результаты небольшого числа неизменных законов.

Однако одной индукции, позволяющей открывать общие принципы наук, не достаточно, для того чтобы установить их в точности. Их нужно еще подтверждать доказательствами или окончательным испытанием, ибо история наук указывает нам, что индукция приводила иногда к неточным результатам. Приведу в качестве примера одну теорему Фермата о первоначальных числах; этот великий геометр, который глубоко вдумывался в их теорию, искал такую формулу, которая, содержа только первоначальные числа, дала бы непосредственно первоначальное (простое, Н. М.) число, большее любого, наперед данного. Индукция привела его к мысли, что два, возведенное в степень, которая в свою очередь есть степень двух, образует с единицей первоначальное число. Так, два, возведенное в квадрат, плюс единица, образует первоначальное число пять: два, возведенное во вторую степень двух, или шестнадцать, образует с единицей первоначальное число семнадцать. Он нашел, что это верно также для восьмой и шестнадцатой степеней двух, увеличенных на единицу; и эта индукция, опирающаяся на многие арифметические соображения, побудила его рассматривать этот результат как общий. Однако он признает, что не доказал его. В самом деле, Эйлер нашел, что это предложение не имеет более места для тридцать второй степени двух, которая, будучи увеличена на единицу, дает $4\,294\,967\,297$ – число, делящееся на 641.

Мы думаем по индукции, что, если различные события, движения, напр., являются постоянно, в продолжение долгого времени, связанными простым отношением, то они все время будут оставаться подчиненными ему; а отсюда мы заключаем по теории вероятностей, что это отношение зависит не от случая, но от регулярной причины. Таким образом, равенство движений вращения и обращения луны, Равенство движений узлов орбиты и экватора луны и совпадение этих узлов; особенное отношение движений трех первых спутников Юпитера, согласно которому средняя долгота первого спутника минус три раза взятая средняя долгота второго плюс два раза взятая третьего равна двум прямым углам; равенство промежутков между приливом и отливом промежутку между прохождениями луны через меридиан; возвращение самых сильных приливов и отливов вместе с сизигиями, а самых малых с квадратурами, – все эти явления, сохраняющиеся с тех пор, как их исследуют, указывают с крайним правдоподобием на

существование постоянных причин, и геометрам удалось связать эти причины с законом всемирного тяготения, знание которого обращает отмеченное постоянство отношений в достоверное.

Канцлер Бэкон, этот столь красноречивый и деятельный сторонник истинного философского метода, весьма странным образом злоупотребил индукцией, чтобы доказать, что земля неподвижна. Вот как он рассуждает в *Novum organum*, прекраснейшем из своих трудов. Движение светил с востока на запад совершается тем быстрее, чем более они удалены от земли. Это движение наиболее быстро для звезд; оно немного замедляется для Сатурна, немного более для Юпитера и т. д. до луны и наименее высоких комет. Оно еще заметно в атмосфере, особенно между тропиками, вследствие больших кругов, описываемых там молекулами воздуха; наконец, оно почти незаметно для океана; оно равно поэтому нулю для земли. Но эта индукция только доказывает, что Сатурн и те светила, которые ниже его, имеют собственные движения, противоположные действительному или кажущемуся, увлекающему весь небосвод с востока на запад, и что эти движения кажутся более медленными для светил более удаленных, что и согласуется с оптическими законами. Бэкон должен был бы поразиться той непостижимой скорости, которую надо приписать светилам, чтобы они могли совершать свое суточное обращение, если земля неподвижна, а также чрезвычайной простоте, с которой вращение объясняет, каким образом тела, настолько удаленные друг от друга, как звезды, солнце, планеты и луна, все кажутся подчиненными этому обращению. Что касается океана и атмосферы, то он не должен был уподоблять их движения движению светил, которые отделены от земли, в то время как воздух и море составляют часть земного шара и должны разделять его движение или его покой. Удивительно, что Бэкон, влекомый своим гением к возвышенным точкам зрения, не увлекся величественным представлением, которое дает о вселенной система Коперника. Между тем он мог найти в пользу этой системы сильные аналогии в открытиях Галилея, которые были ему известны. Для исследования истины он давал наставления, но не подавал примера. Однако настаивая со всей силой доводов и красноречия на необходимости отказаться от пустых тонкостей школы, для того чтобы отдаться наблюдениям и опыту, и указывая истинный метод перехода к общим причинам явлений, этот великий философ способствовал громадным успехам, сделанным человеческим умом в том прекрасном веке, в котором он окончил свою жизнь.

Аналогия основывается на вероятности того, что сходные вещи происходят от однородных причин и имеют одинаковые следствия. Чем совершеннее подобие, тем более увеличивается эта вероятность. Так, мы, не сомневаясь, решаем, что существа, наделенные одними и теми же органами, выполняя одно и то же, испытывают одинаковые ощущения и движимы одинаковыми желаниями. Вероятность того, что животные, приближающиеся к нам по своим органам, имеют ощущения аналогичные нашим, хотя и меньше вероятности, которая относится к особям нашего рода, но все еще чрезвычайно велика, и потребовалось все влияние религиозных предрассудков, чтобы заставить некоторых философов думать, что животные – простые автоматы. Вероятность существования ощущений убывает по мере того, как сходство органов с нашими органами уменьшается; но она все еще очень велика даже для насекомых. Видя, что насекомые одного и того же вида выполняют весьма сложные действия, совершенно Одинаковым образом, из поколения в поколение, не учась им, мы склонны думать, что они действуют по известного рода сродству, аналогичному тому, которое сближает молекулы кристаллов, которое однако, смешиваясь с ощущением, свойственным всякой животной организации, образует с правильностью химических соединений соединения гораздо более необычайные: можно было бы, пожалуй, назвать *животным сродством* это смешение избирающего сродства и чувствования. Хотя и существует много аналогии между строением растений и животных, мне все же кажется, что ее недостаточно, чтобы распространить на растения способность чувствовать; однако ничто не дает нам права отказать им в ней.

Ввиду того, что солнце благотворным действием своего света и тепла вызывает к жизни животных и растения, которые покрывают землю, мы думаем по аналогии, что оно производит подобное же действие и на другие планеты; ибо было бы неестественно думать, что материя, деятельность которой, как мы видим, развертывается так многообразно, бесплодна на такой большой планете, как Юпитер, который, как и земной шар, имеет свои дни, свои ночи и свои года и на котором, по наблюдениям, происходят изменения, предполагающие весьма деятельные силы. Однако было бы чрезмерным расширением аналогии выводить отсюда заключение о сходстве жителей планет и земли. Человек, приспособленный к той температуре, в которой он живет, и к той атмосфере, которою он дышит, не мог бы, по-видимому, жить на других планетах. Не должно ли существовать бесконечное множество организаций, соответствующих различным

условиям миров нашей вселенной? Если одно только различие в среде и климате придает такое разнообразие творениям земли, то насколько сильнее должны различаться творения различных планет и их спутников. Самое деятельное воображение не может себе составить никакого представления о них; но существование их очень правдоподобно.

Сильная аналогия побуждает нас рассматривать звезды как столько же солнц, обладающих, подобно нашему, силой притяжения пропорциональной массе и обратно пропорциональной квадрату расстояний. Ибо, ввиду того, что эта сила доказана для всех тел солнечной системы и для малейших их молекул, она кажется присущей всей материи. Движения малых звезд, названных *двойными* из-за близости друг к другу, уже указывают, по-видимому, на это: потребовалось бы самое большее одно столетие точных наблюдений, подтверждающих движений обращения одних из них вокруг других, чтобы поставить вне всякого сомнения их взаимное притяжение.

Аналогия, которая побуждает нас сделать из каждой звезды центр планетной системы, гораздо менее сильна, чем предшествующая, но она приобретает правдоподобие благодаря гипотезе, предложенной нами относительно образования звезд и солнца; ибо ввиду того, что по этой гипотезе каждая звезда, подобно солнцу, была первоначально окружена обширной атмосферой, естественно приписывать этой атмосфере те же действия, как и солнечной, и предполагать, что из нее возникли вследствие ее сгущения планеты и спутники.

Многими научными открытиями обязаны мы аналогии. Приведу, как одно из самых замечательных, открытие атмосферного электричества, к которому привела аналогия электрических явлений с эффектами грома.

Самый верный метод, который мог бы руководить нами при искании истины, состоит в переходе с помощью индукции от явлений к законам, От законов к силам. Законы суть отношения, которые связывают между собой отдельные явления; когда они раскрыли общий принцип тех сил, от которых они происходят, его поверяют либо непосредственными опытами, если это возможно, либо исследуя, согласен ли он с известными явлениями; и если посредством строгого анализа убеждаются, что все они вытекают из этого принципа до мельчайших подробностей, если, помимо этого, они очень разнообразны и многочисленны, тогда наука приобретает наивысшую степень достоверности и совершенства, доступную ей. Такой стала астрономия благодаря открытию всемирного тяготения.

История наук указывает, что этот медленный и трудный путь индукции не всегда был путем тех, которые делают открытия. Воображение, нетерпеливо стремящееся дойти до причин, любит создавать гипотезы; часто оно искажает факты, чтобы подчинить их тому, что оно создало; тогда гипотезы становятся опасными. Но когда на них смотрят только как на средство связывать между собой явления, чтобы открыть их законы, когда, избегая приписывать им реальность, исправляют их постоянно новыми наблюдениями, они могут привести к истинным причинам или, по крайней мере, дать нам возможность из наблюденных явлений вывести явления, которые должны породить данные обстоятельства.

Если испытаем все гипотезы, которые можно предложить относительно причины явлений, то путем исключения мы дойдем до истинной. Этот способ применялся с успехом: иногда приходили к нескольким гипотезам, которые одинаково хорошо объясняли все известные факты и относительно которых ученые разделялись до тех пор, пока решающие исследования не указывали истинную гипотезу. Интересным является для истории человеческого разума вернуться тогда к этим гипотезам, увидеть, каким образом с помощью их удавалось объяснять большое число фактов, и найти те изменения, которым они должны подвергнуться, чтобы быть согласными с природой. Таким образом система Птоломея, которая является только выражением кажущегося вида неба, преобразуется в гипотезу движения планет вокруг солнца, если сделать равными и параллельными солнечной орбите круги и эпициклы, которые Птоломей заставляет ежегодно описывать и величину которых он оставляет неопределенной. Чтобы преобразовать эту гипотезу в истинную систему мира, достаточно затем отнести в обратном смысле к земле видимое движение солнца.

Почти всегда оказывается невозможным подвергнуть исчислению вероятность результатов, добытых этими различными способами: подобным же образом это имеет место и для исторических фактов. Но совокупность объясненных явлений или свидетельств бывает иногда такова, что, не имея возможности оценить их вероятность, все же было бы неосновательно допустить относительно их какое-либо сомнение. В остальных случаях благоразумно признавать их лишь с большой осторожностью.

Исторический очерк исчисления вероятностей

Уже давно были определены в самых простых играх отношения статочностей, благоприятствующих и неблагоприятствующих игрокам: ставки и пари устанавливались сообразно этим отношениям. Но до Паскаля и Фермата никто еще не дал принципов и методов для подчинения этого предмета исчислению и не решал хоть сколько-нибудь сложных вопросов этого рода. Этим двум великим геометрам следует поэтому приписать первые элементы науки о вероятностях, открытие которой может быть поставлено в ряду замечательных событий, ознаменовавших собою XVII век, век, – который делает всего более чести человеческому разуму. Главная задача, которую они решили разными путями, заключается, как мы раньше видели, в том, чтобы разделить справедливо ставку между игроками, ловкость которых одинакова и которые условились прекратить партию раньше, чем она кончится; условие игры состоит в том, что для выигрыша партий надо получить первому данное число очков. Ясно, что раздел должен совершиться пропорционально относительным вероятностям игроков выиграть эту партию, – вероятностям, зависящим от числа очков, им еще недостающих. Метод Паскаля очень остроумен и в сущности есть уравнение в частных разностях этой задачи, примененное к определению последовательных вероятностей игроков, при чем переходят от меньших чисел к следующим. Этот метод ограничен случаем двух игроков: метод Фермата, основанный на сочетаниях, распространяется на любое число игроков. Паскаль сначала думал, что этот метод должен быть, как и его собственный, ограничен двумя игроками; благодаря этому завязался между ними спор, в конце которого Паскаль признал общность метода Фермата.

Гюйгенс собрал различные уже решенные задачи и прибавил к ним еще новые в маленьком трактате, первом, который появился об этом предмете и который озаглавлен: «*De Ratiociniis in ludo aleae*». После этого им занялись многие геометры: Гудс (Huddes) и великий пенсионарий Витт в Голландии и Галлей в Англии применили исчисление к вероятностям человеческой жизни, и Галлей опубликовал для этой цели первую таблицу смертности. Около того же времени Яков Бернулли предложил геометрам различные задачи о вероятностях, решения которых он затем дал. Он написал, наконец, свою прекрасную работу, озаглавленную *«Ars conjectandi»,* которая появилась лишь спустя семь лет после его смерти, произошедшей в 1706 году. Наука о вероятностях захвачена гораздо глубже в этом

труде, чем в труде Гюйгенса: автор дает здесь общую теорию сочетаний и рядов и применяет ее ко многим трудным вопросам, касающимся случайностей. Этот труд замечателен еще верностью и тонкостью взглядов, употреблением формулы бинома в вопросах такого рода и доказательством следующей теоремы: при неопределенном повторении наблюдений и опытов отношение событий различного рода приближается к отношению их соответственных возможностей в пределах, промежуток меж которыми все более и более суживается но мере их увеличения и становится меньше любой заданной величины. Теорема эта весьма пригодна для познавания, с помощью наблюдений, законов и причин явлений. Бернулли справедливо придавал большое значение ее доказательству, которое, по его словам, он обдумывал в продолжение двадцати лет.

В промежуток времени между смертью Якова Бернулли и опубликованием его труда Моиморт и Моавр выпустили два трактата об исчислении вероятностей. Труд Монморта озаглавлен *«Essai sur les jeux de hasards»* он содержит многочисленные применения этого исчисления к различным играм. Автор прибавил к нему во втором издании несколько писем, в которых Николай Бернулли дает остроумные решения многих трудных задач. Трактат Моавра, вышедший после трактата Монморта, появился сперва в *«Transactions philosophiques»* 1711 года. Затем автор напечатал его отдельно и совершенствовал его в трех последовательных изданиях, в которых он его выпустил. Эта работа, главным образом, основана на формуле бинома, и задачи, заключающиеся в ней, так же как и их решения, имеют большую общность. Но что составляет ее отличительную черту, это – теория возвратных рядов и применение их в этой области. Эта теория есть интегрирование линейных уравнений в конечных разностях с постоянными коэффициентами, – интегрирование, которого Моавр достигает очень удачным способом.

Моавр в своем труде обратился снова к теореме Якова Бернулли о вероятности результатов, определенных большим числом наблюдений. Он не довольствуется, подобно Бернулли, доказательством того, что отношение событий, которые должны произойти, непрерывно приближается к отношению их соответственных возможностей; он дает еще изящное и простое выражение вероятности, что разница между этими двумя отношениями заключается в данных пределах. Для этого он определяет отношение самого большого члена разложения очень высокой степени бинома к сумме всех его членов и гиперболический логарифм излишка этого члена над ближайшими

членами. Так как тогда самый большой член является произведением значительного числа множителей, то его числовое определение становится невыполнимым. Чтобы получить его сходящееся приближение, Моавр применяет теорему Стирлинга о среднем члене бинома, возведенном в высокую степень, – теорему особенно замечательную тем, что она вводит квадратный корень отношения окружности к радиусу в выражение, которое, по-видимому, чуждо этой трансцендентности. Моавр и был крайне поражен этим результатом, выведенным Стирлингом из выражения окружности с помощью бесконечных произведений, – выражения, которого Валлис достиг посредством особенного анализа, содержащего зародыш столь интересной и столь полезной теории определенных интегралов.

Многие ученые, среди которых надо отметить Déparcieux, Kersseboom, Wargentin, Dupré de Saint-Maur, Simpson, Sussmilch, Messène, Moheau, Price, Baily и Duvilard собрали большое число драгоценных данных о населении, рождениях, браках и смертности. Они дали формулы и таблицы относительно пожизненных пенсий, тонтин, страхований и т. д. Но в этой краткой заметке я могу только указать эти работы, полезные мне для перехода к оригинальным идеям. К их числу принадлежит различение математического и нравственного ожиданий, а также остроумный принцип, данный Даниилом Бернулли для подчинения этого последнего ожидания анализу. Таково также сделанное им удачное применение исчисления вероятностей к оспопрививанию. Особенно же следует причислить к этим оригинальным идеям непосредственное рассмотрение возможностей событий, выведенных из наблюденных событий. Яков Бернулли и Моавр предполагали эти возможности известными и искали вероятность того, что результат будущих опытов будет приближаться все более и более к тому, чтобы представить их. Бэйес (Bayes) в *«Transactions philosophiques»* 1763 года искал непосредственно вероятность того, что возможности, указанные уже произведенными опытами, заключаются в данных пределах, и он достиг своего способом тонким и очень остроумным, хотя и немного запутанным. Этот предмет примыкает к теории вероятностей причин и будущих событий, выведенной из наблюденных событий, – теории, принципы которой я изложил несколько лет спустя с примечанием о влиянии неравенства, могущих существовать между статочностями, которые предполагаются равными. Хотя мы не знаем, каковы простые события, которым благоприятствуют эти неравенства, однако это самое незнание увеличивает часто вероятность сложных событий.

Обобщение анализа и задач, касающихся вероятностей, привело меня к исчислению конечных частных разностей, которые Лагранж после этого рассмотрел с помощью очень простого метода и из которых он сделал изящные применения к задачам этого рода. Теория образующих функций (fonctions génératrices), которую я дал около того же времени, заключает в себе эти предметы среди тех, которые она обнимает, и сама собою применяется с самой большой общностью к труднейшим вопросам о вероятности. Кроме того, она определяет с помощью очень сходящихся приближений числовые значения функций, состоящих из большого числа членов и множителей, и, обнаруживая, что квадратный корень отношения окружности к радиусу наиболее часто входит в эти значения, она указывает, что в нее может входить бесконечное число других трансцендентностей.

Были подчинены исчислению также вероятности свидетельских показаний, подачи голосов и решений собраний, избирательных и совещательных, и приговоров судов. Столько страстей, различных интересов и обстоятельств усложняет вопросы, относящиеся к этим предметам, что они почти всегда неразрешимы. Но решение задач, более простых и имеющих с ними большую аналогию, часто может пролить свет на эти трудные и важные вопросы – свет, который верность исчисления все же заставляет предпочесть самым правдоподобным рассуждениям. Одно из самых интересных применений исчисления вероятностей касается средних значений, которые следует выбирать из результатов наблюдений. Многие геометры этим занимались, а Лагранж опубликовал в «*Mémories de Turin*» прекрасный метод для определения этих средних, когда закон ошибок наблюдений известен. Я дал для этой же цели основанный на особенном искусстве метод, который может быть с пользой применяем и в других вопросах анализа и который, позволяя распространять его неопределенно на весь ход какого-либо длинного исчисления функций, ограниченных по роду задачи, указывает те изменения, которые должен претерпеть каждый член конечного результата в силу этих ограничений. Раньше мы видели, что каждое наблюдение дает условное уравнение первой степени, которое всегда может быть расположено таким образом, чтобы все его члены были в первой части, при второй части равной нулю. Употребление этих уравнений является одной из главных причин большой точности наших астрономических таблиц, потому что этим способом можно было привлечь большое число прекрасных наблюдений к содействию в определении их элементов. В том случае, когда требуется определить только один элемент, Côtes рекомендовал

составить условные уравнения, так чтобы коэффициент неизвестного элемента был в каждом из них положительным, и затем сложить все эти уравнения, чтобы составить конечное уравнение, откуда извлекается числовое значение этого элемента. Правилу Côtes'a следовали все вычислители; но когда нужно было определять несколько элементов, то не было никакого определенного правила для сочетания условных уравнений с целью получения необходимых конечных уравнений; выбирали только для каждого элемента наблюдения, самые подходящие для его определения. Чтобы избежать гадательности в этих способах, Лежандр и Гаусс и придумали сложить квадраты первых частей условных уравнений и сделать их сумму *minimum'*ом при изменениях каждого неизвестного элемента; этим способом получается непосредственно столько же конечных уравнений, сколько имеется элементов. Но заслуживают ли числовые значения, определенные этими уравнениями, Предпочтения перед всеми теми значениями, которые можно получить другими способами? Это могло показать только исчисление вероятностей. Я применил его к этому важному предмету и нашел, с помощью тонкого анализа, правило, которое заключает в себе предыдущее и присоединяет к преимуществу, что оно дает посредством определенного процесса искомые элементы, то преимущество, что заставляет их выступать с наибольшей очевидностью из совокупности наблюдений, и определяет числовые значения, при которых можно опасаться только самых малых ошибок.

Но все же наше знакомство с полученными результатами еще несовершенно, пока закон ошибок, которые в них возможны, неизвестен; необходимо быть в состоянии указать вероятность, что эти ошибки заключаются в данных пределах, что сводится к определению того, что я назвал *весом* результата. Анализ приводит к общим и простым формулам, сюда относящимся; я применил этот анализ к результатам геодезических наблюдений. Общая задача заключается в том, чтобы определить вероятности того, что числовые значения одной или нескольких линейных функций ошибок очень большого числа наблюдений заключаются в каких-либо пределах.

Закон возможности ошибок наблюдений вводит в выражение этих вероятностей постоянную величину, числовое значение которой как будто требует знания этого закона, почти всегда неизвестного. Эта постоянная величина может быть к счастью определена с помощью самых наблюдений. При изысканиях астрономических элементов она дана суммой квадратов разностей между каждым наблюдением и

исчислением. Ввиду того, что равно вероятные ошибки пропорциональны квадратному корню этой суммы, можно посредством сравнения этих квадратов оценить относительную точность различных таблиц одного и того же светила. В геодезических операциях эти квадраты заменяются квадратами ошибок наблюденных сумм трех углов каждого треугольника. Сравнение квадратов этих ошибок дает возможность судить об относительной точности инструментов, которыми были измерены углы. Из этого сравнения видно, какое преимущество имеет повторительный круг перед инструментами, которые он заменил в геодезии.

В наблюдениях часто существует много источников ошибок: так, при определении положений светил с помощью меридианной трубы и круга, обоих подверженных ошибкам, закон вероятности которых не должен предполагаться одним и тем же, элементы, выведенные из этих положений, затронуты этими ошибками. Условные уравнения, которые мы составляем, чтобы получить эти элементы, содержат ошибки каждого инструмента и имеют при них различные коэффициенты. Самой выгодной системой множителей, на которые следует соответственно умножить эти уравнения, чтобы получить, посредством соединения произведений, столько конечных уравнений, сколько элементов требуется определить, не является тогда больше система коэффициентов элементов в каждом условном уравнении. Примененный мной анализ легко приводит, каково бы ни было число источников ошибок, к системе множителей, дающей самые выгодные результаты, или же такие, в которых одна и та же ошибка менее вероятна, чем при какой бы то ни было другой системе. Тот же анализ определяет закон вероятности ошибок этих результатов. Эти формулы содержат столько же неизвестных постоянных, сколько имеется источников ошибок, и зависят от законов вероятности этих ошибок. Мы видели, что в случае единственного источника можно определить эту постоянную, составив сумму квадратов и остатков каждого условного уравнения, после того как подставили в них найденные для элементов числовые значения. Подобный процесс дает вообще числовые значения этих постоянных, каково бы ни было их число, что дополняет применение исчисления вероятностей к результатам наблюдений.

Здесь я должен сделать одно важное замечание. Маленькое сомнение, которому оставляют место наблюдения, когда они не очень многочисленны, относительно числовых значений постоянных, только что мной упоминавшихся, делает немного сомнительными вероятности, определенные с помощью анализа. Однако почти всегда

достаточно знать, очень ли близка к единице вероятность, что ошибки полученных результатов заключены в тесных пределах, и если этого нет, достаточно знать, до каких пор следует увеличивать число наблюдений, чтобы получить такую вероятность, которая не оставляла бы места никакому разумному сомнению относительно достоинства результата. Аналитические формулы вероятностей прекрасно достигают этой цели, и в этом отношении они могут быть рассматриваемы как необходимое дополнение наук, основанных на совокупности наблюдений, доступных ошибкам. Они являются даже неизбежными для решения большого числа вопросов в науках естественных и нравственных. Точные причины явлений большей частью или неизвестны, или слишком сложны, чтобы можно было подвергнуть их исчислению; кроме того, их действие часто нарушается случайными и непостоянными причинами; но следы его всегда остаются на событиях, произведенных всеми этими причинами, и оно вносит в них изменения, которые могут быть определены длинным рядом наблюдений. Анализ вероятностей раскрывает эти изменения и определяет степень их правдоподобия. Так, среди непостоянных причин, которые возмущают атмосферу, периодические изменения солнечной теплоты при переходе от дня к ночи и от зимы к лету, производят в давлении этой большой жидкой массы и в соответствующей высоте барометра суточные и годовые колебания, которые обнаруживаются из многочисленных барометрических наблюдений с вероятностью, по меньшей мере равной вероятности фактов, рассматриваемых нами за достоверные. Точно так же и ряд исторических событий обнаруживает постоянное действие великих принципов нравственности среди различных страстей и интересов, которые двигают во всех смыслах обществами. Замечательно, что наука, начавшая с изучения игр, возвысилась до важнейших предметов человеческого знания.

Я собрал все эти методы в моей Аналитической теории вероятностей, где я поставил себе целью изложить в самом общем виде принципы и анализ исчисления вероятностей, так же как и решения самых интересных и самых трудных задач, которые представляет это исчисление.

Из этого труда видно, что теория вероятностей есть в сущности не что иное, как здравый смысл, сведенный к исчислению: она заставляет оценивать с точностью то, что справедливые умы чувствуют как бы инстинктом, часто не умея отдать себе в этом отчета. Если принять во внимание аналитические методы, которые возникли из этой теории,

истинность принципов, служащих ей основанием, утонченную и изящную логику, которой требует применение их к решению задач, учреждения общественной пользы, опирающиеся на нее, и распространение, которое она получила и может еще получить при применении ее к важнейшим вопросам натуральной философии и нравственных наук; если затем заметить, что даже в таких областях, которые не могут быть подчинены исчислению, она дает самые верные взгляды, которые могут нами руководить в наших суждениях, и что она нас учит предохранять себя от иллюзий, которые нас часто сбивают с пути, – мы увидим, что нет науки, более достойной наших размышлений; и что было бы очень полезно ввести ее в систему народного просвещения.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие к переводу……240
Опыт философии теории вероятностей…….....242
О вероятности ……..…..... 242
Общие принципы исчисления вероятностей……..... 247
Об ожидании…….. 253
Об аналитических методах вероятностей…….. 256
Применение исчисления вероятностей. Об играх…….. 267
О неизвестных неравенствах, которые могут существовать между шансами, предполагаемыми равными ……. 269
О законах вероятности, вытекающих из неопределенного увеличения числа событий…… 271
Приложение теории вероятностей к натуральной философии …… 278
Применение исчисления вероятностей к нравственным наукам ….. 297
О вероятности свидетельских показаний……..….. 298
О выборах и о решениях собраний……... …...… 308
О вероятности судебных приговоров ……. 312
Таблицы смертности и средней продолжительности жизни, браков и каких-либо ассоциаций……..……..... 317
О выгодах предоставляемых учреждениями, основанными на вероятности событий ……..... 322
Об иллюзиях в оценке вероятностей …….…… 327
Различные способы приближения к достоверности ……..…. 350
Исторический очерк исчисления вероятностей……. 356

ОСНОВАНИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

СОЧИНЕНИЕ

В. Я. БУНЯКОВСКОГО,

ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК ОРДИНАРНОГО АКАДЕМИКА,
ПРОФЕССОРА С ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА И
ДОКТОРА МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК ПАРИЖСКОЙ АКАДЕМИИ.

САНКТ ПЕТЕРБУРГ
В Типографии Императорской Академии Наук
1846.

Так выглядит титульный лист второго фрагмента Хрестоматии.

О задачах, стоявших перед автором этого первого русского учебника по теории вероятностей, сказано в помещенном ниже предисловии «От сочинителя». Кроме того, современный читатель без сомнения с интересом прочтет «Заключение» и «Краткий исторический очерк постепенного развития математической теории вероятностей». Все три отрывка воспроизведены с сохранением орфографии того времени. О разнообразии материала, вошедшего в учебник, можно судить по помещенному в заключение «Содержанию», являющемуся сокращением авторского «Подробного содержания книги», занимающего в оригинале 13 страниц.

ОТ СОЧИНИТЕЛЯ

Аналитическая Теория Вероятностей, входящая в область Прикладной Математики, существенно отличается от других приложений чистого анализа. В Геометрии и в предметах Естественной Философии, как например в явлениях всеобщего тяготения, в теории света, тепла, звука, электричества и проч., все исследования основаны частью па наших понятиях о разных величинах действительно существующих, или только воображаемых нами, частью же на законах, выведенных из опытов, или, за недостатком таких опытных начал, на гипотезах, более или менее правдоподобных. Напротив того, Анализ Вероятностей подвергает рассмотрению и численной оценке явления, зависящие от причин не только совершенно неизвестных нам, но которые даже, по нашему неведению, не подлежат никаким предположениям. Тонкие, глубокомысленные умозаключения, приводящие к этой цели, составляют и совокупности надежнейший путь если не для открытия безусловной истины, то, по крайней мере, для возможного приближения к ней. И когда примем в соображение, что при таком важном назначении, математическое учение о вероятностях обнимает в приложениях своих предметы физического и нравственного мира, то утвердительно можем сказать, что эта теория есть создание ума, наиболее возвышающее человека, и как бы указывающее на предел ведений, за который ему не дано перейти.

Предлагаемая ныне книга есть первое сочинение па Русском языке, заключающеев себе подробное изложение как математических начал теории вероятностей, так и важнейших ее приложений к жизни общественной, к Естественной Философии, а равно к Наукам Политическим и Нравственным. Последняя, XII глава, посвящена историческим подробностям об постепенном развитии Анализа Вероятностей.

В конце книги помещено *десять Примечаний,* содержания чисто математического; они избавят некоторых читателей от труда приискивать в других трактатах или мемуарах объяснения разных теорий, часто встречающихся в Исчислении Вероятностей. За Примечаниями следует *Объяснение* двух полезных таблиц, прилагаемых к моему сочинению, и, наконец, *Прибавление,* содержащее в себе решение одного любопытного вопроса. Впрочем, отсылаю к самому Оглавлению, где можно видеть подробное указание на предметы, которые вошли в состав книги.

Скажу несколько слов о самом исполнении моего труда. Бессмертное творение Лапласа: Theorie analytique des Probabilities постоянно служило мне образцом как изящностию употребленного в нем анализа, так и глубокомыслием суждений. Но, вместе с тем, предлагая многие теории, им созданные, я всегда старался упростить по возможности изложение и доказательства их, а равно и самый анализ. Смело надеюсь, математики отдадут мне справедливость в том отношении, что я значительно облегчил изучение книги Лапласа, которая, по сжатости своей и по свойственным предмету особенным затруднениям, доступна весьма немногим. Ученые исследования других знаменитых геометров, преимущественно *Эйлера, Лагранжа* и *Поассана* также были мне полезны. У последнего я заимствовал изложение математической теории Судопроизводства. Относительно других моих трудов, ограничусь ссылкою на некоторые критические замечания, помешенные в моей книге, а также на изменения при выводе многих формул и на перемены, которым я признал полезным подвергнуть в разных случаях общеупотребляемые аналитические приемы. Преимущественно обращу внимание на Главы VII и X. Читатель сам заметит эти изменения при внимательном чтении многих статей в моей книге, и при сличении их с изложением в других, известных сочинениях. Более обширные исследования, собственно мне принадлежащие, сопровождаются указаниями в самом тексте. Сделаю еще одно замечание. Так как до сих пор у нас не было никакого отдельного сочинения, ни даже перевода об Математической Теории Вероятностей, то мне предстоял труд писать на Русском языке о предмете, для которого мы не имели установленных употреблением оборотов и выражений. Не смею надеяться, чтобы я создал для Анализа Вероятностей язык, совершенно удовлетворительный по своей простоте и определительности; но, во всяком случае, мне приятна та уверенность, что я приложил все старания по возможности приблизиться к этой цели.

Окончу изъявлением желания, чтобы предлагаемое сочинение послужило к распространению между моими соотечественниками здравых понятий и полезных практических истин. И если даже некоторые из моих читателей не будут иметь достаточного математического образования для того чтобы следить за аналитическим изложением всех теорий, составляющих предмет Учения о Вероятностях, то и для них внимательное чтение моей книги не останется бесполезным. В ней почерпнут они разнообразные, общеприменительыые результаты, которые покажут им, в настоящем их свете, многие занимательные вопросы и истины, касающиеся нашей общественной жизни.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. В КАКОМ СМЫСЛЕ ДОЛЖНО ПОНИМАТЬ СЛЕДСТВИЯ, ДОСТАВЛЯЕМЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИЕЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Изложив последовательно в этом сочинении математические начала Анализа Вероятностей и главные его приложения к вопросам из жизни общественной, Естественной Философии и Наук Нравственных, мы можем теперь, в кратких чертах, отдать себе отчет о том, чего можно ожидать и требовать от этой теории, которая, по справедливости, может стать наряду с важнейшими отраслями наших знаний. Кроме весьма немногих непреложных истин, сделавшихся достоянием человека, все в природе и в мире нравственном основано на догадках, более или менее правдоподобных; поэтому, учение о вероятностях, собственно говоря, обнимает почти весь круг умственной деятельности. Нет сомнения, что такое обширное назначение этой науки значительно ограничивается с одной стороны недостатком и неудовлетворительностью данных, извлекаемых из наблюдений над физическими и нравственными явлениями, а с другой, хотя и в меньшей степени, несовершенством математического анализа. Тем не менее, сделанное доселе в Теории Вероятностей ставит ее на степень важнейшего умственного орудия для открытия истины и для предохранения ума от заблуждений, в которые он нередко впадает при поверхностном взгляде на предметы. Там, где человек, одаренный умом проницательным, может только предвидеть приближенные результаты, теория часто приводит к точным выводам, выраженным числами. Такая определительность в оценке меры доверия к

какой-либо предполагаемой истине, недоступная для обыкновенной Логики, без сомнения заслуживает полного внимания мыслителей. Но не должно однако же принимать эти численные результаты в безусловном смысле как некоторые эмпирики, не постигшие настоящего духа Анализа Вероятностей. Так, например, из того, что вероятность какого-либо события очень близка к достоверности или к единице, отнюдь не следует заключить, что это событие непременно случится, или, в противном случае, что теория ведет к заключениям ошибочным. Подобный результат должно понимать в другом смысле, который вполне оправдывается известным общим предложением Якова Бернулли. Большая степень вероятности события показывает только, что если бы мы могли повторить очень много раз испытания, при одних и тех же обстоятельствах, то число появлений события было бы несравненно значительнее числа непоявлении, причем отношение первого числа к сумме их обоих неопределенно приближалось бы к найденному значению вероятности. Что же касается до отдельного испытания, то Анализ Вероятностей, по неопределительности условий, не может доставить никаких положительных заключений, как то было уже объяснено и самом начале этой книги.

Вообще, при объяснении различных результатов Анализа Вероятностей, должно непрестанно иметь в виду закон, выражаемый теоремой Якова Бернулли. Правильность в числе повторений событий, зависящих по нашему неведению от случайностей, соблюдается только при весьма значительном ряде испытаний. Поэтому, всякое решение, относящееся к отдельному приему, должно принимать только за *средний вывод,* который, во многих случаях, может значительно удалиться от решения, обнаружившегося *a posteriori* исполнившимися событиями. Но если бы была возможность повторить неопределенное число раз то же самое испытание, и при одних и тех же условиях, то найденный средний результат тем ближе выразил бы искомые отношения между появлениями различных событий, чем число самых испытаний было бы значительнее.

В заключение предлагаем читателям краткий исторический очерк постепенного развития Математической Теории Вероятностей.

КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК ПОСТЕПЕННОГО РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

118. Время, к которому относятся первоначальные понятия о вероятности, рассматриваемой с умозрительной стороны, также неопределенно как и начало большей части отраслей наших знаний. Задолго до первых попыток в математической теории этой науки, прибегали, при различных обстоятельствах, как то в играх, закладах и проч., к сравнению числа благоприятствующих и неблагоприятствующих случаев, и с большей или меньшей удачею, выводили следствия из такого сравнения. Подобные соображения, а равно и некоторые правила, встречаемые в творениях прежних философов, конечно принадлежат к учению о случайностях, и есть даже положительные свидетельства, что некоторые примечательные приложения науки о вероятностях не были чужды эпохам, весьма отдаленным от нас. Так например, по замечанию Г. *Либри*[*], в Дигесте[**] приведен закон, имеющий предметом вопрос об продовольствии, и который ясно доказывает, что уже Римляне занимались определением средней жизни в различные возрасты. Далее Г. Либри говорит о Морских Страховых Обществах, существовавших уже в средние века в Италианских Республиках; это самое заставляет предполагать, что в то время умели определять приблизительно вероятность кораблекрушения. Известно также, что позже, в начале XVII столетия, знаменитый *Галилей* занимался весьма важным вопросом из теории вероятностей, именно, определением погрешностей и разысканием их влияния на результаты наблюдений. Конечно, его исследования по предмету столь трудному не могли иметь желаемого успеха. К первой половине XVII же столетия принадлежит, кажется. первая мысль об оборотах, основанных на вероятностях жизни человеческой. Неаполитанец *Лаврентий Танти* предложил особое учреждение в этом роде, которое удержало его имя, называясь до сих пор *тонтиною* (№ 73).

Хотя все упомянутые сейчас попытки и относились, бесспорно, к Анализу Вероятностей, но, по отрывочности и несовершенству

---

[*] Revue des deux mondes, livraison du 15 Mai 1845; статья: Fermat, par M. Libri.

[**] *Дигест* (или *Пандекты*) есть, как известно, свод решений знаменитейших Римских Законоведцев, составленный, в виде Уложения, по повелению Императора Юстиниана. Издание Дигеста относять к 528 году по Р. Х.

своему, далеко не могли удовлетворить требованиям науки. Основания математической теории случайностей положены *Паскалем* и *Ферматам в* половине семнадцатого Столетия. Первый решенный ими вопрос был предложен Паскалю Кавалером *Мере,* и относился к безобидному разделу ставки до окончания игры. Для подробностей по этому предмету отсылаем к № 32 и 38 нашей книги. Итак, по всей справедливости, можно сказать, что этим двум знаменитым мужам, Исчисление Вероятностей обязано первыми своими математическими началами и своею самостоятелыюстию.

Вскоре после упоминаемых попыток Паскаля и Фермата, современник их *Гугенс* занялся этим же предметом; он собрал вопросы уже решенные до него, и, дополнив их собственными исследованиями, написал трактат об умозрении в играх, подверженных случайностям. Это сочинение, первое из появившихся по Теории Вероятностей, издано *Шотеном* в 1657 г., в его книге: *Exercitationum mathematicarum n*од заглавием: *De ratiocinus in Aleae Ludo.* Трактат Гугенса помещен также в первой части книги: *Ars conjectandi,* о которой будем говорить ниже, и обогащен там комментариями Якова Бернулли.

Кроме Гугенса, во второй половине XVII века занимался теорией вероятностей *Совер* (Sauveur), который в *Journal des Savans,* за 1679 г., поместил свои исследования об определении статочностей игры, в роде банка или фарао, известной под названием *bassète. Монтюкла,* в своей *Histoire des Mathématiques* (1802, том III, стр. 391), упоминает также об одном трактате под заглавием: *Of the Laws of chance,* имевшим предметом азартные игры, и который был напечатан в Лондоне в 1692 г., без имени сочинителя. Монтюкла полагает, что это труд *Вениамина Момма* (Benjamin Motte). К концу XVII же столетия относятся труды *Ван Гуддепа* (Van Hudden), *Вимма* (Witt), пенсионария Голландии и *Галлея* по предмету вероятностей жизни человеческой. В 1693 г. Галлей издал таблицу смертности, первую из известных нам по сноси данности [№ 60]. Его исследования напечатаны в *Philosophical Transactions,* за 1693 г., n° 196.

Не останавливаясь на других, менее примечательных приобретениях Исчисления Вероятностей, относящихся к упоминаемой эпохе, переходим к трудам знаменитого *Якова Бернулли.* Уже в 1685 г., в *Journal des Savans,* он предложил математикам довольно трудный вопрос об игре в кости. Не получив ответа, Бернулли напечатал в Лейбцигских Актах за 1690 г. свое решение, но без доказательства. Это самое подстрекнуло *Лейбница* заняться предложенной задачей; он решил ее немедленно, и напечатал подробное изложение своего способа

в тех же Лейбцигских Актах. Но главную заслугу, оказанную Яковом Бернулли математической теории вероятностей, составляет, без сомнения, примечательное его сочинение: *Ars conjectandi*, которое он обдумывал в продолжении многих лет. Оно издано в Базеле в 1713 г., семь лет после смерти сочинителя, племянником его *Николаем Бернулли.* Это сочинение, отличающееся верностию взглядов и остроумными аналитическими приемами, разделено на четыре части. Первую, как уже упомянуто пред сим, составляют пояснительные примечания к Трактату Гугенса. Вторая часть заключает в себе пространную теорию разного рода соединений. Третья – решение многих задач, относящихся к различным играм. Наконец, четвертая содержит в себе употребление и приложение правил, изложенных в предыдущих частях, к вопросам из общежития и к наукам нравственным и политическим. Этот четвертый отдел заслуживает особенного внимания тем, что в решаемых в нем вопросах употреблен Ньютонов бином, имеющий столь важное значение в Исчислении Вероятностей. Самая же примечательная статья этой четвертой части, есть, без сомнения, доказательство известной теоремы, удержавшей имя Якова Бернулли, о которой мы столько раз имели случай говорить. Подробности о ней приведены у нас в № 20, 22, 24, 25, 26, ..., 117. Вслед за четвертой частью помещен *трактат об бесконечных рядах,* а в самом конце сочинения, любопытные исследования под заглавием: *Lettre à un amy sur les Parties du Jeu de Paume,* неизвестного автора.

Николай Бернулли, издатель *Ars conjectandi,* сам занимался с некоторым успехом Теорией Вероятностей. В 1709 г., в Базеле, он защищал Диссертацию на степень Доктора Прав, и выбрал предметом своих исследований опыт приложения Исчисления Вероятностей к Судопроизводству. Диссертация Николая Бернулли издана в 1709 г. под заглавием: *De Arte conjectandi in Jure;* между любопытными вопросами, решенными в ней, можно преимущественно указать на тот, который составляет предмет третьей части, именно: по истечении скольких лет, *отсутствующего,* по законам, должно считать умершим?

119. Восемнадцатое столетие, ознаменованное столь блестящими успехами Чистого Математического Анализа, принесло и Теории Вероятностей значительные усовершенствования. В самом его начале, *Монморт* во Франции, а *Моавр,* Французский же уроженец, в Англии, занимались с особенною ревностию Исчислением Вероятностей. Первый издал свое сочинение об этом предмете под заглавием: *Essai d'analyse sur les jeux de hasard;* в нем он предлагает решение множества любопытных вопросов, относящихся к разного рода играм в

карты, в кости и проч. Во втором издании упоминаемой книги (1713 г.), во многих отношениях исправленном и дополненном, находится любопытная переписка Монморта с Николаем Бернулли, племянником Якова и Ивана Бернулли. В этой переписке особенного внимания заслуживают остроумные решения многих вопросов Николаем Бернулли, и изложение задачи, известной под наименованием *Петербургской,* предложенной сим последним Монморту в письме от 9 сентября 1713 г. Подробности об этом предмете помещены у нас в № 45. Из числа трудных вопросов, решением которых занимался Монморт, можно также указать на задачу о разделе ставки между игроками, когда срок окончания игры, по самому ее свойству, остается неопределенным. Этим предметом занимался и Моавр; но решения их не имели надлежащей полноты [№№ 33 и 40].

Первые свои труды по теории вероятностей *Моавр* представил Лондонскому Королевскому Обществу; они помещены в *Philosophical Transactions* за 1711 г. под заглавием: *De mensurâ sortis.* За сим Моавр напечатал свои исследования отдельной книгой *The doctrine of chances,* имевшей три издания в 1716, 1738 и 1756 гг., которые постепенно совершенствовались. Это сочинение, в отношении к аналитическим способам, имеет весьма важные преимущества пред всеми предшествовавшими ему. Вообще, вопросы решены в нем с большою общности ю при пособии Ньютонова бинома. К теореме Якова Бернулли прибавлены весьма важные развития, и именно определение вероятности, что разность между отношением действительного числа повторений событии, и отношением их простых вероятностей, заключается между данными пределами. Для этого Моавр употребил первый теорему *Стирлинга* (№21). Но в особенности книга его примечательна изложением придуманной им теории *возвратных рядов,* которую он применил весьма удачно к решению различных вопросов о вероятностях. Эта теория, собственно говоря, заключает в себе способ интегрирования уравнений в конечных разностях, с постоянными коэффициентами, столь плодовитый по своим приложениям к анализу случайностей.

Около этой самой эпохи занимались Теорией Вероятностей, с большим или меньшим успехом, многие другие математики, между прочим *Мэран* [№ 37], *Николь,* поместивший в *Histoire de l'Academic Royale des Sciences,* за 1730 г., решения разных вопросов, относящихся к определению судьбы игроков, при неравном их искусстве, и при данном избытке, выигранных некоторыми из них партий.

Во второй половине XVIII столетия многие ученые с большим тщанием собирали разные данные, относящиеся к народонаселению вообще, к смертности, к числу рождений, браков и проч. Эти численные показания, после надлежащего критического разбора, послужили для составления многих, чрезвычайно полезных таблиц, и для решения многоразличных практических вопросов о вероятностях жизни человеческой, о пожизненных доходах, сберегательных кассах, тонтинах, всякого рода застрахованиях и тому подобных оборотов. Исторические подробности об этом предмете читатели найдут в третьем томе *Histoire des Mathématiques, par Montucla;* ограничимся здесь краткими указаниями на главные труды ученых.

Около самой средины XVIII столетия примечательны труды по этому же предмету *Фомы Симпсона* в Англии, *Керсебоома* и *Стрика* (Struyk) в Голландии и *Депарсье* во Франции. Последний издал в 1746 г. сочинение под заглавием: *Essai sur la probabilité de la dur la vie humaine.* В записках Стокгольмской Академии, за 1754 г., помещены также любопытные исследования о таблицах смертности Шведского астронома *Варгентина.* Тем же предметом занимался в Германии математик *Ламберт* [№ 60], *Эйлер* и некоторые другие.

В последних годах минувшего столетия, *Депарсье,* племянник того, о котором сейчас говорено, издал сочинение под заглавием: *Traité des annuités, accompagné de plusieurs tables,* 1781 г. Вскоре после того, *Дювильяр* [№ 601 напечатал весьма примечательную книгу об финансовых оборотах разного рода: *Recherches sur les rentes, les emprunts, les remboursements, etc.,* 1787 г. Около того же времени, именно в 1783 году, *Прис,* в Англии, издал свои труды, заслужившие общее внимание, об разных предметах Политической Арифметики.

Изложим теперь, в самых кратких чертах, важнейшие приращения, полученные Исчислением Вероятностей в течении XVIII столетия.

Даниил Бернулли, сын Ивана Бернулли, обогативший своими открытиями Высшую Геометрию и Механику, первый предложил различие между ожиданием математическим и нравственным, и ввел меру второго, доныне употребляемую (ГЛАВА IV). Почти в одно время с ним, знаменитый Французский Естествоиспытатель *Бюффон,* в своем *Essai d'Arithmétique morale,* изложил собственные мысли об этом самом предмете [№ 42]. Читатели найдут в упоминаемой книге* письмо Даниила Бернулли к Бюффону, от 19 марта 1762 г.; оно

* Ouevres complètes de Buffon, Paris, 1827, том XIII, стр. 14.

свидетельствует, что Бернулли находил совершенно основательным взгляд Бюффона на нравственную вероятность, хотя и не вполне соглашался с ним в определении ее меры. В той же книге помещены математические решения нескольких задач из Анализа Вероятностей, и приложение этой теории к вопросам о жизни человеческой, о рождениях, браках, таблицах смертности и проч. Возвратимся к трудам Даниила Бернулли. Ему же Анализ Вероятностей обязан оригинального мыслию, столь плодовитою по своим применениям, об рассматривании вероятностей событий *a posteriori,* то есть на основании наблюденных явлений (ГЛАВА VII). Формулы по этому предмету предложены впоследствии *Бэйесом* (Bayes) и *Присом* (Price) в Philosophical Transactions за 1764 и 1765 гг., а после того *Лапласом,* который придал им надлежащую всеобщность. Даниил Бернулли приложил также Исчисление Вероятностей к вопросу о предохранительном оспопрививании* [№ 64], что подало повод к прению, довольно жаркому, между ним и *Д'Аламбертом;* возражения последнего напечатаны в его *Opuscules mathématiques* (Томы II и IV), а равно в его же *Mélanges de philosophic* (Том V). Другие труды Д'Аламберта по Теории Вероятностей находятся в отдельных его сочинениях, и, отчасти, в *Encyclopédie méthodique (Mathématiques).* В этом же превосходном творении помещены отдельные статьи *Кондорсета,* относящиеся к Анализу Вероятностей; главную из них по объему и содержанию своему читатели найдут под словом: *Probabilité.* Другие исследования Кондорсета по этой науке напечатаны в Записках Парижской Академии за 1781, 1782 и 1783 гг. Самый же примечательный труд его есть пространный Трактат об решениях по большинству голосов. Сочинение, о котором говорим, издано в 1785 г. под заглавием: *Essai sur l'application de l'Analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix.* В Главе XI нашей книги мы имели случай ссылаться на некоторые места этого труда Кондорсета.

Эйлер, обогативший почти все отрасли чистой и прикладной Математики, занимался также исследованиями по разным частям Теории Вероятностей. Его мемуары по этому предмету довольно многочисленны. На некоторые труды его мы указали в № 36, 65, 72. Кроме напечатанных его исследований, есть еще и неизданные рукописи, именно: *Vera Estimatio sortis in Lulis* и *Reflexions sur une espèce singulière de loterie, nommée Loterie Génoise.* Любопытна также,

* Mémories de l'Academie des Sciences, 1760 г.

нигде еще ненапечатанная, переписка его с Прусским Королем Фридрихом II по предмету особого рода лотерей*. Но главная его заслуга состояла в усовершенствовании Интегрального Исчисления, в высшей степени способствовавшего быстрым успехам Анализа Вероятностей.

Лагранж предложил простой и удобный способ для интегрирования уравнений в частных конечных разностях, и показал применение ею к решению трудных и вместе любопытных вопросов Исчисления Вероятностей. Об этом важном предмете говорено у нас с подробности) в ГЛАВЕ III и в ПРИМЕЧАНИИ VII. В № 78 и 79 мы упомянули также о другом труде Лагранжа, относящемся к определению наивыгоднейших результатов наблюдений.

Укажем также на один труд *Лакроа,* относящийся к Теории Вероятностей. В 1781 г. Парижская Академия Наук предложила задачу об *застраховапиях от морских опасностей,* Не получая удовлетворительных решений, она возобновляла два раза конкурс, и уже в третий раз получила восемь ответных сочинений, из которых два, одно Лакроа, а другое *Бикилея* (Bicquilley), признаны, вместе, достойными половинной награды. Из 6000 франков, составлявших полную премию, половина суммы была разделена между двумя авторами: Лакроа получил 1800, а Бикилей 1200 франков. Кроме этого, Лакроа издал весьма удовлетворительное сочинение: *Traité élémentaire du Calcul des Probabilités,* имевшее уже во Франции три издания. Бикилей издал также книгу о той же науке под заглавием: *Du Calcul des Probabilités,* 1783 г.

Мы не будем останавливаться на трудах *Лежандра* и *Гаусса,* имеющих предметом определение наивероятнейших результатов наблюдений. Об этом говорено у нас в ГЛАВЕ X [№ 92]. В той же ГЛАВЕ приведены и другие исторические подробности о наивыгоднейшем совокуплении условных уравнений, и, между прочим, о способе Английского математика *Котсса* (в конце № 85).

Но никому аналитическая Теория Вероятностей не обязана столько, как *Лапласу.* В нашей книге мы так часто имели случай говорить об его трудах, что считаем достаточным предложить здесь, в самых кратких чертах, главные заслуги этого великого геометра.

---

* Сообщением этих рукописей я одолжен крайне обязательности П. Н. Фусса, Непременного Секретаря Императорской Академии Наук. У него же хранятся другие мемуары Эйлера по разным математическим предметам. Можно найдеться, что со временем эти драгоценные труды будут изданы.

Сверх многих Мемуаров, напечатанных Лапласом в Академических Записках об аналитической Теории Вероятностей, он издал в первый раз в 1812 г.* гениальное творение об этом предмете, обнимающее полную его теорию и все главные его приложения. Ни в одном из других сочинений Лапласа не проявляется в такой силе глубокий ум, тонкость взглядов и могущество математического анализа как в *Théorie analytique des Probabilités*. Изящностию и общностию способов при решении труднейших вопросов из анализа случайностей, Лаплас возвел эту теорию на высокую степень совершенства. Из замечательнейших исследований его, наиболее обогативших учение о вероятностях, можно преимущественно указать на *теорию производящих функций* (*théorie des fonctions génératrices*), служащую для интегрирования уравнений в частных разностях, так часто встречающихся в вопросах этого рода. Вычисление по приближению разных интегральных формул, заключающих в себе большие числа; частные случаи подобных формул встречались и прежде, как например *Стирлингово* приближенное выражение для произведения $1\cdot 2\cdot 3\ldots n$ [№ 21], которого точная величина изображается определенным интегралом $\int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx$. Общие формулы для вероятностей *a posteriori* по сделанным уже наблюдениям (ГЛАВА VII), и вычисление вероятностей будущих событий при неравновозможных статочностях, принимаемых за равновозможные (ГЛАВА V). Различные приложения Исчисления Вероятностей к явлениям, наблюдаемым в солнечной системе; так, например, определение вероятности существования первоначальной причины, побудившей все планеты и их спутников вращаться около своих осей, и двигаться по орбитам от запада к востоку, то есть в одну сторону с вращательным движением солнца, и почти в одной плоскости с его экватором. Теория наивыгоднейших результатов наблюдений (ГЛАВА X), столь важная по своим приложениям к наукам наблюдательным, обязана Лапласу нынешним своим совершенством. Он же указал и развил ее приложения к геодезическим действиям. Наконец, в отдельном его сочинении: *Essai plilosophique sur les Probabilités*, находим полный свод и

* Второе издание *Théorie analytique des Probabilités* напечатано в 1814, а третье в 1820 г.

изложение истин из теории и приложений анализа вероятностей, без пособия формул вычислений.

Вот беглый перечень важнейших трудов Лапласа в Анализе Вероястей. Из сказанного здесь можно заключить, что эта теория, получившая свое начало во Франции, в руках Паскаля и Фермата, одолжена и быстрым своим усовершенствованием также Французскому геометру.

120. К нашему столетию, кроме главных трудов Лапласа, а также Гаусса и Лежандра, о которых мы сейчас говорили, относятся различные исследования многих астрономов и математиков. *Бессель, Плана, Энке, Струве, Поассон, Лиденау, Боненбергер* и другие занимались вопросом об наивыгоднейших результатах наблюдений в тсорстическом и практическом отношении (№№ 89, 91, 92, 95). Кроме труда, на который указано в № 94, Поассон издал несколько других Мемуаров об Исчислении Вероятностей, и между прочим: *Mémoire sur la probabilité du tir à la cible*[*]. В этом любопытном труде, Поассон излагает математическую теорию вероятности цельной стрельбы, и извлекает полученных им формул правила для сравнения как меткости огне стрельных оружий, так и относительного искусства стрелков. Опыты произведенные Французскими артиллеристами, вполне оправдали теорию, и доказали практическую пользу выведенных формул. Главная же заслуга, оказанная Поассоном этой науке, состоит в изданном им отдельном Трактате об математической теории Судопроизводства и заглавием: *Recherches sur la probabilité des jugements en matiére criminelle et en matière civile,* 1837 г. Это сочинение разделено в *пять* глав; первые четыре посвящены изложению общих начал Исчисления Вероятностей и наиупотребительнейших его приложений, последняя исключительно аналитической теории Судопроизводства. этой же книге Поассон распространил теорему Якова Бсрнулли случай изменяющихся статочностей, и назвал общее предложен *законом больших чисел.* Об нем упомянуто у нас в выноске странице 35.

Кроме поименованных математиков, занимавшихся в последние годы теорией вероятностей, можно указать еще на многих писавших

[*] *Mémorial de l'Artillerie*, Paris, 1837, n° IV. Брюссельское издание этого сборника статей по артиллерийскому искусству, напечатано в 1839 году. В n° III того же издания помещена также статья Поассона, под заглавием: *Formules de probabilités relatives au résultat moyen des observations*, *qui peuvent être utiles dans l'Artillerie.*

этом предмете, в том числе: *Ампер, Фурье, Пюиссан, Ганзен, Кетле Литтров, Мозер* и другие.

Изложив в последовательных Главах математические начала, главные приложения и краткое обозрение успехов теории вероятностей, мы заключим нашу книгу словами Лапласа* относительно важности значения этой науки в ряду человеческих знаний: «Из всего сказанного видно, что Теория Вероятностей, собственно говоря, есть только переложение здравого смысла на аналитические формулы: она доставляет средства для точной оценки того что постигает ум верный, хотя часто бессознательно. Если возьмем в соображение с одной стороны все аналитические способы, которые произвела эта теория, истину начал, служащих ей основанием, тонкость и остроумие выводимых из них логических заключений при решении разнообразных задач, а с другой, общеполезные учреждения, упроченные на науке о вероятностях, настоящее ее развитие и то, которое она без сомнения получит еще впоследствии в применении своем к важнейшим вопросам Естественной Философии и к знания политическим; наконец, если примем во внимание, что даже в предметах не подлежащих исчислению, она приводит к взглядам, наиболее надежным для открытия истины, научает нас предохранять себя от заблуждений ума, то вправе будем заключить, что нет науки более ее достойной наших размышлений, и которую полезнее было бы ввести в систем знаний, составляющих предмет общественного образования».

СОДЕРЖАНИЕ

Глава I. О законах вероятности вообще [от № 1 до 16]

Общие правила для определения вероятности. Определение вероятности. Вычисление вероятности при неравновозможных статочностях.

Приложение к игре, называемой орлянкою. Погрешность Д'Аламберта.

Вероятности сложных событий: 1° когда составляющие простые события независимы между собою и 2° в случае взаимной их зависимости. Отношение между вероятностями сложного, наблюденного и будущего событий. Относительная вероятность. Правило для ее определения.

* В конце *Essai philosophique sur les Probabilités*.

Общие формулы для вычисления вероятности при повторении и при каком ни есть совокуплении событий. Определение вероятности повторения одного события, или известного совокупления двух событий при данном числе испытаний. Распространение найденных правил на случай трех и вообще какого ни есть числа событий. Формулы служащие для определения вероятности, что одно или несколько простых событий повторятся не менее данного числа раз при известном числе испытаний. Приложение предыдущих формул к численному решению некоторых вопросов. В этой статье решены, для упражнения, семь простых вопросов, из которых последний, предложенный Паскалю Кавалером Мере, примечателен тем что принадлежит к числу первоначальных исследовании в Теории Вероятностей.

Глава II. О законах вероятности при неопределенном повторении испытаний [№ от 17 до 30]

О сложных событиях, наиболее вероятных. Об наивероятнейшем сложном событии, составленном из кратного совокупления двух простых. Доказательство различных свойств разложения $(a+b)^m$, от которых это определение зависит.

Пример обнаруживающий, что абсолютные вероятности правдоподобнейших событий уменьшаются с увеличением числа испытаний. Напротив того, относительная вероятность правдоподобнейшего события к какому ни есть другому, возрастаете числом испытаний. Распространение этих следствий на общий случай.

Теорема Якова Бернулли. Объяснение примерами и изложение теоремы Якова Бернулли. Этот общий закон, в отношении к двум событиям, может быть выражен в следующем виде. При неопределенном повторении испытаний, из которых каждое приводит к одному из двух простых событий *A* или *B,* отношение между числами появлении этих событий непрестанно приближается к отношению их простых вероятностей, и, наконец, при надлежащем числе испытаний, разнствует от него как угодно мало.

Формула Стирлинга для приблизительного вычисления произведения $1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot x$. Подробное доказательство теоремы Якова Бернулли. Разбор различных следствий, представляющихся при аналитическом доказательстве Бернуллиева предложения

Приложение теоремы Якова Бернулли к численным примерам. Распространение ее на произвольное число событий. Исследование одного частного случая, в котором статочности изменяются во время испытаний. Из сосуда, заключающего *A* шаров белых и *B* черных, вынимают наудачу, в несколько приемов, каждый раз по одному шару, причем извлекаемые шары откладываются в сторону. Найти вероятности различных сложных событий, которые могут произойти при данном числе выемов. Определение правдоподобнейшего события в этом случае. Факториальный бином. Приложение найденных формул к решению некоторых численных вопросов.

Глава III. О математическом ожидании [от № 31 до 40] О математическом равенстве или безобидности всякого рода игр, и о мере математического ожидания.

Понятие о математическом равенстве игры. Математическое ожидание или математическая выгода. Аналитическое доказательство общего условия безобидности или математического равенства игры.

Изложение и объяснение примером правила безобидного дележа. Приложение условия безобидности к разделу ставки в игре, которая может длиться неопределенно.

Распространение правила математического равенства игры на произвольное число событий, появление которых доставляет известные выигрыши одному из двух игроков. Приложение предыдущих правил к решению разных вопросов, относящихся к игре в кости, к лотереям, закладам и к безобидному разделу ставки между игроками до окончания игры.

Глава IV. О нравственном ожидании [от № 41 до 46] Понятие о выгоде, называемой нравственною. Невозможност точного определения нравственной выгоды. Мера нравственного ожидания, предложенная Бюффоном. Другая ее мера, употребленная Даниилом Бсрнулли, и допускаемая доныне почти всеми математиками. Определение нравственной выгоды по формуле Бсрнулли в том случае, когда эта выгода зависит от нескольких ожидаемых событий.

Приложени к застрахованиям, и доказательство пользы Страховых Учреждений при известных условиях.

Изложение более общей гипотезы относительно меры нравственного ожидания. Основываясь на этой гипотезе, доказывают строгостию: 1° Невыгоду всяких игр и закладов, математически равных. 2° Невыгоду лотерей при совершенной их безобидности 3° Когда предстоит надобность подвергать имущество каким-либ опасностям, то выгоднее раздроблять его на части, чем в целост подвергать одной случайности. Напротив того, рассматривание одного математического ожидания, приводит к заключению о безразличии подвергать одинаковым опасностям какое-либо имущество по частям или в целости.

Задача Петербургская; исторические замечания о ней. Решение вопроса, основанное на рассматривании математического ожидания. Кажущееся противоречие, представляемое этим решением. Объяснение парадокса Кондорсетом. Решение Петербургской задачи, основанное на формуле Даниила Бернулли Другое решение, предложенное Поассоном. Некоторые мысли об употреблении ожидания нравственного вместо математического.

Глава V. О влиянии на результаты Исчисления Вероятностей неравнс возможных статочностей, принимаемых за равновозможные и исследование особого рода соединений, приводящих к рассмат риванию бесконечного числа статочностей [№ 47 и 48] Каким образом неравновозможные статочности, принимаемые за равновозможные, изменяют результаты Исчисления Вероятностей. Приложение к игре орел или решетка. Из предлагаемое решения оказывается, что при двукратном бросании монеты вскрытие одной и той же стороны, не указывая наперед которой именно, вероятнее чем вскрытие двух разных сторон. Распрост ранение этого результата на какие ни есть события. Общая формула, выражающая влияние неравновозможных статочностей. Из нее следует, что неизвестное неравенство, существующее в статочностях, предполагаемых равными, всегда увеличи вает вероятность повторения одних и тех же событий. О вероятностях, вычисляемых a priori при бесконечном числе статочностей.

Глава VI. Решение некоторых особенных вопросов из Анализа Вероятностей [от № 49 до 51]

Дано полное уравнение второй степени $x^2 + px + q = 0$ в котором коэффициенты p и q, предполагаемые целыми, могут изменяться между предметами $-m$ и $+m$; сверх того, по причине простоты случая, допускается, что ни p ни q не обращается в нуль. При таких условиях спрашивается, как велика вероятность, что уравнение, написанное наудачу, имеет корни вещественные.

Дана определенной или неопределенной величины плоскость покрытая системой соприкосновенных между собою равносторонних треугольников; на эту плоскость бросают, наудачу, весьма тонкий цилиндр, известной длины. Определить вероятность что цилиндр упадет по крайней мере на одну из сторон начерченных на плоскости треугольников.

По данному положению двух квадратов на обыкновенной шахматной доске, определить вероятность, что ладья, стоящая на одном из двух квадратов,
достигнет другого в x ходов.

Глава VII. О законах вероятности при неопределенном числе статочностей [от №52 до 59]

Общие понятия об определении вероятностей a posteriori. Численный пример. Правила для определения вероятностей одной или нескольких причин или предположений. Вероятность какого-либо предположения равняется вероятности наблюденного события, вычисленной при том же предположении, и разделенной на сумму вероятностей этого самого события, относящуюся ко всем возможным предположениям. Вероятность нескольких предположений, рассматриваемых в совокупности, равняется сумме вероятностей событий, относящейся к этой совокупности предположений, разделенной на сумму вероятностей событий при всех возможных предположениях.

Общие формулы, служащие для определения: 1° вероятности, что возможность простого явления заключается между известными пределами, когда дано наблюденное сложное событие; 2° вероятности будущего события по наблюденному. Распространение теоремы Якова Бернулли на тот случай,

когда вероятность определяется только a posteriori. Общие формулы для определения вероятности в том предположении, что наблюденное событие зависит от простых явлений двух или нескольких различных родов. Пояснение общих правил некоторыми простыми примерами.

Глава VIII. О вероятностях жизни человеческой [от № 60 до 69]
Составление таблиц смертности. Графическое изображение хода смертности. Указательница смертности. Уравнения для линии смертности, предложенные Ламбертом и Моавром. Объяснение употребления таблиц смертности при решении разных вопросов, относящихся к вероятностям жизни человеческой. Вероятная жизнь. Мера долголетия. Средняя жизнь. Формулы для определения последней. Численные результаты для различных Государств и городов. Определение числа жителей страны посредством таблицы смертности, и распределение народонаселения по возрастам.

Влияние различия полов на смертность. Постоянный перевес рождений младенцев мужского пола пред женским; численные результаты для некоторых Государств.

Некоторые замечания о приращении народонаселения.

Определение продолжительности средней жизни в том предположении, что какая-либо причина смертности уничтожена, или, по крайней мере, ослаблена. Прививание оспы увеличивает среднюю жизнь слишком тремя годами. Формула Лапласа, служащая для вычисления меры уменьшения числа умирающих при уничтожении какой-либо причины смертности. Замечания, относящиеся к движению народонаселения. Мера умножения или плодовитости. Мера смертности. Коэффициент приращения. Формулы для решения различных вопросов о движении народонаселения.

Решение некоторых вопросов о движении народонаселения, основанное на показаниях таблиц смертности.

Определение вероятной и средней продолжительности браков, или вообще каких ни есть товариществ или обществ. Вероятность существования общества по истечении данного числа лет. При значительном числе товариществ одного и того же рода, определить вероятнейшее число тех из этих товариществ, которые останутся нерасторгнутыми по прошествии данного числа лет.

Аналитическое определение вероятности, что возможность рождения младенцев мужского пола превышает возможность женских рождений. Приложение общих формул к рождениям в С.-Петербурге.

Определение народонаселения обширного Государства по числу годовых рождений и частного народосчисления на разных его пунктах. Вычисление вероятности, что погрешность этого определения заключается между данными пределами. Численное приложение к народонаселению Франции.

Глава IX. О пожизненных доходах, вдовьих кассах, тонтинах, сберегательных кассах и о страховых учреждениях вообще [от № 70 до 76]

Предмет главы. Формулы для приведения к настоящему времени как вкладов, так и выдач денежных сумм при различных сроках.

Общие замечания об соблюдении возможной безобидности в условиях между Обществом и лицами, вступающими с ним в различные обязательства но каким-либо оборотам. Общие понятия об оборотах, известных под названием тонтины. Решение некоторых вопросов, относящихся к этому роду взаимных застрахований. По известной пенсии, определить первоначальный вклад тонтиннеров, и наоборот. Приблизительное определение пенсии, приходящейся каждому тонтиннеру по истечении одного года, двух, трех, ... лет. Решение этой же задачи в предположении, что Общество выдает ежегодно не полную сумму, следующую по расчету вкладов, а только некоторую ее часть, сообразуясь при том с числом умерших тонтинперов.

Понятие об сохранных или сберегательных кассах вообще. Решение следующего вопроса. N вкладчиков, одинакового возраста a, внесли единовременно каждый сумму S. Требуется узнать, на какую пожизненную пенсию s они имеют право по истечении n лет? Определение пожизненной пенсии s в том предположении, что вкладчики, кроме единовременного вклада S, вносят и последующие годы дополнительные суммы S_1, S_2, S_3. Об застрахований имуществ вообще. Страховая премия. Для математической безобидности застрахования, страховая премия должна равняться цене вещи, отдаваемой на страх, помноженной на вероятность ее утраты или порчи. На

самом же деле, величина страховой премии всегда превосходит это произведение; при умеренном избытке, и когда круг действия Страхового Общества довольно обширен, оно получит верную выгоду, а застрахователь будет обеспечен со стороны нравственного ожидания, чем доказывается обоюдная польза подобного рода Учреждении, Приложение математического анализа к решению следующего вопроса. Купец застраховывает *m* кораблей, каждый на сумму *a* платя за страх корабля некоторую премию *b*. Требуется определить обстоятельства подобного застрахования: 1° относительно Страхового Общества и 2° в отношении к лицу, отдающему корабли на страх.

Аналитическое решение первой части вопроса. Численные примеры. Аналитическое решение второй части вопроса. Примечания об Страховых Учреждениях вообще, и о преимуществе Обществ взаимного застрахования. При малейшем перевесе математической выгоды на сторону Общества, оно, при обширном круге действия, должно ожидать, почти с достоверностью, значительной для себя выгоды, возрастающей пропорционально числу страховых оборотов. Аналитическое доказательство этой истины.

Глава X. О наивыгоднейших результатах наблюдений [от № 77 до 96]

О наблюдениях вообще.

Численный пример. Средняя арифметическая погрешность. Численный пример. Объяснение противоречия относительно вероятности средней погрешности.

Условные уравнения. Во всех приложениях способа наивыгоднейших выводов допускают, что они линейные. Различные совокупления условных уравнений. Система уравнений, при которой наибольшая погрешность менее, чем для всякой другой системы; такое совокупление условных уравнений называлось способом положений (méthode des situations). Система уравнений, доставляющая наименьшую сумму погрешностей. Средний вывод наблюдений. Правило Котеса.

Определение степени точности среднего вывода наблюдений. Подробное доказательство способа наименьших квадратов. Средняя нормальная погрешность (erreur moyenne à craidre). Сравнение ее со средней погрешности), доставляемой способом Котеса. Определение постоянного количества, вводимого

в формулы неизвестным законом вероятности погрешностей. Это постоянное количество зависит от суммы квадратов погрешностей наблюдений. Определение средней нормальной погрешности в функции коэффициентов условных уравнений.

Вес результата (poids du résultat). При одной и той же вероятности, что погрешность заключается между известными пределами, эти пределы будут тем теснее, чем вес больше. Погрешности содержатся между собой в обратном отношении корней квадратных из соответствующих им весов. Условия, при которых вес увеличивается. Вероятная погрешность вывода. Правило для определения величины элемента при нескольких рядах наблюдений различного рода. Оно, как и при одном ряде наблюдений, приводит к способу наименьших квадратов. Сходство этого правила с теорией центра тяжести. Замечания о том случае, когда, при употребляемом способе наблюдений, оказывается перевес погрешностей в одну сторону, положительную или отрицательную. О постоянных погрешностях.

Исторические сведения о способе наименьших квадратов. Труды Лежаудра, Гаусса и Лапласа по этому предмету.

Формулы, выводимые из способа наименьших квадратов при двух и трех элементах, определяемых из условных уравнений. Об средней погрешности особого рода, употребляемой Немецкими астрономами.

Численный пример, относящийся к определению двух элементов из условных уравнений.

Глава XI. Приложение Анализа Вероятностей к свидетельствам, преданиям, различного рода выборам между кандидатами и мнениями, и к судейским определениям но большинству голосов [от № 97 до 117].

Общие замечания о предмете этой Главы, и о приложении математического анализа к вопросам нравственным. О вероятности свидетельств. Об событиях необыкновенных.

Решение вопроса о свидетельствах, предлагаемое Лапласом. По Лапласу, в подобных вопросах должно принимать в расчет два элемента, именно: честность свидетеля и его опытность. О вероятности преданий.

О выборах кандидатов. Общие замечания о выборах кандидатов. Баллотирование одного и двух кандидатов. При трех или большем числе баллотируемых, относительное

большинство голосов не всегда обнаруживает, кто из них должен быть предпочтен остальным.
Изложение образа баллотирования, предложенного математиком Борда, и аналитическое доказательство этого способа при трех кандидатах. Численный пример.
Другой вид баллотирования, в котором не принимается в расчет среднее достоинство кандидатов.

Распространение способа Борда на произвольное число кандидатов. Практическое неудобство этого способа. О выборе вероятнейшего предложения или причины. Правило, которым должно руководствоваться при подобных выборах. Аналитическое его доказательство. Численный пример. Приложение Анализа Вероятностей к Судопроизводству. Предварительные подробности и общие замечания о приложении Анализа Вероятностей к судейским решениям. Сходство этого предмета с вопросом о свидетельствах. Указания на труды Кондорсета, Лапласа, Остроградского и Поассона. С какой точки следует рассматривать судейские определения, и что должно разуметь под приговорами виновен и невинен. Математическая теория Судопроизводства доставляет только средние результаты весьма значительного числа решенных дел, а не относится к отдельным приговорам.
Заключение. В каком смысле должно понимать следствия, доставляемые Математической Теорией Вероятностей.

Глава XII. Краткий исторический очерк постепенного развития математической теории вероятностей [от № 118 до 120]

Примечания к математической теории вероятностей

Примечание I. Вывод Эйлеровой формулы, служащей для преобразования интеграла в конечных разностях в обыкновенный интеграл.

Примечание II. Разложение синуса в ряд, состоящий из бес конечного числа множителей. Вальисово выражение для четверти окружности. Суммование бесконечных рядов

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots,\quad 1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots,\quad 1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\ldots$ проч.

Примечание III. О сходимости бесконечных рядов.

Примечание IV. Различные исследования, относящиеся к $\int_0^t e^{-t^2}\,dt$, $\int_t^{-\infty} e^{-t^2}\,dt$ определенным интегралам и проч.

Примечание V. Доказательство факториалыюго бинома.

Примечание VI. Доказательство тождества

$$P_s^m - s\,P_{s-1}^m + \frac{s(s-1)}{1\cdot 2}\,P_{s-2}^m - \ldots + (-1)^{s-n}\,\frac{s(s-1)\ldots(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\,P_n^m = 0$$

при условии $m < \frac{s}{n}$, разумея под P_s величину

$$\frac{s(s-1)\,(s-2)\ldots(s-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}$$

Примечание VII. Изложение теории интегрирования уравнений в конечных разностях.

Примечание VIII. Вывод общего члена $p^t y_{-t,0}$ из уравнения

$$1 = p^t y_{-t,0} + tp^{t-1}q\,y_{-t+2,0} + \frac{t(t-1)}{1\cdot 2}\,p^{t-2}q^2 y_{-t+4,0} + \ldots$$

Примечание IX. Об определенных интегралах, рассматриваемых в связи их с средними арифметическими величинами.

Примечание X. Суммирование ряда $1 + 2(\cos\varphi + \cos 2\varphi + + \cos 3\varphi + \ldots + \cos n\varphi)$.

Объяснение таблиц

Таблица I. Она заключает в себе численные значения интеграла $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt$ для всех величин аргумента t, от $t=0$ до $t=2$ через каждую сотую.

Таблица II. В ней помещены численные величины интеграла $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_T^2 e^{-t^2}\,dt$, от $T=0$ до $T=2$, также через каждую сотую. Сверх того, таблица заключает и логарифмы этого самого интеграл для тех же значений аргумента T.

В издаваемой в 30-е гг. Гостехиздатом серии «Современная математика» в 1933 вышла в свет книга академика С. Н. Бернштейна «Современное состояние теории вероятностей»; в нее вошли два его доклада, вступления к к-рым публикуются ниже.

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

АКАД. С. Н. Б Е Р Н Ш Т Е Й Н

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО–ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1933 ЛЕНИНГРАД

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЙ

Доклад читанный на Всероссийском съезде математиков в Москве в 1927 г.

Организационный комитет предложил мне сделать Съезду общий доклад о современном состоянии теории вероятностей и ее приложений.

Вы знаете, как обширна указанная тема, и поэтому не должны от меня ожидать сколько-нибудь полного анализа всей интересующей нас области, для которого необходимо было бы несколько докладчиков и потребовалось бы во много раз больше времени, чем то, каким я располагаю. При таких условиях главная трудность, стоящая предо мною, – в выборе материала, в выборе организующего принципа изложения.

Я полагаю, что в данном случае основной моей задачей должна быть попытка представить некоторый синтез, методологически объединяющий общие математические проблемы теории вероятностей и ее важнейшие приложения. Поэтому мне придется, с одной стороны, умолчать о многих математических исследованиях, представляющих лишь специальный интерес, и с другой стороны, при рассмотрении приложений теории вероятностей, я буду больше останавливаться на вопросах, имеющих принципиальное значение, чем на тех, которые играют важную роль в соответствующей области.

Еще не так давно, до второй половины прошлого столетия, значение теории вероятностей, как метода научного исследования, было весьма ограничено; отдельные попытки ее приложения к изучению явлений природы, связанные с именами Бернулли, Лапласа, Пуассона, Кетле и других, были довольно слабо обоснованы и вызвали заслуженную критику, которая нашла свое наиболее блестящее выражение в известном предисловии Бертрана к его курсу теории вероятностей, написанному всего 40 лет назад.

Однако скептицизм Бертрана не остановил и не замедлил дальнейшего стихийного, если так можно выразиться, внедрения теории вероятностей в различные области науки. Уже его современники Максвелл и Больцман превращают молекулярную статистику в важный экспериментально обоснованный отдел физики; и с другой стороны, благодаря открытию элементарного закона наследственности Менделя, применение теории вероятностей к биологии становится не только возможным, но и необходимым. К этому же времени почти во

всех областях знания: в астрономии, метеорологии, демографии и т. д. накопляется обширный статистический материал, обнаруживающий таинственную связь между случайностью и закономерностью, и анализ этой связи, проблема классификации И характеристик статистических рядов на основе понятий теории вероятностей становится в порядке дня.

В настоящее время мы можем сказать с полной определенностью, что дальнейшая систематизация человеческого знания или развитие науки невозможна без применения теории вероятностей, и поэтому прежде всего требует ответа вопрос о том, не является ли наука, основанная на этой теории, второсортной или суррогатом науки.

Вот почему особо важное значение приобретает формально логическое обоснование теории вероятностей как единой математической дисциплины, и только после того, как эта дисциплина будет очищена от парадоксов и аксиоматически построена, наподобие геометрии, можно будет пользоваться теорией вероятностей, как точным объективным познавательным методом, приложимость которого в каждом частном случае требует и допускает экспериментальную и математическую проверку.

Чисто математическая теория вероятностей может не интересоваться тем, имеет ли коэффициент, называемый математической вероятностью, какое-нибудь практическое значение, субъективное или объективное. Единственное требование, которое должно быть соблюдено, это отсутствие противоречий, а именно: различные способы вычисления указанного коэффициента при данных условиях и соблюдении принятых аксиом должны приводить к одному и тому же значению.

Кроме того, если мы хотим, чтобы выводы теории вероятностей были не просто игрой ума, а допускали эмпирическую проверку, то необходимо рассматривать только такие совокупности предложении или суждений, относительно которых возможно фактически установить, истинны они или ложны. Познавательный процесс, необратимый по существу, в том именно и заключается, что те или иные из признаваемых нами возможными предложений становятся истинными, т. е. осуществляются, и тогда отрицания их в то же время становятся ложными или невозможными.

Таким образом построение теории вероятностей как единого познавательного метода требует, чтобы истинность предложения однозначно без всяких исключений характеризовалась определенным максимальным значением математической вероятности, которое

принимается равным единице, а ложность предложения должна быть адекватна наименьшей вероятности, приравниваемой нулю. Для конечных совокупностей предложений указанным требованиям нетрудно удовлетворить, но благодаря тому, что категорическая необходимость их недостаточно отчетливо признавалась, при рассмотрении бесконечных совокупностей возникали и продолжают возникать парадоксы, на одном из которых я позволю себе здесь остановиться.

Я имею в виду известную задачу о том, какова вероятность того, что дробь, написанная наудачу, окажется несократимой, решение которой вслед за Кронекером и Чебышевым дано А. А. Марковым в его классическом курсе исчисления вероятностей.

О ЗАВИСИМОСТЯХ МЕЖДУ СЛУЧАЙНЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ

Перевод доклада на Международном конгрессе математиков а Цюрихе в 1932 г.

1. Одной из наиболее характерных особенностей современной науки является крупная роль, отводимая ею схемам теории вероятностей. С первого взгляда такое преобразование метода научных построений кажется противоречащим детерминизму классической науки, согласно которому всякое конкретное явление равнозначно совокупности некоторых наблюдаемых величин, связанных дифференциальными, функциональными или иными уравнениями, причем воздействие на рассматриваемое явление всего остального мира в полной мере отображается пограничными условиями, нужными для их однозначного решения.

Однако эта детерминистская формула является лишь принципиальной декларацией, не допускающей общей экспериментальной проверки, так как невозможно повторение опыта при совершенно тождественных условиях; поэтому па практике точные науки пользовались всегда несколько иной формулой — формулой причинности, которая лишь приближенно совместима с вышеуказанной. А именно, реальное явление заменяется абстрактной схемой, характеризуемой теми же величинами, причем допускается, что пограничные условия могут быть экспериментально заданы более или менее произвольно, независимо от общего состояния вселенной.

Очевидно, что этот принцип причинности, единственно практически полезный, не может претендовать на абсолютную и универсальную применимость, не впадая в противоречие с данной выше полной формулой детерминизма; и кроме того, разбивая действительность на

независимые, вполне устойчивые области, он тем самым выявляет неизбежность особого логического построения, которое объединяло бы в систему иного рода совокупность явлений, признаваемых независимыми.

Например, допущение, что движение материальной точки не зависит от выбора положительного направления на оси, имеет математическим выражением утверждение, что оба знака скорости равновероятны. Точно так же равноценность или симметрия билетов данной лотереи и физическая независимость их владельцев от производства тиража означает, что вероятность выигрыша для каждого пропорциональна числу имеющихся у него билетов.

Конечно, допускаемая здесь независимость не абсолютна. Однако построенные таким образом отвлеченные схемы, называемые стохастическими, в такой же степени могут соответствовать действительности, как и казуальные схемы классической науки, которые также всегда предполагаются независимыми от прочего мира.

Математическая теория вероятностей, основанная на простой, свободной от противоречий, аксиоматической базе, приводит при достаточно большом числе наблюдений к конкретным предвидениям, практически не менее достоверным, чем те, которые вытекают из обычных детерминистских схем, и дает таким образом бесчисленное множество способов для проверки соответствия между стохастическими схемами и изображаемыми ими реальными явлениями. Я не буду останавливаться здесь на принципах этой аксиоматики, данной мною пятнадцать лет назад, которая проникнута убеждением невозможности полного приведения действительности к каким бы то ни было общим схемам.

Замечу только, что моя точка зрения, которая, надеюсь, выявится с достаточной отчетливостью из дальнейшего, значительно отличается от эмпирического воззрения, отождествляющего вероятность с частотою, молчаливо допускаемого большинством практиков, и систематически проведенного в курсе проф. Мизеса. И, с другой стороны, я считаю существенным отметить тут же, что для фактических приложений теории вероятностей к реальному миру необходимо постулировать логическую однозначность всех явлений, имеющих одинаковую вероятность, или, что то же самое, признать, что вероятность 1 соответствует только абсолютной достоверности.

В таком случае, когда мы получаем как результат вычисления важнейшие для приложений теоремы типа закона больших чисел, согласно которым вероятность данного исхода A некоторого опыта

весьма мала, менее $\frac{1}{N}$, где N – весьма большое целое число, это N утверждение означает попросту, что существует по крайней мере N несовместимых исходов данного опыта объективно эквивалентных A (т.е. таких, что различие между ними возможно лишь на основании признаков или соглашений, независимых от хода опыта), из которых один только осуществляется.

2. После этих предварительных замечаний мы можем определить элементарную стохастическую схему как идеализированный опыт, в котором, при наличии точно определенного комплекса условий, событие A может произойти или не произойти, причем объективная связь между комплексом α и событием A в полной мере характеризуется скалярной величиной p, называемой математической вероятностью A (при данных условиях).

Рассмотрим внимательней эту простую схему.

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА

МАТЕМАТИКА,

ЕЕ СОДЕРЖАНИЕ, МЕТОДЫ И ЗНАЧЕНИЕ

ТОМ ВТОРОЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА 1956

В 1956 в Издательстве АН СССР вышел в свет 3-томный коллективный труд «Математика, ее содержание, методы и значение». Вот выдержки из предисловия: «Коллектив авторов при составлении этой книги исходил из намерения ознакомить достаточно широкие круги советской интеллигенции с содержанием и методами отдельных математических дисциплин...», «В качестве минимума предварительных математических знаний читателя предполагается знание только курса средней школы, однако в отношении доступности материала каждый из трех томов не является однородным...», «В полном объеме книга окажется доступной в основном лишь читателям, уже имеющим некоторые навыки в применении методов математического анализа...».

Глава XI – Теория вероятностей – из 2-го тома этого труда, написанная академиком А. Н. Колмогоровым, до наших дней сохраняет интерес для представителей естественнонаучных и инженерных специальностей, учителей математики.

§ 1. Вероятностные закономерности

Простейшие закономерности, устанавливаемые естествознанием, заключаются в указании условий, при которых какое-либо интересующее нас событие заведомо происходит или заведомо не происходит, то есть эти условия могут быть выражены по одной из следующих двух схем:

если осуществляется комплекс (то есть совокупность) условий S, то с достоверностью происходит событие A;

если осуществляется комплекс условий S, то событие A произойти не может.

В первом случае событие A по отношению к комплексу условий S называется «достоверным» или «необходимым» событием, а во втором – «невозможным» событием. Например, при атмосферном давлении и температуре t, лежащей в пределах $0^{\circ} < t < 100^{\circ}$ (комплекс условий S), вода с достоверностью находится в жидком состоянии (достоверное событие A), а в газообразном или в твердом состоянии находиться не может (невозможные события A_2 и A_3).

Событие A, которое при осуществлении комплекса условий S иногда происходит, а иногда не происходит, называется по отношению к этому комплексу условий *случайным*. Возникает вопрос: означает ли

случайность события A отсутствие всякой закономерной связи между комплексом условий S и событием A? Пусть, например, установлено, что лампы определенного типа, производимые определенным заводом (условия S), иногда горят более 2 000 час (событие A), а иногда до истечения этого срока перегорают и приходят в негодность. Могут ли тем не менее опыты с проверкой способности ламп гореть 2 000 час служить для характеристики качества продукции завода? Или следует ограничиться указанием того срока (скажем, 500 час?), в течение которого практически все лампы безотказно работают, и того срока, после которого практически все лампы перегорают (скажем, срока в 10 000 час?). Ясно, что характеристика срока работы ламп только неравенствами $500 \le T \le 10\,000$ мало удовлетворит потребителя. Потребитель получит значительно более полную информацию, если ему будет сказано, что приблизительно в 80% случаев лампы служат не менее 2 000 час. Еще более полная характеристика качества ламп будет содержаться в указании для любого T процента $\nu(T)$ ламп, которые служат не менее T часов, хотя бы в виде графика, изображенного на рис. 1.

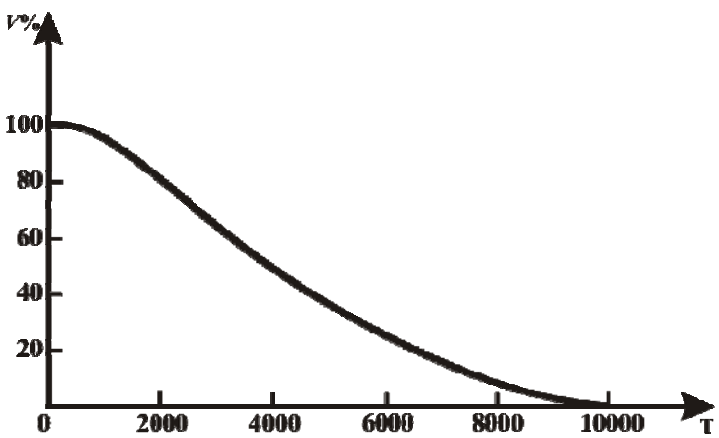


Рис.1

Кривая $\nu(T)$ практически находится при помощи испытаний с пробной партией из достаточно большого числа (100 – 200) ламп. Естественно, что найденная таким образом кривая имеет действительную ценность лишь в том случае, если она правильно отражает реальную закономерность, действующую не только для данной

пробной партии, но и вообще для ламп, производимых при заданном качестве материалов и при установленной на заводе технологии производства, то есть если испытания, произведенные с другими пробными партиями, состоящими из ламп, изготовленных в тех же общих условиях, приводят к близким результатам (то есть к кривым $\nu(T)$, мало отличающимся от кривой, полученной в результате испытаний первой пробной партии). Это значит, что *статистическая* закономерность, выражаемая кривыми $\nu(T)$ в пробных партиях, является лишь отражением *вероятностной* закономерности, связывающей срок службы лампы с качеством материалов, из которых она изготовлена, и с технологией ее изготовления.

Эта вероятностная закономерность задается при помощи функции $\mathbf{P}(T)$, где $\mathbf{P}(T)$ есть вероятность того, что отдельная лампа (произведенная при заданных условиях) будет гореть не менее T часов.

Утверждение о существовании у события A определенной вероятности

$$\mathbf{P}(A \mid S) = p$$

при условиях S заключается в том, что в различных достаточно длинных сериях испытаний (то есть осуществлений комплекса условий S) получаемые частоты появления события A

$$\nu_r = \frac{\mu_r}{n_r}$$

(где n_r – число испытаний r-й серии, μ_r – число тех испытаний этой серии, при которых произошло событие A) будут приблизительно одинаковы и близки к p.

Гипотеза о существовании такой константы $p = \mathbf{P}(A \mid S)$ (объективно обусловленной характером связи между комплексом условий S и событием A), к которой частоты ν оказываются, «вообще говоря», тем ближе, чем больше число испытаний n, хорошо оправдывается для широкого класса явлений. Такого рода явления естественно называть *вероятностно-случайными*[*].

Рассмотренный выше пример относится к области вероятностных закономерностей массового производства. Реальность такого рода

[*] Иногда их называют *стохастическими*.

закономерностей не подлежит никакому сомнению. На них основаны весьма важные практические приемы статистического выборочного контроля массовой продукции. Близкой по способу образования вероятностных закономерностей является область вероятностных законов рассеивания снарядов, имеющих основное значение для теории стрельбы. Так как исторически это один из первых примеров реального применения методов теории вероятностей к техническим задачам, то к некоторым простейшим задачам теории стрельбы мы еще вернемся далее.

Сказанное выше о «близости» вероятности p и частоты ν при большом числе испытаний n несколько расплывчато; мы ничего не сказали о том, насколько мала разность $\nu - p$ при том или ином n. Степень близости ν к p получит количественную оценку в § 3. Интересно отметить, что полностью исключить некоторую неопределенность в этом вопросе нельзя. Само утверждение о близости ν и p, как это обнаруживается при уточнении вопроса, имеет лишь вероятностный характер.

§ 2. Аксиомы и основные формулы элементарной теории вероятностей

Поскольку большая роль статистических закономерностей несомненна, возникает вопрос о методах их изучения. Прежде всего возникает мысль о возможности чисто эмпирического, экспериментального их исследования. Так как вероятностная закономерность проявляется в массовых процессах, то представляется естественным, что для ее обнаружения необходимо произвести массовый эксперимент.

Такое представление, однако, истинно лишь отчасти. Установив некоторые вероятностные закономерности экспериментально, можно выводить из них новые вероятностные закономерности логическим или вычислительным путем при помощи некоторых общих допущений. Прежде чем показать, как это делается, мы должны перечислить некоторые основные определения и формулы теории вероятностей.

Из представления о вероятности как о нормальном значении частоты $\nu = \frac{m}{n}$, где $0 \le m \le n$, и, следовательно, $0 \le \nu \le 1$, вытекает,

что вероятность $\mathbf{P}(A)$ любого события A естественно считать лежащей между нулем и единицей*

$$0 \le \mathbf{P}(A) \le 1. \qquad (1)$$

Два события называются *несовместимыми*, если они не могут (при осуществлении комплекса условий S) произойти оба. Например, при бросании игральной кости выпадение четного числа очков и выпадение тройки являются событиями несовместимыми. Событие A называется *соединением* событий A_1 и A_2 если оно состоит в том, что происходит хотя бы одно из событий A_1 или A_2. Например, при бросании игральной кости событие A, состоящее в выпадении 1, 2 или 3, является соединением событий A_1 и A_2, где A_1 состоит в выпадении 1 или 2, а A_2 – в выпадении 2 или 3. Легко видеть, что для чисел появлений m_1, m_2 и m двух несовместимых событий A_1 и A_2 и их соединения $A = A_1 \bigcup A_2$ имеет место равенство $m = m_1 + m_2$, что дает для соответствующих частот $\nu = \nu_1 + \nu_2$.

Это приводит к естественности следующей аксиомы сложения вероятностей:

$$\mathbf{P}(A_1 \bigcup A_2) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) \qquad (2)$$

если события A_1 и A_2 несовместимы и $A_1 \bigcup A_2$ обозначает их соединение.

Далее, для достоверного события U естественно принять

$$\mathbf{P}(U) = 1 \qquad (3)$$

Вся математическая теория вероятностей строится на простых аксиомах такого типа, как (1), (2) и (3). С точки зрения чистой математики *вероятность* является числовой функцией от «события», обладающей рядом аксиоматически фиксированных свойств. Свойства вероятностей, выражаемые формулами (1), (2) и (3), служат достаточной основой для построения так называемой элементарной теории вероятностей, если не настаивать на том, что в аксиоматизации нуждаются и сами понятия события, соединения событий и определяемого ниже совмещения событий. Начинающему полезнее держаться наглядного

* Запись $p = \mathbf{P}(A \mid S)$ мы для краткости изменим теперь на $\mathbf{P}(A)$.

понимания терминов «событие» и «вероятность», но полезно знать, что неподдающийся полной формализации реальный смысл этих понятий не влияет на полную формальную отчетливость аксиоматизированного чисто математического изложения теории вероятностей.

Будем называть соединением событий $A_1, A_2, \ldots, A_s$ данных в любом числе, событие A, заключающееся в том, что происходит хотя бы одно из этих событий. Тогда из аксиомы сложения легко получаем для любого числа попарно несовместимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_s$ и их соединения A

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \ldots + \mathbf{P}(A_s)$$

(так наз. теорема сложения вероятностей).

Если соединение этих событий есть достоверное событие (то есть при каждом осуществлении комплекса условий S происходит какое-либо из событий A_k), то

$$\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \ldots + \mathbf{P}(A_s) = 1$$

В этом случае систему событий $A_1, A_2, \ldots, A_s$ называют полной системой событий.

Рассмотрим теперь два, вообще говоря, совместимых события A и B. Событие C назовем *совмещением* событий A и B ($C = AB$), если событие C состоит в том, что происходят оба события A и B[*].

Например, если событие A состоит в том, что число очков, выпадающее при бросании игральной кости, четно, а B – в том, что оно кратно трем, то событие C состоит в том, что число очков равно шести.

Пусть при большом числе n повторных испытаний событие A появилось m раз, а событие B появилось l раз, причем k раз вместе с событием A. Отношение k/m естественно назвать условной частотой события B при условии A. Связывающей частоты $\frac{k}{m}, \frac{m}{n}$ и $\frac{k}{n}$ формуле

[*] аналогично совмещение C любого числа событий $A_1, A_2, \ldots, A_s$ стоит в наступлении всех указанных событий.

$$\frac{k}{m} = \frac{k}{n} : \frac{m}{n}$$

естественно сопоставить следующее определение:

Условной вероятностью $\mathbf{P}(B \mid A)$ события B при условии A называется отношение

$$\mathbf{P}(B \mid A) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)}$$

Здесь предполагается, конечно, что $\mathbf{P}(A) \neq 0$.

Если события A и B по существу никак не связаны друг с другом, то естественно предполагать, что событие B не должно появляться при условии наступления события A ни существенно чаще, ни существенно реже, чем при рассмотрении всех вообще испытании, то есть что приближенно $\frac{k}{m} \sim \frac{l}{n}$ или

$$\frac{k}{n} = \frac{k}{m} \cdot \frac{m}{n} \sim \frac{l}{n} \cdot \frac{m}{n}$$

В последнем приближенном равенстве $\frac{m}{n} = \nu_A$ есть частота события A, а $\frac{l}{n} = \nu_B$ – частота события B, наконец, $\frac{k}{n} = \nu_{AB}$ – частота совмещения событий A и B.

Мы видим, что эти частоты связаны соотношением

$$\nu_{AB} \sim \nu_A \cdot \nu_B$$

Для вероятностей событий A, B и AB естественно поэтому принять соответствующее точное равенство

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \qquad (4)$$

Равенство (4) служит определением *независимости* двух событий A и B.

Аналогично можно определить независимость любого числа событий. Кроме того, можно дать определение независимости любого числа испытаний (последнее, грубо говоря, сводится к тому, что тот или иной исход части этих испытаний никак не влияет на исход остальных*.

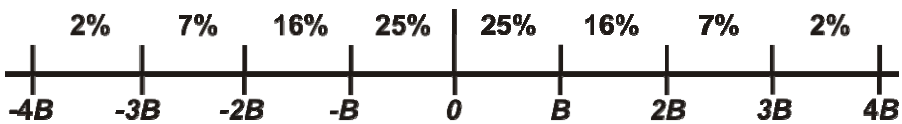


Рис. 2

К обсуждению реального смысла понятия независимости мы еще вернемся в § 4.

Вычислим теперь вероятность P_k ровно k появлений некоторого события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность p появления этого события одна и та же. Обозначим через A событие, заключающееся в непоявлении события A. Очевидно, что

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - p .$$

Из определения независимости испытаний нетрудно усмотреть, что вероятность какой-либо определенной последовательности составленной из k появлений A и $n-k$ непоявлений A, равна

$$p^k (1-p)^{n-k} \tag{5}$$

Так, например, при $n=5$ и $k=2$ вероятность получить последовательность исходов $A\overline{A}A\overline{A}A$ будет $p(1-p)\,p(1-p)(1-p) = p^2(1-p)^3$.

По теореме сложения вероятность P_k равна сумме вероятностей всех последовательностей с k появлениями и $n-k$ непоявлениями

* Точнее независимость испытаний означает следущее. Разобьем n испытаний каким-либо образом на две группы; пусть событие A заключается в том, что все испытания первой группы заканчиваются какими-либо наперед заданными исходами, а событие B – в том, что все испытания второй группы заканчиваются какими-либо исходами, также наперед заданными. Испытания называются независимыми (в совокупности), если при любом разбиении и любом задании исходов определенные выше события и независимы в смысле (4).

события A, то есть в силу (5) равна произведению числа таких последовательностей на $p^k(1-p)^{n-k}$. Число таких последовательностей, очевидно, равно числу сочетаний из n по k, поскольку k положительных исходов могут занимать в ряду из n испытаний любые k мест.

Окончательно получаем

$$P_k = C_n^k\, p^k\, (1-p)^{n-k}, \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,n) \tag{6}$$

(так наз. биномиальное распределение). Чтобы увидеть, как применяются приведенные выше определения и формулы, рассмотрим пример, относящийся к теории стрельбы.

Пусть для поражения цели достаточно пяти попаданий. Нас интересует вопрос, имеем ли мы право рассчитывать на то, что необходимые пять попаданий получатся в результате 40 выстрелов. Чисто эмпирический метод решения этой задачи заключался бы в следующем. При заданных размерах цели и заданной дистанции стрельбы производится много (скажем, 200) стрельб по 40 выстрелов в каждой и определяется, в каком числе стрельб получилось не менее пяти попаданий в цель. Если этот результат был достигнут, например, в 195 стрельбах из 200, то вероятность P равна приблизительно

$$P = \frac{195}{200} = 0{,}975\,.$$

По рассмотренному чисто эмпирическому рецепту исследования мы потратили бы $8\,000$ снарядов для решения крайне специальной задачи. Так на практике, конечно, не поступают. Вместо этого начинают с исследования рассеивания снарядов при данной дистанции стрельбы независимо от размеров цели. Оказывается, что отклонения по дальности и боковые отклонения от средней точки падения подчиняются в смысле частоты, с которой встречаются отклонения различных размеров, закону, изображенному на рис. 2. Буквой B здесь обозначено так наз. вероятное отклонение. Вероятное отклонение, вообще говоря, различно для отклонений по дальности и боковых отклонений и, кроме того, увеличивается с увеличением дистанции стрельбы. Вероятные отклонения для различных дистанций для каждого типа оружия и снаряда находят эмпирически при помощи опытных стрельб на артиллерийском полигоне. После же этого решение всевозможных специальных задач такого типа, как поставленная выше, производится расчетным путем.

Предположим для простоты, что интересующая нас цель имеет вид прямоугольника, одна сторона которого направлена вдоль линии стрельбы и имеет размеры в два вероятных отклонения по дальности, а другая сторона, перпендикулярная линии стрельбы, равна двум вероятным боковым отклонениям. Предположим, далее, что цель хорошо пристреляна и средняя траектория полета снарядов проходит через ее центр (рис. 3).

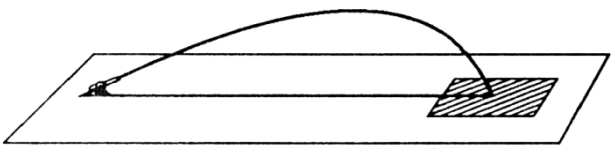


Рис. 3

Предположим еще, что боковое отклонение и отклонение по дальности независимы*. Тогда для попадания в цель данным снарядом необходимо и достаточно, чтобы его отклонения по дальности и боковое не превосходили соответствующих вероятных отклонений. В соответствии с рис. 2 каждое из этих событий будет наблюдаться примерно для 50% выпущенных снарядов, то есть с вероятностью 1/2. Совмещение обоих этих событий будет происходить примерно для 25% выпущенных снарядов, то есть вероятность попадания отдельного снаряда в цель будет равна

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

а вероятность промаха при отдельном выстреле будет равна

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Предполагая, что попадания при отдельных выстрелах представляют собой независимые события и применяя биномиальную формулу (6), мы находим, что вероятность получить при 40 выстрелах ровно k попаданий будет равна

* Эти предположения независимости подтверждаются опытом.

$$P_k = C_{40}^k \, p^k \, q^{40-k} = \frac{40 \cdot 39 \cdot \ldots \cdot (39-k)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{40-k}$$

Интересующая нас вероятность получить не менее пяти попаданий выразится теперь формулой $P = \sum_{k=5}^{40} P_k$. Но ее проще вычислить по формуле $P = 1 - Q$, исходя из вероятности $Q = \sum_{k=0}^{4} P_k$ получить менее пяти попаданий.

Можно подсчитать, что

$$P_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^{40} \sim 0,00001,$$

$$P_1 = 40 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{39} \cdot \frac{1}{4} \sim 0,0013,$$

$$P_2 = \frac{40 \cdot 39}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{38} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \sim 0,00087,$$

$$P_3 = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{37} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \sim 0,0037,$$

$$P_4 = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{36} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \sim 0,0113,$$

откуда

$$Q = 0,016\,, \; P = 0,984\,.$$

Полученная вероятность P даже несколько ближе к единице, чем это обычно признается достаточным в теории стрельбы при назначении числа снарядов, способного обеспечить выполнение поставленной задачи. Чаще всего считают возможным указывать число снарядов, которое гарантирует выполнение поставленной задачи с вероятностью 0,95.

Рассмотренный пример несколько схематичен, но он достаточно убедительно показывает важность вероятностных расчетов. Установив из опыта зависимость вероятных отклонений от дистанции стрельбы,

для чего достаточно совсем небольшого числа стрельб на полигоне, мы можем потом при помощи несложных расчетов получать ответы на самые разнообразные вопросы. Так же дело обстоит и во всех других областях, где совместное действие большого числа случайных факторов приводит к статистическим закономерностям. При непосредственной обработке массовых наблюдений выясняются лишь самые простые из этих статистических закономерностей, то есть находятся лишь некоторые исходные вероятности. Затем, при помощи законов теории вероятностей, отправляясь от этих исходных вероятностей, вычисляют вероятности более сложных явлений и на основе этих вычислений делают выводы о статистических закономерностях, управляющих интересующими нас сложными явлениями.

Иногда удается и совсем обойтись без собирания массового статистического материала, так как исходные вероятности могут быть определены из достаточно убедительных соображений симметрии. Например, традиционный вывод о том, что игральная кость, то есть куб, вырезанный из однородного материала, при бросании с достаточной высоты падает на каждую из своих граней с одинаковой вероятностью 1/6, был сделан несомненно раньше, чем вполне систематически был собран достаточный для оправдания этого вывода наблюдательный материал. Систематические опыты такого рода производились в XVIII-XX вв. преимущественно составителями учебников по теории вероятностей, когда теория вероятностей уже была разработанной наукой. Результат этой проверки был удовлетворителен, но распространение подобной деятельности на новые аналогичные случаи вряд ли представляет интерес. Например, насколько нам известно, никто не производил достаточно обширных опытов с бросанием вырезанного из однородного материала правильного двенадцатигранника. Но нет никаких сомнений, что если бы было произведено, скажем, 12 000 таких бросаний, то двенадцатигранник упал бы на каждую из своих граней приблизительно в тысяче случаев.

Получение исходных вероятностей из соображений симметрии или однородности играет также большую роль во многих серьезных научных задачах, например во всех задачах на столкновения или сближения беспорядочно двигающихся молекул газа или – с таким же успехом – звезд галактики. Конечно, в таких более деликатных случаях предпочитают хотя бы косвенно проверять сделанные допущения путем сравнения вытекающих из них выводов с опытом.

§ 3. Закон больших чисел и предельные теоремы

Вполне естественна потребность количественно уточнить утверждение о том, что в «больших» сериях испытаний частоты появления события «близки» к его вероятности. Следует ясно представить себе известную деликатность этой задачи. В наиболее типичных для теории вероятностей случаях дело обстоит так, что в сколь угодно длинных сериях испытаний остаются теоретически возможными оба крайних значения частоты

$$\frac{\mu}{n}=\frac{n}{n}=1 \quad \text{и} \quad \frac{\mu}{n}=\frac{0}{n}=0 .$$

Поэтому, каково бы ни было число испытаний n, нельзя утверждать с полной достоверностью, что будет выполнено, скажем, неравенство

$$\left| \frac{\mu}{n} - p \right| < \frac{1}{10}.$$

Например, если событие A заключается в выпадении при бросании игральной кости шестерки, то при n бросаниях с вероятностью $\left(\frac{1}{6}\right)^n > 0$ мы все время будем получать одни шестерки, то есть с вероятностью $\left(\frac{1}{6}\right)^n$ получим частоту появления шестерок, равную *единице*, а с вероятностью $\left(1-\frac{1}{6}\right)^n > 0$ шестерка не выпадает ни одного раза, то есть частота появления шестерок окажется равной *нулю*.

Во всех подобных задачах любая нетривиальная оценка близости между частотой и вероятностью действует не с полной достоверностью, а лишь с некоторой меньшей единицы вероятностью. Можно, например, доказать, что в случае независимых испытаний с постоянной вероятностью p появления события неравенство

$$\left| \frac{\mu}{n} - p \right| < 0,02 \qquad (7)$$

для частоты $\frac{\mu}{n}$ будет выполняться при n = 10 000 (и любом p) с вероятностью

$$P > 0{,}9999. \tag{8}$$

Здесь мы прежде всего хотим подчеркнуть, что в приведенной формулировке количественная оценка близости частоты $\frac{\mu}{n}$ к вероятности p связана с введением новой вероятности P.

Реальный смысл оценки (8) таков: если произвести N серий по n испытаний и сосчитать число M серий, в которых выполняется неравенство (7), то при достаточно большом N приближенно будет

$$\frac{M}{N} \approx P < 0{,}9999 \tag{9}$$

Но если мы захотим уточнить соотношение (9) как в отношении степени близости $\frac{M}{N}$ к P, так и в отношении надежности, с которой можно утверждать, что такая близость будет иметь место, то придется обратиться к рассмотрениям, аналогичным тем, которые мы уже провели в применении к близости $\frac{\mu}{n}$ и p. При желании такое рассуждение можно повторять неограниченное число раз, но вполне понятно, что это не позволит нам совсем освободиться от необходимости на последнем этапе обратиться к вероятностям в примитивном грубом понимании этого термина.

Не следует думать, что подобного рода затруднения являются какой-то особенностью теории вероятностей. При математическом изучении реальных явлений мы всегда их схематизируем. Отклонения хода действительных явлений от теоретической схемы можно, в свою очередь, подвергнуть математическому изучению. Но для этого сами эти отклонения надо уложить в некоторую схему и этой последней пользоваться уже без формального математического анализа отклонений от нее.

Заметим, впрочем, что при реальном применении оценки*

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<0,02\right\}>0,9999 \qquad (10)$$

к единичной серии из n испытаний мы опираемся и на некоторые соображения симметрии: неравенство (10) указывает, что при очень большом числе N серий соотношение (7) будет выполняться не менее чем в 99,99% случаев; естественно с большой уверенностью ожидать, что, в частности, неравенство (7) осуществится в интересующей нас определенной серии из n испытаний, если мы имеем основания считать, что эта серия в ряду других серии занимает рядовое, ничем особенным не отмеченное положение.

Вероятности, которыми принято пренебрегать в различных практических положениях, различны. Выше уже отмечалось, что при ориентировочных расчетах расхода снарядов, гарантирующего выполнение поставленной задачи, удовлетворяются нормой расхода снарядов, при которой поставленная задача решается с вероятностью 0,95, то есть пренебрегают вероятностями, не превышающими 0,05. Это объясняется тем, что переход на расчеты, исходящие из пренебрежения, скажем, лишь вероятностями, меньшими 0,01, приводил бы к большому увеличению норм расхода снарядов, то есть практически во многих случаях к выводу о невозможности выполнить поставленную задачу за тот короткий промежуток времени, который для этого имеется, или с фактически могущим быть использованным запасом снарядов.

Иногда и в научных исследованиях ограничиваются статистическими приемами, рассчитанными исходя из пренебрежения вероятностями в 0,05. Но это следует делать лишь в случаях, когда собирание более обширного материала очень затруднительно. Рассмотрим в виде примера таких приемов следующую задачу. Допустим, что в определенных условиях употребительный препарат для лечения какого-либо заболевания дает положительный результат в 50%, то есть с вероятностью 0.5. Предлагается новый препарат и для проверки его преимуществ над старым планируется применить его в десяти случаях, выбранных беспристрастно из числа больных, находящихся в том же положении, что и те, для которых установлена эффективность старого препарата в 50%. При этом устанавливается, что

* так записывают оценку (8) для вероятности неравенства (7).

преимущество нового препарата будет считаться доказанным, если он даст положительный результат не менее чем в восьми случаях из десяти. Легко подсчитать, что такое решение связано с пренебрежением вероятностью получить ошибочный вывод (то есть вывод о доказанности преимущества нового препарата, в то время как он равноценен или даже хуже старого) как раз порядка 0,05. В самом деле, если в каждом из десяти испытаний вероятность положительного исхода равна p, то вероятности получить при десяти испытаниях 10, 9 или 8 положительных исходов, равны соответственно

$$P_{10} = p^{10},$$

$$P_9 = 10p^9(1-p),$$

$$P_8 = 45p^8(1-p)^2,$$

В сумме для случая $p = \frac{1}{2}$ получаем

$$P = P_{10} + P_9 + P_8 = \frac{56}{1024} \sim 0,05 .$$

Таким образом, в предположении, что на самом деле новый препарат точно равноценен старому, мы рискуем сделать ошибочный вывод о то.м, что новый препарат превосходит старый с вероятностью порядка 0,05. Чтобы свести эту вероятность приблизительно к 0,01, не увеличивая числа испытаний $n = 10$, пришлось бы установить, что преимущество нового препарата будет считаться доказанным лишь тогда, когда его применение даст положительный результат не менее чем в девяти случаях из десяти. Если это требование покажется сторонникам нового препарата слишком суровым, то придется назначить число испытаний *n* значительно большим, чем 10. Если, например, при $n = 100$ установить, что преимущества нового препарата будут считаться доказанными при $\mu > 65$, то вероятность ошибки будет лишь $P \approx 0,0015$.

Если норма в 0,05 для серьезных научных исследований явно недостаточна, то вероятностью ошибки в 0,001 или в 0,003 по большей части принято пренебрегать даже в столь академических и обстоятельных исследованиях, как обработка астрономических наблюдении. Впрочем, иногда научные выводы, основанные на применении

вероятностных закономерностей, обладают и значительно большей достоверностью (то есть построены на пренебрежении значительно меньшими вероятностями). Об этом еще будет сказано далее.

В рассмотренных примерах мы уже неоднократно применяли частные случаи биномиальной формулы (6)

$$P_m = C_n^m \, p^m \, (1-p)^{n-m}$$

для вероятности P_m получить ровно m положительных исходов при n независимых испытаниях, в каждом из которых положительный исход имеет вероятность p. Рассмотрим при помощи этой формулы вопрос, поставленный в начале этого параграфа, о вероятности

$$P = \mathbf{P}\left\{ \left| \frac{\mu}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} \tag{11}$$

где μ – фактическое число положительных исходов*. Очевидно, эта вероятность может быть записана в виде суммы тех P, для которых m удовлетворяет неравенству

$$\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \tag{12}$$

то есть в виде,

$$P = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_m \tag{13}$$

где m_1 – наименьшее из значений m, удовлетворяющих неравенству (12), а m_2 – наибольшее из таких m.

Формула (13) при сколько-нибудь больших n мало пригодна для непосредственных вычислений. Поэтому имело очень большое значение открытие Муавром для случая $p = 1/2$ и Лапласом при любом p асимптотич. формулы, которая позволяет очень просто находить и изучать поведение вероятностей P_m при больших n. Формула эта имеет вид

---

* μ принимает с вероятностями P_m значения $m = 0, 1, \ldots, n$, то есть $\mathbf{P}\{\mu = m\} = P_m$.

$$P_m \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n p(1-p)}} e^{-\frac{(m-np)^2}{2np(1-p)}}. \qquad (14)$$

Если p не слишком близко к нулю или единице, то она достаточно точна уже при n; порядка 100. Если положить

$$t = \frac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}} \qquad (15)$$

то формула (14) приобретает вид

$$P \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n p(1-p)}} e^{-\frac{t^2}{2}}. \qquad (16)$$

Из (13) и (16) можно вывести приближенное представление вероятности (11)

$$P \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^{T} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = F(T), \qquad (17)$$

где

$$T = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}. \qquad (18)$$

Разность между левой и правой частями в (17) при постоянном и отличном от нуля и единицы p стремится при $n \to \infty$ равномерно относительно ε к нулю. Для функции $F(T)$ составлены подробные таблицы. Вот краткая выдержка из них

T	1	2	3	4
F	0, 68269	0, 95450	0, 99730	0, 99993

При $T \to \infty$ значение функции $F(T)$ стремится к единице.

Произведем при помощи формулы (17) оценку вероятности при $n = 10\,000$. Так как $T = \dfrac{2}{\sqrt{p(1-p)}}$, то

$$P \approx F\left(\frac{2}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$$

Так как функция $F(T)$ монотонно возрастает с возрастанием T, то для не зависящей от p оценки P снизу надо взять наименьшее возможное (при различных p), значение T. Такое наименьшее значение получится при $p = 1/2$, и оно будет равно 4. Поэтому приближенно

$$p > F(4) = 0,99993. \tag{19}$$

В неравенстве (19) не учтена ошибка, происходящая из-за приближенного характера формулы (17). Производя оценку связанной с этим обстоятельством погрешности, можно во всяком случае установить, что $P > 0,9999$.

В связи с рассмотренным примером применения формулы (17) следует отметить, что оценки остаточного члена формулы (17), дававшиеся в теоретических сочинениях по теории вероятностей, долго оставались мало удовлетворительными. Поэтому применения формулы (17) и ей подобных к расчетам при не очень больших n или при вероятностях p, очень близких к 0 или к 1 (а также вероятности во многих случаях и имеют особенно большое значение), часто основывались лишь на опыте проверок такого рода результатов для ограниченного числа примеров, а не на достоверно установленных оценках возможной ошибки. Более подробное исследование, кроме того, показало, что во многих практически важных случаях приведенные выше асимптотические формулы нуждаются не только в оценке остаточного члена, но и в уточнении (так как без такого уточнения остаточный член слишком велик). В обоих направлениях наиболее полные результаты принадлежат С. Н. Бернштейну.

Соотношения (11), (17) и (18) можно переписать в виде

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < t\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right\} \sim F(t) \tag{20}$$

Для достаточно больших t правая часть формулы (20), не содержащая n, сколь угодно близка к единице, то есть к значению вероятности, которое соответствует полной достоверности. Мы видим, таким образом, что *как правило, отклонения частоты* $\frac{\mu}{n}$ *от вероятности* p *имеют порядок* $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Такая пропорциональность точности действия вероятностных закономерностей квадратному корню из числа наблюдений типична и для многих других вопросов. Иногда говорят даже в порядке несколько упрощенной популяризации о «законе квадратного корня из n» как основном законе теории вероятностей. Полную отчетливость эта мысль получила благодаря введению великим русским математиком П. Л. Чебышевым в систематическое употребление метода сведения различных вероятностных задач к подсчетам «математических ожиданий» и «дисперсий» для сумм и средних арифметических «случайных величин».

Случайной величиной называется величина, которая в данных условиях S может принимать различные значения с определенными вероятностями. Для нас достаточно рассмотреть случайные величины, могущие принимать лишь конечное число различных значений. Чтобы указать, как говорят, *распределение вероятностей* такого рода случайной величины ξ, достаточно указать возможные ее значения $x_1, x_2, \ldots, x_r$ и вероятности

$$P_k = \mathbf{P}\{\xi = x_k\}.$$

В сумме эти вероятности по всем различным возможным значениям величины ξ всегда равны единице:

$$\sum_{k=1}^{r} P_k = 1.$$

Примером случайной величины может служить изучавшееся выше число μ положительных исходов при n испытаниях.

Математическим ожиданием величины ξ называется выражение

$$\mathbf{M}(\xi) = \sum_{k=1}^{r} P_k \, x_k$$

а *дисперсией* величины ξ называют математическое ожидание квадрата отклонения $\xi - \mathbf{M}(\xi)$, то есть выражение

$$\mathbf{D}(\xi) = \sum_{k=1}^{r} P_k (x_k - \mathbf{M}(\xi))^2 .$$

Корень квадратный из дисперсии

$$\sigma_\xi = \sqrt{\mathbf{D}(\xi)}$$

называется *средним квадратическим отклонением* (величины от ее математич. ожидания $\mathbf{M}(\xi)$).

В основе простейших применений дисперсий и средних квадратических отклонений лежит знаменитое неравенство Чебышева

$$\mathbf{P}\{\,|\,\xi - \mathbf{M}(\xi)\,| \le t\sigma_\xi\} \ge 1 - \frac{1}{t^2}. \qquad (21)$$

Оно показываает, что отклонения ξ от $\mathbf{M}(\xi)$, значительно превышающие σ_ξ, встречаются редко.

При образовании сумм случайных величин

$$\xi = \xi^{(1)} + \xi^{(2)} + \ldots + \xi^{(n)}$$

для их математических ожиданий всегда имеет место равенство

$$\mathbf{M}(\xi) = \mathbf{M}(\xi^{(1)}) + \mathbf{M}(\xi^{(2)}) + \ldots + \mathbf{M}(\xi^{(n)}). \qquad (22)$$

Аналогичное равенство для дисперсий

$$\mathbf{D}(\xi) = \mathbf{D}(\xi^{(1)}) + \mathbf{D}(\xi^{(2)}) + \ldots + \mathbf{D}(\xi^{(n)}) \qquad (23)$$

верно только при некоторых ограничениях. Для справедливости равенства (23) достаточно, например, чтобы величины $\xi^{(i)}$ и $\xi^{(j)}$ с различными номерами не были, как говорят, «коррелированы» между собой, то есть чтобы при $i \ne j$ выполнялось равенство*

---

* *Коэффициентом корреляции* между величинами $\xi^{(i)}$ и $\xi^{(j)}$ называется выражение

$$\mathbf{M}\left((\xi^{(i)} - \mathbf{M}(\xi^{(i)}))\,((\xi^{(j)} - \mathbf{M}(\xi^{(j)})\right) = 0. \qquad (24)$$

В частности, равенство (24) соблюдается, если величины $\xi^{(i)}$ и $\xi^{(j)}$ независимы между собой*. Таким образом, для взаимно независимых слагаемых всегда действует равенство (23). Для средних арифметических

$$\xi = \frac{1}{n}\left(\xi^{(1)} + \xi^{(2)} + \ldots + \xi^{(n)}\right)$$

из (23) вытекает

$$\mathbf{D}(\xi) = \frac{1}{n^2}\left(\mathbf{D}(\xi^{(1)}) + \mathbf{D}(\xi^{(2)}) + \ldots + \mathbf{D}(\xi^{(n)})\right) \qquad (25)$$

Предположим теперь, что для всех слагаемых дисперсии не превосходят некоторой постоянной

$$\mathbf{D}\,\xi^{(i)} \le C^2.$$

Тогда по (25)

$$\mathbf{D}(\xi) \le \frac{C^2}{n},$$

и в силу неравенства Чебышева при любом t

$$R = \frac{\mathbf{M}\{((\xi^{(i)} - \mathbf{M}(\xi^{(i)}))((\xi^{(j)} - \mathbf{M}(\xi^{(j)}))\}}{\sigma_{\xi}^{(i)}\,\sigma_{\xi}^{(j)}}.$$

Если $\sigma_{\xi}^{(i)} > 0$ и $\sigma_{\xi}^{(j)} > 0$, то условие (24) равносильно тому что $R = 0$.

Коэффициент корреляции R характеризует степень зависимость между случайными величинами. Всегда $|R| \le 1$, причем $R = \pm 1$ только при наличии линейной связи $\eta = a\xi + b$ $(a \ne 0)$. для независимых величин $R = 0$.

* Независимость двух случайных величин ξ и η, способных принимать, соответственно, значения $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ по определению обозначает, что при любых i и j события $A_i = \{\xi = x_i\}$ и $B_j = \{\eta = y_i\}$ независимы в смысле определения, данного в §2.

$$\mathbf{P}\left\{ \left| \xi - \mathbf{M}(\xi) \right| \le \frac{tC}{\sqrt{n}} \right\} \ge 1 - \frac{1}{t^2}. \qquad (26)$$

Неравенство (26) содержит в себе так называемый закон больших чисел в форме, установленной Чебышевым: если величины $\xi^{(i)}$ взаимно независимы и имеют ограниченные дисперсии, то при возрастании n их средние арифметические ξ все реже заметно отклоняются от своих математических ожиданий $\mathbf{M}(\xi)$.

Более точно говорят, что *последовательность величин*

$$\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(n)}$$

подчиняется закону больших чисел, если для соответствующих средних арифметических ξ *и при любом постоянном* $\varepsilon > 0$.

$$\mathbf{P}\{ \left| \xi - \mathbf{M}(\xi) \right| \le \varepsilon \} \to 1 \qquad (27)$$

при $n \to \infty$.

Чтобы получить из неравенства (26) предельное соотношение (27), достаточно положить

$$t = \varepsilon \frac{\sqrt{n}}{C}.$$

Большой ряд исследований Л. А. Маркова, С. Н. Бернштейна, А. Я. Хинчина и других посвящен вопросу возможно большего расширения условий применимости предельного соотношения (27), то есть условий применимости закона больших чисел. Эти исследования имеют принципиальное значение. Однако еще более важным является точное исследование распределения вероятностей отклонений $\xi - \mathbf{M}(\xi)$.

Великой заслугой русской классической школы в теории вероятностей является установление того факта, что при очень широких условиях асимптотически (то есть со все большей точностью при неограниченно растущих *n*) справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{t_1 \sigma_\xi < \xi - \mathbf{M}(\xi) < t_2 \sigma_\xi\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2/2}\, dt. \qquad (28)$$

Чебышев дал почти полное доказательство этой формулы для случая независимых и ограниченных слагаемых. Марков восполнил недостающее звено в рассуждениях Чебышева и расширил условия применимости формулы (28). Еще более общие условия были даны А. М. Ляпуновым. Вопрос о распространении формулы (28) на суммы зависимых слагаемых с особенной полнотой был изучен С. Н. Бернштейном.

Формула (28) охватила столь большое число частных задач, что долгое время ее называли центральной предельной теоремой теории вероятностей. Хотя при новейшем развитии теории вероятностей она оказалась включенной в ряд более общих закономерностей, ее значение трудно переоценить и в настоящее время.

Если слагаемые независимы и их дисперсии одинаковы и равны:

$$\mathbf{D}\,\xi^{(i)} = \sigma^2,$$

то формуле (28) удобно, учитывая соотношение (25), придать вид

$$\mathbf{P}\left\{\frac{t_1\sigma}{\sqrt{n}} < \xi - \mathbf{M}(\xi) < \frac{t_2\sigma}{\sqrt{n}}\right\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2/2}\,dt \qquad (29)$$

Покажем, что соотношение (29) содержит в себе решение задачи об отклонениях частоты $\frac{\mu}{n}$ от вероятности p которой мы занимались ранее. Для этого введем случайные величины $\xi^{(i)}$, определяя их следующим условием:

$$\xi^{(i)} = \begin{cases} 0, & \text{если i-e испытание имело отрицательный исход,} \\ 1, & \text{если i-e испытание имело положительный исход.} \end{cases}$$

Легко проверить, что тогда

$$\mu = \xi^{(1)} + \xi^{(2)} + \ldots + \xi^{(n)},\ \frac{\mu}{n} = \xi,$$

$$\mathbf{M}(\xi^{(i)}) = p,\ \ \mathbf{D}(\xi^{(1)}) = p(1-p),\ \ \mathbf{M}(\xi) = p$$

и формула (29) дает

$$\mathbf{P}\left\{ t_1\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \frac{\mu}{n} - p < t_2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2/2}\, dt\,,$$

что при $t_1 = -t$, $t_2 = t$ снова приводит к формуле (20).

§ 4. Дополнительные замечания об основных понятиях теории вероятностей

Говоря о случайных явлениях, которым свойственна устойчивость частот, то есть тенденция при большом числе повторений известных условий происходить с частотами, группирующимися вокруг некоторого *нормального уровня* – вероятности $\mathbf{P}(A \mid S)$, мы допустили в § 1 некоторую неточность и расплывчатость формулировок в двух отношениях. Первая из допущенных неточностей заключается в том, что мы не указали, насколько велики должны быть по своей численности серии испытаний n_r для того, чтобы устойчивость частот уже обязана была проявиться, и каковы именно допустимые отклонения частот $\frac{\mu_s}{n_s}$ друг от друга и от нормального их уровня p при тех или иных численностях отдельных серий $n_1, n_2, ..., n_r$. Эта неточность на первом этапе формирования понятий новой науки неизбежна. Она нисколько не больше, чем известная расплывчатость, свойственная простейшим геометрическим, понятиям точки или прямой в их *физическом* понимании. Эта сторона дела была затем уточнена в § 3.

Существеннее другая скрытая в наших формулировках неясность, относящаяся к способу формирования тех серий, в которых должна наблюдаться устойчивость частот проявления события A.

Мы уже видели, что к статистическим и вероятностным методам исследования обращаются тогда, когда точное индивидуальное предсказание хода событий оказывается неосуществимым. Желая же искусственно создать по возможности чисто случайные явления, специально заботятся о том, чтобы никакими доступными средствами нельзя было заранее выделить те случаи, в которых явление A будет иметь тенденцию появляться чаще, чем с некоторой нормальной для него частотой.

Так организуются, например, тиражи государственных займов. Если в данном тираже из общего числа N облигаций на M из них

выпадает выигрыш, то вероятность выигрыша для отдельной облигации равна $p = \frac{M}{N}$. Это значит, что каким бы образом мы ни выделили заранее до тиража совокупность облигаций достаточно большой численности n, мы можем быть практически уверены, что отношение $\frac{\mu}{n}$ числа μ выигравших облигаций в выделенной совокупности к общей численности n этой совокупности окажется близким к p. Например, лица, предпочитающие приобретать четные номера облигаций, не получат никакого систематического преимущества перед теми, которые предпочитают приобретать нечетные номера; точно так же не получат никакого преимущества лица, которые исходили бы из убеждения, что лучше всего приобретать облигации с номерами, разлагающимися ровно на три простых множителя, или облигации, номера которых являются соседними с теми, на которые упали выигрыши в предшествующем тираже, и т. п.

Точно так же при стрельбе из исправного орудия данного образца, с хорошо обученным обслуживающим персоналом и при нормальном способе получения снарядов, прошедших обычный для выпускаемой продукции контроль, мы будем получать отклонения от средней точки падения меньше определенного заранее вероятного отклонения B приблизительно в *половине* случаев. Эта пропорция сохранится в ряде последовательных стрельб, сохранится она и в том случае, если мы отдельно подсчитаем число отклонений, меньших B, для четных пли нечетных (по порядку их во времени) выстрелов и т. и. Но вполне возможно, что произведя отбор особенно однородных (и отношении их веса и т. п.) снарядов, мы могли бы рассеивание несколько уменьшить, получить серию снарядов, для которой доля отклонений, больших стандартного B окажется существенно меньше *половины*.

Итак, говорить о том, что событие A является «вероятностно-случайным» и приписывать ему определенную вероятность

$$p = \mathbf{P}(A \mid S)$$

можно, только, когда указан класс допустимых способов формирования серий испытаний. Указание этого класса мы будем считать включенным в условия S.

При *заданных* условиях S свойство события A быть вероятностно-случайным и иметь вероятность $p = \mathbf{P}(A \mid S)$ выражает *объективный* характер связи между условиями S и событием A. Иначе говоря, не существует событий абсолютно случайных, события являются случайными или необходимыми в зависимости от того, в какой связи они рассматриваются, но в определенных условиях событие может быть случайным совершенно объективно, и это его свойство не зависит от состояния знаний какого бы то ни было наблюдателя. Если вообразить наблюдателя, который мог бы улавливать во всех деталях отличительные свойства особые обстоятельства полета снарядов и, следовательно, предсказывать индивидуальные для каждого из них отклонения от средней траектории, то его присутствие не помешало бы снарядам рассеиваться по законам теории вероятностей (если, конечно, стрельба будет производиться обычным способом, а не по указаниям нашего воображаемого наблюдателя).

Заметим по этому поводу, что обсуждавшееся выше формирование серий, в которых проявляется тенденция к постоянству частот в смысле их группирования вокруг нормального значения – вероятности, тоже происходит в реальной обстановке совершенно независимого от нашего вмешательства. Например, именно в силу вероятностно-случайного характера движений молекул в газе число молекул, ударяющихся даже за очень малые промежутки времени о какую-либо площадку стенки сосуда или поверхности помещенных в газе тел, оказывается с большой точностью пропорциональным площади этой площадки и длине промежутка времени. Отклонения от этой пропорциональности в тех случаях, когда число ударов невелико, тоже следуют законам теории вероятностей и вызывают явления типа броуновского движения, о чем будет идти речь далее.

Обратимся к выяснению реального смысла понятия независимости. Напомним, что условная вероятность события A при условии B определялась формулой

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}. \qquad (30)$$

Напомним также, что события A и B назывались независимыми, если, согласно (4),

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\ \mathbf{P}(B).$$

Из независимости событий A и B и $\mathbf{P}(B)>0$ следует

$$\mathbf{P}(A\,|\,B) = \mathbf{P}(A)$$

Все теоремы математической теории вероятностей, говорящие о независимых событиях, применимы к любым событиям, удовлетворяющим условию (4), или его обобщениям на случай взаимной независимости многих событий. Эти теоремы имели бы, однако, мало интереса, если бы это определение не находилось в связи со свойствами реально независимых (в причинном смысле) явлений.

Известно, например, что вероятность новорожденному оказаться мальчиком имеет довольно устойчивое значение $\mathbf{P}(A)=$ 22/43. Если B обозначает условие, что рождение происходит в день соединения Юпитера с Марсом, то в предположении, что расположение планет не определяет индивидуальных судеб людей, условная вероятность $\mathbf{P}(A\,|\,B)$ имеет то же самое значение: $\mathbf{P}(A\,|\,B) = 22/43$, то есть фактический подсчет частоты рождения мальчиков при таких специальных астрологических условиях привел бы именно к частоте 22/43. Хотя такой подсчет в достаточно обширных размерах, возможно, никем не производился, нет оснований сомневаться в его результате.

Мы привели этот несколько устарелый по содержанию пример для того, чтобы показать, что развитие человеческого познания состоит не только в установлении истинных связей между явлениями, но и в опровержении связей воображаемых, то есть установлении в надлежащих случаях тезиса о независимости каких-либо двух кругов явлений. Разоблачение бессмысленности попыток астрологов связать между собою два круга явлений, друг с другом не связанных, является одним из классических тому примеров.

Естественно, что такого рода независимость не следует абсолютизировать. Например, в силу закона всемирного тяготения несомненно, что перемещение спутников Юпитера оказывает некоторое влияние, скажем, на полет артиллерийского снаряда. Но очевидно, что на практике с этими влияниями мы можем не считаться. С философской стороны, быть может, было бы правильнее вместо независимости говорить о несущественности в данной конкретной обстановке тех или иных зависимостей. Но как бы то ни было, независимость событий в объясненном сейчас конкретном и относительном понимании этого термина ни в какой мере не противоречит прин-

ципу всеобщей связи всех явлений, она лишь его необходимое дополнение.

Подсчеты вероятностей по формулам, выводимым из допущений о независимости тех или иных событий, имеют реальный интерес в том случае, когда события, бывшие сначала независимыми, ходом самих явлений приводятся затем в связь. Например, можно рассчитывать вероятности столкновения частиц космического излучения с частицами пронизываемой ими среды, исходя из допущения, что движение частиц до появления вблизи них быстро двигающейся частицы космического излучения происходит независимо от перемещения этой частицы. Можно рассчитывать вероятность попадания вражеской пули в лопасть вращающегося пропеллера, исходя из допущения, что его положение относительно оси не зависит от траектории пули (конечно, это допущение было бы ошибочно но отношению к собственной пуле, выпускаемой при стрельбе через пропеллер согласованно с его вращением) и т.п.; число таких примеров может быть неограниченно продолжено.

Можно даже сказать, что всюду, где достаточно ясно проявляются вероятностные закономерности, мы имеем дело с влиянием большого числа, если не совсем независимых между собой, то в том или ином смысле слабо связанных друг с другом факторов.

Это совсем не означает, что следует всюду некритически вводить допущения о тех или иных независимостях. Наоборот, это заставляет, во-первых, особенно тщательно разрабатывать критерии для проверки гипотез о независимости, а во-вторых, особенно тщательно исследовать пограничные случаи, когда зависимости между факторами уже необходимо учитывать, но эти зависимости таковы, что вероятностные закономерности в измененном и осложненном виде еще могут проявиться. Выше отмечалось, что уже классическая русская школа теории вероятностей широко развернула исследования во втором из этих направлений.

Заканчивая рассмотрение вопроса о независимости, отметим, что как определение независимости двух событий формулой (4), так и формальное определение независимости нескольких случайных величин значительно шире понятия реальной независимости в смысле принадлежности к причинно не связанным кругам явлений.

Предположим, например, что точка ξ, падает на отрезок [0, 1] так, что при

$$0 \le a < b \le 1$$

вероятность ее попадания на отрезок $[a, b]$ равна длине этого отрезка $b - a$. Легко доказать, что тогда в разложении

$$\xi = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{100} + \frac{\alpha_3}{1000} + \ldots$$

абсциссы точки ξ, в десятичную дробь знаки α_k будут взаимно независимы, хотя они и связаны по своему происхождению*. (Из этого обстоятельства вытекает много теоретически, а частью и практически интересных следствий.)

Такая гибкость формального определения независимости не должна рассматриваться как его недостаток. Наоборот, она лишь расширяет область применимости теорем, установленных при тех или иных допущениях о независимости. Эти теоремы применимы одинаково и в случаях, где независимость постулируется в силу реальных соображений, и в случаях, где независимость доказывается расчетом, исходя из ранее принятых допущений о распределениях вероятностей исследуемых событий и случайных величин.

Вообще исследование формальной структуры математического аппарата теории вероятностей привело к интересным результатам. Оказалось, что этот аппарат занимает вполне определенное и очень простое место в намечающейся постепенно классификации основных объектов изучения современной математики.

Мы уже говорили о понятии совмещения AB двух событий и о понятии соединения $A \cup B$ событий A и B. Напомним, что события называются несовместимыми, если их совмещение невозможно, то есть если $AB = N$, где N – знак невозможного события.

---

* То же имеет место при любом n для знаков α_k разложения числа ξ в дробь

$$\xi = \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \frac{\alpha_3}{n^3} + \ldots$$

Основной аксиомой элементарной теории вероятностей является требование (см. § 2), чтобы при условии $AB = N$ соблюдалось равенство

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$$

Свойства основных понятий теории вероятностей – случайных событий и их вероятностей – вполне аналогичны, например, свойствам плоских фигур и их площадей. Достаточно понимать под AB пересечение (общую часть) двух фигур, под $A \cup B$ – их соединение, под N – условно вводимую «пустую» фигуру, а под $\mathbf{P}(A)$ – площадь фигуры A и аналогия в намеченных пределах будет полной.

Такими же свойствами обладают объемы трехмерных фигур.

Наиболее общей теорией образований подобного типа, охватывающей как частные случаи теории объемов и площадей, является сейчас общая *теория меры*.

Следует только отметить, что в теории вероятностей имеются по сравнению с общей теорией меры или специально с теорией площадей и объемов некоторые специфические черты: вероятность никогда не бывает больше единицы. Эту максимальную вероятность имеет необходимое событие U

$$\mathbf{P}(U) = 1.$$

Аналогия не является поверхностной. Оказалось, что вся математич. теория вероятностей с формальной стороны может быть построена как теория меры, специализированная допущением, что мера «всего пространства» U равна единице[*].

Такой подход к делу не только внес полную ясность в формальное строение математической теории вероятностей, но и способствовал вполне конкретному прогрессу как самой теории вероятностей, так и смежных с ней по формальному строению математических теорий. В теории вероятностей с успехом были использованы тонкие методы, разработанные в метрической теории функций действительного переменного. Одновременно вероятностные методы оказались примени-

[*] Тем не менее по существу решаемых задач теория вероятностей остается самостоятельной математической дисциплиной; основные для теории вероятностей результаты (подобные изложенным в § 3) кажутся искусственными и ненужными с точки зрения чистой теории меры.

мыми в вопросах смежных областей математики не «по аналогии», а путем формально строгого их перенесения в новые области. Всюду, где оказываются выполненными аксиомы теории вероятностей, применимы и следствия из этих аксиом, хотя бы данная область не имела ничего общего с реальной случайностью.

Наличие аксиоматизированной теории вероятностей избавляет нас от соблазна «определять» вероятность способами, претендующими на соединение их непосредственной естественно-научной убедительности с приспособленностью к построению на их основе формально строгой математической теории. Такие определения приблизительно соответствовали бы в геометрии «определению» точки как того, что получится, если бесконечное число раз обрезать со всех сторон физическое тело, уменьшая каждый раз, скажем, вдвое его диаметр.

К такого рода определениям относится определение вероятности как предела частот при неограниченном увеличении числа испытаний. Допущение о вероятностном характере испытаний, то есть о тенденции частот группироваться вокруг постоянного значения, само по себе бывает верно (как и допущение о «случайности» какого-либо явления) лишь при сохранении некоторых условий, которые не могут сохраняться неограниченно долго и с неограниченной точностью. Поэтому точный переход к пределу

$$\frac{\mu}{n} \to p$$

не может иметь реального значения. Формулировка принципа устойчивости частот при обращении к такому предельному переходу требует определения допустимых способов отыскания бесконечных последовательностей испытаний, которое тоже может быть лишь математической фиксацией. Все это нагромождение понятий могло бы еще подлежать серьезному рассмотрению, если бы в результате получилось построение теории столь своеобразной, что иными путями до ее строгого обоснования нельзя было бы дойти. Но, как указано выше, обоснование математической теории вероятностей при современном – состоянии теории меры производится просто добавлением условия

$$\mathbf{P}(U) = 1.$$

Вообще, при реальном анализе понятия вероятности вовсе не обязательно стремиться к его формальному определению. По-видимо-

му, *с* чисто формальной стороны о вероятности нельзя сказать ничего больше следующего: вероятность $\mathbf{P}(A \mid S)$ есть число, вокруг которого, при условиях S и при предусмотренных этими условиями способах формирования серий, имеют тенденцию группироваться частоты, причем при возрастании численности этих серий в разумных пределах, не нарушающих однородности условий, эта тенденция проявляется со все большей отчетливостью и точностью, достигая достаточных в данной конкретной обстановке надежности и точности при достижимых численностях серий.

Действительно, важной задачей является не формальное уточнение этого определения, а возможно более широкое выяснение условий, при которых такого типа вероятностная случайность должна проявляться. Надо ясно понимать то, что в действительности гипотеза о вероятностном характере какого-либо явления лишь очень редко обосновывается непосредственной статистической проверкой. Только при первом проникновения вероятностных методов в какую-либо новую область дело часто начиналось с того, что чисто эмпирически отмечалось постоянство частот. В силу сказанного в § 3, для того чтобы статистически обнаружить постоянство частот с точностью до ε, необходимо пользоваться сериями примерно по $n = 1/\varepsilon^2$ испытаний. Например, для того чтобы установить, что в данном конкретном вопросе имеет смысл считать вероятность определенной с точностью до $0,0001$ необходимо произнести ряд серий испытаний примерно по $100\ 000\ 000$ испытаний в каждой.

Гораздо чаще гипотеза вероятностной случайности вводится на основании соображений симметрии или на основании соображений о практической независимости отдельных, приходящих в соприкосновение рядов явлений и т. д. Затем эта гипотеза проверяется косвенным путем. Например, благодаря тому, что число молекул в конечных объемах газа выражается числами порядка 10^{20} и более, число $\sqrt{n}$, соответствующее вероятностным выводам кинетической теории газов, бывает очень велико и, действительно, многие из этих выводов оправдываются с большой точностью. Например, давление на противоположные стороны подвешенной в спокойном воздухе пластинки даже микросконич. для нашего глаза размеров оказывается строго одинаковым, хотя уже превышение давления на одну из сторон над давлением на другую в тысячные доли процента при надлежащей постановке опыта могло бы быть замечено.

§ 5. Детерминированные и случайные процессы

Принцип причинной обусловленности всех явлений находит наиболее простое математическое выражение в методе изучения реальных процессов при помощи дифференциальных уравнений.

Пусть состояние изучаемой системы в момент времени t определяется при помощи n параметров

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

Скорости изменения этих параметров, как известно, выражаются их производными по времени

$$\dot{x}_k = \frac{dx_k}{dt}.$$

Если допустить, что эти скорости являются функциями от значений параметров, то мы получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\\
\dot{x}_2 &= f_2(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dot{x}_n &= f_n(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n).
\end{aligned}$$

Большая часть законов природы, открытых в эпоху зарождения математич. естествознания, начиная с галилеевского закона падения тел, выражается именно таким образом. Галилей не мог облечь свое открытие в указанную стандартную форму из-за того, что в его время соответствующие математические понятия еще не были разработаны. Это было сделано Ньютоном.

Обычное в механике и многих других областях физики обращение к дифференциальным уравнениям второго порядка с принципиальной стороны не вносит ничего нового, так как, обозначая скорости $\dot{x}_k$ новыми знаками

$$v_k = \dot{x}_k,$$

мы получаем для вторых производных величин выражение

$$\frac{d^2 x_k}{d t^2} = \dot{v}_k$$

и уравнения второго порядка для n величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сводятся к уравнениям первого порядка для $2n$ величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

В виде примера рассмотрим задачу падения тяжелого тела в земной атмосфере. Предполагая, что в рассмотрение входят лишь небольшие высоты над земной поверхностью, будем считать сопротивление среды зависящим только от скорости, а не от высоты. Состояние изучаемой системы характеризуется двумя параметрами: расстоянием тела от земной поверхности z и его скоростью v. Изменение этих двух величин во времени определяется двумя дифференциальными уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \dot{z} &= -v, \\ \dot{v} &= g - f(v) \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

где g – ускорение силы тяжести, $f(v)$ – некоторый «закон сопротивления» для рассматриваемого тела.

Если скорости невелики и тело достаточно массивно, например в случае падения камня средних размеров с высоты в несколько метров, то сопротивлением воздуха можно пренебречь, и уравнения (31) превращаются в уравнения

$$\left.\begin{aligned} \dot{z} &= -v, \\ \dot{v} &= g \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Если предположить, что в начальный момент времени t_0 величины z и ϑ имеют значения z_0 и v_0, то легко решить уравнения (32) и получить формулу

$$z = z_0 - v(t - t_0) - g\left(\frac{t - t_0}{2}\right)^2$$

описывающую весь процесс падения. Например, в предположении $t_0 = 0$, $\vartheta_0 = 0$ получаем формулу

$$z = z_0 - \frac{g t^2}{2}$$

открытую Галилеем.

В общем случае интегрирование уравнений (31) несколько сложнее, но принципиальный результат (при весьма общих ограничениях, нало-

женных на функции $f(v)$) остается тем же: по значениям z_0 и v_0 в начальный момент времени t_0 однозначно вычисляются значения z и v для всех дальнейших моментов времени t вплоть до падения тела на поверхность земли. Можно мысленно снять и это последнее ограничение, предполагая, что падение продолжается и при отрицательных значениях z. Для схематизированной таким образом задачи можно установить следующее: если функция $f(v)$ при возрастании v монотонно возрастает и стремится к бесконечности при $v \to \infty$, то при неограниченном продолжении падения, то есть при неограниченном возрастании переменного t, скорость v стремится к постоянному предельному значению c, которое является корнем уравнения

$$g = f(c).$$

С наглядной стороны этот результат математического анализа поставленной задачи понятен: скорость падения возрастает до тех пор, пока ускорение силы тяжести не уравновесится сопротивлением воздуха. При прыжке с открытым парашютом стационарная скорость ϑ; около пяти метров в секунду устанавливается* довольно скоро. При затяжном прыжке с нераскрытым парашютом сопротивление воздуха меньше, и в соответствии с этим стационарная скорость оказывается больше и устанавливается лишь после того, как парашютист пролетит очень большое расстояние.

При падении легких тел, подобных брошенному в воздух перу или пушинке, начальный период заметным образом ускоренного движения очень мал и иногда совсем незаметен. Стационарная скорость падения устанавливается очень быстро, и с известным приближением можно принять, что все время $v = c$. В этом случае остается одно дифференциальное уравнение

$$\dot{z} = -c$$

которое интегрируется очень просто:

$$z = z_0 - c(t - t_0).$$

Так будет падать пушинка в совершенно спокойном воздухе.

---

* Имеется в виду, что v становится практически достаточно близким к c.

В совершенно общем виде подвергнутая нами выше рассмотрению детерминистическая концепция трактуется в современной теории динамических систем, которой посвящен ряд важных работ советских математиков – Н. Н. Боголюбова, В. В. Степанова и многих других. Эта общая теория охватывает как частные случаи и такие математические схемы реальных явлений, в которых состояние системы определяется уже не конечным числом параметров одной или нескольких функций, как это типично, например, для механики непрерывных сред. В таких случаях элементарные закономерности изменения состояния за «бесконечно малый» промежуток времени задаются уже не обыкновенными дифференциальными уравнениями, а уравнениями в частных производных или иными средствами. Но общим во всех детерминированных математических схемах реальных процессов является то, что, во-первых, состояние изучаемой системы считается исчерпывающим образом определенным посредством задания некоторого математич. объекта ω (системы n действительных чисел, одной или нескольких функций и т. п.); во-вторых, последующие значения для моментов времени $t > t_0$ однозначно определяются по значению ω_0, соответствующему начальному моменту времени t_0.

$$\omega = F(t_0, \omega_0, t)$$

Как мы уже видели, в случае процессов, описываемых дифференциальными уравнениями, нахождение функции F требует интегрирования этих дифференциальных уравнений с начальными условиями $\omega = \omega_0$ при $t = t_0$.

Представители механистического материализма считали, что описанная схема является точным и прямым выражением детерминированности реальных явлений – физического принципа причинности. По идее Лапласа, состояние мира в данный момент времени определяется бесконечным числом параметров, подчиненных бесконечному числу дифференциальных уравнений. Если бы некий «всеобъемлющий ум» мог записать все эти уравнения и их проинтегрировать, то, по Лапласу, он мог бы с полной точностью предвидеть всю эволюцию мира на протяжении бесконечного времени.

Однако на самом деле количественная математическая бесконечность крайне груба по сравнению с качественной неисчерпаемостью действительного мира. Ни введение бесконечного числа параметров, ни описание состояния непрерывных сред при помощи функций от

точки пространства не являются адекватным отображением бесконечной сложности реальных явлений.

Исследование реальных явлений не всегда идет в направлении увеличения числа вводимых в задачу параметров; вообще далеко не всегда целесообразно усложнять ту характеристику ω, которая определяет отдельное «состояние системы» в математической схеме, служащей для расчета данного явления. Искусство исследователя скорее состоит в том, чтобы найти очень простое фазовое пространство* Ω (то есть множество значений ω, или, иначе говоря, множество различных возможных состояний системы), которое позволяло бы тем не менее, заменяя реальный процесс процессом детерминированного перемещения точки ω в этом пространстве, ухватить все *существенные* стороны реального процесса.

Но, выделив из реального процесса его существенные черты, мы получаем некоторый остаток, который приходится считать случайным. Неучтенные случайные факторы всегда оказывают некоторое влияние на течение процесса. Существует очень мало явлений, подвергающихся математическому изучению, для которых при сопоставлении теории с наблюдениями нельзя было бы заметить влияния неучтенных случайных факторов. Таково или почти таково положение с теорией движения планет под действием силы тяготения: расстояния между планетами так велики по сравнению с их размерами, что идеализированное представление их материальными точками действует почти безотказно; пространство, в котором они двигаются, заполнено столь разреженной материей, что ее сопротивление исчезающе мало; массы планет так велики, что световое давление при их движении почти не играет роли. Эти исключительные обстоятельства и приводят к тому, что математическое решение задачи о движении системы из n материальных точек, «состояние» которой описывается $6n$ параметрами*, а изменение состояния рассчитывается с учетом только силы тяготения, так поразительно хорошо совпадает с наблюдениями над движением планет.

Несколько приближается к случаю движения планет случай полета артиллерийского снаряда в предположении, что сопротивление воздуха введено в уравнения движения. Это тоже одна из класси-

---

* В приведенном выше примере с падением тел фазовое пространство Ω есть система пар чисел (z, v), то есть плоскость.

* Тремя координатами и тремя составляющими скорости каждой точки.

ческих областей, в которых математический метод исследования сравнительно легко и быстро одержал большие победы. Но здесь роль возмущающих случайных факторов уже значительно больше и рассеивание снарядов, то есть их отклонения от теоретической траектории, соответствующей нормальным, назначенным для данного выстрела начальным условиям и среднему состоянию атмосферы во время стрельбы, достигают десятков, а на больших дистанциях и сотен метров. Отклонения эти частично вызываются случайными отклонениями начального направления и начальной скорости от нормы, частично случайными отклонениями от нормы массы и коэффициента сопротивления снаряда, частично же неравномерностью и порывами ветра и прочими случайными обстоятельствами, связанными с чрезвычайно сложным и подвижным режимом, господствующим в реальной земной атмосфере.

Рассеивание снарядов подробно изучается методами теории вероятностей, и результаты этого исследования весьма существенны для практики стрельбы.

Но что означает, собственно говоря, исследование случайных явлений? Казалось бы, когда случайный «остаток» при данной схематизации явления оказался настолько велик, что им нельзя пренебречь, то единственная возможность состоит в том, чтобы осложнить описание явления введением новых параметров и в усложненной схеме исследовать явление более подробно по той же математической схеме детерминированных явлений.

Такой путь во многих случаях практически неосуществим. Например, при исследовании падения материального тела в атмосфере с учетом неравномерной, порывистой (или, как обычно говорят, турбулентной) структуры ветрового потока вместо двух параметров z и v пришлось бы ввести совершенно необозримый математический аппарат полного описания этой структуры.

Но этот сложный путь на самом деле необходим только в тех случаях, когда нам во что бы то ни стало нужно проследить влияние остаточных «случайных» факторов на течение нашего процесса во всех деталях и отдельно для каждого индивидуального случая. К счастью, в действительности очень часто наши реальные потребности заключаются совсем в другом: требуется лишь оценить суммарный эффект действия случайных факторов за большой промежуток времени или в большом числе повторений изучаемого процесса.

В качестве примера рассмотрим перенос песка водным потоком в реке или в том или ином искусственном гидротехническом сооружении. Обычно этот перенос происходит таким образом, что большинство песчинок спокойно лежит на дне и лишь изредка особенно сильные завихрения вблизи дна выхватывают отдельные песчинки и переносят их сразу на довольно значительные расстояния вплоть до внезапной остановки в каком-либо новом месте. Чисто теоретически движение каждой такой песчинки могло бы быть рассчитано индивидуально по законам гидромеханики. Но для этого нам было бы необходимо знать начальное состояние дна и потока во всех деталях и рассчитывать его шаг за шагом, отмечая те моменты времени, когда давление на какую-либо покоящуюся песчинку окажется достаточным, чтобы принести ее в движение, и прослеживая перемещение сдвинутых с места песчинок вплоть до их остановки. Абсурдность постановки такой задачи для реального научного исследования очевидна. И несмотря на это, средние или, как принято говорить, статистические закономерности передвижения донных насосов водными потоками вполне поддаются изучению.

Примеры, в которых действие большого числа случайных факторов приводит к вполне отчетливым статистическим закономерностям, было бы легко умножить. Один из самых увлекательных по широте перспектив и в то же время самых известных такого рода примеров доставляет кинетическая теория газов, которая показывает, как из совместного действия множества случайных столкновении молекул возникают точные закономерности, которым подчинены давление газа, как целого, на стенки, диффузное распространение одного газа в другом и т. д.

§ 6. Случайные процессы марковского типа

А. А. Маркову принадлежит заслуга построения вероятностной схемы, непосредственно обобщающей детерминистическую схему, записанную в § 5 при помощи уравнения

$$\omega = F(t_0, \omega_0, t).$$

Правда, Марков рассмотрел только случай, когда фазовое пространство изучаемой системы состоит лишь из конечного числа состоянии $\Omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$, и изучал изменение состояния системы лишь приразделении времени t на дискретные шаги. Но в этой крайне

схематизированной модели он сумел уловить ряд фундаментальных закономерностей.

Вместо функции F, однозначно определяющей состояние ω в момент времени $t > t_0$ по состоянию ω_0 в момент времени t_0, Марков вводит вероятности

$$P(t_0,\ \omega_i;\ t, \omega_j\ )$$

получения состояния ω_j в момент времени t при условии, что в момент времени t_0 имело место состояние ω_i. Эти вероятности Марков связывает для любых трех моментов времени

$$t_0 < t_1 < t_2$$

соотношением, которое можно назвать основным уравнением марковских процессов

$$P\ (t_0,\ \omega_i; t_2, \omega_j\ ) = \sum_{k=1}^{n} P(t_0,\ \omega_i; t_1, \omega_k)\ P(t_1,\ \omega_k; t_2, \omega_j\ ). \qquad (33)$$

Когда фазовое пространство является непрерывным многообразием, наиболее типичен случай существования *плотностей вероятности* $p(t_0,\ \omega_0; t, \omega)$ перехода из состояния ω_0 в состояние ω за промежуток времени (t_0, t). В этом случае вероятность перехода за промежуток времени между моментами t_0 и t из состояния ω_0 в какое-либо из состояний ω, принадлежащих области G фазового пространства Ω, записывается в виде

$$P(t_0,\ \omega; t,\ G) = \int_G p(t_0,\ \omega_0; t, \omega)\, d\omega \qquad (34)$$

где $d\omega$ – элемент объема в фазовом пространстве*. Для плотностей вероятности $p(t_0,\ \omega_0; t, \omega)$ основное уравнение (33) приобретает вид

---

* Собственно говоря, равенство (34) служит определением плотности вероятности. величина $p\, d\omega$ равна (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) вероятности перейти за время от t_0 до t из состояния ω_0 в элемент объема $d\omega$.

$$p(t_0,\,\omega;\,t_2,\omega_2)=\int_{\Omega} p(t_0,\,\omega_0;\,t_1,\omega_1)\,p(t_1,\,\omega_1;\,t_2,\omega_2)\,d\omega \qquad (35)$$

Уравнение (35) решить довольно трудно, но при известных ограничениях из него можно вывести дифференциальные уравнения в частных производных, которые легче поддаются изучению. Некоторые из этих уравнений были получены из нестрогих физических соображении физиками Фоккером и Планком. В полном виде теория так называемых стохастических дифференциальных уравнений была построена советскими авторами (С. Н. Бернштейн, А. Н. Колмогоров, И. Петровский, А. Я. Хинчин и др.).

Выписывать здесь эти уравнения мы не будем.

Метод стохастических дифференциальных уравнении позволяет, например, легко решить задачу о движении в спокойной атмосфере очень малого тела, для которого средняя скорость его падения с значительно меньше скорости его «броуновского движения», вызываемого тем, что из-за малости его размеров толчки молекул воздуха на противоположные его стороны не вполне уравновешиваются.

Пусть c – средняя скорость падения, D – так называемый коэффициент диффузии. Если предположить, что на земной поверхности частица не задерживается, а «отражается», то есть под действием броуновских сил вновь отправляется в путешествие по атмосфере, и допустить, что в момент времени t_0 частица находится на высоте z_0 то плотность вероятности $p(t_0,z_0;\,t,\,z)$ ее нахождения в момент времени t на высоте z выразится формулой

$$p(t_0,\,z_0;\,t,\,z)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi D(t-t_0)}}\left[e^{-\frac{(z-z_0)^2}{4D(t-t_0)}}+e^{-\frac{(z+z_0)^2}{4D(t-t_0)}}\right]e^{-\frac{c(z-z_0)}{2D}-\frac{c^2(t-t_0)}{4D}}+$$

$$+\frac{c}{D\sqrt{5}}e^{-\frac{cz}{D}}\int_{\frac{z+z_0-c(t-t_0)}{2\sqrt{D(t-t_0)}}}^{\infty}e^{-z^2}\,dz$$

На рис. 4 изображено, как могут меняться кривые $p(t_0,z_0;\,t,\,z)$ в последовательные моменты времени t.

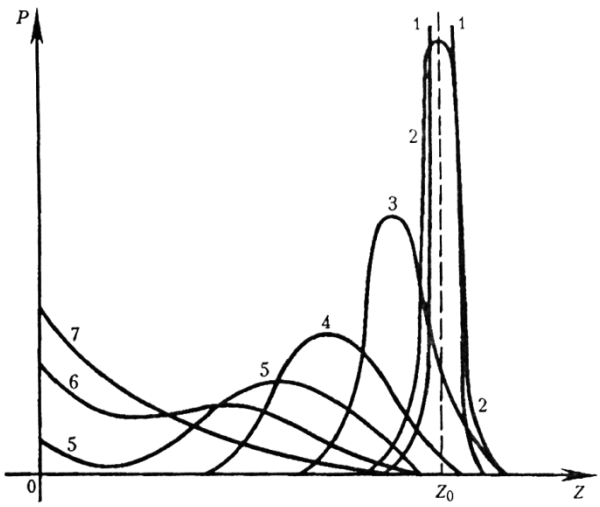


Рис. 4.

Мы видим, что в среднем высота частицы убывает, а положение ее становится все более неопределенным (все более «случайным»). Самое интересное заключается и том, что при любых t_0 и z_0 и при $t \to \infty$

$$p\,(t_0,\, z_0;\, t,\, z) \to \frac{c}{D}\, e^{-\frac{c^2}{D}} \tag{36}$$

то есть существует предельное распределение для высот частицы, и математическое ожидание высоты расположения частицы с возрастанием t стремится к положительному пределу

$$z^* = \frac{c}{D} \int_0^\infty z\, e^{-\frac{cz}{D}}\, dz = \frac{D}{c}\,. \tag{37}$$

Таким образом, несмотря на то, что наша частица, находясь над поверхностью земли, все время имеет тенденцию падать под действием силы тяжести, она при неограниченном продолжении этого процесса (блуждания в атмосфере) будет в среднем находиться на определенной положительной высоте. Если бы мы взяли начальное z_0 меньшим, чем z^*, то оказалось бы, что по истечении достаточно большого промежутка времени среднее положение частицы будет выше начального, как это изображено на рис. 5, где $z_0 = 0$.

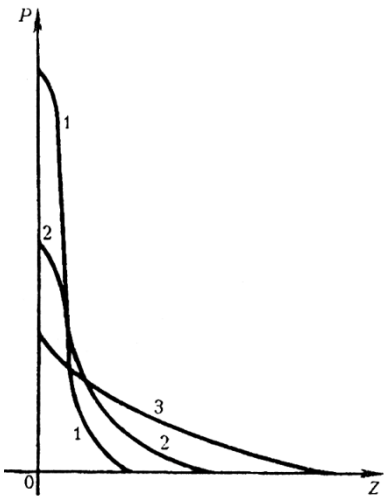


рис. 5.

Для отдельной частицы средние значения z^*, о которых идет речь, являются лишь математическими ожиданиями, но в силу закона больших чисел для большого числа частиц они будут осуществляться реально: плотность расположения такого рода частиц по высоте будет следовать указанным закономерностям и, в частности, по истечении достаточно большого промежутка времени стабилизируется в соответствии с формулой (36).

Все сказанное непосредственно применимо лишь к примешанным к воздуху в малой концентрации газам, дымам и т. п., так как величины c и D предполагались определенными заранее заданным состоянием атмосферы. Однако с некоторыми усложнениями теория применима к взаимной диффузии газов, составляющих атмосферу, и к возникающим на основе этой диффузии распределениям их плотностей по высоте.

С увеличением размеров частиц отношение $\frac{c}{D}$ возрастает, и благодаря этому процесс их перемещения вместо диффузионного характера приобретает характер закономерного падения по законам, рассмотренным в § 5. Теория позволяет проследить все переходы между чисто диффузным движением и таким закономерным падением.

Задача движения взвешенных в атмосфере частиц под действием турбулентного перемешивания более сложна, но в принципе тоже может быть подчинена аналогичным вероятностным методам.

ЛИТЕРАТУРА

Популярная литература

Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я., Элементарное введение в теорию вероятностей, 3-е изд., М. – Л., 1952.

Современные университетские курсы

Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 4-е изд., М. – Л., 1946.
Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 2-е изд., М. – Л., 1954.

Специальные монографии

Чандрасекар С., Перенос лучистой энергии, пер. с англ., М., 1953.
Эйнштейн А., Смолуховский М., Брауновское движение, пер. с нем., Сб. статей, М. – Л., 1936.

ЭНЦИКЛОПЕДИЧЕСКИЕ СТАТЬИ

В энциклопедиях прежних лет вопросам теории вероятностей и математической статистики уделялось немного места. Наиболее ранней (по-видимому первой) из этой тематики была статья «Стохастика. Искусство предположений» «Лексикона» (Mathematisches Lexicon) Х. Вольфа (Ch. Wolff, 1716); перевод этой статьи на русский язык опубликован в «Математическом энциклопедическом словаре» (М., 1988, стр. 776). В Энциклопедии (Encyclopédia, P., 1751-80) Д. Дидро (D. Diderot) и в ее систематизированном издании (Encyclopedic methodique, P., 1782-1832) помещены статьи по теории вероятностей, написанные Ж. Д'Аламбером (J. D'Alembert) и М. Кондерсе (M. Condercet); главная по объему и содержанию статья последнего – Probabilité.

В отечественных энциклопедиях прошлого (насколько это известно редакции) вопросы теории вероятностей и математической статистики обделены вниманием, что, видимо, связано со становлением этих наук. Лишь в 1-м издании «Большой Советской энциклопедии», осо-

бенно после прихода в 1936 в ее редакцию А. Н. Колмогорова, заметно некоторое оживление.

Во 2-м издании «Большой Советской энциклопедии» теоретико-вероятностная тематика представлена достаточно солидно. В частности, 18 статей написаны А. Н. Колмогоровым, важнейшие из них воспроизводятся ниже.

БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ЗАКОН – общий принцип, в силу которого совокупное действие большого числа случайных факторов приводит, при нек-рых весьма общих условиях к результату, почти не зависящему от случая. Точная формулировка и условия применимости Б. ч. з. даются в теории вероятностей. Б. ч. з. является одним из выражений диалектической связи между случайностью и необходимостью. Первая точно доказанная теорема, представляющая собой частный случай Б. ч. з., принадлежит Я. Бернулли (опубликована после его смерти в 1713). Теорема Бернулли была обобщена Пуассоном, в сочинении которого «Исследование о вероятности суждений» (1837) впервые появился термин «закон больших чисел». Значительно более общее понимание этого термина основано на работе П. Л. Чебышсва «О средних величинах» (1867). В атом современном понимании Б. ч. з, утверждает, что при некоторых, подлежащих точному указанию, условиях среднее арифметическое

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

достаточно большого числа *n* случайных величин x_k с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, сколь угодно мало отличается от своего математического ожидания $a = \mathbf{M}\,\bar{x}$ (см. *Ожидание математическое*).

Точная формулировка теоремы, доказанной Чебышевым, такова: если случайные величины последовательности $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ попарно независимы и имеют ограниченные *дисперсии* (см., ВИСМ, М., 1999), т. е.

$$\mathbf{D}(x_k) = \mathbf{M}\{x_k - \mathbf{M}(x_k)\}^2 \le C$$

то при любом положительном $\varepsilon > 0$ вероятность неравенства $|\bar{x} - a| < \varepsilon$ стремится к единице при $n \to \infty$.

Более точно характер отклонений среднего арифметического $\bar{x}$ или самой суммы

$$X = x_1 + x_2 + ... + x_n = n\bar{x}$$

от соответствующих математических ожиданий a и

$$A = \mathbf{M}(X) = na,$$

указывается предельными теоремами теории вероятностей. Наиболее типичен случаи, когда отклонения $x - a$ имеют порядок $\frac{1}{\sqrt{n}}$, а отклонения $X - A$, в соответствии с этим, порядок $\sqrt{n}$, в то время как сами математич. ожидания a и A имеют порядок 1 и n. В упрощенных популярных изложениях вопроса эти соотношения иногда называют «законом квадратного корня из n»: при накоплении независимых случайных слагаемых их сумма растет пропорционально n, а случайные отклонения от этого закономерного среднего роста возрастают лишь пропорционально $\sqrt{n}$. Хотя для более полного понимания вопроса необходимо обращаться к более точным формулировкам, все же это грубое представление о характере действия Б. ч. з. может помочь разобраться в том, насколько велико должно быть число слагаемых, чтобы Б. ч. з. действовал с той или иной степенью точности.

В частности, когда каждое слагаемое x_k принимает только два значения 1 и 0, причем $x_k = 1$ с вероятностью p_k и $x_k = 0$ с вероятностью $1 - p_k$, легко подсчитать, что

$$a = \frac{p_1 + p_2 + ... + p_m}{n}$$

а $\bar{x}$ превращается в частоту $\frac{m}{n}$, где m обозначает число тех r_k с номерами $k \leq n$, которые равны 1. Б. ч. з. означает в этом случае, что при больших n частота $\frac{m}{n}$ близка к среднему арифметическому из вероятностей. Это и есть Б. ч. з. Пуассона. Точная формулировка теоремы Пуассона такова: если случайные события $A_1, A_2, ..., A_n, ...$

взаимно независимы, то для частот $\frac{m}{n}$, – где m обозначает число тех из событий A_k с номерами $k \le n$, которые произойдут в действительности, – при любом $\varepsilon > 0$ вероятность неравенства

$$\left| \frac{m}{n} - a \right| < \varepsilon$$

стремится к единице при $n \to \infty$. Строгое доказательство теоремы Пуассона было дано П. Л. Чебышевым в статье «Элементарное доказательство одного общего предложения теории вероятностей» (1843). Теорема Бернулли является частным случаем теоремы Пуассона, который получается, если положить все p_k равными одному и тому же числу p $(0 < p < 1)$. В этом случае $a = p$, Б. ч. з. утверждает, что при больших n с вероятностью, как угодно близкой к единице, частота $\frac{m}{n}$ будет как угодно близка к вероятности p.

Наглядное представление о смысле и значении Б. ч. з. дает следующий пример. Пусть в замкнутом сосуде заключены N молекул газа. В соответствии с кинетической теорией каждая молекула беспорядочно движется внутри сосуда, испытывая множество столкновений с другими молекулами и стенками сосуда. Ударяясь о какую-либо площадку σ стенки в течение выбранного промежутка времени в t секунд, отдельная молекула сообщает этой площадке импульс f_k. Импульс f_k является типичной случайной величиной, так как состояние рассматриваемого газа определяет лишь математическое ожидание

$$a = \mathbf{M}(f_k)$$

этого импульса, фактическое же значение импульса данной молекулы за данный промежуток времени может быть самым различным (начиная от нуля – в случае, если за данный промежуток времени данная молекула не ударялась о площадку σ). Сумма

$$F = \sum_{k=1}^{N} f_k$$

импульсов всех молекул, сообщаемых площадке σ за данный промежуток времени, является также случайной величиной с математическим ожиданием, равным $A = N a$. Однако в силу Б. ч. з. (который проявляется здесь с исключительной точностью благодаря тому, что число N очень велико) F в действительности оказывается почти независимым от случайных обстоятельств движения отдельных молекул, а именно – почти точно равным своему математич. ожиданию A. Этим, с точки зрения кинетической теории, и объясняется тот факт, что давление газа на площадку а является практически строго постоянным, а не колеблется беспорядочно.

Часто приходится применять Б. ч. з. и в такой обстановке, когда количество случайных слагаемых не столь велико, как в примере с газовыми молекулами; тогда отклонения суммы случайных величин от ее математич. ожидания могут быть значительными. В этом случае крайне важно уметь оценивать размеры этих отклонений. Пусть, напр., из 1000 партий каких-либо изделий по 100 штук в каждой, взято для испытания наудачу по 10 штук из каждой партии и среди испытанных 10 000 штук обнаружено 125 дефектных. Если обозначить n_k число дефектных изделий в k-й партии то общее число дефектных изделий равно

$$n = \sum_{k=1}^{1000} n_k$$

математическое ожидание числа дефектных изделий среди тех десяти, которые взяты для испытания из k-й партии, равно

$$S_k = \frac{10}{100}\, n_k$$

математическое ожидание общего числа дефектных изделий в 1000 пробах по 10 штук –

$$S = \sum_{k=1}^{1000} S_k = \frac{1}{10} n$$

В силу Б. ч. з. естественно $\frac{1}{10} \cdot n \sim 125$ считать, что, т.е. среди 100 000 изделий во всех партиях имеется приблизительно 1 250 де-

фектных. Более точное исследование с помощью теории вероятностей приводит к такому результату, если выборка изделий из каждой партии была действительно случайной, то можно с достаточной уверенностью утверждать, что фактически $1000<n<1500$, но уже оценка $1100<n<1400$ не была бы достаточно надежной, а для оценки $1200<n<1300$ совсем не имеется серьезных оснований. Получить более точную оценку для n можно, лишь испытав большее число изделий.

Условие независимости слагаемых, в большинстве применений Б.ч.з., если и выполняется, то лишь с тем или иным приближением. Так, уже в первом примере движения отдельных молекул газа нельзя, строго говоря, считать независимыми. Поэтому имеет большое значение достаточно полное исследование условий применимости Б. ч. з. к случаю зависимых слагаемых. Основные математические работы в этом направлении принадлежат А. А. Маркову, С. Н. Бернштейну и А. Я. Хинчину. Качественно результаты их исследований сводятся к тому, что Б. ч. з. применим, если значительная зависимость имеется лишь между смежными или близкими (по их номерам) слагаемыми, а между слагаемыми с далекими номерами зависимость достаточно слаба. Таково, напр., положение в рядах метеорологических наблюдений над температурой или давлением воздуха. Поэтому многолетние средние значения температур и давлений в данном пункте и в данное время года оказываются близкими к своим математическим ожиданиям, которые являются объективными характеристиками климата данной местности.

Математическая сторона вопросов, связанных с Б. ч. з., более подробно освещена в ст. «*Предельные теоремы*» теории вероятностей и «*Теория вероятностей*» (см., ВИСМ, М., 1999). В применениях Б. ч. з. обычно достаточно бывает пользоваться сравнительно простыми математич. формулировками условий его применимости, имеющимися во многих учебниках по теории вероятностей, но необходимо тщательно проверять их соответствие реальной обстановке.

Лит.: Чебышев П.Л., О средних величинах, Полное собр. соч., т. 2, М.-Л., 1947; Бернштейн С. Н., О работах П.Л. Чебышева по теории вероятностей, в кн.: Научное наследие П.Л. Чебышева. [Сб. статей], и. 1, М. – Л., 1945; его же, Теория вероятностей, 4-е изд., М.-Л., 1946; Колмогоров А. Н., Роль русской науки в развитии теории вероятностей, «Ученые записки Московского гос. ун-та», 1947, в. 91, с. 53-64; Гнеденко Б. В. и Колмогоров А. Н., Теория вероят-

ностей, в кн.: Математика в СССР :ia тридцать лет 1917-1947. Сб. статей под ред. А.Г. Куроша [и др.], М.-Л., 1948; Гнеденко Б. В. и Хинчин А. Я., Элементарное введение в теорию вероятностей, М. – Л., 2-е изд., 1950.

А.Н. КОЛМОГОРОВ (БСЭ-2, 1950, том 5).

ИНФОРМАЦИЯ – основное понятие *кибернетики* (см., ВИСМ, М., 1999). Можно считать общепонятным представление о том, что наше мышление способно перерабатывать И., содержащуюся в тех или иных «данных», в выводы относительно интересующих нас величин или явлений (напр., И., содержащуюся в уравнении $x^2 = 1$, в вывод о том, что $x = \pm 1$, или результаты наблюдений сети метеорологич. станций за данный день в прогноз погоды на следующий день). В кибернетике такого рода представления обобщаются и принимаются, что при любом процессе управления или регулирования, осуществляемом живым организмом (сознательно или бессознательно) или автоматически действующей машиной, происходит переработка содержащейся во «входных сигналах» И. в «выходные сигналы». Теория И. (см. статью *Информации теория,* 51 т.), возникшая из нужд техники связи, рассматривает электрические импульсы, тире и точки на телеграфной ленте и т. и. объекты как носителей И. Во всех этих случаях можно говорить о количестве И., ее большей или меньшей полноте надежности и т. п. Вопрос о точном определении самого понятия и смысла различных высказываний об И. возникал и благополучно решался в применении к различным частным случаям с давних пор. Но во всей широте такого рода логические проблемы возникают лишь в кибернетике и теории И.

И. можно рассматривать с точки зрения ее 1) количества, 2) содержания, 3) способа задания.

Пример 1. При задании пятизначного числа в указании его тысяч и сотен содержится столько же И., как и в указании его десятков и единиц, и вдвое больше, чем при указании одних единиц. И., содержащаяся в указании одних единиц, содержится в И., доставляемой указанием единиц и десятков, и составляет по количеству ее половину.

Пример 2. И. относительно неизвестных *x* и *y,* доставляемая соотношением

$$x^2 - y^2 = 0, \qquad (1)$$

содержится в И., доставляемой соотношением

$$x - y = 0 \qquad (2)$$

[так как из (2) вытекает (1)], но не совпадает с ней [так как уравнения (1) и (2) не равносильны]. И., содержащаяся в соотношениях (2) и

$$x + y = 0 \qquad (3)$$

совпадает с информацией, даваемой равенствами

$$x = 0\,, \quad y = 0 \qquad (4)$$

[так как система уравнений (2–3) равносильна системе (4)]. И., содержащиеся в системах (2–3) и (4), отличаются только по форме задания.

Более сложные вопросы относительно условий совпадения по содержанию И., доставляемой различными данными, возникли в математической статистике и были в основном решены английским статистиком Р. Фишером (1921). Статистика имеет дело с большим числом результатов наблюдений и обычно заменяет их полное перечисление указанием некоторых «свободных характеристик». Иногда при такой замене происходит «потеря И.», но при некоторых условиях сводные характеристики содержат всю И., содержащуюся в полных данных. В этом случае сводные характеристики образуют систему *достаточных статистик* (см. 51 т.) задачи.

Первые отчетливые предложения об общих способах измерения количества И. принадлежат, по-видимому, Р. Фишеру (в связи с вопросами математической статистики) и Р. Хартли (в связи с вопросами хранения И. в запоминающих устройствах и передачей И. по каналам связи). Свое окончательное выражение эти предложения нашли в теории И., созданной американским ученым К. Шенноном (1948).

Пусть заранее известно, что явление a может произойти в одном из вариантов

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

сообщение же b о нем может иметь одни из видов

$$b_1, b_2, \ldots, b_n$$

В теории И. предполагается, что a и b имеют совместное распределение вероятностей

$$\mathbf{P}(a = a_i, b = b_j) = p(a_i, b_j)$$

оно определяет распределения a и b в отдельности:

$$p\,(a_i) = \sum_j p(a_i, b_j),$$

$$p\,(b_j) = \sum_i p(a_i, b_j).$$

По Шеннону, количество И., содержащееся в b относительно a, равно

$$\mathbf{I}(a, b) = \sum_{i,j} p(a_i, b_j)\ \log_2 \frac{p(a_i, b_j)}{p(a_i)p(b_j)} \tag{5}$$

(в теории И. логарифмы берутся по основанию 2). Если каждому b_j – соответствует одно единственное a_i, для которого вероятность $p(a_i, b_j)$ положительна, то есть если a_i – однозначно определяется заданием b_j, то, как легко вычислить:

$$\mathbf{I}(a, b) = H(a) = \sum_i p(a_i) \log_2 p(a_i). \tag{6}$$

Величина $H(a)$ есть э н т р о п и я распределения $p(a_i)$; она равна полному количеству И., необходимому, чтобы точно указать, какой вариант a_i – явления a осуществился. Во всех остальных случаях, когда задание b_j еще не определяет однозначно a_i.

$$\mathbf{I}(a,\ b) < H(a).$$

Всегда

$$\mathbf{I}(a, b) \geq 0$$

Равенство

$$\mathbf{I}(a, b) = 0$$

имеет место в том и только в том случае, когда a и b независимы, т. е.

$$p(a_i, b_j) = p(a_i) \cdot p(b_j).$$

Количество И. при однозначном указании осуществившегося варианта явления a

$$\mathbf{I}(a, a) = H(a)$$

достигает максимума

$$H(a) = \log_2 m$$

в случае

$$p(a_1) = p(a_2) = \ldots = p(a_m) = \frac{1}{m}.$$

Этот результат соответствует другому возможному представлению о количестве И., свободному от представления теории вероятностей. Если

$$2^{k-1} \le m < 2^k$$

то приближенно

$$H(a) = \log_2 m \sim n$$

число же n есть число двоичных знаков (0 или 1), достаточное для записи по двоичной системе счисления любого целого числа в пределах $1 \le i \le m$, то есть номера любого из возможных значений a_i.

А. Н. КОЛМОГОРОВ (БСЭ-2, 1958, том 51).

КОРРЕЛЯЦИЯ (мат.), связь между явлениями. Понятие К. более обще, чем понятие функциональной зависимости (см. *Функция)*. Напр., известно, что у родителей большого роста чаще родятся дети большого роста, чем у родителей малого роста. Однако, зная рост отца и матери, нельзя еще в каждом отдельном случае вычислить рост ребенка. К. между двумя явлениями возникает: или если одно из них входит в число причин, определяющих другое, или если имеются общие причины, воздействующие на оба явления. Для того, чтобы суждение о К. между двумя явлениями имело определенный объективный смысл, необходимо (за исключением частного случая функциональной зависимости), чтобы рассматриваемые явления могли повторяться неограниченное число раз и можно было бы говорить о *вероятностях* (см., ВИСМ, М., 1999) могущих возникнуть при этом комбинаций.

К. между двумя событиями. Рассмотрим два события A и B. Будем обозначать через $\overline{A}$ событие, противоположное A (т. е.

заключающееся в том, что событие A не происходит), и через $\overline{B}$ – событие, противоположное B. Если каждый раз, как происходит событие A, происходит и B, и, наоборот, каждый раз, как происходит B, происходит и A, то события A и B связаны между собой прямой функциональной зависимостью. Если же событие A происходит тогда и только тогда, когда событие B не происходит, то A и B связаны обратной функциональной зависимостью. За исключением этих двух крайних случаев, для оценки связи между событиями A и B неизбежно воспользоваться понятием вероятности. Пусть $P_A(B)$ есть вероятность события B при условии, что событие A произошло, а $P_{\overline{A}}(B)$ – вероятность события B, при условии,что событие A не произошло. Если $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B)$, то событие B независимо от события A. Разность $\rho_B = P_A(B) - P_{\overline{A}}(B)$ называется коэффициентом регрессии события B относительно события A.

Рассмотрим такой пример: при лечении дифтерии применяется противодифтерийная сыворотка. Обозначим применение сыворотки через A, выздоровление больного через B. Если бы при применении сыворотки все больные выздоравливали, а без ее применения – умирали, то мы имели бы прямую функциональную зависимость; если бы $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B)$, то есть если бы количества случаев выздоровления были бы одинаковы как при применении сыворотки, так и без нее, то, очевидно, применение сыворотки было бы бесцельно, так как в соответствии с данным выше определением, событие B (выздоровление) было бы независимо от события A (применения сыворотки). Если же, напр., $P_A(B) = 0{,}97$, а $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}85$, то коэффициент $\rho_B = 0{,}12$ показывал бы наличие положительной связи между применением сыворотки и выздоровлением.

Коэффициент регрессии ρ_B равен +1 при положительной функциональной связи, нулю – при независимости B от A и –1 – при отрицательной функциональной связи; в остальных случаях он принимает значения между –1 и +1, не равные нулю. Во многих вопросах нет никаких оснований измерять связь между A и B непременно при помощи коэффициента $\rho_B = P_A(B) - P_{\overline{A}}(B)$, и не при помощи аналогичного коэффициента регрессии $\rho_A = P_B(A) - P_{\overline{B}}(A)$ события A относительно B. В этом случае может

быть удобен коэффициент К. между событиями A и B: $R = \pm\sqrt{\rho_A \, \rho_B}$. Знак R должен совпадать со знаком обоих коэффициентов регрессии (они имеют всегда одинаковый знак). Коэффициент К. обращается в нуль тогда и только тогда, когда события A и B независимы (если событие B независимо от A, то, как легко доказывается, и событие A независимо от B), и равняется ± 1 в случае функциональной зависимости и только в этом случае.

К. между двумя величинами. Величина y зависит функционально от величины x, если каждому значению x соответствует вполне определенная величина $y = f(x)$. Если такой зависимости нет, то в случае статистических (неограниченно повторяющихся с определенными вероятностями) явлений мы можем определить для каждого возможного значения x соответствующее *математическое ожидание* (см., ВИСМ, М., 1999) $\mathbf{M}_x(y) = f(x)$ величины y при условии заданного значения x (мы оставляем в стороне имеющие чисто теоретический интерес случаи, в которых математическое ожидание бесконечно или неопределенно). Уравнение $y = f(x)$ называется уравнением регрессии величины y относительно x, а линия $y = f(x)$ на плоскости (x, y) – линией регрессии y относительно x. Обозначим $a_y = \mathbf{M}(y)$ математическое ожидание y (безусловное математическое ожидание). В случае, если величины x и y независимы, уравнение регрессии имеет вид $y = a_y$ [т. к. тогда $\mathbf{M}_x(y) = \mathbf{M}(y) = a_y$]. Заметим, что из того, что уравнение регрессии есть $y = a_y$ еще не следует независимости x и y ; напр. с изменением x математическое ожидание y может оставаться неизменным, но средняя колеблемость y, измеряемая хотя бы при помощи $\mathbf{M}_x(y - a_y)^2$, может зависеть от x. Естественно желание определить, насколько хорошо уравнение регрессии передает изменение y, иначе говоря, в какой мере зависимость между x и y близка к функциональной. На этот вопрос дает ответ корреляционное отношение y к x [введено *Пирсоном* (см., ВИСМ, М., 1999)]:

$$P_y = + \sqrt{1 - \frac{\mathbf{M}[y - \mathbf{M}_x(y)]^2}{\mathbf{M}\,(y - a_y)^2}}$$

$P_y = 0$ тогда и только тогда, когда уравнение регрессии имеет вид $y = a_y$, т. е. математическое ожидание y не зависит от x; $P_y = +1$ в случае функциональной зависимости y от x. В остальных случаях P_y принимает промежуточное значение между 0 и +1.

Практически приходится вычислять уравнение регрессии по ограниченному числу наблюдений, имеющих ограниченную точность. Данные опыта непосредственно выражаются корреляционной таблицей, в которой указывается, в каком числе наблюдений получилась данная комбинация значений величин x и y (см. схематический пример на табл. 1).

Т а б л. 1

y	x									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	–	1	–	–	–	–	–	1	1
2	1	1	2	–	–	–	1	2	–	2
3	–	2	1	3	1	1	–	4	2	–
4	–	–	–	1	4	3	4	1	–	–
5	–	–	–	–	2	3	–	–	–	–

Если на каждое отдельное значение x приходится достаточно много отдельных наблюдений, то линия регрессии $y = f(x)$ может быть приближенно определена очень просто: для каждого значения $x_i = x_i$, – определяется среднее значение $\bar{y}_i$ величины y в наблюдениях с данным значением $x_i = x_i$, $\bar{y}_i = f(x_i)$ и представляет приближенно линию регрессии. Однако, если число наблюдений, соответствующих каждому значению $x_i = x_i$, $\bar{y}_i = f(x_i)$ недостаточно велико, то такой метод может привести к совершенно случайным результатам.

Таблица 2 дает $\bar{y}_i$ соответствующие данным табл. 1. Уже простой здравый смысл подсказывает, что линия регрессии $y = f(x)$ должна, начинаясь примерно с 1,5 при x = 1, подниматься примерно до 4, около x = 5 или 6 и вновь спускаться при дальнейшем возрастании x. Однако такие обстоятельства, как, напр., дополнительный максимум $\bar{y}_i$ – при x = 2 с последующим уменьшением $\bar{y}_i$ при x = 3, могут при данном числе наблюдений считаться чисто случайными.

Т а б л. 2

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{y}_i$	1,5	2,7	2,0	3,2	4,1	4,4	3,4	2,8	2,2	1,7

Нормальная К. между двумя величинами. В силу ряда оснований, к-рые с наибольшей полнотой были теоретически изучены акад. С. Н. Бернштейном, корреляционная зависимость между двумя величинами x и y в очень многих случаях с известным приближением является нормальной, то есть вероятность того, что точка с координатами x и y попадает в какую-либо область плоскости (x, y), приближенно изобразится интегралом

$$\frac{1}{\Delta}\iint\limits_G e^{\frac{-1}{2(1-R^2)}\left[\frac{(x-a_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-a_y)^2}{\sigma_y^2}-\frac{2R(x-a_x)(y-a_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]}dx\,dy$$

где $\Delta = 2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-R^2}$, $a_y = \mathbf{M}(y)$, $\sigma_y = +\sqrt{\mathbf{M}(y-a_y)^2}$ – дисперсия величины y, $a_x = \mathbf{M}(x)$, $\sigma_x = +\sqrt{\mathbf{M}(x-a_x)^2}$ – математическое ожидание и дисперсия величины x и, наконец, R – коэффициент К. величин x и y:

$$R = \frac{\mathbf{M}\{(x-a_x)(y-a_y)\}}{\sigma_x\sigma_y}.$$

В случае нормальной К. уравнение регрессии $y = f(x)$ имеет вид:

$$y = a_y + \rho_y(x-a_x),$$

где

$$\rho_y = R\,\frac{\sigma_y}{\sigma_x},$$

то есть линия регрессии в случае нормальной К. есть прямая. Корреляционное отношение Пирсона P_y равно в случае нормальной К. коэффициента корреляции R. Употребление коэффициента К. в качестве меры зависимости между x и y в случае связей, сильно отличающихся от нормальной, приводит иногда к ошибочным выводам, так как коэффициент К. может равняться нулю даже в случае, когда y функционально зависит от x. Таблица 1 также представляет пример довольно сильной связи y с x, при которой,

однако, коэффициент К. близок к нулю. Заметим еще, что в случае нормальной К. уравнение регрессии *x* относительно *y* есть

$$x = a_x + \rho_x (y - a_y),$$

где

$$\rho_x = R \frac{\sigma_x}{\sigma_y}.$$

Коэффициенты ρ_y и ρ_x называются коэффициентами регрессии y относительно x и x относительно y. Знак ρ_y и ρ_x всегда одинаков (и совпадает с знаком R). Очевидно, $R = +\sqrt{\rho_x \rho_y}$. Фактическое вычисление коэффициента К. производится по формуле

$$R^* = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}}$$

где $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i$, n – число наблюдений, а x_i и y_i – значения x и y при i-ом наблюдении. Эта формула дает непосредственно так наз. эмпирический коэффициент К. R^* данного ряда наблюдений. При большом числе n отдельных наблюдений R^* близок к истинному коэффициенту К. R.

Таблица 3 дает пример корреляционной связи, хорошо согласующейся с гипотезой нормальной К. Эмпирический коэффициент К. R^* здесь равен 0,6279. Число наблюдений вполне достаточно, чтобы считать, что R достаточно близко к R^*.

Т а б л. 3. – К о р р е л я ц и о н н а я с в я з ь м е ж д у р о с т о м и в е с о м п р и з ы в н и к о в

Вес в кг	Рост в см								
	До 154	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182	Более 182
До 45	32	42	29	9	1	2	–	–	–
45-49	63	30	421	233	60	9	3	–	–

		4							
49-53	40	273	952	1.050	433	91	13	2	–
53-57	13	174	874	1.730	1.288	482	60	12	1
57-61	7	43	317	1.175	1.543	947	219	29	–
61-65	–	7	87	381	903	866	360	61	7
65-69	–	1	4	61	245	377	231	80	8
69-73	–	–	1	13	43	86	91	48	9
73-77	–	–	2	2	6	27	31	14	13
Более 77	–	–	–	–	5	10	9	11	3

Множественная К. Аналогичными способами изучается связь между многими событиями и величинами. Большое значение имеет во многих приложениях (напр., предсказание урожаев, разливов рек) составление уравнений регрессии, связывающих неизвестную величину с рядом известных. В случае множественной К. особенно опасно делать выводы из данных недостаточно большого числа наблюдений. Одной из основных проблем теории К. и является выяснение числа наблюдений, достаточных, при тех или иных обстоятельствах, для составления надежных уравнений регрессии.

Лит.: О п р е д е л е н и я и о с н о в н ы е п о н я т и я, см. – Б е р н ш т е й н С. Н., Теория вероятностей, 3 изд., М. – Л., 1934; С л у ц к и й Е. Е., Теория корреляции и элементы учения о кривых распределения, Киев, 1912; Ч у п р о в А. А., Основные проблемы теории корреляции. О статистическом исследовании свяли между явлениями, [М.|, 1926; T s c h u p r o w A. A., Grundbegriffe und Grundprobleme der Korrelationstheorie, Lpz., 1925.

А. Н. КОЛМОГОРОВ (БСЭ-1, 1937, том 34).

КОРРЕЛЯЦИЯ (в м а т е м а т и ч е с к о й с т а т и с т и к е) – статистическая или вероятностная зависимость, не имеющая, вообще говоря, строго функционального характера. В отличие от функциональной, корреляционная зависимость возникает тогда, когда один из признаков зависит не только от данного второго, но и от ряда других меняющихся условий или же оба зависят от условий, среди которых имеются общие для них обоих. Пример такого рода зависимости дает табл. 1. Из таблицы видно, что при увеличении высоты сосен в с р е д

н е м растет и диаметр их стволов; однако сосны заданной высоты (напр., 23 м) имеют *распределение* (см.) диаметров с довольно большим рассеянием. Если в среднем 23-метровые сосны толще 22-метровых, то для отдельных сосен это соотношение может заметным образом нарушаться.

Т а б л. 1. – Р а с п р е д е л е н и е д и а м е т р о в и в ы с о т 624 с т в о л о в с е в е р н о й с о с н ы

Диаметр (в см)	Высота (в м)														
	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	Итого
14-17	2	2	5	1											10
18-21	1	3	3	12	15	9	4								47
22-25	1	1	1	3	18	24	29	14	7						98
26-29					7	18	30	43	31	3	2				134
30-33					1	5	18	29	35	18	7	1			114
34-37						1	3	17	33	26	12	6			98
38-41							2	2	10	19	16	4			53
42-45									4	13	6	8		1	32
46-49									3	7	6	2	1		22
50-53									1	4	4	2	1		12
54-57										1	1	1			3
58 и более											1				1
Итого	4	6	9	16	41	57	86	108	124	91	55	24	2	1	624

Статистическая К. признаков в обширной совокупности объектов математически может быть охарактеризована различными способами. В случае К. двух количественных признаков наиболее употребителен коэффициент К.:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sigma_x \sigma_y}$$

где n – число объектов исследуемой совокупности, x_i и y_i – значения соответственно первого и второго признака для объекта с номером i,

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \ , \ \ \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$$

– средние значения признаков, а

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \ ,$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

– их *дисперсии* (см., ВИСМ, М., 1999). Статистическая К. в обследованной конечной совокупности наиболее интересна тогда, когда она указывает на существование закономерной связи между изучаемыми признаками.

Дальнейшее изложение ведется в основном в терминах теории вероятностей.

Корреляция между двумя событиями. Рассмотрим два события A и B. Будем обозначать через $\overline{A}$ событие, противоположное A (то есть заключающееся в том, что событие A не происходит), и через $\overline{B}$ – событие, противоположное B. Если каждый раз, как происходит событие B, происходит и A, а когда происходит B**,** то имеет место A, то события A и B связаны между собой прямой строгой зависимостью. Строгая зависимость противоположного характера будет наблюдаться в том случае, если событие A наступает тогда и только тогда, когда B не происходит, и наоборот. За исключением этих двух крайних случаев, для оценки связи между событиями A и B пользуются понятием вероятности. Пусть $P(B \setminus A)$ есть вероятность события B при условии, что событие A произошло, а $P(B \setminus \overline{A})$ – вероятность события B при условии, что событие A не произошло. Если $P(B \setminus A) = P(B \setminus \overline{A})$, то событие B независимо от события A. Разность

$$\rho_B = P(B \setminus A) - P(B \setminus \overline{A})$$

называют коэффициентом регрессии события B относительно события A.

Рассмотрим такой пример: при лечении дифтерии применяется противодифтерийная сыворотка. Обозначим применение сыворотки через *A,* выздоровление больного через *B.* Если бы при применении сыворотки все больные выздоравливали, а без нее – умирали, то мы имели бы прямую строгую зависимость; если бы $P(B \setminus A) = P(B \setminus \overline{A})$, то есть если бы относительные количества случаев выздоровления были бы одинаковы как при применении сыворотки, так и без нес, то, очевидно, применение сыворотки было бы бесцельно, так как в соответствии с данным выше определением событие *B* (выздоровление) было бы независимо от события *A* (применения сыворотки). Если же, напр., $P(B \setminus A) = 0{,}97$, а $P(B \setminus \overline{A}) = 0{,}85$, то коэффициент $\rho_B = 0{,}12$ показывал бы наличие положительной связи между применением сыворотки и выздоровлением.

Коэффициент регрессии ρ_B равен +1 при прямой строгой зависимости, нулю при независимости *B* от *A* и –1 при противоположной строгой зависимости; в остальных случаях он принимает значения между –1 и не равные нулю. Во многих вопросах нет никаких оснований измерять связь между A и B непременно при помощи коэффициента ρ_B, с при помощи аналогичного коэффициента регрессии

$$\rho_A = P(A \setminus B) - P(A \setminus \overline{B})$$

событня *A* относительно *B.* В этом случае может быть использован также коэффициент к о р р е л я ц и и между событиями A и B:

$$R = \pm \sqrt{\rho_A \rho_B}$$

Знак *R* должен совпадать со знаком обоих коэффициентов регрессии (они имеют всегда одинаковый знак). Коэффициент К. обращается в нуль тогда и только тогда, когда события A и B независимы (если событие B независимо от A, то, как легко доказывается, и событие A независимо от B), и равняется ± 1 в случае строгой зависимости и только в этом случае.

Корреляция между двумя величинами. Если между величинами ξ и η нет строгой (функциональной) связи, то при наличии определенных веоятностей можно определить для каждого возможного значения $\xi = x$ первой величины соответствующее условное математич. ожидание $\mathbf{M}(\eta \mid \delta = x) = f(x)$ (см. *Ожидание математическое*). Уравнение $y = f(x)$ называют у р а в н е н

и е м р е г р е с с и и величины η относительно ξ, а линию $y = f(x)$ па плоскости xoy – л и н и е й р е г р е с с и и η относительно ξ. Обозначим через $m_\eta = \mathbf{M}(\eta)$ безусловное математич. ожидание η. В случае, когда величины ξ и η независимы, уравнение регрессии имеет вид $y = m_\eta = \text{const}$, то есть тогда $\mathbf{M}(\eta | \xi = x) = \mathbf{M}(\eta)$, то есть все условные математические ожидания совпадают с безусловными. Обратное заключение не всегда справедливо. Естественно желание определить, насколько хорошо уравнение регрессии передает изменение η при изменении ξ, иначе говоря, в какой мере зависимость между ξ и η близка к строгой. Для этой цели может быть использована условная дисперсия η при данном значении $\xi = x$ или ее средняя величина – д и с п е р с и я η о к о л о л и н и и р е г р е с с и и:

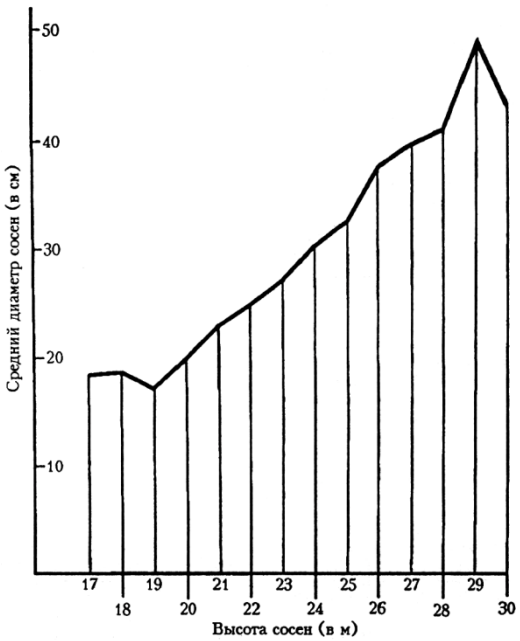
$$\sigma^2_{\eta|\xi} = \mathbf{M}\,[\eta - \mathbf{M}\,(\eta \,|\, \xi = x)\,]^2$$

Обычно рассматривают в качестве показателя связи к о р р е л я ц и о н н о е о т н о ш е н и е

$$\theta^2_{\eta|\xi} = 1 - \frac{\sigma^2_{\eta\,|\,\xi}}{\sigma^2_\eta}$$

где σ^2_η – дисперсия величины η. Аналогично определяется и корреляционное отношение $\theta^2_{\eta|\xi}$. Величина $\theta^2_{\eta|\xi}$ равняется нулю тогда и только тогда, когда уравнение регрессии имеет вид $y = m_\eta$, то есть математич. ожидание η не зависит от ξ; $\theta^2_{\eta|\xi}$ равняется +1 в случае строгой зависимости η от ξ. В остальных случаях $\theta^2_{\eta|\xi}$ принимает промежуточное значение между 0 и + 1.

Вероятностная линия регрессии может быть приближенно восстановлена по достаточно обширной корреляционной таблице; за приближенное значение $f(x)$ принимают среднее из значений η в тех наблюдениях, в которых $\xi = x$. Однако, если число наблюдений, соответствующих каждому значению ξ, недостаточно велико, то такой метод может привести к совершенно случайным результатам.



Статистическая зависимость регрессии для зависимости среднего диаметра северной сосны от высоты.

На рисунке изображена статистическая линия регрессии для зависимости среднего диаметра обследованных сосен от высоты в соответствии с табл. 2. В средней части эта линия, по-видимому, хорошо выражает действительную закономерность. Точки линии, соответствующие высотам 29 и 30 *м,* не надежны ввиду малочисленности материала. Точки, соответствующие высотам 17, 18 и 19 м, искажены системой отбора материала: в таблицу включены лишь сосны с диаметром ≥ 14 *см.*

Табл. 2. – Зависимость средних диаметров (по данным таб. 1)

	Высота (в *м*)														Итого
	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Число сосен	4	6	9	16	41	57	86	108	124	91	55	24	2	1	624
	18,5	18,8	17,7	20	22,9	25	27,2	30,1	32,7	38,3	40	41,8	42,8	43,5	31,2

Средний диаметр **(в см)**															

В *математической статистике* (см., ВИСМ, М., 1999) разработаны и другие, более совершенные способы приближенного нахождения линий регрессии и корреляционного отношения по ограниченному статистич. материалу, а также способы оценки точности таких статистически найденных линий регрессии и корреляционного отношения (см. *Регрессия,* ВИСМ, М., 1999).

Нормальная корреляция между двумя величинами. В силу ряда оснований, которые с наибольшей полнотой были теоретически изучены советским математиком С. Н. Бернштейном, корреляционная зависимость между величинами ξ и η в очень многих случаях с известным приближением является нормальной, то есть вероятность того, что точка с координатами x и y попадает в какую-либо область G плоскости *xoy,* приближенно изобразится интегралом

$$\frac{1}{\Delta}\iint\limits_G e^{Q(x,y)}\,dx\,dy$$

где

$$Q(x,y)=\frac{-1}{2(1-R^2)}\left[\frac{(x-m_\xi)^2}{\sigma_\xi^2}+\frac{(y-m_\eta)^2}{\sigma_\eta^2}-\frac{2R(x-m_\xi)(y-m_\eta)}{\sigma_\xi\sigma_\eta}\right].$$

$$m_\xi=\mathbf{M}(\xi),\quad m_\eta=\mathbf{M}(\eta),$$

$$\sigma_\xi^2=\mathbf{M}(\xi-\mathbf{M}\xi)^2\ ,\quad \sigma_\eta^2=\mathbf{M}(\eta-\mathbf{M}\eta)^2$$

– математическое ожидание и дисперсия величин ξ и η, $\Delta=2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta\sqrt{1-R^2}$ и R – коэффициент К. величин ξ и η:

$$R=\frac{\mathbf{M}\,(\xi-m_\xi)\,(\eta-m_\eta)}{\sigma_\xi\ \sigma_\eta}$$

В случае нормальной К. уравнение регрессии $y = f(x)$ имеет вид:

$$y = m_\eta + \rho_\eta\,(x - m_\xi)$$

где

$$\rho_\eta = R\,\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi},$$

то есть линия регрессии – прямая. Корреляционное отношение $\theta^2_{\xi|\eta}$ равно в случае нормальной К. коэффициенту корреляции *R*. Употребление коэффициента К. в качестве меры зависимости между ξ и η в случае связей, сильно отличающихся от нормальной, приводит иногда к ошибочным выводам, т. к. коэффициент К. может равняться нулю даже тогда, когда η строго зависит от ξ. Заметим еще, что в случае нормальной К. уравнение регрессии ξ относительно η есть $x = m_\xi + \rho_\xi(y - m_\eta)$, где

$$\rho_\xi = R\,\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta}.$$

Коэффициенты ρ_η и ρ_ξ называют коэффициентами регрессии η относительно ξ и ξ относительно η. Знак ρ_η и ρ_ξ всегда одинаков (и совпадает со знаком *R*). Очевидно,

$$R = \pm\sqrt{\rho_\xi\,\rho_\eta}$$

При большом числе независимых наблюдений, следующих одному и тому же двумерному распределению величин (ξ, η), статистич. коэффициент корреляции *r*, определенный выше, близок к теоретич. коэффициенту корреляции *R*. В математич. статистике разработаны методы оценок точности определения R по r.

Множественная корреляция. Аналогичными способами изучается связь между многими событиями или величинами. Отчетливо выраженная множественная К. наблюдается между антропологическими признаками. В исследованиях ряда советских ученых это обстоятельство послужило исходным пунктом для выработки системы стандартов для массового производства предметов личного пользования (одежды, обуви и пр.), обеспечивающей наилучшее удовлетворение потребностей населения.

Большое значение имеет во многих приложениях (напр., предсказание урожаев, разливов рек) составление уравнений регрессии, связывающих неизвестную величину с рядом известных. В случае множественной К. особенно опасно делать выводы из данных недостаточно большого числа наблюдений. Одной из основных проблем теории К. и является выяснение числа наблюдений достаточных, при тех или иных обстоятельствах, для составления надежных уравнений регрессии.

Для обоснованности выводов, построенных на теории К., необходимо: 1) обосновать применимость к данному явлению избранной вероятностной схемы; 2) тщательно проверить репрезентативность собранного статистического материала, т. е. отсутствие поводов для систематического отклонения распределения изучаемых признаков в собранном материале от подлежащего определению вероятностного распределения.

Правильное применение эмпирических приемов измерения К. возможно только на базе правильного понимания ее сущности, природы рассматриваемых явлений. К. есть одно из проявлений закона всеобщей связи явлений. Ее «неполный» (в отличие от функциональной связи) характер имеет своим источником тот же закон – наличие зависимости от прочих условий. Буржуазная наука часто пользуется этой неполнотой для отрицания закона связи. Так, английский биолог Ф. Гальтон, исследуя связь между признаками потомков и предков, все внимание сосредоточил на ее неполноте и отсюда вывел «закон» регрессии к средним показателям вида; этот «закон» превратился у датского биолога В. Иогансена в полное отрицание этой зависимости, приводящее к антидарвинистскому учению об устойчивости «чистых линий». С другой стороны, нельзя, как нередко это делают в целях извращения фактов в нужном им направлении буржуазные ученые, забывать, что К. между двумя признаками вовсе не означает еще, что один из них – причина, а другой – следствие. К. измеряет лишь параллелизм в их изменчивости, могущей иметь своим источником действие на оба признака некоторого третьего фактора.

Лит.: С л у ч к и й Е. Е., Теория корреляции и элементы учения о кривых распределения, К., 1912; Чупров А. А., Основные проблемы теории корреляции. О статистическом исследовании связи между явлениями, Л., 1926; Р о м а н о в с к и й В. И., Математическая статистика, М. – Л., 1938; К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., М., 1948; Теория и методы

антропологической стандартизации применительно к массовому производству изделий личного пользования, М., 19.51.

В. И. РОМАНОВСКИЙ (БСЭ-2, 1953, том 23; расширенный вариант предыдущей статьи).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА, наука о математическом описании и определении по неполным данным свойств статистических коллективов. Статистическим коллективом называется совокупность вещей или явлений, объединенных в целое и однородное единство по некоторым определенным признакам, а по другим признакам разбитых на группы или классы (напр., население определенной страны в определенный момент времени, разбитое по возрастным группам). Признаки, по которым статистических коллектив разбивается на группы или классы, называются его аргументами. Число членов статистического коллектива составляет его объем. Числа членов статистического коллектива в отдельных группах пли классах называются численностями их, или частотами соответственных значений аргументов.

М. с. преследует двоякого рода задачи: описательные и нормативные. Описательные задачи разрешаются описанием отдельных конкретных статистических коллективов, заключающимся в установлении их статистич. характеристик или сводных признаков (средних, дисперсий, моментов и т.п.), закономерностей в распределении частот и связей между аргументами. Нормативные задачи М. с. состоят в выяснении возможности перенесения свойств, установленных для данного статистических коллектива, на более обширный неизученный коллектив (генеральный статистич. коллектив), часть которого составляет данный, или на совокупность коллективов, аналогичных даному. В этом случае, при некоторых добавочных условиях, данный коллектив называется случайной выборкой или просто выборкой из генерального коллектива, и определение объема и характера выборки, при которых выводы из выборки распространились бы на генеральный коллектив с заданными точностью и вероятностью, составляет основную проблему одного из важнейших отделов М. с. – теории выборок. Статистические характеристики рассматриваются в учении о средних, дисперсии, моментах и в теории оценок статистических характеристик. Описанием закономерностей в распределении частот статистических коллективов занимается теория кривых распределения, а описанием связей между аргументами их – теории корреляции и ассоциации.

С р е д н и е, д и с п е р с и я, м о м е н т ы. Подготовительными операциями к описанию статистических коллективов служат составление таблиц распределения, в которых указываются аргументы, классы и численности классов коллективов и геометрических изображений таблиц в виде диаграмм, полигонов, гистограмм (ступенчатых графиков) и т. п. Дальнейшим наиболее важным средством изучения статистических коллективов является составление средних – статистич. характеристик, описывающих положение статистического коллектива. Возьмем, напр., одномерный статистический коллектив (коллектив с одним количественным аргументом) S, представленный таблицей:

x	$x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots x_s$	$\sum n_x = n$
n_x	$n_1 \;\; n_2 \;\; \ldots n_s$	

в которой $x_1, x_2, \ldots, x_s$ – значения аргумента x, а $n_1, n_2, \ldots, n_s$ – числа случаев, в которых наблюдались эти значения x. Для S средняя арифметическая или просто средняя $\bar{x}$ аргумента x определяется равенством

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum n_s x_s$$

и представляет наиболее простую и распространенную статистич. характеристику. *Медиана* (см., ВИСМ, М., 1999) представляет следующий по важности вид средней и определяется как такое значение аргумента, менее и более которого значения x в 5 встречаются одинаково часто. Кроме этих наиболее употребительных средних, рассматриваются еще средние гармоническая, геометрическая и т.д. Следующими по важности статистич. характеристиками являются меры рассеяния значений аргумента в статистич. коллективе: среднее квадратическос отклонение, дисперсия, вероятное отклонение, среднее абсолютное отклонение, квартили и т. п. Из этих мер наиболее употребительные среднее квадратическое отклонение и дисперсия; первое определяется равенством

$$\sigma = + \sqrt{\frac{1}{n} \sum n_s (x_s - \bar{x})^2}$$

а вторая равна σ^2. Для большинства действительных коллективов среднее квадратическое отклонение обладает тем свойством, что в границах между $\bar{x} - 3\sigma$ и $\bar{x} + 3\sigma$ лежит более 99% всех встречающихся в коллективе значений *x*. Таким образом, чем менее σ, тем более сосредоточены значения аргумента около их средней. Среднее квадратическое отклонение возможных значений какой-либо статистич. характеристики определяет ее точность и надежность, и потому разыскание средних квадратических отклонений статистической характеристик составляет одну из важных задач М. с. Среднее квадратическос отклонение или средняя квадратическая ошибка средней $\bar{x}$ равна $\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Средние и меры дисперсии представляют частный случай более общего средства изучения статистических коллективов, так называемых *моментов* (см., ВИСМ, М., 1999), среди которых различаются начальные, центральные и около произвольного начала. Начальные моменты определяются равенством

$$m_h = \frac{1}{n} \sum n_s x_s^h$$

центральные – равенством

$$\mu_h = \frac{1}{n} \sum n_s (x_s - \bar{x})^h$$

и моменты около произвольного начала *a*- равенством

$$\upsilon_h = \frac{1}{n} \sum n_s (x_s - a)^h$$

h называется порядком момента и принимает любые положительные значения. Первый начальный момент представляет среднюю $\bar{x}$, второй центральный момент – дисперсию σ^2, при помощи третьего центрального момента строится коэффициент асимметрии $K = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$, измеряющий асимметрию распределения аргумента, и при помощи четвертого центрального момента строится эксцесс $E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$,

измеряющий плосковершинность или высоковершинность распределения. Моменты более высокого порядка в М. с. употребляются очень редко. В новейшее время в М. с. стали употребляться кумулянты Р. Фишера, аналогичные моментам величины, обладающие некоторыми преимуществами перед ними.

Распределения и кривые распределения. Дальнейшим средством описания одномерных статистических коллективов служат некоторые определенные распределения и *кривые распределения* (см., ВИСМ, М., 1999). Наиболее важными из таких распределений являются биномиальное распределение Пуассона и нормальное, или гауссово, распределение. Первое служит для описания распределений, которые могут быть сравнены с распределением частот некоторого события в независимых испытаниях при постоянной вероятности события в каждом испытании. Второе – для описания распределений редких явлений (рождение троен и четверен, испускание α-частиц при распаде радиоактивных веществ и т. п.). Нормальное распределение, имеющее уравнением

$$y = \frac{n}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{(A)}$$

играет в М. с. фундаментальную роль, теоретическую и практическую, и служит для описания распределения аргументов, которые можно рассматривать как слагающиеся при воздействии многочисленных независимых или почти независимых причин (таким аргументом, напр., можно считать рост человека, распределение которого для большого однородного коллектива очень точно следует нормальному закону распределения). Уравнение (А) в геометрическом истолковании представляет нормальную кривую – одну из кривых распределения, служащих для описания непрерывных распределений (распределений с непрерывным аргументом). Общий вид их представляется уравнением

$$y = n\, f\,(x, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n),$$

где θ_i – параметры распределения, принимающие определенные значения для данного конкретного распределения. При помощи кривой распределения находятся частоты $n_{\alpha\beta} = n \int_{\alpha}^{\beta} f\, dx$ значений аргумента,

лежащих между заданными границами α и β, и задача теории кривых распределения заключается в разыскании для различных распределений или классов их соответствующих форм функции f и способов разыскания значений параметров θ_i таких, чтобы вычисленные частоты $n_{\alpha\beta}$ были возможно ближе к наблюденным для всех классов (α, β) данного коллектива. Наиболее употребительны для разыскания параметров *наименьших квадратов способ* (см., ВИСМ, М., 1999) и способ моментов. Первый заключается в том, что ищутся значения параметров θ_i, обращающие в минимум сумму квадратов разностей между вычисленными и наблюденными частотами распределения, второй – в разыскании таких значений θ_i, которые делают равными вычисленные по кривой распределения и по данному распределению моменты первых порядков вплоть до $S-1$. В последнее время, по предложению Р. Фишера, стал применяться способ наибольшего правдоподобия, состоящий в том, что ищутся значения параметров θ_i, обращающие в максимум особую величину, называемую правдоподобием и пропорциональную вероятности наблюдения частот, равных наблюденным.

Наиболее употребительными формами функции $f(x, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ являются функции, определяемые дифференциальным уравнением К. Пирсона

$$\frac{1}{y}\,\frac{dy}{dx} = \frac{x+a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

и ряды Шарлье, доставляющие обобщения нормального распределения и распределения Пуассона. Когда кривая распределения $f(x, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ рассматривается как закон распределения аргумента в генеральном коллективе, тогда возникают задачи теоретического обоснования формы функции f и оценки найденных значений параметров θ_i. Форма функции f может быть выбрана на основании соображений о реальной природе генерального коллектива, а оценка параметров θ_i проще всего достигается разысканием их средних квадратических ошибок. Точное разрешение вопроса об этой оценке получается, если удастся найти распределение параметров θ_i в бесконечной совокупности выборок, аналогичных той, которая дает исследуемое конкретное распределение. Когда кривая распределения найдена и вычислены по ней частоты, возникает вопрос, насколько

удовлетворительно они воспроизводят наблюденные частоты. Для разрешения его чаще всего употребляется критерий согласия Пирсона

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_x - n'_x)^2}{n'_x}$$

в котором n'_x обозначает вычисленные и n_x – наблюденные частоты и который, при помощи особых таблиц, дает возможность найти вероятность P случайных расхождений $n_x - n'_x$, столь же или менее вероятных, чем наблюденные; когда P мало, согласие между частотами n_x и n'_x считается неудовлетворительным.

В ы б о р о ч н ы й м е т о д. Наиболее важное средство для разрешении нормативных задач М. с. заключается в методе выборок. Когда изучаемый статистический коллектив бесконечен или слишком велик и труден для исчерпывающего статистического исследования или не может быть подвергнут исчерпывающему исследованию по каким-либо другим причинам (если, напр., оно сопряжено с порчей или уничтожением объектов исследования), тогда изучают лишь некоторую долю генерального коллектива, которая выбирается так, чтобы в ней распределение изучаемого аргумента было достаточно близко к его распределению в генеральном коллективе. Для этого выборка производится согласно определенным стохастическим схемам и должна быть должного объема. Достаточно полно в М. с. изучены лишь выборки из генерального коллектива с нормальным распределением аргумента. Они вместе с тем очень важны ввиду исключительной роли нормального распределения в методах М. с. Особенно важную роль в современной М. с. играют т. и. малые выборки, то есть выборки произвольного объема, который может быть и очень малым. Важность их теории ясна из того, что статистического исследования в биологии, агрономии, технике и т. д. дают чаще всего коллективы небольшого объема. Основная проблема малых выборок заключается в разыскании точного распределения различных статистический характеристик в них. Напр., известны распределения средней, дисперсии и некоторых других характеристик в выборках любого заданного объема из коллективов с нормальным распределением аргумента. Эти распределения дали начало новейшим статистическим критериям: *t* Стьюдента, *z* Фишера и др., которые лежат в основании ряда новейших статистич. методов исследования, нашедших весьма широкие и разнообразные применения.

М н о г о м е р н ы е с т а т и с т и ч е с к и е к о л л е к т и в ы – коллективы с несколькими аргументами. При изучении их возникает ряд новых задач, связанных с основной проблемой изучения статистических зависимостей. Статистические зависимости противопоставляются функциональным и определяются, напр., для двух аргументов x и y следующим образом: y называется статистически зависящим от x, если условные распределения y, то есть распределения его, соответствующие заданным значениям x, изменяются вместе с изменением x (см. также *Корреляция)*. К М. с. относятся также теория устойчивости статистич. рядов, теория временных рядов и теория ассоциации, изучающая связи между качественными аргументами статистич. коллективов.

Первые начала М.с. можно найти уже в сочинениях Я. Бернулли и Лапласа, рассматривавших применения теории вероятностей к социальным, экономическим, моральным и демографическим вопросам. Но основателем се считают Л. Кетле (1796–1874), применявшего математико-статистические методы в демографии и антропометрии. Основателями современной М. с. считаются Френсис Гальтон (1822–1911) и Карл Пирсон (1857–1936); первый положил начало теории корреляции и биометрии, а второй широко развил их и создал ряд современных методов М. с. (теорию моментов, кривые распределения, критерий χ^2 и др.). В новейшее время Рональд Фишер создал общую теорию оценок статистических характеристик, методов дисперсионного анализа, теорию малых выборок и т. д. Среди математиков-статистиков последнего времени следует еще назвать Шарлье, построившего ряды, обобщающие распределения Гаусса и Пуассона, и А. А. Чупрова. О роли М.с, как аппарате математических приемов статистики, см. *Статистика.*

Лит.: Ч у п р о в А. А., Основные проблемы теории корреляции. О статистическом исследовании связи между явлениями, М., 1926; Математические методы в статистике. Сб. ст. под ред. Г. Л. Ритца, пер. и обработ. С. II. Бобров, М., 1927; Р о м а н о в с к и й В. И., Элементарный курс математической статистики, М. – Л., 1921; Л а х т и н Л. К., Кривые распределения..., М., [1922]; Э л ь д е р т о н В. П., Кривые распределения численностей и корреляция, пер. с англ., М., 1924; С л у ц к и й Е. Е., Теория корреляции и элементы учения о кривых распределения, Киев, 1912; Р о м а н о в с к и й В. И., Элементы теории корреляции, 2 изд., Ташкент, 1928; Y u l e G. U., An Introduction to the theory of Statistics, 10 ed., L., 1932; F i s h e r R. A.,

Statistical methods for research workers, 5 ed., L. – Edinburgh, 1934; Anderson O. N., Elnfuhrung in die mathematische Statistik, W., 1935; Darmois G., Statistique mathematique, P., 1928; Jordan Ch., Statistique mathematique, P., 1927; Risser R. et Traynard C. E., Les principes de la statistique mathematique, P., 1933.

В. И. РОМАНОВСКИЙ (БСЭ-1, 1938, том 38).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Содержание:

I. Предмет математической статистики
II. Связь математической статистики с теорией вероятностей
III. Простейшие приемы статистического описания
IV. Связь статистических распределений с вероятностными. Оценка параметров. Проверка вероятностных гипотез
V. Выборочный метод
VI. Дальнейшие задачи математической статистики
VII. Историческая справка

Математическая статистика – раздел математики, посвященный математическим методам систематизации, обработки и использования статистических данных для научных и практич. выводов. При этом статистич. данными называются сведения о числе объектов в к.-л. более или менее обширной совокупности, обладающих теми или иными признаками (таковы, напр., данные табл. 1а и 2а).

I. Предмет математической статистики

Статистическое описание совокупности объектов занимает промежуточное положение между индивидуальным описанием каждого из объектов совокупности, с одной стороны, и описанием совокупности по ее общим свойствам, совсем не требующим ее расчленения на отдельные объекты, – с другой. По сравнению с первым способом статистические данные всегда в большей или меньшей степени обезличены и имеют лишь ограниченную ценность в случаях, когда существенны именно индивидуальные данные (напр., учитель, знакомясь с классом, получит лишь весьма предварительную ориентировку о положении дела из одной статистики числа выставленных его предшественником отличных, хороших, посредственных и неудовлетворительных оценок). С другой стороны, по сравнению с данными о наблюдаемых извне суммарных свойствах совокупности,

статистические данные позволяют глубже проникнуть в существо дела.

Напр., данные гранулометрич., анализа породы (то есть данные о распределении образующих породу частиц по размерам) дают ценную дополнительную информацию по сравнению с испытанием нерасчлененных образцов породы, позволяя в некоторой мере объяснить свойства породы, условия ее образования и пр.

Метод исследования, опирающийся на рассмотрение статистических данных о тех или иных совокупностях объектов, называется статистическим. Статистический метод применяется в самых различных областях знания. Однако черты статистического метода в применении к объектам различной природы столь своеобразны, что было бы бессмысленно объединять, напр., социально-экономическую статистику [именуемую *статистикой* (см., ВИСМ, М., 1999) в собственном смысле слова], физическую статистику (см. *Статистическая физика),* звездную статистику (см. *Звездная астрономия*) и т. и. в одну науку.

Общие черты статистического метода в различных областях знания сводятся к подсчету числа объектов, входящих и те или иные группы, рассмотрению распределения количественных признаков, применению выборочного метода (в случаях, когда детальное исследование всех объектов обширной совокупности затруднительно), использованию теории вероятностей при оценке достаточности числа наблюдении для тех или иных выводов и т.п. Эта формальная математическая сторона статистических методов исследования, безразличная к специфич природе изучаемых объектов, и составляет предмет М. с.

II. Связь математической статистики с теорией вероятностей

Связь М. с. с теорией вероятностей имеет в разных случаях различный характер. *Теория вероятностей* (см., ВИСМ, М., 1999) изучает не любые массовы явления, а явления случайные и именно «вероятностно случайные» т. е. такие, для которых имеет смысл говорить о соответствующих им распределениях вероятностей. Тем не менее, теория вероятностей играет определенную роль и при статистич. изучении массовых явлений любой природы, могущих не относиться к категории вероятности случайных. Это осуществляется через основанные на теории вероятностей теорию *выборочного метода* (см., ВИСМ, М., 1999) и теорию ошибок измерений (см.

Ошибок теория). В этих случаях вероятностным закономерностям подчинены не сами изучаемые явления, а приемы их исследования.

Более важную роль играет теория вероятностей при статистическом исследовании вероятностных явлений. Здесь в полной мере находя применение такие основанные на теории вероятностей разделы М. с., как теория статистической проверки вероятностных гипотез, теория статистической оценки распределений вероятностей и входящих в них параметров и т. д. Область же применения этих более глубоких статистических методов значительно уже, так как здесь требуется, чтобы сами изучаемые явления были подчинены достаточно определенным вероятностным закономерностям. Напр., статистическое изучение режима турбулентных водных потоков или флюктуации в радиоприемных устройства производится на основе теории *стационарных вероятностных процессов* (см., ВИСМ, М., 1999). Однако применение той же теории к анализу экономически временных рядов может привести к грубым ошибкам ввиду того, чт входящее в определение стационарного процесса допущение наличия сохраняющихся в течение длительного времени неизменных распределений вероятностей в этом случае, как правило, совершенно неприемлемо.

Вероятностные закономерности получают статистическое выражение (вероятности осуществляются приближенно в виде частот, а математические ожидания – в виде средних) в силу закона больших чисел (см. *Больших чисел закон,* ВИСМ, М., 1999).

III. Простейшие приемы статистического описания

Изучаемая совокупность из n объектов может по какому-либо качественному признаку A разбиваться на классы $A_1, A_2, \ldots, A_r$. Соответствующее этому разбиению статистическое распределение задается при помощи указания численностей (частот) $n_1, n_2, \ldots, n_r \left(\sum_{i=1}^{r} n_i = n \right)$ отдельных классов. Вместо численностей n_i часто указывают соответствующие относительные частоты (частости) $h_i = \frac{n_i}{n}$ (удовлетворяющие, очевидно, соотношению $\sum_{i=1}^{n} h_i = 1$). Если изучению подлежит некоторый количественный признак, то его распределение совокупности из и объектов можно задать, перечислив

непосредственно наблюденные значения признака: $x_1, x_2, ..., x_r$ напр. в порядке их возрастания. Однако при больших n такой способ громоздок и в то же время не выявляет отчетливо существенных свойств распределения (подробнее о способах изображения и простейших характеристиках распределения одного количественного признака см., *Вариационный ряд, Распределения,* ВИСМ, М., 1999). При сколько-либо больших n на практике обычно совсем не составляют полных таблиц наблюденных значений x_i исходят во всей дальнейшей работе из таблиц, содержащих лишь численности классов, получающихся при группировке наблюденных значений по надлежаще выбранным интервалам.

Напр., в первом столбце табл. 1а даны результаты измерения 200 диаметров деталей, сгруппированные по интервалам длины 0,05 *мм.* Основная выборка соответствует нормальному ходу технологического процесса. 1-я, 2-я и 3-я выборки сделаны через некоторые промежутки времени для проверки устойчивости этого нормального хода производства. В табл. 16 результаты измерения деталей основной выборки дан при группировке по интервалам длины 0,25 *мм.*

Обычно группировка по 10–20 интервалам, в каждый из которых попадает не более 15–20% значений x_i, оказывается достаточной для довольно полного выявления всех существенных свойств распределения и надежного вычисления по групповым численностям основных характеристик распределения (см. о них ниже). Составленная по таким группированным данным *гистограмма* (см., ВИСМ, М., 1999) наглядно изображает распределение. Гистограмма, составленная на основе слишком мелкой группировки, обычно многовершинная и не отражает наглядно существенных свойств распределения.

В качестве примера на рис. 1 дана гистограмма распределения 200 диаметров, соответствующая данным первого столбца табл. 1а, на рис. 3 – гистограмма того же распределения (соответствующая таблица не приводится ввиду ее громоздкости) при интервале 0,01 *мм.* С другой стороны, группировка по слишком крупным интервалам может привести к потере ясного представления о характере распределения и к грубым ошибкам при вычислении среднего и других характеристик распределения (см. табл. 1б и соответствующую гистограмму на рис. 2).

Табл. lа – Распределение диаметра детали в *мм.* обнаруженное при статистическом исследовании

массовой продукции
(объяснение обозначений $\bar{x}$, S, s см. стр. 000, 000).

Диаметр	Основная выборка	1-я выборка	2-я выборка	3-я выборка
13.05–13.09	–	–	1	1
13.10–13.14	2	–	–	–
13.15–13.19	1	–	1	1
13.20–13.24	8	–	–	–
13.25–13.29	17	1	2	1
13.30–13.34	27	1	1	2
13.35-13.39	30	2	3	1
13.40-13.44	37	2	1	1
13.45–13.49	27	1	–	–
13.50–13.54	25	2	1	–
13.55–13.59	17	–	–	–
13.60–13.64	7	1	–	2
13.65–13.69	2	–	–	1
Всего	200	10	10	10
$\bar{x}$	13,416	13,430	13,315	13,385
S^2	2,3910	0,0990	0,1472	0,3602
x	0,110	0,105	0,128	0,200

Табл. 1б – Распределение диаметра деталей основной выборки (из табл. 1а) при более крупных иитервалах группировки

Диаметр	Число деталей
13.00–13.24	11
13.25–13.49	138
13.50–13.74	51
Всего	200

В пределах М. с. вопрос об интервалах группировки может быть рассмотрен только с этой формальной стороны: полноты математич. описания распределения, точности вычисления средних по сгруппиро-

ванным данным и т.д. О группировке, имеющей целью выделить качественно различные группы в изучаемой совокупности, см. *группировка в статистике.*

При изучении совместного распределения двух признаков пользуются таблицами с двумя входами. Примером совместного распределения двух качественных признаков может служить таблица 2а (см. стр. 478). В общем случае, когда по признаку A материал разбит на классы $A_1, A_2, \dots, A_r$, а по признаку B – на классы $B_1, B_2, \dots, B_s$, таблица состоит из численностей n_{ij} объектов, принадлежащих одновременно классам A_i и B_j. Суммируя их по формулам $n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{s} n_{ij}$, $n_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{r} n_{ij}$, получают численности самих классов A_i и B_j (очевидно, что $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} n_{ij} = \sum_{i=1}^{r} n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{s} n_{\bullet j} = n$, где n – численность всей изучаемой совокупности). В зависимости от целей дальнейшего исследования вычисляют те или иные из относительных частот

$$h_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}, \quad h_{i\bullet} = \frac{n_{i\bullet}}{n}, \quad h_{\bullet j} = \frac{n_{\bullet j}}{n},$$

$$h_{i(j)} = \frac{n_{ij}}{n_{\bullet j}}, \quad h_{(i)j} = \frac{n_{ij}}{n_{i\bullet}}.$$

Напр., при изучении влияния вдыхания сыворотки на заболевание гриппом по табл. 2а (см. стр. 478) естественно вычислить относительные частоты, данные в табл. 2б (см. стр. 478). Пример таблицы для совместного распределения двух количественных признаков см. в статье *Корреляция.*

Табл. 1а служит примером смешанного случая: материал группируется по одному качественному признаку (принадлежность к основной выборке, произведенной для определения среднего уровня производственного процесса, и к трем выборкам, произведенным в различные моменты времени для проверки сохранения этого нормального среднего уровня) и по одному количественному признаку (диаметр деталей).

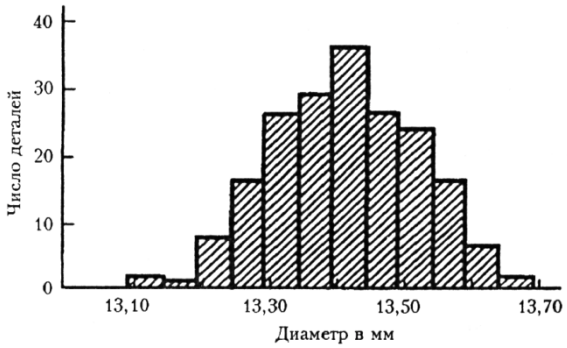


Рис. 1. Гистограмма распределения диаметров 200 деталей. Длина интервала группировки 0,05 мм.

Рис. 2. Гистограмма распределения диаметров 200 деталей. Длина интервала группировки 0,5 мм.

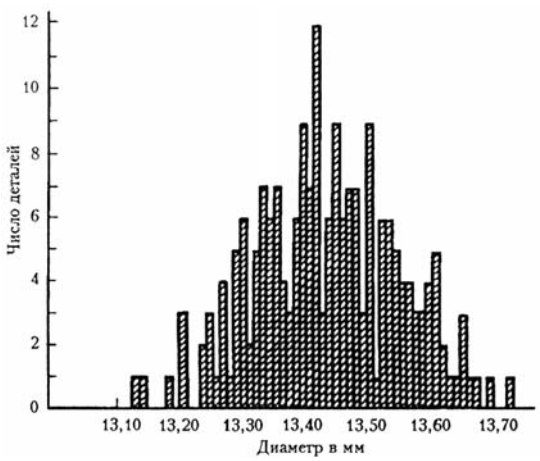


Рис. 3. Гистограмма распределения диаметров 200 деталей. Длина интервала группировки 0,01 мм.

Простейшими сводными характеристиками распределения одного количественного признака являются среднее

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

и среднее квадратическое отклонение

$$D = \frac{S}{\sqrt{n}},$$

где

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 .$$

При вычислении $\bar{x}$, S^2 и D по группированным данным пользуются формулами

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{r} n_k a_k = \sum_{k=1}^{r} h_k a_k ,$$

$$S^2 = \sum_{k=1}^{r} n_k (a - \bar{x})^2 = \sum_{k=1}^{r} n_k a_k^2 - n\bar{x}^2$$

или

$$D^2 = \sum_{k=1}^{r} h_k a_k^2 - \bar{x}^2 ,$$

где r – число интервалов группировки, $a_к$ – их середины (в случае табл. 1а – 13,07; 13,12; 13,17; 13,22 и т.д.). Если материал сгруппирован по слишком крупным интервалам, то такой подсчет дает слишком грубые результаты. Иногда в таких случаях полезно прибегать к

специальным поправкам на группировку. Однако эти поправки имеет смысл вводить лишь при условии выполнения определенных вероятностных предположений.

Табл. 2а – Распределение заболевших и не заболевших гриппом среди работников Центрального универмага в Москве, вдыхавших и не вдыхавших противогриппозную сыворотку (1939).

	Не заболевшие	Заболевшие	Всего
Не вдыхавшие	1675	150	1825
Всего	2172	154	2326

Табл. 2б – Относительные частоты (соответствующие данным табл. 2а)

	Не заболевшие	Заболевшие	Всего
Не вдыхавшие	0,918	0,082	1,000
Вдыхавшие	0,992	0,008	1,000

О различных типах распределений и других их характеристиках см. *Вариационный ряд*, *Распределения.* О совместных распределениях двух и большего числа признаков см. *Корреляция*, *Регрессия.*

IV. Связь статистических распределений с вероятностными. Оценка параметров. Проверка вероятностных гипотез

Выше были изложены лишь некоторые избранные простейшие приемы статистического описания, представляющего собой в настоящее время довольно обширную дисциплину с хорошо разработанной системой понятий и техникой вычислений. Приемы статистического описания интересны, однако, не сами по себе, а в качестве средства для получения из статистического материала выводов о закономерностях, которым подчиняются изучаемые явления, и о причинах, приводящих в каждом отдельном случае к тем или иным наблюденным статистическим распределениям.

Напр., данные, приведенные в табл. 2а, естественно связать с такой теоретической схемой. Заболевание гриппом каждого отдельного работника универмага следует считать случайным событием, так как общие условия работы и жизни обследованных работников универмага могут определять не сам факт заболевания такого-то и такого-то работника, а лишь некоторую *вероятность* (см., ВИСМ, М., 1999) заболевания. Вероятности заболевания для вдыхавших сыворотку (p_1) и для не вдыхавших (p_0), судя по статистическим данным, различны: эти данные дают основания предполагать, что p_1 существенно меньше p_0. Перед М. С. возникает задача: по наблюденным частотам $h_1 = \frac{4}{501} \approx 0{,}008$ и $h_0 = \frac{150}{1825} \approx 0{,}082$ оценить всроятности p_1 и p_0 и проверить, достаточен ли статистический материал для того, чтобы считать установленным, что $p_1 < p_0$ (то есть что вдыхание сыворотки действительно уменьшает вероятность заболевания). Утвердительный ответ на поставленный вопрос и случае данных табл. 2а достаточно убедителен и без тонких средств М. с. По в более сомнительных случаях необходимо прибегать к разработанным М. с. специальным критериям.

Данные первого столбца табл. 1а собраны с целью установления точности изготовления деталей, расчетный диаметр которых равен 13,40 *мм,* при нормальном ходе производства. Простейшим допущением, которое может быть в этом случае обосновано некоторыми теоретическими соображениями, является предположение, что диаметры отдельных деталей можно рассматривать как

случайные величины, подчиненные нормальному распределению вероятностей

$$\mathbf{P}\ \{\xi < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\, dt\,. \qquad (1)$$

Если это допущение верно, то параметры a и σ^2 – среднее и дисперсию вероятностного распределения – можно с достаточной точностью оценить по соответствующим характеристикам с т а т и с т и ч е с к о г о распределения (так как число наблюдений $n = 200$ достаточно велико). В качестве оценки для теоретич. Дисперсии σ^2 предпочитают не статистич. дисперсию $D^2 = \frac{S^2}{n}$, а *несмещенную оценку*

$$s^2 = \frac{S^2}{n-1}\,.$$

Для теоретического среднего квадратичного отклонения не существует общего (пригодного при любом распределении вероятностей выражения несмещенной оценки. В качестве оценки (вообще говоря смещенной) для σ чаще всего употребляют s. Точность оценок $\bar{x}$ и s для a и σ указывается соответствующими дисперсиями, которые в случае нормального распределения (1) имеют вид

$$\sigma_a = \frac{\sigma^2}{n} \sim \frac{s^2}{n},$$

$$\sigma_{s^2}^2 = \frac{2\sigma^4}{n-1} \sim \frac{2s^4}{n},$$

$$\sigma_1^2 = \frac{\sigma^2}{2n} \sim \frac{s^2}{2n},$$

где знак ~ обозначает приближенное равенство при больших *n*. Таким образом, условливаясь к оценкам прибавлять со знаком $\pm$ среднее квадратичное отклонение, имеем при больших n в предположении нормального распределения (1):

$$\left.\begin{aligned} a &= \bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}}, \\ \sigma &= s \pm \frac{s}{\sqrt{2n}}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

В случае данных первого столбца табл. 1а, формулы (2) дают

$$a = 13,416 \pm 0,008,$$

$$\sigma = 0,110 \pm 0,006\,.$$

Объем выборки $n = 200$ достаточен для законности пользования этими формулами теории «больших выборок».

Дальнейшие сведения об оценке параметров теоретических распределений вероятностей см. в статьях *Оценки статистические, Доверительные границы*, ВИСМ, М., 1999 О способах, при помощи которых по данным первой столбца табл. 1а можно было бы проверить исходные гипотезы нормальности распределения и независимости наблюдений, см. в статьях: *Распределения, Непараметрические методы, Статистическая проверка гипотез,* ВИСМ, М., 1999.

При рассмотрении данных следующих столбцов табл. 1а, каждый из которых составлен на основе 10 измерений, употребление формул теории больших выборок, установленных лишь в качестве предельных формул при $n \to \infty$, может служить только для первой ориентировки. В качестве приближенных оценок параметров a и σ по-прежнему употребляются величины x и s, но для оценки точности надежности таких оценок необходимо применять теорию *малых выборок* (см., ВИСМ, М., 1999). При сравнении по правилам М. с. выписанных в последних строках табл. 1а значений $\bar{x}$ и s для трех выборок с нормальными значениями a и σ, оцененными по первому столбцу таблицы можно сделать следующие выводы: первая выборка не дает оснований предполагать существенного изменения хода производственного процесса, вторая выборка дает основание к заключению об уменьшении

среднего диаметра *a* (см., *Стьюдента критерий*, ВИСМ, М., 1999), третья выборка – к заключению об увеличении дисперсии (см., *«Хи-квадрат» критерий*).

Все основанные на теории вероятностей правила статистич. оценю параметров и проверки гипотез действуют лишь *с* определенным *уровнем значимости* (см., ВИСМ, М., 1999) $\omega < 1$. то есть могут приводить к ошибочным результатам с вероятностью $\alpha = 1 - \omega$. Напр., если в предположении нормального распределения и известной теоретич. дисперсии σ^2 производить оценку a по $\bar{x}$ по правилу

$$\bar{x} - k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \alpha < \bar{x} + k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

то вероятность ошибки будет равна α, связанному с k соотношением (см. табл. 3):

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_k^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx .$$

Вопрос о рациональном выборе уровня значимости в данных конкретных условиях (напр., при разработке правил статистического контроля массовой продукции) является весьма существенным. При этом желанию применять правила лишь с высоким (близким к единице) уровнем значимости противостоит то обстоятельство, что при ограниченном числе наблюдений такие правила позволяют сделать лишь очень бедные выводы (не дают возможности установить неравенство вероятностей даже при заметном неравенстве частот и т. д.).

Табл. 3 – Зависимость α и $\omega = 1 - \alpha$ от *k*.

k	1, 96	2, 58	3,00	3,29
α	0, 050	0, 010	0, 003	0, 001
ω	0, 950	0, 990	0, 997	0, 999

V. Выборочный метод

В разделе IV результаты n наблюдений, используемых для оценки распределения вероятностей или его параметров, подразумевались (хотя это и не оговаривалось) независимыми (см. *Теория вероятностей* и, особенно, *Независимость*). Хорошо изученным примером использования зависимых наблюдений может служить оценка статистического распределения или его параметров в «генеральной совокупности» из N объектов по произведенной из нее «выборке», содержащей $n < N$ объектов.

Терминологическое замечание. Часто совокупность n наблюдений, сделанных для оценки распределения вероятностей, также называют «выборкой». Этим объясняется, напр., происхождение употребленного в разделе IV термина «теория малых выборок». Эта терминология связана с тем, что часто распределение вероятностей представляют себе в виде статистич. распределения в воображаемой бесконечной «генеральной совокупности» и условно считают, что наблюдаемые n объектов «выбираются» из этой совокупности. Эти представления не имеют отчетливого содержания. В собственном смысле слова, выборочный метод всегда предполагает исходную конечную генеральную совокупность.

Примером применения выборочного метода может служить следующий. Пусть в партии из N изделий имеется X дефектных. Из партии отбирается случайным образом выборка из $n < N$ изделий (напр., $n = 100$ при $N = 10\,000$). Вероятность того, что число x дефектных изделий в выборке будет равно m, равна

$$\mathbf{P}\{x = m\} = \frac{n!\,(N-n)!\,X!\,(N-X)!}{m!\,(n-m)!\,(X-m)!\,(N-X-n+m)!\,N!}$$

Таким образом, x и соответствующая относительная частота $h = \frac{x}{n}$ оказываются случайными величинами, распределение которых зависит от параметра X или, что то же самое, от параметра $H = \frac{X}{N}$. Задача оценки относительной частоты H по выборочной относительной частоте h очень похожа на задачу оценки вероятности P по относительной частоте h при n независимых испытаниях. При

больших n с вероятностью, близкой к единице, в задаче об оценке вероятности имеет место приближенное равенство

$$p \sim h$$

а в задаче об оценке относительной частоты – приближенное равенство

$$H \sim h .$$

Однако в задаче об оценке H формулы сложнее, а отклонения h от H в среднем несколько меньше, чем отклонения h от p в задаче об оценке вероятности (при том же h). Таким образом, оценка доли H дефектных изделий в партии по доле h дефектных изделий в выборке при данном объеме выборки n производится всегда (при любом N) несколько точнее, чем оценка вероятности p по относительной частоте h при n независимых испытаниях. Когда $\frac{n}{N} \to \infty$, формулы задачи о выборке переходят асимптотически в формулы задачи об оценке вероятности p. См. также *Выборочный метод.*

VI. Дальнейшие задачи математической статистики

Теория оценок и вообще статистических выводов, построенных на использовании результатов заданного числа n независимых наблюдений с постоянным распределением вероятностей, и теория выборочного метода для случая выборок фиксированного объема n остаются наиболее разработанными разделами М. с.

Классическая теория корреляции изучает зависимость между величинами на основе совокупности независимых наблюдений. Напр., зависимость между величинами ξ и η исследуется при помощи n независимых между собой наблюдений, каждое из которых дает пару значений (x_i, y_i), подчиненных исследуемому совместному распределению величии ξ и η. По аналогичной схеме изучается зависимость между качественными признаками при помощи *дисперсионного анализа* (см., ВИСМ, М., 1999).

Методы исследования зависимых наблюдений подверглись в М. с. глубокой разработке лишь в теории временных рядов, главным образом при сильно ограничивающем условии их стационарности (см. *Стационарные вероятностные процессы*, ВИСМ, М., 1999). Большое значение имеют также вопросы планирования статистического эксперимента. В простейшем случае – это вопрос определения числа испытаний *n,* необходимого для получения с заданным уровнем значимости выводов требуемой точности и полноты. Однако часто априорное определение числа наблюдений невозможно (или нецелесообразно, так как, не фиксируя число наблюдений заранее, а определяя его в ходе эксперимента, можно уменьшить его математич. ожидание). Методы статистич. эксперимента, в которых число наблюдений не фиксируется заранее, а устанавливается в ходе эксперимента, объединяют в настоящее время под общим названием *последовательного анализа* (см., ВИСМ, М., 1999). Впрочем, простейшие приемы такого рода были разработаны давно (см., напр., о методе двойной выборки и статье *Приемочный статистический контроль*, ВИСМ, М., 1999). Строго говоря, статистические методы контроля массовой продукции являются областью применения еще не сложившегося раздела М. с, посвященного проблемам регулирования процессов по выборочным статистическим данным, где выбор статистических правил диктуется не задачей получения выводов с заданным уровнем значимости, а задачей достижения определенного хода регулируемого процесса (напр., установления режима производства, гарантирующего заданный уровень качества продукции).

VII. Историческая справка

Первые начала М. с. можно найти уже в сочинениях создателей теории вероятностен – швейцарского математика Я. Бернулли (конец начало 18 вв.), французских математиков П. Лапласа (2-я половина – начало 19 вв.) и С. Пуассона (1-я половина 19 в.). В России методы М. с. в применении к демографии и страховому делу развивал на основе теории вероятностей В. Я. Буняковский (1846). Решающее значение для всего дальнейшего развития М. с. имели работы русской классической школы теории вероятностей 2-й половины 19 – начала 20 вв. (П. Л. Чебышев, А. А. Марков, А.М. Ляпунов, С. Н. Бернштейн). Многие вопросы теории ста-

тистич. оценок были по существу разработаны на основе теории ошибок и метода наименьших квадратов [немечский математик К. Гаусс (1-я половина 19 в.) и русский математик А. А. Марков (конец 19 – начало 20 вв.)]. Работы А. Кетле (19 в., Бельгия), Ф. Гальтона (19 в., Англия) и К. Пирсона (конец 19 – начало 20 вв., Англия), которых в буржуазной литературе чаше всего выдвигают как основателей М.с, имели большое значение, но по уровню использования достижений теории вероятностей отставали от работ русской школы, а в части использования методов М. с. в социальных и биологии, науках имели реакционную направленность. К. Пирсоном была широко развернута работа по составлению таблиц функций, необходимых для применения методов М. с. В создании теории малых выборок, общей теории статистич. оценок и проверки гипотез, последовательного анализа весьма, значительна роль более молодых представителей англо-американской школы [Стьюдент (псевдоним В, Госсета), Р. Фишер, Э. Пирсон – Англия, Ю. Нейман, А. Вальд – США)], деятельность которых началась в 20-х гг. 20 в. В СССР значительные результаты в области М. с. получены В. И. Романовским, Е. Е. Слуцким, которому принадлежат важные работы по статистике связанных стационарных рядов, Н. В. Смирновым, заложившим основы теории непараметрических методов М. с; на основе М. с. особенно интенсивно разрабатываются статистические методы исследования и контроля массового производства, статистические методы в области гидрологии, климатологии, звездной астрономии и многие др. Советские ученые подвергают критике ошибочные методологии, установки, формализм и упрощенчество буржуазных научных школ в области М. с. Полному пересмотру подвергнуты в советской науке вопросы применения М. с. в биологических и социальных науках, где формальные методы М. с. особенно часто используются буржуазными учеными в антинаучных целях (см. *Статистика, Биометрия*).

Лит.: Романовский В. И., Элементарный курс математической статистики, М. – Л., 1939; Митропольский А. К., Техника статистического исчисления, М. – Л., 1931; его же, Статистическое исчисление, т. 1–2, Л., 1952; Длин Л. М., Математическая статистика в технике, 2 изд., М., 1951; Бородачев Н. А. и Журавлев А. Н., Статистические методы анализа и контроля качества продукции, хода технологического процесса и состояния производст-

венного оборудования, н кн.: Машиностроение. Энциклопедический справочник, т. 15. М.. 1950 (стр. 597-617); Романовский В. И., Математическая статистика, М. – Л., 1938; Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., М.. 1948; Арлей Н. и Пух К. Р., Введение в теорию вероятностей и математическую статистику, пер. с англ., М., 1951; Pearson K., Tables for statisticians and biometricians, pt 1-2, L., 1930-31; Kendall M. G., The advanced theory of statistics, v. 1-2. L., 1948; Hald A., Statistical theory with engineering applications. N. Y. – L.. 1952; его же, Statistical tables and formulas, N. Y., 1952.

Обзор работ советских ученых в области математической статистики - Смирнов Н. В., Математическая статистика, в кн.: Математика в СССР за тридцать лет. 1917–1947. Сб. статей, под ред. А. Г. Куроша [и др.], М. – Л., 1918.

В. И. РОМАНОВСКИЙ (БСЭ-1, 1939, том 41).

НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ СПОСОБ, метод приближенных вычислений, основной задачей которого является разыскание одной или нескольких неизвестных величин, причем наилучшим приближением к действительным значениям этих величин считаются те, которые обращают в минимум сумму квадратов разностей между вычисленными и измеренными значениями других величин, выражающихся через искомые. Например, пусть измеренные величины $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ зависят определенным образом от подлежащих определению величин $x_1, x_2, \ldots, x_m$, т. е. являются функциями от них

$$y'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Предположим, что выполнено число наблюдений (n), большее, чем число неизвестных (m). Пусть эти наблюдения (включающие ошибки наблюдения) дали для величин $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Предположим еще, что измерения неодинаково точны и что относительное достоинство их оценивается весами $p_1, p_2, \ldots, p_n$ представляющими некоторые положительные числа, которые обычно полагаются обратно пропорциональными квадратам средних квадратических погрешностей соот-

ветственных измерений; за p_i можно принять также число частных, одинаково точных измерений, средней из которых является y_i. Возьмем теперь сумму $S = \sum p_i (y_i - y_i')^2$ представляющую сумму взвешенных квадратов отклонений измеренных значений y от вычисленных. Тогда Н. к. с. для разыскания неизвестных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ заключается в том, что за наилучшие приближенные значения их принимаются значения, обращающие сумму S в минимум. Эти значения, согласно известным правилам дифференциального исчисления, находятся из уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} p_i (y_i - y_i'') \frac{\partial y_i'}{\partial x_h} = 0, \qquad h = 1, 2, \ldots, m$$

которые получается от приравнивания к нулю производных $\frac{\partial y_i'}{\partial x_h}$ и называется нормалными уравнениями.

Если функция f_i линейны относительно

$$\bar{y} = a_1^{(i)} x_1 + a_2^{(i)} x_2 + \ldots + a_m^{(i)} x_m, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

то нормальные уравнения представляют систему линейных относительно $x_1, x_2, \ldots, x_m$ уравнений, решение которых хорошо известно и более или менее легко выполнимо. Если же функции f_i нелинейны относительно $x_1, x_2, \ldots, x_m$ решение нормальных уравнений может представлять очень большие трудности. Таким образом, Н. к. с. с наибольшим успехом и чаще всего применяется в первом случае или в тех случаях, когда функция f может быть каким-либо преобразованием приведена к первому случаю. Например, при намагничивании железа напряжение поля H может быть связано с магнитной индукцией B равенством вида $B = \frac{H}{x_1 + Hx_2}$, где x_1 и x_2 должны быть найдены по значениям B и H доставляемым измерениями. Здесь $f = \frac{H}{x_1 + Hx_2}$ нелинейная функция от x_1 и x_2. Но

наше равенство можно легко преобразовать в эквивалентное ему равенство $\frac{1}{B}=\frac{1}{H}x_1+x_2$ котором $\frac{1}{B}$ и $\frac{1}{H}$ будут известны вместе с B и H и в которое x_1 и x_2 входят уже линейно. Н. к. с. наиболее разработан в применении к теории ошибок. Рассмотрим основные применения его в ней.

С л у ч а й о д н о г о н е и з в е с т н о г о. Пусть для разыскания неизвестной величины x произведено n независимых наблюдений или измерений ее, давших значения $x_1, x_2, ..., x_n$. Тогда наилучшим, согласно Н. к. с, приближенным значением x будет $\bar{x}=\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}$, обращающее в минимум сумму $\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i-\bar{x})^2$ если через p_i обозначить веса произведенных измерений. Эти веса обратно пропорциональны квадратам средних квадратич. погрешностей значений x_i то есть $p_i=\frac{K}{\sigma_i^2}$, где $\sigma_i^2=\mathbf{M}(x_0-x_i')^2$, а x_0 обозначает математическое ожидание случайной переменной x_i', представляющей возможные значения x в i-м измерении. При отсутствии постоянной ошибки в измерениях x_0 принимается за действительное значение величины x. Полученное приближенное значение $\bar{x}$ величины x имеет вес $P=\sum p_i$, средняя квадратическая погрешность приближенного равенства $x_0\approx\bar{x}$ равна $\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{P}}$, где σ – представляет среднюю квадратическую ошибку отдельного измерения с весом единицы и определяется приближенным равенством

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum p_i (x_i-\bar{x})^2}{n-1}}.$$

При некоторых дополнительных предположениях можно показать, что разность $x_0-\bar{x}$ следует нормальному закону распределения

со средней ошибкой и дисперсией σ_x^2, в частности тогда, когда ошибку $x_0 - \bar{x}$ можно рассматривать как сумму большого числа независимых одна от другой элементарных ошибок одного порядка малости, происходящих от одновременного действия большого числа независимых друг от друга факторов. В этом случае знание закона распределения ошибки $x_0 - \bar{x}$ дает возможность вычислять по таблицам интеграла вероятностей вероятности различных возможных расхождений между $\bar{x}$ и x_0 и, таким образом, оценить степень точности полученного приближенного значения величины *x*.

С л у ч а й м н о г и х н е и з в е с т н ы х. Предположим, что n независимых измерений, имеющих веса $p_1, p_2, \ldots, p_n$, дали для вели-чины y значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ причем величина y связана с неизвест-ными величинами $x_1, x_2, \ldots, x_m$ число которых менее числа измере-ний, линейным соотношением $y = a_1 x + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_n$ в котором параметры $a_1, a_2, \ldots, a_m$ принимают для наших измерений точно из-вестные нам значения $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_m^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. В этом случае разыскание наилучших согласно Н. к. с, приближенных значений для x_i приводится к разысканию значений их, обращающих в минимум сумму

$$\sum_{i=1}^{n} p_i (y_i - a_1^{(i)} x_1 - \ldots - a_m^{(i)} x_m)^2 .$$

Эти значения находятся из нормальных уравнений:

$$x_1 \sum p_i a_1^{(i)} a_1^{(i)} + x_2 \sum p_i a_1^{(i)} a_2^{(i)} + \ldots$$

$$\ldots + x_m \sum p_i a_1^{(i)} a_m^{(i)} = x_1 \sum p_i y_i a_1^{(i)}$$

……

$$x_1 \sum p_i a_m^{(i)} a_1^{(i)} + x_2 \sum p_i a_m^{(i)} a_2^{(i)} + \ldots$$

$$\ldots + x_m \sum p_i a_m^{(i)} a_m^{(i)} = x_1 \sum p_i y_i a_m^{(i)}$$

Веса получающихся приближенных значений $\bar{x}_n$ равны $\frac{\Delta}{\Delta_{hh}}$, где Δ обозначает определитель, составленный из коэффициентов при $x_1, x_2, \ldots, x_m$, в нормальных уравнениях, а Δ_{hh} — его минор, соответствующий элементу $\sum p_i a_h^{(i)} a_h^{(i)}$; средняя квадратическая погрешность приближенного равенства $x_h^0 \approx \tilde{x}_h$ где x_h^0 обозначает действительное значение x_h, равна

$$\sigma_h \approx \sqrt{\frac{\sum p_i \lambda_i^2}{n-m}} \frac{\Delta_{hh}}{\Delta}$$

где

$$\lambda_i = y_i - \sum_{h=1}^{m} a_h^{(i)} \bar{x}_h.$$

Частным случаем разобранного сейчас вопроса является параболич. выравнивание эмпирич. связи между двумя величинами y и x, для которых наблюдения или измерения дали пары значений y_i, x_i $(i = 1, 2, \ldots, n$ с частотами n_i, то есть разыскание наилучшей, согласно Н. к. с.. приближенной зависимости между y и x вида $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$ $(m < n)$, в которой $a_1, a_2, \ldots, a_m$ играют роль неизвестных величин и находятся из нормальных уравнений:

$$S_0 a_0 + S_1 a_1 + \ldots + S_m a_m = T_0,$$

$$S_1 a_0 + S_2 a_1 + ... + S_{m+1} a_m = T_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_m a_0 + S_{m+1} a_1 + ... + S_{2m} a_m = T_m,$$

где

$$S_0 = \sum n_i\ ,\ \ S_1 = \sum n_i x_i\ ,$$

$$S_2 = \sum n_i x_i^2 \quad \text{и т. д.},$$

$$T_0 = \sum n_i y_i\ ,\ \ T_1 = \sum n_i y_i x_i\ ,$$

$$S_2 = \sum n_i y_i x_i^2 \quad \text{и т. д.}$$

Эти нормальные уравнения получаются, если мы будем искать значения $a_1, a_2, ..., a_m$ обращающие в минимум сумму

$$\sum_{i=1}^{n} n_i (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - ... - a_m x_i^m)^2\ .$$

В заключение заметим, что основателями Н. к. с. были Гаусс и Лежандр. Лежандр ввел Н. к. с. впервые в своей работе «Nouvelles methodes pour la determination des cometes» (1805—06). Этот способ был изобретен Гауссом, независимо от Лежандра, и опубликован им в знаменитом соч. «Theoria motus corporum coelestium» (1809). Гауссу принадлежит первое научное обоснование Н. к. с. при помощи нормального закона распределения ошибок, выведенного им из принципа средней арифметической. Далее Н. к. с. занимались очень многие исследователи, среди которых можно назвать Лапласа, Глишера, Энке, Бесселя, А. А. Маркова и др. Одно из наиболее строгих и изящных обоснований Н. к. с. принадлежит Маркову.

Лит.: М а р к о в Л. Л., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924, гл. VII; К р ы л о в Л. Н., Лекции о приближенных вычислениях, 3 изд., Л. - М.,1935; Ш и л о в Н.. И., Способ наименьших квадратов, 2 изд.,

М., 1936; Ч е б о т а р е в А. С, Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей, 2 изд., М., 1936; G a u s s C. F r., Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate, B., 1887; D e l t h e i l R., Erreurset moindres carrés, P., 1930.

В. И. РОМАНОВСКИЙ
(БСЭ-1, 1939, том 41).

Əhmədova Həqiqət Məmmədrza qızı

EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİ VƏ RİYAZİ STATİSTİKA MÜNTƏXƏBATI

Ali məktəblər üçün dərs vəsaiti

"XXXXXXX" nəşriyyatı

B a k ı – 2 0 0 9

Məsul redaktor: **G. A. NƏBİYEVA**
Kompyuter dizayneri və bədii redaktor: **H. Ə. CƏFƏROVA**
Texniki redaktor: **Ə. Q. RƏHİMOV**
Korrektor: **Ü. E. HƏSƏNOVA**
Kompyuter yığımı: **Ü. E. HƏSƏNOVA, G. F. ƏHMƏDOVA**

Yığılmağa verilmiş 03.03.2009. Çapa imzalanmış XX.04.2009.
Formatı 60x90 1/16. Ofset kağızı №1. Ofset çap üsulu.
Həcmi 31 ç.v. tiraj 200. Sifariş № .
Qiyməti müqavilə ilə.

Kitab yığılıb, səhifələnib və "Şərq – Qərb" mətbəəsində ofset üsulu ilə çap olunmuşdur.